

Université Paris 6
Année universitaire 2010-2011
Cours de *Géométrie affine et euclidienne* (LM 323)
Feuille d'exercices numéro 1.

On fixe un corps commutatif k .

Exercice 1. Soient a et b deux nombres réels et soit \mathcal{F} le sous-ensemble de \mathbb{R}^3 défini par le système d'équations

$$\begin{cases} 2x + y - z = a \\ x - 2y + z = b \end{cases} ;$$

montrez que \mathcal{F} est un sous-espace affine de \mathbb{R}^3 (on en donnera un point et l'espace directeur ; la réponse dépend en partie de a et b) ; quelle est sa dimension ?

Exercice 2. Soit $u \in \mathbb{Q}$. Vérifiez que les deux sous-ensembles \mathcal{F} et \mathcal{G} de \mathbb{Q}^4 respectivement définis par les équations

$$\begin{cases} x + y + z - t = 0 \\ x - y + z + t = u \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x + y + 2z + t = 1 \\ x - y + 2z + 3t = 2u \end{cases}$$

sont des sous-espaces affines de \mathbb{Q}^4 , dont on donnera pour chacun un point, l'espace directeur et la dimension. Pour quelle valeur de u s'intersectent-ils ? Donner alors un point, l'espace directeur et la dimension de l'intersection.

Exercice 3. Soit \mathcal{F} le sous-espace affine de \mathbb{C}^4 passant par $(1; 0; i; -1)$ et dont l'espace directeur est engendré par $(1; 1; i; -i)$ et $(0; 1 + i; 1; -1)$; donnez un système d'équations cartésiennes de \mathcal{F} .

Exercice 4. Soit \mathcal{E} un espace affine sur un corps k et soient A et B deux points *distincts* de \mathcal{E} .

i) Montrez qu'il existe une et une seule droite affine de \mathcal{E} passant par A et B ; on la note (AB) .

ii) Montrez que si k est de caractéristique différente de 2, un sous-ensemble non vide \mathcal{F} de \mathcal{E} en est un sous-espace affine si et seulement si $(AB) \subset \mathcal{F}$ pour tout couple (A, B) d'éléments distincts de \mathcal{F} (en fait, il suffit que k soit différente de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, c'est-à-dire ait au moins trois éléments ; mais la preuve sous cette hypothèse est plus difficile ; vous pouvez essayer d'y réfléchir).

Exercice 5. Soit \mathcal{E} un k -espace affine sur un corps ayant au moins trois éléments et soient \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 deux sous-espaces affines de \mathcal{E} ; on suppose que k a au moins trois éléments. Donnez une condition nécessaire et suffisante sur \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 pour que leur réunion soit un sous-espace affine de \mathcal{E} .

Exercice 6. On suppose que k est de caractéristique différente de 2 (autrement dit, $2 \neq 0$ dans k) ; soit \mathcal{E} un k -espace affine.

i) Si A et B sont deux points de \mathcal{E} , montrez qu'il existe un unique point M de \mathcal{E} tel que $\vec{MA} + \vec{MB} = 0$; on l'appelle le *milieu de AB* .

ii) Soient A, B, C, D quatre points de \mathcal{E} . Montrez que $\vec{AB} = \vec{CD}$ si et seulement si AD et BC ont même milieu.

iii) Donnez un contre-exemple à l'assertion i) lorsque $k = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 7. Soit \mathcal{E} le $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ -espace affine $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$.

i) Combien \mathcal{E} a-t-il de points? Combien une droite de \mathcal{E} a-t-elle de points? Combien de droites de \mathcal{E} passent par un point donné? Combien \mathcal{E} a-t-il de droites?

ii) On considère le «triangle» ABC de \mathcal{E} où $A = (0,0)$, où $B = (1,0)$ et où $C = (-1,1)$. Calculez les coordonnées des milieux de AB , BC et AC , puis l'équation des «médianes» du triangle, c'est-à-dire des droites passant par un sommet et le milieu des deux autres. Montrez que les médianes sont ici ... parallèles!

iii) Traitez à nouveau la question ii) mais en supposant que l'on travaille dans $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$; vérifiez que les médianes sont cette fois-ci concourantes.

Exercice 8. On note $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ le \mathbb{R} -espace vectoriel des fonctions indéfiniment dérivables de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et soit n un entier. Montrez que le sous-ensemble de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ formé des fonctions g telles que $g^{(n)} = f$ est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$; donnez son espace directeur, vérifiez qu'il est de dimension finie et donnez sa dimension. L'espace $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ est-il lui-même de dimension finie?

Exercice 9. Soit \mathcal{E} un k -espace affine d'espace directeur E et soit \mathcal{F} une partie de \mathcal{E} telle $\{\overrightarrow{MN}\}_{M \in \mathcal{F}, N \in \mathcal{F}}$ soit un sous-espace vectoriel de E . La partie \mathcal{F} est-elle nécessairement un sous-espace affine de \mathcal{E} ?

