Université Paris 6
Année universitaire 2010-2011
Cours de *Géométrie affine et euclidienne* (LM 323)
Feuille d'exercices numéro 3.

Exercice 1. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine sur un corps k d'espace directeur E. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$, et soit $\mathcal{G}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ dirigé par G ; soit u un vecteur de F, et soit $\mathcal{G}'$ le sous-espace $t_u(\mathcal{G})$.

i) Quel est l'espace directeur de $\mathcal{G}'$? Que peut-on dire de $\mathcal{G} \cap \mathcal{G}'$?

ii) Soit s (resp. s') la symétrie par rapport à $\mathcal{G}$ (resp. $\mathcal{G}'$) et parallèlement à F. Décrire aussi précisément que possible la composée $s' \circ s$.

iii) Soit v un vecteur de E. Démontrer sans calcul que $t_v \circ f$ a une unique écriture de la forme $t_w \circ \xi$, où $w \in G$ et où ξ est une symétrie par rapport à un sous-espace $\mathcal{G}''$ de $\mathcal{E}$ dirigé par G, et parallèlement à F. Explicitez w et $\mathcal{G}''$ en fonction des données.

iv) Reprendre les questions ii) et iii) en remplaçant partout «symétrie par rapport à» par «projection sur».

Exercice 2. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine réel de dimension 4, et soit $\mathcal{R} = (O, e_1, \dots, e_4)$ un repère cartésien de $\mathcal{E}$. Soient A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 les points de $\mathcal{E}$ de coordonnées respectives

$$(1, 2, -1, 3); (0, -2, 1, 4); (3, 1, -2, 1); (2, -4, 1, 3) \text{ et } (5, 1, 2, -3)$$

dans $\mathcal{R}$. Soit G' le barycentre de $((A_0, 1), (A_1, 3), (A_2, 7))$ et soit G'' le barycentre de $((A_3, 6), (A_4, -3))$; déterminez les coordonnées de G' et G'' dans $\mathcal{R}$. Soit G le barycentre de $((A_0, 1), (A_1, 3), (A_2, 7), (A_3, 6), (A_4, -3))$; déterminez les coordonnées de G dans $\mathcal{R}$.

Exercice 3. Soit $\mathcal{P}$ un plan affine sur un corps k de caractéristique différente de 2 et 3, et soit (ABC) un repère affine de $\mathcal{P}$; on travaille en coordonnées barycentriques dans (ABC). Soit G l'isobarycentre de (ABC) et soit H le point de coordonnées $(1, 1, -1)$.

1) Justifiez que $G \neq H$ et donnez une équation de la droite (GH).

2) Soit P un point de $\mathcal{P}$ de coordonnées (a, b, c). Donnez en fonction de a, b et c une équation de la droite passant par P et parallèle à (GH).

Exercice 4. Théorème de Menelaüs. Soit $\mathcal{P}$ un plan affine sur un corps k, et soit (ABC) un repère affine de $\mathcal{P}$. Soit A' (resp. B', resp C') un point de (BC) différent de B et C (resp. un point de (AC) différent de A et C, resp. un point de (AB) différent de A et B). Montrez que A', B' et C' sont alignés si et seulement si

$$\frac{\overrightarrow{A'B}}{\overrightarrow{A'C}} . \frac{\overrightarrow{B'C}}{\overrightarrow{B'A}} . \frac{\overrightarrow{C'A}}{\overrightarrow{C'B}} = 1.$$

Exercice 5. Soit k un corps et soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension 3 sur k ; on fixe un repère affine de $\mathscr{E}$ et l'on travaille en coordonnées barycentriques dans celui-ci.

1) Soit $\mathscr{P}$ un sous-ensemble de $\mathscr{E}$. Montrez que $\mathscr{P}$ est un plan si et seulement si il peut être défini par une équation de la forme $ax+by+cz+dt=0$ avec a, b, c et d non tous nuls ; à quelle condition deux telles équations définissent-elles le même plan ?

2) Soient $\mathscr{P}$, $\mathscr{P}'$, $\mathscr{P}''$ et $\mathscr{P}'''$ quatre plans de $\mathscr{E}$, définis par les équations

$$ax + by + cz + dt = 0, a'x + b'y + c'z + d't = 0, \text{ etc.}$$

Interpréter géométriquement (en termes de la configuration des plans étudiés) les rangs des matrices

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine *réel*. On dit qu'un sous-ensemble $\mathcal{C}$ de $\mathcal{E}$ est *convexe* si pour toute famille finie $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de points de $\mathcal{C}$ et pour toute famille $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de scalaires positifs ou nuls et non tous nuls, le barycentre de $((A_i, \lambda_i))$ appartient à $\mathcal{C}$.

