Université Pierre-et-Marie Curie
Master de mathématiques fondamentales, cours *Introduction à la théorie des schémas*, examen terminal du 8 janvier 2014
Enseignant : Antoine Ducros
Durée : 3 heures. *Seuls les documents issus du cours (notes personnelles prises en cours, documents disponibles en ligne sur la page d'A. Ducros) sont autorisés. Les calculatrices sont interdites.*

**Exercice 1. Intersections de quadriques dans $\mathbb{P}^3_{\mathbb{Z}}$.**

*Notations.* Dans cet exercice, on travaillera dans $\mathbb{P}^3_{\mathbb{Z}} = \mathrm{Proj}\ \mathbb{Z}[T_0, T_1, T_2, T_3]$. Pour tout $(i, j)$ avec $j \neq i$, la fonction coordonnée $T_j/T_i$ sur la carte affine $D(T_i)$ sera notée $t_{ij}$ (pour alléger l'écriture, on pourra écrire $t_j$ au lieu de $t_{ij}$ si l'indice $i$ est clairement fixé par le contexte et s'il n'y a pas de confusion possible). Pour tout nombre premier $p$, on note $x_p$ l'unique point de Spec $\mathbb{Z}$ en lequel $p$ s'annule.

On désigne par $X$ le sous-schéma fermé

$$\mathrm{Proj}\ \mathbb{Z}[T_0, T_1, T_2, T_3]/(T_0T_3 - T_1T_2, T_1T_3 - T_2^2)$$

de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{Z}}$ ; pour tout $i$, on note $X_i$ l'ouvert $D(T_i) \cap X$ de $X$.

a) Pour chaque $i \in \{0, \ldots, 3\}$ donnez un système de générateurs de l'idéal de $\mathbb{Z}[t_{ij}]_j$ qui correspond à l'immersion fermée $X_i \hookrightarrow D(T_i)$. Montrez que $X_i$ est réduit pour tout $i$. Pour chaque indice $i$, précisez le nombre de composantes irréductibles de $X_i$.

b) Montrez que $X$ est la réunion des fermés

$$Y = V(T_2, T_3) \text{ et } Z = V(T_0T_3 - T_1T_2, T_1T_3 - T_2^2, T_0T_2 - T_1^2),$$

et que ceux-ci sont non comparables pour l'inclusion.

c) On munit $Y$ de sa structure réduite. Montrez que $Y \simeq \mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$.

d) On munit $Z$ de sa structure de sous-schéma fermé déduite de l'homéomorphisme

$$Z \simeq \mathrm{Proj}\ \mathbb{Z}[T_0, T_1, T_2, T_3]/(T_0T_3 - T_1T_2, T_1T_3 - T_2^2, T_0T_2 - T_1^2).$$

Soit $S$ un schéma et soit $\mathscr{L}$ un $\mathscr{O}_S$-module localement libre de rang 1. Si $s_0$ et $s_1$ sont deux sections de $\mathscr{L}$ telles que $S = D(s_0) \cup D(s_1)$, on a évidemment aussi $S = D(s_0^{\otimes 3}) \cup D(s_1^{\otimes 3})$. En conséquence, la formule

$$(\mathscr{L}, (s_0, s_1)) \mapsto (\mathscr{L}^{\otimes^3}, (s_0^{\otimes 3}, s_0^{\otimes 2} \otimes s_1, s_0 \otimes s_1^{\otimes 2}, s_1^{\otimes 3}))$$

définit un morphisme $\psi : \mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}} \to \mathbb{P}^3_{\mathbb{Z}}$.

Montrez que $\psi$ induit un isomorphisme $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}} \simeq Z$.

e) On rappelle (paragraphe 6.3.16.3 dans la version actuelle du polycopié en ligne) que tout élément de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z})$ est de la forme $[a : b]$ où $a$ et $b$ sont deux entiers premiers entre eux.

