TORSEURS ET COCYCLES

par

Antoine Ducros

1. Quelques rappels

On fixe pour tout ce texte un espace topologique X et un faisceau en groupes $\mathscr{G}$ sur icelui [1]. Les «questions» auxquelles il est fait référence sont les questions de l'exercice 1 de l'examen de 2020 du cours *Les outils de la géométrie algébrique*.

1.1. Cocycles subordonnées à un recouvrement. — Soit $\mathscr{U} = (U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de X. Nous noterons $\mathrm{Z}^1_{\mathscr{U}}(\mathscr{G})$ l'ensemble des 1-*cocycles à coefficients dans $\mathscr{G}$ subordonnés au recouvrement $\mathscr{U}$* (que nous appellerons plus brièvement *cocycles* s'il n'y a pas d'ambiguïtés) c'est-à-dire l'ensemble des familles $(g_{ij})_{(i,j)\in I\times I} \in \prod_{i,j}\mathscr{G}(U_i\cap U_j)$ qui satisfont les égalités suivantes pour tout i,j,k :

- $g_{ii} = e$;
- $g_{ji} = g_{ij}^{-1}$;
- $g_{ij}g_{jk} = g_{ik}$.

Si (g_{ij}) est un élément de $\mathrm{Z}^1_{\mathscr{U}}(\mathscr{G})$ et si (a_i) est un élément de $\prod_i\mathscr{G}(U_i)$ alors la famillle $(a_ig_{ij}a_j^{-1})$ appartient encore à $\mathrm{Z}^1_{\mathscr{U}}(\mathscr{G})$, et les éléments de $\mathrm{Z}^1_{\mathscr{U}}(\mathscr{G})$ ainsi obtenus sont dits *cohomologues* à (g_{ij}) ; ceci définit une relation d'équivalence sur $\mathrm{Z}^1_{\mathscr{U}}(\mathscr{G})$ (questions 4 et 5) ; l'ensemble quotient sera noté $\mathrm{H}^1_{\mathscr{U}}(\mathscr{G})$.

La famille constante (g_{ij}) où $g_{ij} = e$ pour tout (i,j) appartient à $\mathrm{Z}^1_{\mathscr{U}}(\mathscr{G})$; on dit que c'est le cocycle *trivial*. On note $\mathrm{B}^1_{\mathscr{U}}(\mathscr{G})$ l'ensemble des 1-*cobords à coefficients dans $\mathscr{G}$ subordonnés au recouvrement $\mathscr{U}$* (que nous appellerons plus brièvement *cobords* s'il n'y a pas d'ambiguïtés), c'est-à-dire le sous-ensemble de $\mathrm{Z}^1_{\mathscr{U}}(\mathscr{G})$ constitué des cocycles cohomologues au cocycle trivial, c'est-à-dire encore l'ensemble des cocycles de la forme $(a_ia_j^{-1})_{i,j}$ pour une certaine famille $(a_i) \in \prod_i\mathscr{G}(U_i)$.

1. Grothendieck et son école aiment bien ce terme joliment suranné, et on le trouve à l'occasion dans les SGA.

1.2. Structures algébriques sur les ensembles de cohomologie. — En général, $\mathrm{H}^1_{\mathscr{U}}(\mathscr{G})$ possède simplement une structure d'*ensemble pointé*, c'est-à-dire d'ensemble muni d'un élément distingué : il s'agit ici de la classe du cocycle trivial (qui est l'ensemble des cobords), et $\mathrm{H}^1_{\mathscr{U}}(\cdot)$ est de manière naturelle un foncteur de la catégorie des faisceaux en groupes sur X vers celle des ensembles pointés.

Supposons maintenant que $\mathscr{G}$ soit un faisceau en groupes *abéliens*. Dans ce cas $\mathrm{Z}^1_{\mathscr{U}}(\mathscr{G})$ a une structure naturelle de groupe abélien (on «multiplie» deux cocycles termes à termes), $\mathrm{Z}^1_{\mathscr{U}}(\mathscr{G})$ en est un sous-groupe, et la relation de cohomologie est simplement la congruence modulo $\mathrm{B}^1_{\mathscr{U}}(\mathscr{G})$; par conséquent, $\mathrm{H}^1_{\mathscr{U}}(\mathscr{G})$ s'identifie au quotient $\mathrm{Z}^1_{\mathscr{U}}(\mathscr{G})/\mathrm{B}^1_{\mathscr{U}}(\mathscr{G})$ et hérite en particulier d'une structure de groupe abélien, compatible avec sa structure d'ensemble pointé (le neutre est l'élément distingué). La restriction de $\mathrm{Z}^1_{\mathscr{U}}(\mathscr{G})$ à la catégorie des faisceaux en groupes abéliens sur X est de manière naturelle un foncteur vers la catégorie des groupes abéliens.

1.3. Liens avec les $\mathscr{G}$-torseurs. — Nous allons utiliser le langage des $\mathscr{G}$-ensembles et des $\mathscr{G}$-torseurs, introduit à l'exercice 1 de l'examen de 2020.

Si $\mathscr{F}$ est un $\mathscr{G}$-ensemble, la formule $U \mapsto \mathscr{G}(U)\backslash\mathscr{F}(U)$ définit de manière naturelle un préfaisceau sur X, dont le faisceau associé sera noté $\mathscr{G}\backslash\mathscr{F}$; c'est le quotient (faisceautique) de $\mathscr{F}$ sous l'action de $\mathscr{G}$.

Si $\mathscr{F}$ est un $\mathscr{G}$-torseur et si f_1 et f_2 sont deux sections de $\mathscr{F}$ sur un même ouvert U de X, il existe un unique $g \in \mathscr{G}(U)$ tel que $gf_2 = f_1$ (question 3). Il est commode d'employer la notation $f_1 f_2^{-1}$ pour désigner cet élément g, même si l'inverse d'une section de $\mathscr{F}$ ou le produit de deux sections de $\mathscr{F}$ n'ont aucun sens : toutes les formules qu'on a envie d'écrire sont en effet valables modulo ce petit abus (voir la correction de la question 6a).