1) Montrez que l'intersection d'une famille de parties convexes de $\mathcal{E}$ est convexe ; en déduire que si $\mathcal{C}$ est une partie *quelconque* de $\mathcal{E}$ il existe une plus petite partie convexe contenant $\mathcal{C}$, que l'on appelle *l'enveloppe convexe* de $\mathcal{C}$.

2) Si $(A_1, \ldots, A_n)$ est une famille finie de points de $\mathcal{P}$, montrez que l'enveloppe convexe de $\{A_1, \ldots, A_n\}$ est égale à l'ensemble des points de la forme $\mathrm{Bar}((A_i, \lambda_i))$ où (λ_i) est une famille de scalaires positifs non tous nuls.

Si A et B sont deux points de $\mathcal{P}$, on appelle *segment* reliant A à B, et l'on note $[AB]$, l'enveloppe convexe de $\{A, B\}$; d'après ce qui précède, on a $[AB] = \{\lambda A + (1-\lambda)B\}_{\lambda\in[0;1]}$.

3) Montrez qu'une partie $\mathcal{C}$ de $\mathcal{P}$ est convexe si et seulement si pour tout couple (A, B) de point de $\mathcal{C}$ le segment $[AB]$ est contenu dans $\mathcal{C}$.

4) Si $\mathcal{C}$ est une partie convexe de $\mathcal{P}$, on dit qu'un point x de $\mathcal{C}$ est *extrémal* s'il possède la propriété suivante : *pour tout couple de points* (A, B) *de* $\mathcal{P}$ *tels que* $x \in [AB]$ *et* $[AB] \subset \mathcal{C}$ *l'on a* $A = x$ *ou* $B = x$.

Déterminez les points extrémaux des parties suivantes de $\mathbb{R}^2$:

$$\{(x, y), |x| \leqslant 1 \text{ et } |y| \leqslant 1\} \quad \{(x, y), x^2 + y^2 \leqslant 1\}.$$

Montrez que si $(A_0, \ldots, A_n)$ est une famille de points affinement indépendants de $\mathcal{E}$ l'ensemble des points extrémaux de l'enveloppe convexe des A_i est exactement $\{A_i\}_{0\leqslant i\leqslant n}$. Cela reste-t-il vrai en général sans hypothèse d'indépendance affine ?

Exercice 7. Théorème de Carathéodory. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine réel de dimension finie n et soit $(A_1, \ldots, A_p)$ une famille finie de points de $\mathcal{E}$. Soit $\mathcal{C}$

l'enveloppe convexe des A_i et soit Γ l'ensemble des points de $\mathcal{E}$ pouvant s'écrire comme le barycentre d'une famille d'au plus $n+1$ points parmi les A_i, affectés de coefficients positifs. On dispose d'une inclusion naturelle $\Gamma \subset \mathcal{C}$; le but de ce qui suit est de prouver l'inclusion réciproque. On procède par récurrence sur p.

1) Que dire si $p \leqslant n+1$?

2) On suppose que $p > n+1$ et que la propriété a été démontrée au rang p. Soit $x \in \mathcal{C}$; on écrit $x = \sum \lambda_i A_i$ avec $\lambda_i \geqslant 0$ quel que soit i et et $\sum \lambda_i = 1$.

Prouvez qu'il existe j tel que A_j soit un barycentre des A_i pour $i \neq j$; on renumérote éventuellement les A_i de sorte que $j = 1$ et l'on écrit $A_1 = \sum_{i \geqslant 2} t_i A_i$ avec $\sum t_i = 1$. On pose $\mu_1 = 1$ et $\mu_i = -t_i$ pour tout $i > 2$.

3) Montrez qu'il est licite d'écrire pour tout ℓ tel que $\mu_\ell \neq 0$ l'égalité

$$a_\ell = \sum_{i \neq \ell} -\frac{\mu_i}{\mu_\ell} a_i.$$

4) Soit ℓ tel que $\mu_\ell \neq 0$. Donnez une expression de x comme barycentre des A_i pour $i \neq \ell$; montrez qu'il est possible de choisir ℓ de sorte que les coefficients apparaissants dans cette écriture soient tous positifs, et conclure.