Université Pierre-et-Marie Curie
Master de mathématiques fondamentales, cours *Les outils de la géométrie algébrique*, corrigé de l'examen de rattrapage du 2 juin 2014.
Enseignant : Antoine Ducros
Durée : 3 heures. *Seuls les documents issus du cours (notes personnelles prises en cours, documents disponibles en ligne sur la page d'A. Ducros) sont autorisés. Les calculatrices sont interdites.*

Exercice 1.

a) Si $\mathscr{G}$ est un faisceau d'ensembles sur U, on note $\varphi(\mathscr{G})$ le faisceau sur X associé au préfaisceau

$$\varphi_0(\mathscr{G}) := V \mapsto \begin{cases} \mathscr{G}(V) & \text{si } V \subset U \\ \varnothing & \text{sinon} \end{cases},$$

les restrictions étant définies de façon évidentes. On vérifie aussitôt que φ est de manière naturelle un foncteur de Ens_U vers Ens_X ; nous allons montrer qu'il est adjoint à gauche à la restriction $\mathscr{F} \mapsto \mathscr{F}|_U$. Remarquons que $\varphi_0(\mathscr{G})|_U = \mathscr{G}$; comme la faisceautisation commute aux restrictions, $\varphi(\mathscr{G})|_U = \mathscr{G}$.

Soit $\mathscr{F}$ un faisceau d'ensembles sur X, et soit $\mathscr{G}$ un faisceau d'ensembles sur U. Soit λ un morphisme de $\mathscr{G}$ dans $\mathscr{F}|_U$. La donnée pour tout ouvert V de X de la flèche

$$\begin{cases} \lambda(V) \colon \mathscr{G}(V) \to \mathscr{F}(V) & \text{si } V \subset U \\ \varnothing \hookrightarrow \mathscr{F}(V) & \text{sinon} \end{cases}$$

définit un morphisme de préfaisceaux de $\varphi_0(\mathscr{G})$ dans $\mathscr{F}$; par la propriété universelle du faisceautisé, celui-ci induit un morphisme de faisceaux $e(\lambda)$ de $\varphi(\mathscr{G})$ vers $\mathscr{F}$.

Soit μ un morphisme de $\varphi(\mathscr{G})$ dans $\mathscr{F}$. Il induit pour tout $V \subset U$ une flèche de $\varphi(\mathscr{G})(V) = \mathscr{G}(V)$ vers $\mathscr{F}(V)$, et partant un morphisme $f(\mu)$ de $\mathscr{G}$ vers $\mathscr{F}|_U$.

Il est immédiat que

$$e \colon \mathsf{Hom}_{\mathsf{Ens}_U}(\mathscr{G}, \mathscr{F}|_U) \to \mathsf{Hom}_{\mathsf{Ens}_X}(\varphi(\mathscr{G}), \mathscr{F})$$

et

$$f \colon \mathsf{Hom}_{\mathsf{Ens}_X}(\varphi(\mathscr{G}), \mathscr{F}) \to \mathsf{Hom}_{\mathsf{Ens}_U}(\mathscr{G}, \mathscr{F}|_U)$$

sont deux bijections réciproques l'une de l'autre, fonctorielles en $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$. En conséquence, φ est bien adjoint à gauche à la restriction, comme annoncé.

b) Le procédé est essentiellement le même que ci-dessus, à un détail important près : il faut, dans la construction précédente, remplacer l'ensemble $\varnothing$ par le groupe abélien trivial $\{0\}$. Le reste se décalque *mutatis mutandis.*

Exercice 2.

a) Supposons que i) soit vérifiée et soit $(M_n)_{n\geqslant 0}$ une suite croissante de sous-modules de M. Soit N leur réunion. C'est un sous-module de M. Par hypothèse il est de type fini ; soit $(f_1, \ldots, f_r)$ une partie génératrice de N. Par définition de N, chacun des f_j vit dans un certain M_i. Il existe donc i_0 tel que les f_j

appartiennent tous à M_{i_0} ; si $i \geqslant i_0$ les f_j appartiennent tous à M_i, d'où la double inclusion $N \subset M_i \subset N$; ainsi, $M_i = N$ dès que $i \geqslant i_0$, d'où ii).

Supposons que ii) soit vérifiée, et soit $\mathscr{E}$ un ensemble non vide de sous-modules de M. Choisissons $M_0 \in \mathscr{E}$ (c'est possible puisque $\mathscr{E}$ est non vide). S'il est maximal on a gagné ; sinon il existe $M_1 \in \mathscr{E}$ contenant strictement M_0. Si M_1 est maximal, on a gagné, sinon il existe $M_2 \in \mathscr{E}$ contenant strictement M_1, etc. Le procédé s'arrête nécessairement au bout d'un temps fini, car sinon on obtiendrait une suite strictement croissante de sous-modules de M, contredisant ainsi ii). En conséquence $\mathscr{E}$ possède un élément maximal.

