Université Paris 6
Année universitaire 2011-2012.
Master 1 Enseignement, cours d'algèbre.
Interrogation de contrôle continu du 24 février 2012. Durée : une heure. Les documents et calculatrices sont interdits.

Exercice 1. Questions de cours. Soit k un corps et soient $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ deux espaces affines sur k d'espaces directeurs respectifs E et F.

1) Donnez la définition d'une application affine de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$.

2) Soit f une application affine de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$.

Si $\mathscr{E}'$ est un sous-espace affine de $\mathscr{E}$ d'espace directeur E', que peut-on dire de $f(\mathscr{E}')$?

Si $\mathscr{F}'$ est un sous-espace affine de $\mathscr{F}$ d'espace directeur F', que peut-on dire de $f^{-1}(\mathscr{F}')$?

Exercice 2. Soit $\mathscr{E}$ un espace affine sur k et soit $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ une application affine. Montrez que l'ensemble $\mathscr{F}$ des points fixes de f est ou bien vide, ou bien un sous-espace affine de $\mathscr{E}$ dirigé par Ker $(\vec{f} - \mathrm{Id})$. Si $\vec{f} - \mathrm{Id}$ est bijective, montrez que $\mathscr{F}$ est un singleton. *Indication : fixez un point O quelconque de $\mathscr{E}$ et cherchez à quelle condition (faisant intervenir O) un point M de $\mathscr{E}$ appartient à $\mathscr{F}$.*

Exercice 3. Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $\mathscr{E}$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ défini par les équations

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & - & y & + & z & + & t & = & 1 \\ x & + & y & - & z & + & t & = & 2a \\ x & - & 3y & + & 3z & + & t & = & 4-a \end{array}\right.$$

Dites pour quelle(s) valeur(s) de a l'ensemble $\mathscr{E}$ est non vide, et donnez-en alors un point et une base de l'espace directeur.

Exercice 4. Soit D la droite affine de $\mathbb{C}^3$ passant par $(1, i, -i)$ et d'espace directeur $\mathbb{C}.(1, i, 1)$. Donnez un système d'équations cartésiennes de D.

Exercice 5. Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de dimension 5 sur un corps k, d'espace directeur E, et soient $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ deux sous-espaces affines de $\mathscr{E}$, d'espaces directeurs respectifs F et G. Dans chacun des cas ci-dessous, répondez aux questions suivantes – on ne demande pas de justification détaillée à chaque fois, rappelez simplement au début les résultats du cours que vous allez utiliser.

- quelle est la dimension de $F + G$?

- l'intersection $\mathscr{F} \cap \mathscr{G}$ peut-elle être vide, et si oui, que vaut dim $\langle \mathscr{F} \cup \mathscr{G} \rangle$ lorsque $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} = \emptyset$?

- si $\mathscr{F} \cap \mathscr{G}$ est non vide, quelle est la dimension de $\mathscr{F} \cap \mathscr{G}$ et quelle est la dimension de $\langle \mathscr{F} \cup \mathscr{G} \rangle$?

Cas à traiter.

a) $\dim F = 3, \dim G = 1$, et $F \cap G = \{0\}$;
b) $\dim F = 3, \dim G = 2$ et $F \cap G = \{0\}$;
c) $\dim F = 3, \dim G = 2$ et $\dim (F \cap G) = 1$;
d) $\dim F = 2, \dim G = 2$ et $\dim (F \cap G) = 1$;
e) $\dim F = 3, \dim G = 4$ et $\dim (F \cap G) = 2$.