Nous noterons $\mathsf{T}(\mathscr{G})$ l'ensemble des classes d'isomorphie de $\mathscr{G}$-torseurs sur X, et $\mathsf{T}_{\mathscr{U}}(\mathscr{G})$ le sous-ensemble de $\mathsf{T}(\mathscr{G})$ formé des classes de torseurs trivialisés par le recouvrement $\mathscr{U}$.

Aux questions 6a, 6b et 6c on montre l'existence d'une bijection $\mathsf{T}_{\mathscr{U}}(\mathscr{G}) \simeq \mathrm{H}^1_{\mathscr{U}}(\mathscr{G})$ dont nous rappelons maintenant la construction.

- ◇ Soit $\mathscr{F}$ un $\mathscr{G}$-torseur trivialisé par $\mathscr{U}$; pour tout i, choisissons une section f_i de $\mathscr{F}$ sur U_i, qui existe par hypothèse (question 2) ; à la classe de $\mathscr{F}$ est alors associée la classe de cohomologie du cocycle $(f_i f_j^{-1})_{ij}$.
- ◇ Soit (g_{ij}) un cocycle à coefficients dans $\mathscr{G}$ subordonné à $\mathscr{U}$. À la classe de cohomologie de (g_{ij}) on associe la classe d'isomorphie du $\mathscr{G}$-torseur $\mathscr{F}$ défini comme suit : si U est un ouvert de X alors $\mathscr{F}(U)$ est le sous-ensemble de $\prod_i \mathscr{G}(U \cap U_i)$ formé des familles (γ_i) telles que $\gamma_i = \gamma_j g_{ji}$ pour tout (i,j) dans $\mathscr{G}(U \cap U_i \cap U_j)$ – sa structure de $\mathscr{G}$-ensemble est donnée par la formule $g(\gamma_i)_i = (g\gamma_i)_i$.

On remarque que la classe de cohomologie associée au torseur trivial $\mathscr{G}$ est l'élément distinguée de $\mathrm{H}^1_{\mathscr{U}}(\mathscr{G})$, c'est-à-dire la classe du cocycle trivial : on le voit en remarquant que le cocycle associé à l'élément de $\prod \mathscr{G}(U_i)$ dont toutes les composantes sont neutres est précisément le cocycle trivial.

1.4. Raffinements et cohomologie. — Soient $\mathscr{U} = (U_i)_{i\in I}$ et $\mathscr{V} = (V_k)_{k\in K}$ deux recouvrements ouverts de X. On dit que $\mathscr{V}$ *raffine* $\mathscr{U}$ si tout ouvert intervenant dans $\mathscr{V}$ est contenu dans un ouvert intervenant dans $\mathscr{U}$, c'est-à-dire (modulo l'axiome du choix !!!) s'il existe une application $\lambda\colon K \to I$ telle que $V_k \subset U_{\lambda(k)}$ pour tout k. Notons qu'en général, $\mathscr{U}$ et $\mathscr{V}$ possèdent toujours un raffinement commun, à savoir $(U_i \cap V_k)_{i,k}$.

On suppose à partir de maintenant que $\mathscr{V}$ raffine $\mathscr{U}$; notons que ceci entraîne tautologiquement que $\mathsf{T}_{\mathscr{U}} \subset \mathsf{T}_{\mathscr{V}}$. Fixons une application λ comme ci-dessus (notons que λ n'a aucune raison d'être unique). Soit $g := (g_{ij})$ appartenant à $\mathrm{Z}^1_{\mathscr{U}}(\mathscr{G})$. La famille $\tau_\lambda(g) := (g_{\lambda(k)\lambda(\ell)})_{k,\ell}$ appartient alors trivialement à $\mathrm{Z}^1_{\mathscr{V}}(\mathscr{G})$.

Soient $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}'$ les $\mathscr{G}$- torseurs respectivement associés aux cocycles g et $\tau_\lambda(g)$ (dont la construction est rappelée à la section précédente). Soit $(\gamma_i)_{i\in I}$ une section de $\mathscr{F}$ sur un ouvert U de X. Il résulte immédiatement des définitions que $(\gamma_{\lambda(k)})_k$ est une section de $\mathscr{F}'$ sur U, et que l'on définit ainsi un morphisme de $\mathscr{G}$-faisceaux $\mathscr{F} \to \mathscr{F}'$, qui est nécessairement un isomorphisme puisque ce sont des torseurs (question 2).

Autrement dit, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Z}^1_{\mathscr{U}}(\mathscr{G}) \arrow[r, "\tau_\lambda"] \arrow[d] & \mathrm{Z}^1_{\mathscr{V}}(\mathscr{G}) \arrow[d] \\
\mathrm{H}^1_{\mathscr{U}}(\mathscr{G}) \arrow[d, "\sim"] & \mathrm{H}^1_{\mathscr{V}}(\mathscr{G}) \arrow[d, "\sim"] \\
\mathsf{T}_{\mathscr{U}}(\mathscr{G}) \arrow[r, hook] & \mathsf{T}_{\mathscr{V}}(\mathscr{G})
\end{tikzcd}$$

est commutatif. Pour des raisons purement formelles il se complète de manière unique en un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Z}^1_{\mathscr{U}}(\mathscr{G}) \arrow[r, "\tau_\lambda"] \arrow[d] & \mathrm{Z}^1_{\mathscr{V}}(\mathscr{G}) \arrow[d] \\
\mathrm{H}^1_{\mathscr{U}}(\mathscr{G}) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\sim"] & \mathrm{H}^1_{\mathscr{V}}(\mathscr{G}) \arrow[d, "\sim"] \\
\mathsf{T}_{\mathscr{U}}(\mathscr{G}) \arrow[r, hook] & \mathsf{T}_{\mathscr{V}}(\mathscr{G})
\end{tikzcd}$$

dont la flèche horizontale du milieu *est indépendante de* λ, puisque c'est le cas de celle du bas. Concrètement, cela revient aux deux énoncés suivants (à titre d'exercice, essayez à l'occasion de les prouver par des calculs directs sur les cocycles, sans passer par les torseurs) :

- ⋄ si g est un cocycle subordonné à $\mathscr{U}$ et si μ est une (autre) application de K dans I telle que $V_k \subset U_{\mu(k)}$ pour tout k alors les cocycles $\tau_\lambda(g)$ et $\tau_\mu(g)$ (subordonnés à $\mathscr{V}$) sont cohomologues ;
- ⋄ si g et h sont deux cocycles subordonnés à $\mathscr{U}$, ils sont cohomologues si et seulement si les cocycles $\tau_\lambda(g)$ et $\tau_\lambda(h)$ (subordonnés à $\mathscr{V}$) sont cohomologues.

