Université Paris 6
Année universitaire 2011-2012
Cours *Groupes finis et leurs représentations*
Examen partiel, le 7 mars 2012. Durée : trois heures. Les documents et calculatrices sont interdits.

Exercice 1. Questions de cours.

1) Donnez les propriétés équivalentes qui définissent un sous-groupe distingué d'un groupe G.

2) Donnez la définition d'une opération à gauche d'un groupe G sur un ensemble X.

Exercice 2. Soit σ la permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 9 & 11 & 4 & 12 & 7 & 2 & 1 & 6 & 5 & 3 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

de l'ensemble $\{1, \dots, 12\}$. Calculez sa signature.

Exercice 3. Quel est le centre du groupe $\mathfrak{S}_2$? On se donne un entier $n \geqslant 3$, et l'on se propose de montrer que le centre de $\mathfrak{S}_n$ est trivial. Soit σ un élément du centre de $\mathfrak{S}_n$.

1) Soient a et b deux entiers distincts compris entre 1 et n. Montrez que σ stabilise la paire $\{a, b\}$.

2) En déduire que σ est l'identité.

Exercice 4. Soit n un entier, soit G un groupe abélien, et soit $\varphi : \mathfrak{S}_n \to G$ un morphisme. Montrez que l'on est dans l'un des deux cas suivants :

i) φ est trivial ;

ii) il existe un élément $g \in G$ d'ordre 2 tel que $\varphi(\sigma) = g$ pour toute permutation impaire σ, et $\varphi(\sigma) = e$ pour toute permutation paire σ. *Indication : considérer l'image d'une transposition.*

On rappelle que si G est un groupe on désigne par DG son sous-groupe dérivé, c'est-à-dire le sous-groupe de G engendré par les éléments $ghg^{-1}h^{-1}$ où g et h parcourent G. Utilisez ce qui précède pour calculer $D\mathfrak{S}_n$ lorsque $n \geqslant 2$.

Exercice 5. Si n est un entier et si G est un groupe, on note $\mathscr{P}(n, G)$ la propriété «tout sous-groupe d'indice n de G est distingué».

a) Démontrez que $\mathscr{P}(2, G)$ est vraie pour tout groupe G.

b) Démontrez que $\mathscr{P}(3, \mathfrak{S}_3)$ est fausse.

c) En déduire que si G est un groupe possédant un quotient isomorphe à $\mathfrak{S}_3$ alors $\mathscr{P}(3, G)$ est fausse.

d) Soit G un groupe ne possédant pas de quotient isomorphe à $\mathfrak{S}_3$. On se propose de démontrer que $\mathscr{P}(3, G)$ est vraie. Pour cela, on se donne un sous-groupe H d'indice 3 de G, et l'on considère l'action de G par translations sur le quotient G/H. Soit $\varphi : G \to \mathfrak{S}_{G/H}$ le morphisme correspondant. Montrez que son image est exactement le groupe $\mathfrak{A}_{G/H}$ des permutations paires de l'ensemble G/H, et conclure.

e) Montrez que $\mathscr{P}(4, \mathfrak{S}_4)$, $\mathscr{P}(4, \mathfrak{A}_4)$ et $\mathscr{P}(4, D_4)$ sont fausses (on rappelle que D_4 désigne le produit semi-direct $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rtimes_\varphi \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, où φ envoie $\bar{0}$ sur Id et $\bar{1}$ sur $-\mathrm{Id}$).

PROBLÈME : Étude des groupes de cardinal 12.

a) Démontrez qu'un groupe de cardinal 4 est isomorphe ou bien à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, ou bien à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. Ces deux derniers groupes sont-ils eux-mêmes isomorphes ?

b) Déterminez tous les morphismes de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ dans Aut $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$. En déduire qu'il y a exactement, à isomorphisme près, deux produits semi-directs de la forme $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes_\varphi \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

c) Déterminez tous les sous-groupes de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$, puis tous les morphismes de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ vers Aut $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$. En déduire qu'il y a exactement, à isomorphisme près, deux produits semi-directs de la forme $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes_\varphi (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.

Soit G un groupe de cardinal 12.

d) On suppose que G possède exactement un 3-sous-groupe de Sylow. Montrez que G est ou bien isomorphe à un produit direct de la forme $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes_\varphi \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, ou bien isomorphe à un produit semi-direct de la forme $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes_\varphi (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. Montrez que ces deux situations sont exclusives l'une de l'autre.

e) Réciproquement, vérifiez que si G est ou bien isomorphe à un produit direct de la forme $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes_\varphi \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, ou bien isomorphe à un produit semi-direct de la forme $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes_\varphi (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$, il n'a qu'un 3-sous-groupe de Sylow.

f) On suppose à partir de maintenant que l'ensemble $\mathscr{S}$ des 3-sous-groupes de Sylow de G n'est pas un singleton. Quel est alors son cardinal ?

g) On fait opérer G sur $\mathscr{S}$ par conjugaison ($g.P = gPg^{-1}$ pour tout $g \in G$ et tout $P \in \mathscr{S}$). Si $P \in \mathscr{S}$, montrez que P est son propre stabilisateur. En déduire que l'action de G sur $\mathscr{S}$ est fidèle.

h) En conclure que G est isomorphe à $\mathfrak{A}_4$.

i) Réciproquement, vérifiez que l'ensemble des 3-sous-groupes de Sylow de $\mathfrak{A}_4$ n'est pas un singleton.