Supposons que iii) soit vérifiée et soit N un sous-module de M. Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des sous-modules de N qui sont de type fini. Il est non vide (il contient $\{0\}$) et possède dès lors un élément maximal N_0. Soit $n \in N$. Le sous-module $N_0 + An$ de N est de type fini et contient N_0 ; par maximalité de ce dernier il est donc égal à N_0, ce qui implique que $n \in N_0$. Ainsi $N = N_0$ et N est de type fini.

b) Supposons que M soit noethérien et soit L un sous-module de M'. Il s'identifie *via* l'injection $M' \hookrightarrow M$ à un sous-module de M, et est donc de type fini ; en conséquence M' est noethérien.

Soit Λ un sous-module de M'' et soit Λ_0 son image réciproque dans M. C'est un sous-module de M, et il est donc de type fini. Comme M se surjecte sur M'', le module Λ_0 se surjecte sur Λ, et celui-ci est donc de type fini ; ainsi, M'' est noethérien.

Réciproquement, supposons que M' et M'' soient noethériens, et soit L un sous-module de M. Identifions M' à un sous-module de M et posons $L' = L \cap M'$; comme M' est noethérien, le module L' est de type fini. Soit $(f_1, \ldots, f_r)$ une famille génératrice de L'.

Soit L'' l'image de L dans M'' ; c'est un sous-module de M'', qui est donc de type fini puisque ce dernier est noethérien. Soit $(g_1, \ldots, g_s)$ une famille d'éléments de L s'envoyant sur une famille génératrice de L''.

Soit $\ell \in L$. Son image dans M'' appartient à L'', et est donc combinaison linéaire des images des g_i. Il existe en conséquence une famille (a_i) de scalaires telle que la somme $\ell - \sum a_i g_i$ s'envoie sur 0 dans M'', ce qui signifie qu'elle appartient à M'. Comme elle appartient aussi à L, elle appartient à L' et s'écrit donc $\sum b_j f_j$ pour une certaine famille (b_j) de scalaires. Il vient

$$\ell = \sum b_j f_j + \sum a_i g_i,$$

et il s'ensuit que la famille finie constituée des f_j et des g_i est génératrice. Ainsi, M est noethérien.

c) Si M et N sont deux A-modules noethériens, on déduit de la question b) appliquée à la suite exacte

$$0 \to M \to M \oplus N \to N \to 0$$

que $M \oplus N$ est noethérien.

d) Supposons A noethérien. On déduit de c) et d'une récurrence immédiate sur n que A^n est noethérien pour tout n. Il découle alors de b) que pour tout entier n, tout quotient de A^n est encore noethérien ; ainsi, tout A-module de type fini est noethérien.

Soit S une partie multiplicative de A et soit I un idéal de $S^{-1}A$. Soit J l'ensemble des éléments $a \in A$ tels que $\frac{a}{1} \in I$; c'est un idéal de A, qui est donc de type fini puisque A est noethérien. Soit $(a_1, \ldots, a_r)$ une famille génératrice de J. Soit $b \in I$. Écrivons $b = \frac{a}{s}$ avec $a \in A$ et $s \in S$. On a $\frac{a}{1} = sb \in I$; en conséquence, $a \in J$. Il existe donc une famille (λ_i) d'éléments de A tels que $a = \sum \lambda_i a_i$. Il vient

$$b = \frac{a}{s} = \frac{\sum \lambda_i a_i}{s} = \sum \frac{\lambda_i}{s} \cdot \frac{a_i}{1}.$$

Ainsi, I est engendré par la famille finie $(\frac{a_i}{1})$, et $S^{-1}A$ est noethérien.

Exercice 3.

a) Le seul élément de $\{0\}$ est 0, dont l'annulateur est A tout entier, lequel n'est pas un idéal premier. En conséquence $\mathsf{Ass}\,\{0\} = \varnothing$.

b) Si $\mathfrak{p}$ est associé à M il existe $m \in M$ tel que l'annulateur de m soit égal à $\mathfrak{p}$. L'application A-linéaire $a \mapsto am$ de A dans M ayant précisément pour noyau l'annulateur de m, elle induit un isomorphisme entre $A/\mathfrak{p}$ et son image ; ainsi, $A/\mathfrak{p}$ s'injecte dans M.