1.5. Le passage à la limite. — Tout $\mathscr{G}$-torseur étant trivialisé par un recouvrement ouvert, on peut décrire $\mathsf{T}(\mathscr{G})$ comme la réunion filtrante des $\mathsf{T}_{\mathscr{U}}(\mathscr{G})$ pour $\mathscr{U}$ variable ; et, par ce qui précède, identifier $\mathsf{T}(\mathscr{G})$ à la colimite filtrante $\mathrm{H}^1(\mathscr{G})$ des $\mathrm{H}^1_{\mathscr{U}}(\mathscr{G})$ pour $\mathscr{U}$ variable (les flèches de transition étant les injections construites ci-dessus), dans la catégorie des ensembles pointés en général, et des groupes abéliens si $\mathscr{G}$ est abélien.

Attention toutefois à un (faux) problème : le paragraphe précédent n'a formellement aucun sens ! Et ce pour la bonne raison que les recouvrements ouverts sur lesquels sont indexées les réunions et colimites évoquées ne forment pas un ensemble, puisqu'un recouvrement ouvert est une *famille* d'ouverts indexée par un ensemble I qui peut être arbitraire.

On peut décider (sans grand dommage) d'ignorer ce petit désagrément. Mais si l'on souhaite rester rigoureux et partant éviter de manipuler des réunions ou colimites indexées par d'autres choses que des ensembles, voici comment procéder. On commence par observer qu'il existe un *ensemble* $\mathscr{C}$ de recouvrements ouverts de X qui est *cofinal*, c'est-à-dire que tout recouvrement ouvert de X admet un raffinement appartenant à $\mathscr{C}$; on peut par exemple prendre pour $\mathscr{C}$ l'ensemble des sous-ensembles $\mathscr{U}$ de $\mathscr{P}(X)$ constitués uniquement d'ouverts et qui recouvrent X, un tel $\mathscr{U}$ étant vu comme une famille *via* son indexation tautologique (par lui-même) ; et si maintenant $\mathscr{V} = (V_i)$ est un recouvrement ouvert quelconque de X, l'ensemble $\mathscr{U}$ constitué des ouverts de X qui ont égaux à l'un des V_i appartient à $\mathscr{C}$, et raffine $\mathscr{V}$.

Si $\mathscr{C}$ est un tel ensemble cofinal, $\operatorname{colim}_{\mathscr{U}\in\mathscr{C}}\mathrm{H}^1_{\mathscr{U}}(\mathscr{G})$ est alors canoniquement idépendante de $\mathscr{C}$. En effet, si l'on se donne un autre ensemble cofinal $\mathscr{C}'$ et si l'on pose $\mathscr{C}'' = \mathscr{C} \cup \mathscr{C}'$, il est immédiat à partir de la description explicite des colimites filtrantes que les flèches naturelles

$$\operatorname*{colim}_{\mathscr{U}\in\mathscr{C}} \mathrm{H}^1_{\mathscr{U}}(\mathscr{G}) \to \operatorname*{colim}_{\mathscr{U}\in\mathscr{C}''} \mathrm{H}^1_{\mathscr{U}}(\mathscr{G}) \text{ et } \operatorname*{colim}_{\mathscr{U}\in\mathscr{C}'} \mathrm{H}^1_{\mathscr{U}}(\mathscr{G}) \to \operatorname*{colim}_{\mathscr{U}\in\mathscr{C}''} \mathrm{H}^1_{\mathscr{U}}(\mathscr{G})$$

sont des isomorphismes.

Il est dès lors licite de définir $\mathrm{H}^1(\mathscr{G})$ comme étant égale à $\operatorname{colim}_{\mathscr{U}\in\mathscr{C}} \mathrm{H}^1_{\mathscr{U}}(\mathscr{G})$ (dans la catégorie des ensembles pointés en général, et des groupes abéliens si $\mathscr{G}$ est abélien) pour n'importe quel ensemble cofinal $\mathscr{C}$ de recouvrements ouverts de X.

En en fixant un tel $\mathscr{C}$ on voit que

$$\mathsf{T}(\mathscr{G}) = \bigcup_{\mathscr{C}\in\mathscr{U}} \mathsf{T}_{\mathscr{U}}(\mathscr{G}) \simeq \operatorname*{colim}_{\mathscr{U}\in\mathscr{C}} \mathrm{H}^1_{\mathscr{U}}(\mathscr{G}) = \mathrm{H}^1(\mathscr{G}).$$

1.6. Opérations sur le H^1 : interprétations en termes de torseurs. — On peut voir H^1 comme un foncteur de la catégorie des faisceaux en groupes (resp. en groupes abéliens) sur X vers celle des ensembles pointés (resp. groupes abéliens). Nous allons donner dans ce qui suit une interprétation de ce fait en termes de torseurs. Plus précisément, nous allons faire de $\mathscr{G} \mapsto \mathsf{T}(\mathscr{G})$ un foncteur de de la catégorie des faisceaux en groupes (resp. en groupes abéliens) sur X vers celle des ensembles pointés (resp. groupes abéliens) de sorte que la collection des bijections naturelles $\mathsf{T}(\mathscr{G}) \simeq \mathrm{H}^1(\mathscr{G})$ soit un morphisme de foncteurs.

