Université Pierre-et-Marie Curie
Master de mathématiques fondamentales, cours *Introduction à la théorie des schémas*, examen de rattrapage du 3 juin 2014.
Enseignant : Antoine Ducros
Durée : 3 heures. *Seuls les documents issus du cours (notes personnelles prises en cours ou en TD, documents disponibles en ligne sur la page d'A. Ducros) sont autorisés. Les calculatrices sont interdites.*

Exercice 1. Soit X le schéma Spec $\mathbb{Z}[T_1, T_2]/(T_1^2 + T_2^2 - 15)$, et soit φ le morphisme canonique de X vers Spec $\mathbb{Z}$. Pour quels point x de Spec $\mathbb{Z}$ le schéma $\varphi^{-1}(x)$ est-il irréductible ? Pour quels points x de Spec $\mathbb{Z}$ le schéma $\varphi^{-1}(x)$ est-il réduit ?

Exercice 2. Soit X un schéma irréductible et réduit, et soit U un ouvert dense de X. Montrez que la flèche de restriction de $\mathscr{O}_X(X)$ vers $\mathscr{O}_X(U)$ est injective. Donnez un contre-exemple lorsque X n'est plus supposé réduit.

Exercice 3. Soit p un nombre premier. Donnez un exemple de schéma en groupes non réduit sur $\mathbb{F}_p$.

Exercice 4. Existe-t-il un schéma (resp. un schéma affine) dont l'espace topologique sous-jacent est homéomorphe à $\mathbb{R}$? Existe-t-il un schéma (resp. un schéma affine) dont l'espace topologique sous-jacent est homéomorphe à $\mathbb{N}$ muni de la topologie discrète ?

Exercice 5. Soit X le $\mathbb{C}$-schéma

$$\text{Spec } \mathbb{C}[T_0, T_1, T_2]/(T_0^2 - iT_2, T_0T_2 + iT_1^3).$$

Montrez que le foncteur qui envoie une $\mathbb{R}$-algèbre A sur $X(A \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ est représentable par un $\mathbb{R}$-schéma affine, que l'on décrira explicitement.

Exercice 6. Quelle est la dimension de Spec $\mathbb{Z}[T]$?

Exercice 7. Soit A l'anneau $\mathbb{Z}[T_1, T_2]/(T_1T_2 - 7)$. On pose

$$X = \text{Spec } A \text{ et } Y = \text{Proj } A[U, V]/(T_1U - T_2V).$$

On note φ le morphisme canonique de X vers Spec $\mathbb{Z}$, et ψ le morphisme canonique de Y vers X.

a) Vérifiez que (T_1, T_2) est un idéal maximal de A ; on note x le point fermé correspondant de X. Quel est son corps résiduel ? Quelle est son image z sur Spec $\mathbb{Z}$? La fibre $\varphi^{-1}(z)$ est-elle réduite ? Montrez qu'elle comprend deux composantes irréductibles D_1 et D_2, et décrire leur intersection.

b) Montrez que ψ induit un isomorphisme $Y \setminus \psi^{-1}(x) \simeq X \setminus \{x\}$. Décrire aussi simplement que possible le schéma $\psi^{-1}(x)$.

c) Montrez que $\psi^{-1}(D_1)$ s'écrit $D_1' \cup \psi^{-1}(x)$ où D_1' est un fermé irréductible de Y qui intersecte $\psi^{-1}(x)$ en un seul point fermé. Montrez que $\psi^{-1}(D_2)$ s'écrit $D_2' \cup \psi^{-1}(x)$ où D_2' est un fermé irréductible de Y qui intersecte $\psi^{-1}(x)$ en un seul point fermé. Montrez que $D_1' \cap D_2' = \varnothing$.