Université Paris 6
Année universitaire 2011-2012
Cours de *Géométrie affine et euclidienne* (LM 323)
Examen de rattrapage, le mardi 19 juin 2012. Durée : 2 heures. Les documents et calculatrices sont interdits.
Barème indicatif : 3 points pour l'exercice 1 ; 4 points pour l'exercice 2 ; 4 points pour l'exercice 3 ; 5 points pour l'exercice 4 ; 4 points pour l'exercice 5.

Dans ce sujet, les *éléments remarquables* d'une isométrie seront, selon la nature de l'isométrie, à choisir dans la liste suivante : centre, axe, droite, plan, angle, vecteur de glissement.

Exercice 1. Questions de cours.

a) Soit k un corps et soit E un k-espace vectoriel. Donnez la définition d'un espace affine sur k d'espace directeur E.

b) Donner la classification des isométries affines d'un plan affine euclidien.

Exercice 2. Soit $f : (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^3 \to (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^2$ l'application affine donnée par la formule

$$(x, y, z) \mapsto (x - 2y + 3z, 3x + y + 2z + 1).$$

a) Donnez un système d'équations cartésiennes de l'image de f.

b) Si $P = (\alpha, \beta)$ est un point de l'image de f, donnez un point et une base de l'espace directeur de $f^{-1}(P)$ (la réponse est bien entendu à exprimer en fonction de α et β).

c) On fixe un nombre premier $p \neq 7$ et on considère l'application affine g de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^3$ vers $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$ donnée par la même formule que f. Montrez que g est surjective.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application affine donnée par la formule

$$(x, y) \mapsto (x - 2y + 1, 2x + 3y - 2).$$

Soit $\mathscr{R}$ le repère affine de $\mathbb{R}^2$ d'origine $(1; -2)$ et de base $((1, 1); (-2, 1))$. Exprimez f par une formule en coordonnées dans $\mathscr{R}$.

Exercice 4. On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure affine euclidienne usuelle. Soient a et b deux nombres réels et soit $f_{a,b}$ l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ donnée par la formule

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{1}{2}x + ay + 1, \frac{\sqrt{3}}{2}x + by - 1\right).$$

1) Trouvez a et b pour que $f_{a,b}$ soit une isométrie directe. Donnez alors sa nature et ses éléments remarquables.

2) Trouvez a et b pour que $f_{a,b}$ soit une isométrie indirecte. Donnez alors sa nature et ses éléments remarquables.

Exercice 5. Soient $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ deux plans parallèles d'un espace affine euclidien $\mathscr{E}$ de dimension 3 ; soit P leur direction commune.

1) Montrez qu'il existe un unique $u \in P^{\perp}$ tel que $\mathscr{P}' = \mathscr{P} + u$ (où $\mathscr{P} + u$ désigne l'ensemble $\{x + u\}_{x \in \mathscr{P}}$).

2) Soient $s_{\mathscr{P}}$ et $s_{\mathscr{P}'}$ les réflexions par rapport à $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$; donner la nature et les éléments remarquables de la composée $s'_{\mathscr{P}} \circ s_{\mathscr{P}}$.