La structure d'ensemble pointé sur $\mathsf{T}(\mathscr{G})$. — Elle est facile à définir : l'élément distingué de $\mathsf{T}(\mathscr{G})$ est la classe du $\mathscr{G}$-torseur trivial $\mathscr{G}$. Elle s'envoie sur l'élément distingué de $\mathrm{H}^1(\mathscr{G})$.

La structure de groupe sur $\mathsf{T}(\mathscr{G})$ *lorsque* $\mathscr{G}$ *est abélien.* — Supposons que $\mathscr{G}$ est un faisceau en groupes abéliens, et soient $\mathscr{F}$ et $\mathscr{H}$ deux $\mathscr{G}$-faisceaux sur X. La formule

$$g \cdot (f, h) = (g^{-1} f, gh)$$

fait de $\mathscr{F} \times \mathscr{H}$ un $\mathscr{G}$-faisceau (il est crucial ici que $\mathscr{G}$ soit abélien pour bien avoir affaire à une opération de groupe en dépit du terme g^{-1}). Le quotient $\mathscr{G}\backslash(\mathscr{F} \times \mathscr{H})$ est appelé le *produit contracté* de $\mathscr{F}$ et $\mathscr{H}$ et est noté $\mathscr{F} \times^{\mathscr{G}} \mathscr{H}$. Il possède lui-même une structure naturelle de $\mathscr{G}$-faisceau, donnée par la formule $g \star (f, h) = (gf, h)$ qui passe au quotient (notons qu'on aurait pu tout aussi bien opter pour la formule $g \star (f, h) = (f, gh)$ puisque $(gf, h) = (f, gh)$ dans le produit contracté par définition de ce dernier).

Lorsque $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont des $\mathscr{G}$-torseurs, il en va de même de leur produit contracté. En effet, on peut pour le voir raisonner localement et supposer en conséquence que $\mathscr{F} = \mathscr{H} = \mathscr{G}$; on vérifie alors que la multiplication $\mathscr{G} \times \mathscr{G} \to \mathscr{G}$ passe au quotient et induit un morphisme de $\mathscr{G}$-faisceaux de $\mathscr{G} \times^{\mathscr{G}} \mathscr{G}$ vers $\mathscr{G}$ qui est un isomorphisme (de réciproque induite par $g \mapsto (g, e)$ aussi bien que par $g \mapsto (e, g)$).

La formation du produit contracté de deux $\mathscr{G}$-torseurs définit une loi de composition interne sur $\mathsf{T}(\mathscr{G})$ qui en fait un groupe abélien. Expliquons brièvement pourquoi. L'associativité vient du fait qu'on peut identifier aussi bien $(\mathscr{F} \times^{\mathscr{G}} \mathscr{H}) \times^{\mathscr{G}} \mathscr{K}$ que $\mathscr{F} \times^{\mathscr{G}} (\mathscr{H} \times^{\mathscr{G}} \mathscr{K})$ avec le quotient de $\mathscr{F} \times \mathscr{H} \times \mathscr{K}$ sous l'action de $\mathscr{G} \times \mathscr{G}$ donnée par les formules

$$(g, \gamma) \cdot (f, h, k) = (g^{-1} f, \gamma^{-1} gh, \gamma k).$$

La commutativité provient de l'isomorphisme évident $\mathscr{F} \times^{\mathscr{G}} \mathscr{H} \simeq \mathscr{H} \times^{\mathscr{G}} \mathscr{F}$. La classe du $\mathscr{G}$-torseur trivial est neutre car pour tout $\mathscr{G}$-torseur $\mathscr{F}$, le morphisme de faisceaux de $\mathscr{F} \times \mathscr{G}$ vers $\mathscr{F}$ donné par la formule $(f, g) \mapsto gf$ passe au quotient et induit un morphisme de $\mathscr{G}$-faisceaux (et donc un isomorphisme puisqu'il s'agit de $\mathscr{G}$-torseurs) de $\mathscr{F} \times^{\mathscr{G}} \mathscr{G}$ vers $\mathscr{G}$. Enfin, soit $\mathscr{F}$ un $\mathscr{G}$-torseur ; notons $\mathscr{F}'$ le $\mathscr{G}$-faisceau dont le faisceau sous-jacent est $\mathscr{F}$ et dont l'action est donnée par la formule

$$g \cdot f = \underbrace{g^{-1} f}_{\text{au sens de l'action donnée de } \mathscr{G} \text{ sur } \mathscr{F}}.$$

Le morphisme de faisceaux $\mathscr{F} \times \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ donné par la formule $(f_1, f_2) \mapsto f_1 f_2^{-1}$ induit alors par passage au quotient un morphisme de $\mathscr{G}$-ensembles (et donc un isomorphisme puisqu'il s'agit de $\mathscr{G}$-torseurs) de $\mathscr{F} \times^{\mathscr{G}} \mathscr{F}'$ vers $\mathscr{G}$: la classe d'isomorphie de $\mathscr{F}'$ est donc l'inverse de celle de $\mathscr{F}$.

Montrons que la bijection $\mathsf{T}(\mathscr{G}) \to \mathrm{H}^1(\mathscr{G})$ est un morphisme de groupes. Donnons-nous deux pour ce faire deux $\mathscr{G}$-torseurs $\mathscr{F}$ et $\mathscr{H}$, ainsi qu'un recouvrement ouvert $\mathscr{U} = (U_i)$ trivialisant les deux. Choisissons $(f_i) \in \prod \mathscr{F}(U_i)$ et $(h_i) \in \prod \mathscr{H}(U_i)$. Notons k_i la section de $\mathscr{F} \times^{\mathscr{G}} \mathscr{K}$ sur U_i égale à la classe de (f_i, h_i). Soient i et j deux indices. On a dans $\mathscr{F} \times^{\mathscr{G}} \mathscr{K}(U_i \cap U_j)$ les égalités

$$k_i = (f_i, g_i) = (f_i f_j^{-1})(f_j, g_i) = (f_i f_j^{-1})(g_j g_j^{-1})(f_j, g_j) = (f_i f_j^{-1})(g_j g_j^{-1}) k_j$$

(puisque une section de $\mathscr{G}$ agit sur le produit contracté par multiplication sur *l'une ou l'autre au choix* des composantes). Il vient $k_i k_j^{-1} = (f_i f_j^{-1})(g_i g_j^{-1})$, ce qui termine la démonstration.