Déterminez l'ensemble des $\sigma \in X(\mathbb{Z})$ telles que $\sigma(\mathrm{Spec}\ \mathbb{Z})$ soit contenu dans $Z$ et ne rencontre pas $Y$. Déterminez l'ensemble des $\sigma \in X(\mathbb{Z})$ telles que $\sigma(\operatorname{Spec} \mathbb{Z})$ soit contenu dans $Z$ et rencontre $Y$ exactement au-dessus des points $x_3$ et $x_5$.

**Exercice 2. Restriction à la Weil**. Si $A$ est un anneau, si $B$ est une $A$-algèbre et si $X$ est un $A$-schéma, on pose $X_B = X \times_{\operatorname{Spec} A} \operatorname{Spec} B$.

1. Soit $k$ un corps, soit $n$ un entier et soit $E \subset \mathbb{P}^n_k$ un ensemble fini de points schématiques de $\mathbb{P}^n_k$. Montrez qu'il existe un polynôme homogène $f$ de degré $> 0$ appartenant à $k[T_0, \dots, T_n]$ tel que $E \subset D(f)$. *Indication* : si $k$ est infini montrez qu'on peut prendre $f$ homogène de degré 1. Si $k$ est fini, appliquez ce qui précède sur le corps $\overline{k}$, et redescendez à $k$.

2. Soit $A$ un anneau et soit $B$ une $A$-algèbre. Montrer que la suite
$$0 \to A \to B \to B \otimes_A B$$
(où la flèche de droite est $b \mapsto b \otimes 1 - 1 \otimes b$) est exacte dès que l'une des deux conditions ci-dessous est satisfaite :
i) la flèche structurale $f\colon A \to B$ admet une rétraction (c'est-à-dire qu'il existe un morphisme $r\colon B \to A$ telle que $r \circ f = \mathrm{Id}_A$) ;
ii) il existe une $A$-algèbre $C$ qui est libre de rang non nul comme $A$-module et telle que la suite induite $0 \to C \to C \otimes_A B \to (C \otimes_A B) \otimes_C (C \otimes_A B)$ soit exacte.
3. Soit $A$ un anneau et soit $B$ une $A$-algèbre qui est libre de rang fini non nul comme $A$-module. Montrer que la suite $0 \to A \to B \to B \otimes_A B$ de la question précédente est exacte. Montrez que si $S$ est un $A$-schéma la flèche naturelle $B \otimes_A \mathscr{O}_S(S) \to \mathscr{O}_{S_B}(S_B)$ est un isomorphisme.

4. *Un exemple*. Soit $X$ le $\mathbb{C}$-schéma affine $\operatorname{Spec} \mathbb{C}[T_0, T_1]/(T_0^2 - T_1^3)$ et soit $X'$ son ouvert $D(T_0)$. Montrez que le foncteur de $\mathbb{R}$-$\mathsf{Sch}$ dans $\mathsf{Ens}$ qui envoie $S$ sur $X(S_{\mathbb{C}})$ est représentable par un $\mathbb{R}$-schéma affine $Y$ que l'on décrira explicitement. De même, montrez que $S \mapsto X'(S_{\mathbb{C}})$ est représentable par un $\mathbb{R}$-schéma affine $Y'$ qui s'identifie à un ouvert de $Y$.

5. Soit $A$ un anneau et soit $B$ une $A$-algèbre que l'on suppose libre de rang fini $d$ comme $A$-module. Soit $X$ un $B$-schéma affine de type fini. Montrez que le foncteur de $A$-$\mathsf{Sch}$ dans $\mathsf{Ens}$ qui envoie $S$ sur $X(S_B)$ est représentable par un $A$-schéma affine et de type fini $R_{B/A}(X)$, appelé la *restriction à la Weil de $B$ à $A$ du $B$-schéma $X$*. Décrire aussi simplement que possible $R_{B/A}(\mathbb{A}^n_B)$ pour tout entier $n$.

6. Montrez que $X \mapsto R_{B/A}(X)$ est de manière naturelle un foncteur de la catégorie des $B$-schémas affines de type fini vers celle des $A$-schémas affines de type fini.

