Corrigé de l'examen de rattrapage du 21 juin 2010.

Exercice 1. Supposons que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$, et soit $P \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. Comme $P \in \mathcal{F}$ on a $\vec{MP} \in F$; comme $P \in \mathcal{G}$ on a $\vec{NP} \in G$. On déduit alors de l'égalité

$$\vec{MN} = \vec{MP} - \vec{NP}$$

que $\vec{MN} \in F \oplus G$.

Réciproquement, supposons que $\vec{MN} \in F \oplus G$, et écrivons $\vec{MN} = u + v$ avec $u \in F$ et $v \in G$. On a $N - M = u + v$, soit encore $M + u = N - v$; notons P le point de $\mathcal{E}$ égal à $M + u$ (et à $N - v$). Comme $P = M + u$, on a $P \in M + F = \mathcal{F}$; comme $P = N - v$, on a $P \in N + G = \mathcal{G}$. Par conséquent, $P \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ et ce dernier est non vide, ce qui achève la démonstration.

Exercice 2. Traitons tout d'abord le cas de f. L'application linéaire $\vec{f}$ est égale à $(x, y) \mapsto (-y, x)$; sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On reconnaît la matrice $R_{\pi/2}$, ce qui veut dire que $\vec{f}$ est la rotation d'angle $\pi/2$. Comme $\pi/2$ est non nul modulo 2π, il résulte du cours que f est une rotation affine d'angle $\pi/2$; il reste à trouver son centre, qui peut être caractérisé comme son unique point fixe.

On résout donc le système

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} -y & + & 1 & = & x \\ x & - & 2 & = & y \end{array} \right.$$

soit

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 1 \\ x & - & y & = & 2 \end{array} \right. ,$$

dont la solution est $x = 3/2, y = -1/2$. Ainsi, f est la rotation de centre $(3/2, -1/2)$ et d'angle $\pi/2$.

Passons maintenant à g. L'application linéaire $\vec{g}$ est donnée par la formule $(x, y) \mapsto (-y, -x)$; sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. C'est une matrice orthogonale (les deux colonnes forment une famille orthonormée) de déterminant (-1) ; il résulte du cours que $\vec{g}$ est une symétrie orthogonale et que g est une symétrie (orthogonale) glissée.

Pour déterminer l'axe et le vecteur de glissement, on commence par chercher l'axe de $\vec{g}$, qui n'est autre que son sous-espace propre associé à 1. Celui-ci est donné par le système

$$\left\{ \begin{array}{ccc} -y & = & x \\ -x & = & y \end{array} \right. ,$$

et est donc la droite vectorielle d'équation $y = -x$, que l'on peut aussi décrire comme étant égale à $\mathbb{R}.(1, -1)$.

On cherche ensuite le vecteur de glissement de g ; par définition, c'est un vecteur $v \in \mathbb{R}.(1, -1)$ caractérisé par la propriété que $t_{-v} \circ g$ admet un point fixe. Le vecteur v cherché est de la forme $(a, -a)$ avec $a \in \mathbb{R}$ et l'application

$t_{-v} \circ g$ est alors égale à $(x, y) \mapsto (-y + 1 - a, -x - 2 + a)$. Nous allons donc étudier le système

$$\left\{ \begin{array}{rcccccl} -y & + & 1 & - & a & = & x \\ -x & - & 2 & + & a & = & y \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 1 - a \\ x & + & y & = & -2 + a \end{array} \right.$$

Il possède une solution si et seulement si $1 - a = -2 + a$, c'est-à-dire si et seulement si $a = 3/2$; et l'ensemble de ses solutions est alors la droite D d'équation $x + y = 1 - a = (-1/2)$.

On en conclut que g est la symétrie (orthogonale) glissée d'axe D et de vecteur de glissement $(3/2, -3/2)$.

Exercice 3. On échelonne la matrice, avec second membre inclus.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \bullet & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & \bullet & b \\ 1 & 3 & 1 & 4 & \bullet & a \end{pmatrix}$$

$$L_2 \to L_2 - L_1, L_3 \to L_3 - L_1, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \bullet & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -3 & \bullet & b-1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & \bullet & a-1 \end{pmatrix}$$

$$L_2 \to -L_2/2, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \bullet & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 & \bullet & (1-b)/2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & \bullet & a-1 \end{pmatrix}$$

$$L_1 \to L_1 - L_2, L_3 \to L_3 - 2L_2, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1/2 & \bullet & (1+b)/2 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 & \bullet & (1-b)/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & a+b-2 \end{pmatrix}.$$

Le système étudié équivaut donc à

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x + z - t/2 & = & (1+b)/2 \\ y - 3t/2 & = & (1-b)/2 \\ 0 & = & a + b - 2 \end{array} \right.$$

Il a une solution si et seulement si $a + b - 2 = 0$; par conséquent, $\mathcal{E}$ est non vide si et seulement si $a + b - 2 = 0$. Supposons que ce soit le cas ; l'ensemble $\mathcal{E}$ est alors égal à

$$\{(-z + t/2 + (1+b)/2, 3t/2 + (1-b)/2, z, t)\}_{(z,t) \in \mathbb{R}^2},$$

soit encore à

$$\{((1+b)/2, (1-b)/2, 0, 0) + z.(-1, 0, 1, 0) + t.(1/2, 3/2, 0, 1)\}_{(z,t) \in \mathbb{R}^2}.$$

C'est donc le sous-espace affine de $\mathbb{R}^4$ passant par $((1+b)/2, (1-b)/2, 0, 0)$ et dont l'espace directeur admet pour base $((-1, 0, 1, 0), (1/2, 3/2, 0, 1))$ (il est immédiat que ces deux vecteurs sont non colinéaires, mais de toutes façons, la méthode d'échelonnement garantit *a priori* que cette famille est libre).