La fonctorialité de $\mathsf{T}(\mathscr{G})$ *en* $\mathscr{G}$. — Soit $u\colon \mathscr{G} \to \mathscr{H}$ un morphisme de faisceaux en groupes sur X. Soit $\mathscr{F}$ un $\mathscr{G}$-ensemble. Faisons agir $\mathscr{G}$ sur $\mathscr{H} \times \mathscr{F}$ par la formule $g \cdot (h, f) = (hu(g)^{-1}, gf)$. Le quotient

$$\mathscr{H} \times^{\mathscr{G}} \mathscr{F} := \mathscr{G} \backslash (\mathscr{H} \times \mathscr{F})$$

est appelé là encore le *produit contracté* de $\mathscr{H}$ et $\mathscr{F}$. Il hérite d'une structure naturelle de $\mathscr{H}$-faisceau, donné par la formule $k \star (h, f) = (kh, f)$ qui passe visiblement au quotient (ici k désigne donc une section de $\mathscr{H}$). Supposons de plus que $\mathscr{F}$ soit un $\mathscr{G}$-torseur ; nous allons montrer que $\mathscr{H} \times^{\mathscr{G}} \mathscr{F}$ est un $\mathscr{H}$-torseur. La propriété est locale sur X, ce qui permet de supposer que $\mathscr{F} = \mathscr{G}$. On vérifie alors aussitôt que le morphisme de faisceaux de $\mathscr{H} \times \mathscr{G}$ vers $\mathscr{H}$ donné par la formule $(h, g) \mapsto hu(g)$ passe au quotient et induit un isomorphisme de $\mathscr{H}$-faisceaux de $\mathscr{H} \times^{\mathscr{G}} \mathscr{G}$ vers $\mathscr{H}$ (de réciproque induite par $h \mapsto (h, e)$).

Cette construction définit une application $\mathsf{T}(\mathscr{G}) \to \mathsf{T}(\mathscr{H})$. Celle-ci est un morphisme d'ensembles pointés, puisqu'on a vu $\mathscr{H} \times^{\mathscr{G}} \mathscr{G} \simeq \mathscr{H}$. Dans le cas où $\mathscr{G}$ et $\mathscr{H}$ sont abéliens, c'est un morphisme de groupes. Il suffit en effet pour le voir de montrer que si $\mathscr{F}$ et $\mathscr{K}$ sont deux $\mathscr{G}$-torseurs, on a un isomorphisme de $\mathscr{H}$-torseurs

$$\mathscr{H} \times^{\mathscr{G}} (\mathscr{F} \times^{\mathscr{G}} \mathscr{K}) \simeq (\mathscr{H} \times^{\mathscr{G}} \mathscr{F}) \times^{\mathscr{H}} (\mathscr{H} \times^{\mathscr{G}} \mathscr{K}).$$

Nous vous laissons vérifier que les formules $(h, f, k) \mapsto ((h, f), (e, k))$ et $(h_1, kf), (h_2, k)) \mapsto (h_1 h_2, (f, k))$ induisent effectivement un tel isomorphisme.

L'isomorphisme de foncteurs $\mathsf{T} \simeq \mathrm{H}^1$. — Montrons enfin que l'isomorphisme entre $\mathsf{T}(\mathscr{G})$ et $\mathrm{H}^1(\mathscr{G})$ est fonctoriel en $\mathscr{G}$. Donnons-nous donc un morphisme $u\colon \mathscr{G} \to \mathscr{H}$ de faisceaux en groupes sur X, et un $\mathscr{G}$-torseur $\mathscr{F}$. Soit $\mathscr{U} = (U_i)$ un recouvrement ouvert de X trivialisant $\mathscr{F}$. Pour tout i, donnons-nous une section f_i de $\mathscr{F}$ sur U_i, et notons k_i la section de $\mathscr{H} \times^{\mathscr{G}} \times \mathscr{F}$ sur U_i égale à la classe de (e, f_i) (son existence montre que $\mathscr{H} \times^{\mathscr{G}} \times \mathscr{F}$ est trivial sur U_i, mais on le savait déjà, puisqu'on avait remarqué que la formation du produit contracté avec $\mathscr{H}$ préserve les torseurs triviaux).

Pour tout (i, j) on a alors les égalités

$$k_i = (e, fi) = (e, (f_i f_j^{-1}) f_j) = (u(f_i f_j^{-1}), f_j) = u(f_i f_j^{-1})(e, f_j) = u(f_i f_j^{-1}) k_j$$

dans $(\mathscr{H} \times^{\mathscr{G}} \times \mathscr{F})(U_i \cap U_j)$, si bien que $k_i k_j^{-1} = u(f_i f_j^{-1})$ (on a utilisé la formule $(h, gk) = (hu(g), k)$ valable qui vaut dans $\mathscr{H} \times^{\mathscr{G}} \mathscr{K}$) par définition du produit contracté). L'image dans $\mathrm{H}^1_{\mathscr{U}}(\mathscr{H})$ de la classe de cohomologie de $(f_i f_j^{-1})$ (qui est la classe associée à $\mathscr{F}$) est donc la classe de cohomologie de $(k_i k_j^{-1})$ (qui est la classe associée à $\mathscr{H} \times^{\mathscr{G}} \times \mathscr{F}$) ; ceci achève la démonstration.

2. Suite exacte longue de cohomologie

2.1. Construction de la suite exacte. — Si $\mathscr{F}$ est un faisceau sur X, l'ensemble $\mathscr{F}(X)$ de ses sections globales est souvent noté $\mathrm{H}^0(\mathscr{F})$.