Exercice 10. Soit \mathcal{E} un k -espace affine et soient \mathcal{F} et \mathcal{G} deux sous-espaces affines de \mathcal{E} . Discuter des configurations possibles (nature de l'intersection, dimension du sous-espace engendré) de \mathcal{E} , \mathcal{F} et \mathcal{G} dans chacun des cas suivants :

- i) $\dim \mathcal{E} = 3, \dim \mathcal{F} = 1, \dim \mathcal{G} = 2$;
- ii) $\dim \mathcal{E} = 3, \dim \mathcal{F} = 2, \dim \mathcal{G} = 2$;
- iii) $\dim \mathcal{E} = 4, \dim \mathcal{F} = 2, \dim \mathcal{G} = 2$;
- iv) $\dim \mathcal{E} = 4, \dim \mathcal{F} = 2, \dim \mathcal{G} = 3$.

Exercice 11. Soit \mathcal{E} un k -espace affine de dimension 3 et soient \mathcal{D} et \mathcal{D}' deux droites de \mathcal{E} non parallèles et d'intersection vide.

- i) Montrez qu'il existe un unique plan \mathcal{P} contenant \mathcal{D} et parallèle à \mathcal{D}' ; on définit de même \mathcal{P}' .
- ii) Soit $M \in \mathcal{E}$. Montrez que les assertions suivantes sont équivalentes :
 - a) il existe une droite Δ contenant M et rencontrant \mathcal{D} et \mathcal{D}' ;
 - b) $M \in (\mathcal{E} - (\mathcal{P} \cup \mathcal{P}')) \cup \mathcal{D} \cup \mathcal{D}'$.

Exercice 12. Soit $n \geq 1$ et soit (P_0, \dots, P_n) une famille de points d'un k -espace affine \mathcal{E} . Soit \mathcal{F} (resp. \mathcal{G}) le sous-espace affine de \mathcal{E} engendré par $\{P_0, \dots, P_{n-1}\}$ (resp. $\{P_0, \dots, P_n\}$). Montrez que l'on a $\mathcal{G} = \mathcal{F}$ ou $\dim \mathcal{G} = \dim \mathcal{F} + 1$. On établira ce résultat par deux méthodes différentes : dans un premier temps, on montrera que \mathcal{G} est le sous-espace affine engendré par $\mathcal{F} \cup \{P\}$ et l'on appliquera la formule du cours; dans un second temps, on utilisera la description explicite de \mathcal{F} et \mathcal{G} donnée en cours.

Exercice 13. Soit $n \geq 0$ et soit (P_0, \dots, P_n) une famille de points d'un k -espace affine; soit I un sous-ensemble non vide de $\{0, \dots, n\}$. Montrez que si (P_0, \dots, P_n) est une famille de points affinement indépendants, alors $(P_i)_{i \in I}$

est une famille de points affinement indépendants. Là encore, on donnera deux preuves : l'une reposant sur la caractérisation de l'indépendance affine au moyen de la liberté d'une certaine famille de vecteurs, l'autre utilisant le critère de dimension du sous-espace affine engendré, et l'exercice ci-dessus.

Exercice 14. À quelle condition sur le réel a les quatre points

$$(1; 1; a), (2; 3; 2a), (3; 1 - a; a - 1), (2; 3; 3 + a)$$

de \mathbb{R}^3 sont-ils affinement indépendants ? Pour chaque valeur de a pour lequel ils ne le sont pas, donnez la dimension du sous-espace affine qu'ils engendrent, et un système d'équations cartésiennes de ce dernier.

Exercice 15. Soit \mathcal{F} le sous-ensemble de \mathbb{R}^4 formé des quadruplets (x, y, z, t) tels que $x - y + 2z + 3t = 5$; montrez que c'est un sous-espace affine de \mathbb{R}^4 dont on donnera l'espace directeur ; donnez un repère affine de \mathcal{F} ; complétez-le en un repère affine de \mathbb{R}^4 .

Exercice 16. Soit \mathcal{E} un k -espace affine, soit $n \geq 0$ et soit (P_0, \dots, P_n) une famille de points affinement indépendants de \mathcal{E} . Soit $i \in \{0, \dots, n\}$; soit \mathcal{F} (resp. \mathcal{G}) l'espace affine engendré par les P_j pour $j \leq i$ (resp. $j \geq i$). Donnez les dimensions de \mathcal{E} et \mathcal{F} ; décrivez leur intersection. Indication : si vous ne voyez pas ce qui se passe, commencez par penser au cas d'un triplet de points dans \mathbb{R}^2 (triangle non aplati) ou d'un quadruplet de points dans \mathbb{R}^3 (tétraèdre non aplati).