Inversement, supposons que $A/\mathfrak{p}$ s'injecte dans M et soit m l'image de $\bar{1}$. L'annulateur de $\bar{1}$ dans le A-module $A/\mathfrak{p}$ est l'ensemble des $a \in A$ tels que $a \cdot \bar{1} = \bar{a} = 0$, c'est donc précisément $\mathfrak{p}$. En conséquence, l'annulateur de m est égal à $\mathfrak{p}$, et $\mathfrak{p}$ est associé à M.

Soit N un sous-module non nul de $A/\mathfrak{p}$ et soit $n \in N$. Si $n = 0$ son annulateur est A tout entier qui n'est pas premier. Si $n \neq 0$ (et il existe par hypothèse au moins un tel n) alors n est de la forme $\bar{a}$ avec $a \notin \mathfrak{p}$. Si $b \in A$ alors

$$bn = 0 \iff b\bar{a} = 0 \iff \overline{ba} = 0 \iff \underbrace{\bar{b}\bar{a} = 0 \iff \bar{b} = 0}_{\text{car } \bar{a} \neq 0 \text{ et } A/\mathfrak{p} \text{ intègre}} \iff b \in \mathfrak{p}.$$

Ainsi l'annulateur de n est égal à $\mathfrak{p}$; en conséquence, $\mathsf{Ass}\,N = \mathfrak{p}$.

c) L'injection $M' \hookrightarrow M$ permet d'identifier M' à un sous-module de M. Si $m \in M'$ son annulateur ne dépend pas du fait que l'on considère m comme appartenant à M' ou à M ; il en résulte aussitôt que $\mathsf{Ass}\,M' \subset \mathsf{Ass}\,M$.

Soit $\mathfrak{p} \in \mathsf{Ass}\,M$. Il résulte de b) qu'il existe un sous-module L de M isomorphe à $A/\mathfrak{p}$. On distingue maintenant deux cas.

Premier cas. Supposons que $L \cap M' \neq \{0\}$. Dans ce cas $L \cap M'$ s'identifie à un sous-module non nul de $A/\mathfrak{p}$, et en vertu de b) on a $\mathsf{Ass}\,(L \cap M') = \{\mathfrak{p}\}$. Comme $L \cap M'$ est un sous-module de M' on déduit de ce qui a été établi au début de c) que $\mathsf{Ass}(L \cap M') \subset \mathsf{Ass}\,M'$; ainsi, $\mathfrak{p} \in \mathsf{Ass}\,M'$.

Second cas. Supposons que $L \cap M' = \{0\}$. Dans ce cas, L s'injecte dans M''. Comme $L \simeq A/\mathfrak{p}$, il résulte de b) que $\mathfrak{p} \in \mathsf{Ass}\,M''$.

Exercice 4.

a) Soit m un élément non nul de M dont I est l'annulateur. Comme $m \neq 0$, l'idéal I ne contient pas 1. Il reste à s'assurer que si a et b sont deux éléments de A tels que $ab \in I$ alors $a \in I$ ou $b \in I$.

Soient donc a et b comme ci-dessus. Si $bm = 0$ alors $b \in I$ et la preuve est terminée. Supposons $bm \neq 0$. On a pour tout $i \in I$ les égalités $ibm = bim = 0$, et I est donc contenu dans l'annulateur de l'élément non nul bm de M. Par maximalité de I, cet annulateur est exactement égal à I ; or il contient a puisque $abm = 0$ (car $ab \in I$). Il vient $a \in I$, ce qu'il fallait démontrer.

b) Comme M est non nul, l'ensemble des annulateurs d'éléments non nuls de M est un ensemble non vide d'idéaux de A. Par noethérianité, il possède un élément maximal, lequel est en vertu de a) un idéal premier de A. Ainsi, $\mathsf{Ass}\, M$ est non vide.

c) Si M est nul il n'y a rien à prouver. Sinon il existe d'après le b) un élément $\mathfrak{p}_1 \in \mathsf{Ass}\ M$. On déduit de l'exercice 3, question b) qu'il existe un sous-module M_1 de M isomorphe à $A/\mathfrak{p}_1$. Si $M = M_1$ c'est terminé ; sinon, le même raisonnement que précédemment montre qu'il existe un sous-module de M/M_1, que l'on peut toujours écrire sous la forme M_2/M_1 pour un certain sous-module M_2 de M contenant M_1, qui est isomorphe à $A/\mathfrak{p}_2$ pour un certain idéal premier $\mathfrak{p}_2$ de A. Si $M_2 = M$ c'est terminé, sinon on recommence... la noethérianité de A entraîne celle de M (exercice 2, question d), qui interdit l'existence d'une suite strictement croissante de sous-modules de M. Le processus s'arrête donc au bout d'un temps fini, ce qui achève de montrer l'existence des M_i.