Soit maintenant

$$1 \longrightarrow \mathscr{K} \xrightarrow{u} \mathscr{G} \xrightarrow{p} \mathscr{H} \longrightarrow 1$$

une suite exacte de faisceaux en groupes sur X. On dispose alors d'une suite exacte d'ensemble pointés

$$1 \to \mathrm{H}^0(\mathscr{K}) \to \mathrm{H}^0(\mathscr{G}) \to \mathrm{H}^0(\mathscr{H}) \to \mathrm{H}^1(\mathscr{K}) \to \mathrm{H}^1(\mathscr{G}) \to \mathrm{H}^1(\mathscr{H})$$

(ce qui veut dire que l'image d'une flèche est égale à l'image réciproque de l'élément distingué par la flèche suivante) dont nous allons d'abord décrire la construction. Les flèches entre deux H^i avec $i = 0$ ou 1 sont simplement celles déduites de u ou p par la fonctorialité des constructions. Il reste à décrire la flèche de $\mathrm{H}^0(\mathscr{H})$ dans $\mathrm{H}^1(\mathscr{K})$ et nous allons le faire de deux façons – la vérification qu'elles sont équivalentes est facile et est laissée au lecteur. À partir de maintenant, nous utilisons l'injection u pour identifier $\mathscr{K}$ à un sous-faisceau de $\mathscr{G}$.

Construction via *les cocycles.* — Soit $h \in \mathrm{H}^0(\mathscr{H})$. Comme $\mathscr{G} \to \mathscr{H}$ est surjective, il existe un recouvrement ouvert $\mathscr{U} = (U_i)$ de X et, pour tout i, un antécédent g_i de h dans $\mathscr{G}(U_i)$. Pour tout (i, j), l'élément $g_i g_j^{-1}$ de $\mathscr{G}(U_i \cap U_j)$ appartient alors au noyau de $\mathscr{G}(U_i \cap U_j) \to \mathscr{H}(U_i \cap U_j)$, c'est-à-dire à $\mathscr{K}(U_i \cap U_k)$. La famille $(g_i g_j^{-1})$ définit ainsi un cocycle à coefficient dans $\mathscr{K}$ et subordonné à $\mathscr{U}$; on envoie alors h sur la classe de cohomologie de ce cocycle (vue d'abord dans $\mathrm{H}^1_{\mathscr{U}}(\mathscr{K})$, puis poussée dans $\mathrm{H}^1(\mathscr{K})$).

Construction via *les torseurs.* — Soit $h \in \mathrm{H}^0(\mathscr{H})$. Pour tout ouvert U de X, notons $\tau(h)(U)$ l'ensemble des antécédents de h dans $\mathscr{G}(U)$. Il est clair que $\tau(h)(U)$ est stable sous translation à gauche par les éléments de $\mathscr{K}(U)$ et qu'il est ou bien vide, ou bien une classe à gauche modulo $\mathscr{K}(U)$. De plus, par définition de la surjectivité faisceautique, il existe un recouvrement ouvert (U_i) de X tel que $\tau(h)(U_i)$ soit non vide pour tout i. Il en résulte en vertu de la question 3 que $\tau(h)$ est un $\mathscr{K}$-torseur ; on envoie alors h sur l'élément de $\mathrm{H}^1(\mathscr{K})$ associé à $\tau(h)$.

2.2. Vérification de son exactitude. — L'exactitude en $\mathrm{H}^0(\mathscr{K})$ et $\mathrm{H}^0(\mathscr{G})$ résulte du cours. On peut démontrer l'exactitude en les autres termes par des calculs de cocycles que nous vous laissons en exercice ; mais on peut aussi le faire en utilisant les torseurs, c'est-à-dire en fait prouver l'exactitude de la suite

$$1 \to \mathrm{H}^0(\mathscr{K}) \to \mathrm{H}^0(\mathscr{G}) \to \mathrm{H}^0(\mathscr{H}) \to \mathsf{T}(\mathscr{K}) \to \mathsf{T}(\mathscr{G}) \to \mathsf{T}(\mathscr{H})$$

déduite de la précédente *via* l'isomorphisme de foncteurs $\mathsf{T} \simeq \mathrm{H}^1$. Nous allons expliquer succinctement comment procéder.

Exactitude en $\mathrm{H}^0(\mathscr{H})$. — Soit h un élément de $\mathrm{H}^0(\mathscr{H})$. Son image dans $\mathsf{T}(\mathscr{K})$ est la classe d'isomorphie de $\tau(h)$. Cette classe est triviale si et seulement si $\tau(h)$ a une section globale, c'est-à-dire si et seulement si h possède un antécédent par p dans $\mathscr{G}(X)$.

Exactitude en $\mathrm{T}(\mathscr{K})$. — Soit $\mathscr{F}$ un $\mathscr{K}$-torseur. Il s'agit de montrer que $\mathscr{G} \times^{\mathscr{K}} \mathscr{F}$ est trivial si et seulement si la classe d'isomorphie de $\mathscr{F}$ provient d'un élément h de $\mathrm{H}^0(\mathscr{H})$, ce qui revient à demander que $\mathscr{F}$ soit isomorphe à $\tau(h)$.

