Université Pierre-et-Marie Curie
Master de mathématiques fondamentales, cours *Les outils de la géométrie algébrique*, examen de rattrapage du 2 juin 2014.
Enseignant : Antoine Ducros
Durée : 3 heures. *Seuls les documents issus du cours (notes personnelles prises en cours, documents disponibles en ligne sur la page d'A. Ducros) sont autorisés. Les calculatrices sont interdites.*

Dans tout le sujet, ≪anneau≫ signifiera ≪anneau commutatif unitaire≫.

Exercice 1. Si X est un espace topologique, on note Ens_X (resp. Ab_X) la catégorie des faisceaux d'ensembles (resp. de groupes abéliens) sur X.

a) Soit X un espace topologique et soit U un ouvert de X. Montrez que le foncteur $\mathscr{F} \mapsto \mathscr{F}|_U$ de Ens_X vers Ens_U admet un adjoint à gauche que l'on décrira explicitement.

b) Même question en remplaçant Ens_X et Ens_U par Ab_X et Ab_U.

Exercice 2. *Modules noethériens.* Soit M un module sur un anneau A.

a) Montrez que les conditions suivantes sont équivalentes :

i) tout sous-module de M est de type fini ;
ii) toute suite croissante de sous-modules de M est stationnaire ;
iii) tout ensemble non vide de sous-modules de M admet un élément maximal.

Lorsqu'elles sont satisfaites, on dit que M est *noethérien.* On dit que A est noethérien s'il est noethérien comme A-module.

b) Soit $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ une suite exacte de A-modules. Montrez que M est noethérien si et seulement si M' et M'' sont noethériens.

c) Montrez que la somme directe de deux A-modules noethériens est noethérienne.

d) Supposons que l'anneau A est noethérien. Montrez que tout A-module de type fini est noethérien. Montrez que si S est une partie multiplicative de A l'anneau $S^{-1}A$ est noethérien.

Exercice 3. *Idéaux premiers associés.* Soit A un anneau et soit M un A-module. Un idéal premier $\mathfrak{p}$ de A est dit *associé* à M s'il est égal à l'idéal annulateur d'un élément de M. On note $\mathsf{Ass}\, M$ l'ensemble des idéaux premiers associés à M.

a) Déterminez $\mathsf{Ass}\,\{0\}$.

b) Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A. Montrez que $\mathfrak{p}$ est associé à M si et seulement si il existe une injection A-linéaire $A/\mathfrak{p} \hookrightarrow M$; montrez que $\mathsf{Ass}\, N = \{\mathfrak{p}\}$ pour tout sous-module non nul N de $A/\mathfrak{p}$.

c) Soit $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ une suite exacte de A-modules. Montrez que

$$\mathsf{Ass}\, M' \subset \mathsf{Ass}\, M \subset \mathsf{Ass}\, M' \cup \mathsf{Ass}\, M''.$$

Exercice 4. *Idéaux premiers associés : le cas noethérien.* Soit A un anneau et soit M un A-module.

a) Soit I un idéal de A satisfaisant aux deux conditions suivantes :

i) il existe un élément non de M dont I est l'idéal annulateur ;
ii) l'idéal I est maximal parmi les idéaux de A satisfaisant i).

Montrez que I est premier.

b) *On suppose à partir de maintenant et jusqu'à la fin de l'exercice que A est noethérien.* Montrez en utilisant a) que si M est non nul, $\mathsf{Ass}\ M$ est non vide.

c) Supposons que M est de type fini. Montrez qu'il existe une suite finie

$$\{0\} = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \ldots \subsetneq M_n = M$$

de sous-modules de M et, pour tout i compris entre 1 et n, un idéal premier $\mathfrak{p}_i$ de A tel $M_i/M_{i-1} \simeq A/\mathfrak{p}_i$. Montrez qu'on a alors $\mathsf{Ass}\ M \subset \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$ (en particulier, $\mathsf{Ass}\ M$ est fini).

Exercice 5. Soit A un anneau, soit M un A-module de type fini, et soit I l'idéal annulateur de M.

a) Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A. Montrez que

$$\mathfrak{p} \supset I \iff M_\mathfrak{p} \neq \{0\}.$$

À partir de maintenant et jusqu'à la fin de l'exercice, on suppose A noethérien. On rappelle le fait suivant (*cf.* l'examen de première session, ex. 4) : il existe un ensemble fini E d'idéaux premiers de A contenant I, deux à deux non comparables pour l'inclusion, et tels que tout idéal premier contenant I contienne un idéal appartenant à E ; les éléments de E sont lors exactement les idéaux premiers de A contenant I et minimaux pour cette propriété.

Le but de ce qui suit est de démontrer que les éléments de E sont exactement les éléments de $\mathsf{Ass}\ M$ *minimaux pour l'inclusion.*

b) Soit $\mathfrak{p} \in \mathsf{Ass}\ M$. Montrez que $\mathfrak{p} \supset I$.

c) Soit $\mathfrak{p} \in E$. Justifiez brièvement le fait que l'ensemble des idéaux premiers de $A_\mathfrak{p}$ associés au $A_\mathfrak{p}$-module $M_\mathfrak{p}$ est non vide. Soit $\mathfrak{q}$ un tel idéal et soit

$$\mathfrak{q}' := \left\{a \in A, \frac{a}{1} \in \mathfrak{q}\right\}$$

l'idéal premier de A contenu dans $\mathfrak{p}$ qui correspond à $\mathfrak{q}$. Montrez que $\mathfrak{q}' \in \mathsf{Ass} M$; en déduire que $\mathfrak{q}' = \mathfrak{p}$, et conclure.