Exercice 4. L'espace directeur P de $\mathcal{P}$ est le plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x - 2y + 3z = 0$, ce qui peut se récrire $(1, -2, 3).(x, y, z) = 0$. Par conséquent, $u := (1, -2, 3)$ est un vecteur non nul et orthogonal à P.

Soit $M=(x,y,z)$ un élément de $\mathbb{R}^3$. Son projeté $p(M)$ sur $\mathcal{P}$ est de la forme $M+\lambda u$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$, et appartient à $\mathcal{P}$. Si $\lambda\in\mathbb{R}$, les coordonnées de $M+\lambda u$ sont égales à $(x+\lambda, y-2\lambda, z+3\lambda)$. Il s'ensuit que $M+\lambda u\in\mathcal{P}$ si et seulement si

$$x+\lambda-2y+4\lambda+3z+9\lambda=1,$$

soit si et seulement si $14\lambda=-x+2y-3z+1$.

Par conséquent,

$$p(M)=(x+(-x+2y-3z+1)/14, y-2(-x+2y-3z+1)/14, z+3(-x+2y-3z+1)/14)$$
$$=\frac{1}{14}(13x+2y-3z+1, 2x+10y+6z-2, -3x+6y+5z+3).$$

On calcule $s(M)$ en utilisant l'égalité $s(M)=M+2\,\overrightarrow{Mp(M)}$. Par conséquent,

$$s(M)=(x,y,z)+2\left[\frac{1}{14}(13x+2y-3z+1, 2x+10y+6z-2, -3x+6y+5z+3)-(x,y,z)\right]$$
$$=\frac{1}{7}(13x+2y-3z+1, 2x+10y+6z-2, -3x+6y+5z+3)-(x,y,z)$$
$$=\frac{1}{7}(6x+2y-3z+1, 2x+3y+6z-2, -3x+6y-2z+3).$$

Exercice 5. Commençons par chercher une équation de chacune des droites $(AA'), (BB'), (CC')$. Rappelons pour ce faire que A, B et C ont pour coordonnées respectives

$$(1,0,0); (0,1,0) \text{ et } (0,0,1).$$

On remarque alors :

- que la forme non nulle $z-4y$ s'annule sur les coordonnées de A et A' ; par conséquent, (AA') a pour équation $z+4y=0$;

- que la forme non nulle $z+2x$ s'annule sur les coordonnées de B et B' ; par conséquent, (BB') a pour équation $z+2x=0$;

- que la forme non nulle $x-2y$ s'annule sur les coordonnées de C et C' ; par conséquent, (CC') a pour équation $x-2y=0$.

Pour déterminer l'intersection des droites $(AA'), (BB')$ et (CC'), on résout le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} 4y+z &=& 0\\ 2x+z &=& 0\\ x-2y &=& 0\end{array}\right.$$

On échelonne la matrice correspondante.

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix}.$$

On commence par échanger L_1 et L_3, et l'on obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 0 & 4 & 1\end{pmatrix}$$

$$L_2 \to L_2 - 2L_1, \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

$$L_3 \to L_3 - L_2, \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_2 \to L_2/4, \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_1 \to L_1 + 2L_2, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le système étudié équivaut donc à

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -z/2 \\ y & = & -z/4 \end{array} \right.$$

L'ensemble de ses solutions est l'ensemble des triplets de la forme $(-z/2, -z/4, z)$ avec $z \in \mathbb{R}$.

Un point du plan est donc situé sur l'intersection des trois droites si et seulement si son triplet de coordonnées barycentriques est de la forme $(-z/2, -z/4, z)$ avec $z \in \mathbb{R}$. Compte-tenu du fait que la somme des coordonnées barycentriques d'un point est toujours égale à 1, et en vertu de l'égalité $-z/2 - z/4 + z = z/4$, on voit qu'il y a un et un seul point appartenant à $(AA') \cap (BB') \cap (CC')$, à savoir celui de coordonnées $(-z/2, -z/4, z)$ avec $z = 4$. Autrement dit, les droites $(AA'), (BB')$ et (CC') sont concourantes, et leur point de concours H a pour coordonnées $(-2, -1, 4)$.

Choisissons une orientation de $\mathcal{E}$ et soient a, b et c les aires orientées des triangles $(HBC), (HAC)$ et (HAB). Il résulte du cours que $a + b + c \neq 0$, et que les coordonnées barycentriques de H sont égales à

$$(a/(a+b+c), b/(a+b+c), c/(a+b+c)).$$

Par conséquent, $a = (-2).(a+b+c), b = (-1).(a+b+c)$, et $c = 4(a+b+c)$. Il s'ensuit que $|c| > |b|$ et que $|c| > |a|$. C'est donc le triangle (HAB) qui a la plus grande aire.