Supposons donc que $\mathscr{F}$ soit de la forme $\tau(h)$ avec $h \in \mathrm{H}^0(\mathscr{H})$. Par surjectivité de p il existe un recouvrement ouvert (U_i) de X et, pour tout i, un antécédent g_i de h dans $\mathscr{G}(U_i)$. Pour tout i, notons s_i la section (g_i^{-1}, g_i) du produit contracté $\mathscr{G} \times^{\mathscr{K}} \mathscr{F}$ sur U_i (ici g_i^{-1} est vu comme section de $\mathscr{G}$ et g_i comme une section de $\mathscr{F} = \tau(h)$). Soient i et j deux indices. Comme g_i et g_j sont deux antécédents de h il existe $k \in \mathscr{K}(U_i \cap U_j)$ tels que $g_i = kg_j$ dans $\mathscr{G}(U_i \cap U_j)$. On a alors dans $(\mathscr{G} \times^{\mathscr{K}} \mathscr{F})(U_i \cap U_j)$ les égalités

$$s_i = (g_i^{-1}, g_i) = (g_j^{-1}k^{-1}, g_i) = (g_j^{-1}, k^{-1}g_i) = (g_j^{-1}, g_j) = s_j.$$

Par conséquent les s_i se recollent en une section du $\mathscr{G}$-torseur $\mathscr{G} \times^{\mathscr{K}} \mathscr{F}$, qui est ainsi trivial.

Pour la réciproque, commençons par noter que la formule $(g, f) \mapsto p(g)$ passe au quotient et induit un morphisme de faisceaux $\rho\colon \mathscr{G} \times^{\mathscr{K}} \mathscr{F} \to \mathscr{H}$: cela provient du fait que $p(gk^{-1}) = p(g)$ pour tout section k de $\mathscr{K}$. Supposons que $\mathscr{G} \times^{\mathscr{K}} \mathscr{F}$ soit trivial et soit s une section globale d'icelui. Posons $h = \rho(s)^{-1}$. Soit f une section de $\mathscr{F}$ sur un ouvert U de X. Soit $\gamma(f)$ l'unique section de $\mathscr{G}$ sur U telle que $\gamma(f)s = (e, f)$ (en tant que sections du $\mathscr{G}$-torseur $\mathscr{G} \times^{\mathscr{K}} \mathscr{F}$ sur U). On a alors $s = \gamma(f)^{-1}(e, f) = (\gamma(f)^{-1}, f)$, si bien que $h^{-1} = \rho(s) = p(\gamma(f))^{-1}$; par conséquent $p(\gamma(f)) = h$ et $\gamma(f)$ est ainsi une section de $\tau(h)$. Il est immédiat que γ définit un morphisme de $\mathscr{K}$-faisceaux de $\mathscr{F}$ vers $\tau(h)$, qui est un isomorphisme puisque tous deux sont des torseurs.

Exactitude en $\mathrm{T}(\mathscr{G})$. — Soit $\mathscr{F}$ un $\mathscr{G}$-torseur. Il s'agit de démontrer que $\mathscr{H} \times^{\mathscr{G}} \mathscr{F}$ est trivial si et seulement si $\mathscr{F}$ est de la forme $\mathscr{G} \times^{\mathscr{K}} \mathscr{R}$ pour un certain $\mathscr{K}$-torseur $\mathscr{R}$.

Supposons donc $\mathscr{F}$ de la forme $\mathscr{G} \times^{\mathscr{K}} \mathscr{R}$ avec $\mathscr{R}$ comme ci-dessus. La formule

$$(h, g, r) \mapsto hp(g)^{-1}$$

passe alors au quotient et induit un morphisme de $\mathscr{H}$-faisceaux de $\mathscr{H} \times^{\mathscr{G}} (\mathscr{G} \times^{\mathscr{K}} \mathscr{R})$ vers $\mathscr{H}$, qui est un isomorphisme puisque ses source et but sont des torseurs, et

$$\mathscr{H} \times^{\mathscr{G}} \mathscr{F} = \mathscr{H} \times^{\mathscr{G}} (\mathscr{G} \times^{\mathscr{K}} \mathscr{R})$$

est en conséquence trivial. Le passage au quotient se vérifie comme suit : il faut s'assurer que

$$(\gamma, k) \cdot (h, g, r) = (hp(\gamma)^{-1}, \gamma g k^{-1}, kr)$$

a même image que (h, g, r), où γ est une section de $\mathscr{G}$ et k une section de $\mathscr{K}$; mais c'est immédiat en vertu du fait que $p(k) = e$.

Réciproquement, supposons que $\mathscr{H} \times^{\mathscr{G}} \mathscr{F}$ est trivial, et choisissons-en une section s. Pour tout ouvert U de X, notons $\mathscr{R}(U)$ l'ensemble des sections f de $\mathscr{F}$ sur U telles que $(e, f) = s$. Il est immédiat que $\mathscr{R}$ est un sous-faisceau de $\mathscr{F}$. Si f est une section de $\mathscr{R}$ et k une section de $\mathscr{K}$ sur un ouvert U donné, on a $(e, kf) = (ep(k), f) = (e, f) = s$; ainsi, $\mathscr{R}$ est stable sous l'action de $\mathscr{K}$ et hérite donc d'une structure naturelle de $\mathscr{K}$-faisceau. Montrons que c'est un $\mathscr{K}$-torseur. Choisissons un recouvrement ouvert (U_i) de X tel que $s|_{U_i}$ soit de la forme (h_i, f_i) (où $h_i \in \mathscr{H}(U_i)$ et $f_i \in \mathscr{F}(U_i)$). Quitte à raffiner le recouvrement (U_i), on peut supposer que chacun des h_i s'écrit $p(g_i)$ pour

une certaine section g_i de $\mathscr{G}$ sur U_i. Mais on a alors $s = (p(g_i), f_i) = (e, g_i f_i)$ dans $(\mathscr{H} \times^{\mathscr{G}} \mathscr{F})(U_i)$, et $g_i f_i$ apparaît ainsi comme une section de $\mathscr{R}$ sur U_i ; par conséquent, $\mathscr{R}$ a localement des sections. Par ailleurs, soient f_1 et f_2 deux sections de $\mathscr{R}$ sur un même ouvert U de X. L'égalité $(e, f_1) = (e, f_2)$ comme sections du produit contracté $\mathscr{H} \times^{\mathscr{G}} \mathscr{F}$ entraîne l'existence locale, puis globale sur U par unicité, d'une section k de $\mathscr{K}$ telle que $kf_1 = f_2$, section qui est nécessairement unique (nos deux assertions d'unicité proviennent du fait que $\mathscr{F}$ est un $\mathscr{G}$-torseur). Ainsi, $\mathscr{R}$ est un $\mathscr{K}$-torseur. La formule $(g, f) \mapsto gf$ passe alors au quotient et définit un morphisme de $\mathscr{G}$-faisceaux de $\mathscr{G} \times^{\mathscr{K}} \mathscr{R}$ vers $\mathscr{F}$, qui est nécessairement un isomorphisme puisque sa source et son but sont des $\mathscr{G}$-torseurs.

