Sorbonne Université
Année universitaire 2017-2018, master 2 de mathématiques fondamentales.
Cours *Théorie de l'intersection* ; feuille de TD numéro 3.

On désigne toujours par k un corps commutatif.

Exercice 1. Soit X un k-schéma de type fini. Pour tout cycle $\alpha = \sum m_i[x_i]$ appartenant à $Z_0(X)$, on note $\deg(\alpha)$ l'entier $\sum m_i[R(x_i) : k]$.

(a) Montrez que si X est propre et si α est rationnellement équivalent à 0 alors $\deg(\alpha) = 0$.

(b) Montrez que si $X = \mathbf{P}^n_k$ et si x est un k-point de X alors α est rationnellement équivalent à $\deg(\alpha)[x]$.

(c) Même question que (b) lorsque X est l'éclaté de $\mathbf{P}^n_k$ à l'origine.

Exercice 2. Soit X un k-schéma de type fini.

(a) Soit $f\colon X' \to X$ un morphisme propre. Montrez que pour tout fibré vectoriel E sur X, toute classe $\alpha \in A_*(X')$ et tout entier i on a

$$f_*(s_i(f^*E) \cap \alpha) = s_i(E) \cap f_*(\alpha).$$

(b) Soit $f\colon X' \to X$ un morphisme plat, de type fini et de dimension relative constante. Montrez que pour tout fibré vectoriel E sur X, toute classe $\alpha \in A_*(X)$ et tout entier i on a

$$f^*(s_i(E) \cap \alpha) = s_i(f^*E) \cap f^*(\alpha).$$

(c) Soient E et F deux fibrés vectoriels sur X et soient i et j deux entiers. Montrez que pour toute classe $\alpha \in A_*(X)$ on a

$$s_i(E) \cap (s_j(F) \cap \alpha)) = s_j(F) \cap (s_i(E) \cap \alpha).$$

Exercice 3. *Auto-intersections dans l'éclaté du plan projectif à l'origine.* Soit $\pi\colon X \to \mathbf{P}^2$ l'éclatement de $\mathbf{P}^2$ à l'origine et soit E le diviseur exceptionnel. Soit d un entier $\geqslant 0$ et soit $f \in k[T_0, T_1, T_2]$ un polynôme homogène de degré d non nul. On le voit comme une section régulière de $\mathscr{O}(d)$; on note C le diviseur de Cartier effectif $\mathrm{div}(f)$. Si D et D' sont deux diviseurs de Cartier effectifs sur X, nous appellerons *degré* de $D \cdot [D']$ son degré lorsqu'on le voit comme élément de $A_0(X)$ (voir l'exercice 1).

(a) Supposons que C ne passe pas par l'origine ; posons $\widetilde{C} = \pi^*C$; c'est un diviseur de Cartier effectif sur X. Montrez que le degré de $\widetilde{C} \cdot [\widetilde{C}]$ est égal à d^2.

(b) Montrez que le degré de $E \cdot [E]$ est égal à -1.

(c) On suppose désormais que C passe par l'orgine. Montrez que π^*C s'écrit $nE + \widetilde{C}$ où n est un entier > 0 et où $\widetilde{C}$ est un diviseur de Cartier effectif qu'on appelle la *transformée stricte* de C.
Montrez que le degré de $(nE + \widetilde{C}) \cdot [E]$ est égal à 0. En déduire que le degré de $\widetilde{C} \cdot [\widetilde{C}]$ est égal à $d^2 - n^2$.

Exercice 4. Soit X la k-courbe affine irréductible Spec $k[S,T]/(S^2-T^2(T+1))$ et soit x son sous-schéma fermé défini par l'idéal (S,T) (qui consiste en un point et est réduit).

(a) Calculez C_xX.

(b) Calculez la multiplicité de X en x.

(c) On considère X comme immergée dans $\mathbf{A}^2$ *via* les fonctions S et T. Décrire sa transformée stricte relativement à l'éclatement de $\mathbf{A}^2$ en l'ortigine, et retrouvez le résultat de (b).

Exercice 5. Mêmes questions qu'à l'exercice précédent en prenant pour X la courbe Spec $k[S,T]/(S^2-T^3)$, et toujours pour x le point par l'idéal (S,T).

Exercice 6. *Classes de Chern du fibré tangent de* $\mathbf{P}^n_k$. Soit n un entier $\geqslant 0$; dans ce qui suit nous travaillerons sur l'espace $\mathbf{P}^n_k = \mathrm{Proj}(k[T_0,\dots,T_n])$. Soit φ le morphisme $\mathscr{O}(-1)^{n+1} \to \mathscr{O}_{\mathbf{P}^n_k}$ donné par la formule $(s_0,\dots,s_n) \mapsto \sum T_i s_i$.

(a) Montrez qu'il existe un morphisme u de $\Omega_{\mathbf{P}^n_k}$ vers $\mathscr{O}(-1)^{n+1}$ tel que pour toute fraction $F = \frac{P}{Q}$ avec P et Q homogènes de même degré (et $Q \neq 0$) on ait sur l'ouvert $D(Q)$ l'égalité

$$\mathrm{u}(\mathrm{d}F) = \left(\frac{\partial F}{\partial X_i}\right)_{0\leqslant i\leqslant n}.$$

(b) Montrez que la suite

$$0 \longrightarrow \Omega_{\mathbf{P}^n_k/k} \xrightarrow{\quad u \quad} \mathscr{O}(-1)^{n+1} \xrightarrow{\quad \varphi \quad} \mathscr{O}_{\mathbf{P}^n_k} \longrightarrow 0$$

est exacte.

(c) En déduire les classes de Chern du fibré vectoriel tangent $\mathrm{T}_{\mathbf{P}^n_k/k}$.

(d) Montrez que si $n \geqslant 2$ alors $\mathrm{T}_{\mathbf{P}^n_k/k}$ n'est pas scindé, au sens où il n'admet pas de filtration par des sous-fibrés à quotients successifs de rang 1.