Université Paris 6
Année universitaire 2009-2010
Cours de *Géométrie affine et euclidienne* (LM 323)
Examen terminal, session de rattrapage, le 21 juin 2010 ; durée : 2 heures.
Les documents et calculatrices sont interdits.

Exercice 1. Démonstration de cours. Soit k un corps et soit $\mathcal{E}$ un espace affine sur k ; soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de $\mathcal{E}$, soit M un point de $\mathcal{F}$ et soit N un point de $\mathcal{G}$. Soient F et G les espaces directeurs respectifs de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$. Montrez que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$ si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{MN}$ appartient à $F + G$.

Exercice 2. On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure affine euclidienne orientée usuelle. Soient f et g les applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ données respectivement par les formules

$$(x, y) \mapsto (-y + 1, x - 2)$$

et

$$(x, y) \mapsto (-y + 1, -x - 2)\ .$$

Décrire géométriquement le plus précisément possible les applications f et g, en donnant à chaque fois la liste de données qui permet de les caractériser (le vecteur pour une translation, le centre et l'angle pour une rotation, etc.).

Exercice 3. Soient a et b deux nombres réels et soit $\mathcal{E}$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ donné par les équations

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & + & t & = & 1 \\ x & - & y & + & z & - & 2t & = & b \\ x & + & 3y & + & z & + & 4t & = & a \end{array}\right.$$

À quelle condition sur le couple (a, b) l'ensemble $\mathcal{E}$ est-il non vide ? Lorsque c'est le cas, on sait par le cours que c'est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^4$; donnez-en alors, en fonction de a et b, un point et une base de l'espace directeur.

Exercice 4. On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure affine euclidienne usuelle. Soit $\mathcal{P}$ le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x - 2y + 3z = 1$.

i) Donnez une équation de l'espace vectoriel directeur P de $\mathcal{P}$.

ii) Donnez un vecteur u de $\mathbb{R}^3$ non nul et orthogonal à P.

iii) Soit p la projection orthogonale sur $\mathcal{P}$ et soit s la réflexion par rapport à $\mathcal{P}$. Si $M = (x, y, z)$ est un élément de $\mathbb{R}^3$, calculez $p(M)$ puis $s(M)$.

Exercice 5. Soit $\mathcal{E}$ un plan affine euclidien et soit (ABC) un repère affine de $\mathcal{E}$. Soient A', B' et C' les points de coordonnées barycentriques respectives

$$(0, -1/3, 4/3)\ ;\ (-1, 0, 2)\ ; (2/3, 1/3, 0).$$

i) Montrez que les droites $(AA'), (BB')$ et (CC') sont concourantes et déterminez les coordonnées barycentriques de leur point de concours H dans (ABC).

ii) Parmi les trois triangles $(HAB), (HBC)$ et (HAC), lequel a la plus grande aire ?