3. Torseurs et fibrés vectoriels

Dans le cours, nous avons vu que le groupe des classes d'isomorphie de fibrés en droites (c'est-à-dire de $\mathscr{O}_X$-modules localement libres de rang 1) sur un espace localement annelé $(X, \mathscr{O}_X)$ trivialisés par un recouvrement ouvert $\mathscr{U}$ s'identifie au groupe $\mathrm{H}^1_{\mathscr{U}}(\mathbf{G}_{\mathrm{m}})$, où $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$ est le «groupe multiplicatif», c'est-à-dire le faisceau qui envoie un ouvert U sur $\mathscr{O}_X(U)^\times$.

Par ailleurs ce groupe est également censé, par ce qui précède, classer les $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$-torseurs trivialisés par $\mathscr{U}$ à isomorphisme près. Le but de ce qui suit est de décrire directement (sans passer par les cocycles) un lien entre fibrés en droites et $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$-torseurs, ou plus généralement entre $\mathscr{O}_X$-modules localement libres de rang n et $\mathbf{GL}_n$-torseurs. Nous laisserons beaucoup de vérifications au lecteur, à titre d'exercice.

On fixe pour le reste de la section un espace annelé $(X, \mathscr{O}_X)$ (il n'est en fait pas nécessaire qu'il soit *localement* annelé).

3.1. Le torseur des bases. — Pour tout entier n, on note $\mathbf{GL}_n$ le faisceau en groupes $U \mapsto \mathbf{GL}_n(\mathscr{O}_X(U))$ sur X ; il est abélien si $n \leqslant 1$ (lorsque $n = 1$, c'est le faisceau $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$ dont on a parlé ci-dessus).

Soit $\mathscr{E}$ un $\mathscr{O}_X$-module localement libre de rang n. Soit U un ouvert de X. Une *base* de $\mathscr{E}$ sur U est une famille $(e_1, \ldots, e_n)$ de sections de $\mathscr{E}$ sur U telle que le morphisme induit $\mathscr{O}_U^n \to \mathscr{E}|_U$ (qui envoie $(a_1, \ldots, a_n)$ sur $\sum a_i e_i$) soit un isomorphisme. Par définition d'un $\mathscr{O}_X$-module localement libre de rang n, le faisceau $\mathscr{E}$ admet localement des bases.

Par ailleurs il est immédiat (c'est le calcul matriciel faisceautique) que si $(e_1, \ldots, e_n)$ et $(f_1, \ldots, f_n)$ sont deux bases de $\mathscr{E}$ sur un même ouvert U, il existe un unique élément g dans $(\mathbf{GL}_n(\mathscr{O}_X(U))$ tel que $ge_i = f_i$ pour tout i.

Pour tout ouvert U, notons $\mathsf{B}(\mathscr{E})(U)$ l'ensemble des bases de $\mathscr{E}$ sur U. Il est clair que $\mathsf{B}(\mathscr{E})$ est un faisceau, muni d'une action évidente de $\mathbf{GL}_n$, et il résulte de ce qui précède que c'est en fait un $\mathbf{GL}_n$-torseur, trivial si et seulement si $\mathscr{E}$ est trivial, c'est-à-dire isomorphe à $\mathscr{O}_X^n$. On dit que c'est le *torseur des bases* de $\mathscr{E}$.

3.2. Reconstitution du fibré à partir du torseur des bases. — Soit F_n la catégorie dont les objets sont les $\mathscr{O}_X$-modules localement libre de rang n et dont les flèches sont les isomorphismes de tels modules.

Il est immédiat que B est de manière naturelle un foncteur covariant de F_n vers la catégorie des $\mathbf{GL}_n$-torseurs. Ce foncteur est en fait une équivalence de catégories, et nous allons en décrire un quasi-inverse.

Soit $\mathscr{T}$ un $\mathbf{GL}_n$-torseur. On note $\mathsf{E}(\mathscr{T})$ le quotient faisceautique de $\mathscr{O}_X^n \times \mathscr{T}$ sous l'action de $\mathbf{GL}_n$ donnée par la formule $g(v,t) = ({}^t g^{-1} v, gt)$ (où la transposition est ici à prendre au sens de la dualité). Il est immédiat que les formules $\lambda(v,t) = (\lambda v, t)$, où λ est une section de $\mathscr{O}_X$, passent au quotient et font de $\mathsf{E}(\mathscr{T})$ un $\mathscr{O}_X$-module.

Nous vous laissons démontrer à titre d'exercice que $\mathsf{E}(\mathscr{T})$ est localement libre de rang n, et que B et E sont quasi-inverses l'un de l'autre.

3.3. Fibrés et cocycles. — Soit $\mathscr{E}$ un $\mathscr{O}_X$-module localement libre de rang n. On peut lui associer le $\mathbf{GL}_n$-torseur $\mathsf{B}(\mathscr{E})$, et partant une classe dans $\mathrm{H}^1_{\mathscr{U}}(\mathbf{GL}_n)$ pour tout recouvrement ouvert $\mathscr{U}$ de X trivialisant $\mathscr{E}$.

On voit ainsi dans le cas particulier où $n = 1$ qu'on peut associer à un fibré en droites trivialisé par un recouvrement ouvert $\mathscr{U}$ donné une classe de cohomologie dans $\mathrm{H}^1_{\mathscr{U}}(\mathbf{G}_{\mathrm{m}})$. Vérifiez à titre d'exercice qu'on retrouve la classe construite en cours.

Année universitaire 2020-2021

Antoine Ducros