Université Pierre-et-Marie Curie
Master de mathématiques fondamentales, cours *Les outils de la géométrie algébrique*, examen terminal du 23 octobre 2013
Enseignant : Antoine Ducros
Durée : 3 heures. *Seuls les documents issus du cours (notes personnelles prises en cours, documents disponibles en ligne sur la page d'A. Ducros) sont autorisés. Les calculatrices sont interdites.*

Dans tout le sujet, ≪anneau≫ signifiera ≪anneau commutatif unitaire≫.

Exercice 1. Soit X un espace topologique, soit $\mathscr{F}$ un préfaisceau sur X et soit $\widehat{\mathscr{F}}$ le faisceau associé. On dit que $\mathscr{F}$ est *séparé* si pour tout ouvert U de X et tout recouvrement ouvert (U_i) de U, l'application naturelle

$$\mathscr{F}(U) \to \prod_i \mathscr{F}(U_i), \quad s \mapsto (s|_{U_i})_i$$

est injective.

Montrez que $\mathscr{F}$ est séparé si et seulement si le morphisme canonique $\mathscr{F} \to \widehat{\mathscr{F}}$ est injectif.

Exercice 2. *Monomorphismes et épimorphismes.*

Soit C une catégorie et soit $f : Y \to X$ un morphisme entre objets de C. On dit que f est un *monomorphisme* si pour tout objet Z de C la flèche naturelle $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(Z, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(Z, X)$ est injective. On dit que f est un *épimorphisme* si pour tout objet Z la flèche naturelle $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(X, Z) \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(Y, Z)$ est injective.

a) Montrez que dans les catégories des ensembles, des A-modules (où A est un anneau fixé) des groupes et des anneaux, une flèche injective est un monomorphisme.
b) Montrez que dans les catégories des ensembles, des A-modules, des groupes et des anneaux, une flèche surjective est un épimorphisme.
c) Montrez que dans les catégories des ensembles, des A-modules, des groupes et des anneaux, un monomorphisme est injectif.
d) Montrez que dans les catégories des ensembles, des A-modules et des groupes, un épimorphisme est surjectif.
e) Donnez un exemple d'épimorphisme d'anneaux non surjectif.

Dans ce qui suit, la surjectivité est à prendre au sens des faisceaux.
f) Soit X un espace topologique. Montrez qu'un morphisme injectif entre faisceaux sur X est un monomorphisme.
g) Montrez qu'un morphisme surjectif entre faisceaux sur X est un épimorphisme.
h) Montrez que tout monomorphisme entre faisceaux sur X est injectif.
i) Montrez que tout épimorphisme entre faisceaux sur X est surjectif.

Problème : anneaux artiniens

Dans ce qui suit, chaque exercice peut éventuellement faire appel à certains des résultats des exercices qui le précèdent, qu'on pourra utiliser même s'ils n'ont pas été démontrés.

Exercice 3. Soit A un anneau. Un A-module M est dit *noethérien* (resp. *artinien*) si et seulement si toute ensemble non vide de sous-modules de M admet un élément maximal (resp. minimal) ; on dit que A lui-même est noethérien (resp. artinien) s'il l'est en tant que A-module.

a) Montrez qu'un anneau intègre est artinien si et seulement si c'est un corps.

b) Soit $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ une suite exacte de A-modules. Montrez que M est noethérien (resp. artinien) si et seulement si M' et M'' sont noethériens (resp. artiniens).

c) Si k est un corps et M un k-espace vectoriel, montrez qu'on a équivalence entre les assertions suivantes :

i) M est artinien ;

ii) M est noethérien ;

iii) M est de dimension finie.

d) Supposons qu'il existe une famille finie $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_r$ d'idéaux maximaux de A (pas forcément deux à deux distincts) tels que $\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2 \ldots \ldots \mathfrak{m}_r = 0$. Montrez que A est noethérien si et seulement si il est artinien. *Indication : considérez les quotients successifs* $\mathfrak{m}_1 \ldots \mathfrak{m}_i/\mathfrak{m}_1 \ldots \mathfrak{m}_i\mathfrak{m}_{i+1}$*, et appliquez b) et c).*

Exercice 4. Soit A un anneau noethérien. On se propose de montrer qu'il existe un ensemble fini E d'idéaux premiers de A, deux à deux non comparables pour l'inclusion, et tels tout idéal premier de A contienne un idéal premier appartenant à E (les éléments de E sont donc les idéaux premiers minimaux de A).

a) Montrez que tout idéal de A contient un produit fini d'idéaux premiers de A. *Indication : soit F l'ensemble des idéaux de A ne contenant pas un produit fini d'idéaux premiers. Supposez que F est non vide, utilisez la noethérianité de A et aboutir à une contradiction.*

b) Appliquez a) à l'idéal nul, et conclure.

Exercice 5. Soit A un anneau noethérien dont tout idéal premier est maximal. On se propose de montrer que A est artinien.

a) Montrez que A possède un ensemble fini d'idéaux premiers (et donc maximaux) ; on les note $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_r$.

b) Montrez qu'il existe N tel que $(\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2 \ldots \mathfrak{m}_r)^N = 0$.

c) Conclure.

Exercice 6. Soit A un anneau artinien. On se propose de montrer qu'il est noethérien et que chacun de ses idéaux premiers est maximal.

a) Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A. Montrez qu'il est maximal.

b) Soit $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_r$ des idéaux maximaux deux à deux distincts de A. Montrez que $\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2 \ldots \mathfrak{m}_r \subsetneq \mathfrak{m}_1 \ldots \mathfrak{m}_{r-1}$. En déduire que A possède un nombre fini d'idéaux maximaux ; on les note $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n$.

c) Montrez qu'il existe N tel que $(\mathfrak{m}_1 \ldots \mathfrak{m}_n)^{N+1} = (\mathfrak{m}_1 \ldots \mathfrak{m}_n)^N$. On pose $P = (\mathfrak{m}_1 \ldots \mathfrak{m}_n)^N$; nous allons montrer que $P = 0$.

d) On suppose P non nul. Montrez qu'il existe un idéal I, contenu dans P, tel que $IP \neq \{0\}$ et qui est minimal pour cette propriété. Montrez que I est monogène et que $IP = I$; en déduire que $P = 0$.

e) Conclure.