Université Paris 6
Année universitaire 2011-2012
Cours *Groupes finis et leurs représentations*
Examen de rattrapage, le 4 juin 2012. Durée : trois heures. Les documents et calculatrices sont interdits.

Exercice 1. Questions de cours. Soit k un corps et soit G un groupe. Quand dit-on qu'une représentation V de G est *irréductible*?

Exercice 2. *Démonstration vue en cours.* Soit k un corps de caractéristique $p > 0$, soit G un p-groupe (c'est-à-dire un groupe fini de cardinal p^n pour un certain n) et soit V une représentation k-linéaire non nulle de G.

1) Démontrez qu'il existe un sous-$\mathbb{F}_p$-espace vectoriel V_0 de V qui est non nul, de dimension finie, et stable sous G.

2) Montrez qu'il existe un vecteur v non nul de V_0 tel que $g(v) = v$ pour tout $g \in G$.

Exercice 3. On note D_5 le groupe diédral $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) \rtimes_\varphi \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, où φ envoie 0 sur $\mathrm{Id}_{\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}}$ et 1 sur $-\mathrm{Id}_{\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}}$; on note multiplicativement la loi de groupe sur D_5.

1) Soient (a, b) et (a', b') deux éléments de D_5. Calculez $(a, b) \cdot (a', b')$; calculez $(a, b)^{-1}$; calculez $(a, b) \cdot (a', b') \cdot (a, b)^{-1}$.

2) Montrez qu'il y a exactement quatre classes de conjugaison dans D_5 ; on donnera la liste explicite des éléments de chacune d'elles.

3) Combien D_5 possède-t-il de (classes d'isomorphie de) représentations linéaires irréductibles complexes ?

4) Montrez que $(a, b) \mapsto (-1)^b$ définit un morphisme de groupes de D_5 vers $\mathbb{C}^*$ (on vérifiera déjà que cette application est bien définie, c'est-à-dire que la formule donnée ne dépend bien que de la classe de a modulo 5 et de la classe de b modulo 2) ; on note S la représentation complexe de dimension 1 de D_5 correspondant à ce morphisme.

5) Montrez que

$$(a, b) \mapsto \begin{pmatrix} \cos(2a\pi/5) & -\sin(2a\pi/5) \\ \sin(2a\pi/5) & \cos(2a\pi/5) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^b \end{pmatrix}$$

définit un morphisme de groupes de D_5 vers $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ (on vérifiera déjà que cette application est bien définie, c'est-à-dire que la formule donnée ne dépend bien que de la classe de a modulo 5 et de la classe de b modulo 2) ; on note V la représentation complexe de dimension 2 de D_5 correspondant à ce morphisme. Calculez le caractère de V ; en déduire que V est irréductible.

6) Montrez que la représentation $V \otimes_{\mathbb{C}} S$ est isomorphe à V.

7) Montrez qu'il existe une représentation W de D_5 de dimension 2, irréductible, et non isomorphe à V ; donner le caractère de W.

8) Décomposer $V \otimes_{\mathbb{C}} W$ en somme directe de représentations irréductibles.

Exercice 4. Étude de certaines représentations de $\mathfrak{S}_5$. On note $\mathbf{1}$ la représentation $\mathbb{C}$-linéaire triviale de dimension 1 de $\mathfrak{S}_5$, et Σ sa représentation signature (elle est de dimension 1, donnée par le morphisme $\sigma \mapsto \varepsilon(\sigma) \in \mathbb{C}^*$).

a) Donnez la liste des classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_5$ ainsi que leurs cardinaux.

b) Montrez qu'un sous-groupe de $\mathfrak{S}_5$ est un 5-sous-groupe de Sylow si et seulement si il est engendré par un 5-cycle.

c) Montrez que dans tout sous-groupe de Sylow de $\mathfrak{S}_5$ il existe un et un seul 5-cycle de la forme $(12abc)$. En déduire le cardinal de l'ensemble $\mathscr{S}$ des 5-sous-groupes de Sylow de $\mathfrak{S}_5$.

d) On fait opérer $\mathfrak{S}_5$ sur $\mathscr{S}$ par conjugaison. Quelle est le cardinal du stabilisateur d'un élément de $\mathscr{S}$? En déduire que si σ est un 3-cycle ou un produit d'un 3-cycle et d'une transposition, il ne fixe aucun élément de $\mathscr{S}$.

e) Soit σ un 5-cycle et soit $S \in \mathscr{S}$. Supposons que σ fixe S. Montrez que le morphisme $h \mapsto (g \mapsto hgh^{-1})$ de $\langle\sigma\rangle$ vers Aut S est trivial ; en déduire que $S = \langle\sigma\rangle$.

f) Dans ce qui suit, on va demander plusieurs reprises d'étudier le nombre de points fixes dans $\mathscr{S}$, pour l'action par conjugaison, d'un certain élément σ. La démarche à adopter sera la suivante : conjuguer un 5-cycle $(12abc)$ par σ ; si σ' désigne le 5-cycle obtenu, écrire l'unique 5-cycle de $\langle\sigma'\rangle$ de la forme $(12\alpha\beta\gamma)$ et le comparer à $(12abc)$, la réponse pouvant dépendre de a, b, et c.

f1) Montrez que (12) n'a pas de points fixes dans $\mathscr{S}$.

f2) Montrez que $(12)(34)$ a deux points fixes dans $\mathscr{S}$.

f3) Montrez que (1324) a deux points fixes dans $\mathscr{S}$.

g) Soit $P = \bigoplus_{S \in \mathscr{S}} \mathbb{C}e_S$ la représentation de permutation de $\mathfrak{S}_5$ associée à son action sur $\mathscr{S}$, et soit V la sous-représentation de P constituée des vecteurs de la forme $\sum \lambda_S e_S$ avec $\sum \lambda_S = 0$. Vérifiez que $P \simeq \mathbf{1} \oplus V$.

h) Calculez le caractère de P, puis celui de V. Vérifiez que V est irréductible.

i) Montrez que $V \otimes_{\mathbb{C}} \Sigma$ est une représentation irréductible de $\mathfrak{S}_5$ non isomorphe à V.