7. Montrez que si $X$ est un $A$-schéma affine il existe une flèche naturelle $\iota\colon X \hookrightarrow R_{B/A}(X_B)$. Montrez à l'aide de la question 3 que $\iota$ est une immersion fermée.

8. Soit $X$ un $B$-schéma affine de type fini et soit $f \in \mathscr{O}_X(X)$. Montrez que la flèche canonique $R_{B/A}(D(f)) \to R_{B/A}(X)$ identifie $R_{B/A}(D(f))$ à un ouvert de $R_{B/A}(X)$ de la forme $D(g)$ pour une certaine fonction $g$ appartenant à $\mathscr{O}_{R_{B/A}(X)}(R_{B/A}(X))$.

9. Soit $k$ un corps ; on note $\varepsilon$ la classe de $T$ dans $k[T]/T^2$, quotient que l'on écrit dès lors $k[\varepsilon]$. Montrez que le morphisme $k[\varepsilon] \to k, \varepsilon \mapsto 0$ induit pour tout $k$-schéma affine et de type fini $X$ un morphisme naturel de $\mathscr{T}_X := R_{k[\varepsilon]/k}(X_{k[\varepsilon]})$ vers $X$.

   Supposons que $X = \operatorname{Spec} k[T_1, \ldots, T_n]/f$ pour un certain polynôme $f$. Montrez que pour tout $x \in X(k)$ identifié à un $n$-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$ d'éléments de $k$ annulant $f$ la fibre de $\mathscr{T}_X(k) \to X(k)$ en $x$ s'identifie à ≪l'espace tangent≫

$$(y_1, \ldots, y_n) \in k^n, \sum_i y_i \frac{\partial f}{\partial T_i}(x) = 0.$$

10. Soit $X$ un $B$-schéma affine et soit $U$ un ouvert affine de $X$. On se propose de montrer que $R_{B/A}(U) \to R_{B/A}(X)$ est une immersion ouverte.

    Pour cela, montrez qu'il existe un morphisme naturel de $B$-schémas $R_{B/A}(X)_B \to X$. On note $V$ l'image réciproque de $U$ sur $R_{B/A}(X_B)$ et $F$ le fermé complémentaire de $V$ dans $R_{B/A}(X_B)$.

    Soit $S$ un $A$-schéma, soit $\varphi \colon S \to R_{B/A}(X)$ un morphisme de $A$-schémas et soit $\psi \colon S_B \to X$ le morphisme correspondant. Montrez que $\psi(S_B) \subset U$ si et seulement si $\varphi_B(S_B) \subset V$ (où $\varphi_B$ est le morphisme déduit de $\varphi$ par extension des scalaires à $B$).

    Montrez que cela revient à demander que $\varphi(S)$ ne rencontre pas l'image de $F$ par la flèche naturelle $R_{B/A}(X)_B \to R_{B/A}(X)$, et conclure.

11. Soit $X$ un $B$-schéma affine et soient $U$ et $V$ deux ouverts affines de $X$. Montrer que l'intersection des deux ouverts $R_{B/A}(U)$ et $R_{B/A}(V)$ de $R_{B/A}(X)$ s'identifie à $R_{B/A}(U \cap V)$.

12. Soit $X$ un $B$-schéma séparé et de type fini ayant la propriété suivante : pour tout $x \in \operatorname{Spec} A$ et tout sous-ensemble fini $E$ de la fibre $X_x$ de $X$ en $x$, il existe un ouvert affine $U$ de $X$ contenant $E$. Il résulte des questions 10 et 11 que les $R_{B/A}(U)$, où $U$ parcourt l'ensemble de tous les ouverts affines de $X$, se recollent de manière naturelle en un $A$-schéma $Y$.

    Montrez que $Y$ représente le foncteur $S \mapsto X(S_B)$.

13. Montrez que les hypothèses de la question 12 sont satisfaites si $X$ est de la forme $\operatorname{Proj} B[T_0, \ldots, T_n]/I$ pour un certain idéal homogène $I$.