On a une suite exacte

$$0 \to M_{n-1} \to M \to M/M_{n-1} \to 0.$$

Comme $M/M_{n-1} \simeq A/\mathfrak{p}_n$, on a $\mathsf{Ass}\ M/M_{n-1} = \{\mathfrak{p}_n\}$ d'après la question b) de l'exercice 3. Par récurrence sur n et à 'aide de la question c) du même exercice, on en déduit que $\mathsf{Ass}\ M$ est contenu dans l'ensemble des $\mathfrak{p}_i$.

Exercice 5. Soit A un anneau, soit M un A-module de type fini, et soit I l'idéal annulateur de M.

a) Soit $(f_1, \ldots, f_r)$ une partie génératrice de M. Supposons que $\mathfrak{p} \supset I$. Si $M_\mathfrak{p}$ était nul, on aurait $\frac{f_i}{1} = 0$ pour tout i, et il existerait donc pour tout i un élément a_i de $A \setminus \mathfrak{p}$ tel que $a_i f_i = 0$. Le produit des a_i appartiendrait alors à I mais pas à $\mathfrak{p}$, contredisant notre hypothèse. Ainsi, $M_\mathfrak{p}$ est non nul.

Réciproquement, supposons que $M_\mathfrak{p}$ soit non nul et soit $i \in I$. Si $i \notin \mathfrak{p}$ l'égalité $im = 0$ pour tout $m \in M$ entraîne immédiatement que $M_\mathfrak{p} = 0$, ce qui est absurde ; en conséquence, $I \subset \mathfrak{p}$.

b) Comme $\mathfrak{p} \in \mathsf{Ass}\ M$, l'idéal $\mathfrak{p}$ est égal à l'annulateur d'un élément m de M, qui contient évidemment l'idéal annulateur I de M

c) Comme $\mathfrak{p}$ contient I, le $A_\mathfrak{p}$-module $M_\mathfrak{p}$ est non nul d'après a). Il est de type fini puisque M est de type fini, et $A_\mathfrak{p}$ est noethérien d'après l'exercice 2, question d). On déduit alors de l'exercice 4, question b) que l'ensemble des idéaux premiers de $A_\mathfrak{p}$ associés au $A_\mathfrak{p}$-module $M_\mathfrak{p}$ est non vide.

Soit donc $\mathfrak{q}$ un tel idéal ; c'est l'annulateur d'un élément $\frac{m}{s}$ de $M_\mathfrak{p}$ avec $s \in A \setminus \mathfrak{p}$. L'idéal $\mathfrak{q}'$ tel que défini dans l'énoncé est de type fini (puisque a est noethérien). Soit $(a_1, \ldots, a_r)$ une famille génératrice de $\mathfrak{q}'$.

Pour tout i, l'élément $\frac{a_i}{1}$ de $A_\mathfrak{p}$ annule $\frac{m}{s}$; en conséquence, il existe $s_i \in A \setminus \mathfrak{p}$ tel que $a_i s_i m = 0$. Soit t le produit des s_i ; nous allons montrer que $\mathfrak{q}'$ est l'annulateur de tm, ce qui prouvera que $\mathfrak{q}' \in \mathsf{Ass}\, M$.

L'idéal $\mathfrak{q}'$ est contenu dans l'annulateur de tm. En effet on a par construction $a_i tm = 0$ pour tout i ; comme les a_i engendrent $\mathfrak{q}'$, on en déduit que ce dernier est contenu dans l'annulateur de tm.

L'idéal annulateur de tm est contenu dans $\mathfrak{q}'$. Soit $a \in A$ tel que $atm = 0$. Comme $t \notin \mathfrak{p}$, ceci entraîne que $\frac{a}{1} \cdot \frac{m}{s} = 0$; autrement dit, $\frac{a}{1} \in \mathfrak{q}$ et $a \in \mathfrak{q}'$.

L'idéal premier $\mathfrak{q}'$ appartenant à $\mathsf{Ass}\, M$, il contient I d'après b) ; il est par ailleurs contenu dans $\mathfrak{p}$, lequel est minimal parmi les idéaux premiers contenant I (puisqu'il appartient à E par hypothèse). En conséquence $\mathfrak{q}' = \mathfrak{p}$, et $\mathfrak{p} \in \mathsf{Ass}\, M$.

Conclusion. On a ainsi montré que tout idéal premier appartenant à E appartient à $\mathsf{Ass}\, M$. Tout idéal appartenant à $\mathsf{Ass}\, M$ contient I (question b). Comme les idéaux premiers appartenant à E sont précisément les idéaux premiers contenant I qui sont minimaux pour l'inclusion, et comme tout idéal premier contenant I contient un élément de E, on en déduit que les éléments de E sont exactement les éléments de $\mathsf{Ass}\, M$ minimaux pour l'inclusion.