Université Paris 6
Année universitaire 2009-2010
Cours de *Géométrie affine et euclidienne* (LM 323)
Correction de l'examen terminal du 3 juin 2010.

Exercice 1. Démonstration de cours. *Fixons* un point M dans $\mathcal{E}$ (un espace affine est non vide par définition). Si $u \in \mathcal{E}$ alors $M + u$ est un point fixe de f si et seulement si on a $f(M) + u = M + u$, soit encore $f(M) + \vec{f}(u) = M + u$, que l'on peut récrire $\vec{f}(u) - u = \overrightarrow{f(M)M}$ et finalement $(\vec{f} - \mathrm{Id})(u) = \overrightarrow{f(M)M}$. Or par hypothèse, $\vec{f} - \mathrm{Id})(u)$ est bijective ; il s'ensuit qu'il existe un et un seul vecteur u dans E tel que $(\vec{f} - \mathrm{Id})(u) = \overrightarrow{f(M)M}$, soit, en vertu de ce qui précède, un unique vecteur $u \in E$ tel que $f(M + u) = M + u$.

Autrement dit, f possède un et un seul point fixe, ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 2. Un triplet (u, v, w) de nombres réels appartient à l'image de f si et seulement si le système

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} x & + & y & & & & & + & 1 & = & u \\ x & & & + & z & - & t & + & 2 & = & v \\ x & + & 3y & - & 2z & + & 2t & - & 1 & = & w \end{array}\right.$$

en les inconnues x, y et z a une solution. On peut le récrire

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} x & + & y & & & & & = & u & - & 1 \\ x & & & + & z & - & t & = & v & - & 2 \\ x & + & 3y & - & 2z & + & 2t & = & w & + & 1 \end{array}\right. .$$

Nous allons maintenant échelonner la matrice correspondante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \bullet & u-1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & \bullet & v-2 \\ 1 & 3 & -2 & 2 & \bullet & w+1 \end{pmatrix}$$

$$L_2 \to L_2 - L_1 \,;\, L_3 \to L_3 - L_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \bullet & u-1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & \bullet & -u+v-1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & \bullet & -u+w+2 \end{pmatrix}$$

$$L_2 \to -L_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \bullet & u-1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \bullet & u-v+1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & \bullet & -u+w+2 \end{pmatrix}$$

$$L_1 \to L_1 - L_2 \,;\, L_3 \to L_3 - 2L_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & \bullet & v-2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \bullet & u-v+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & -3u+2v+w \end{pmatrix}$$

Le système initial est donc équivalent à

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & & & + & z & - & t & = & v-2 \\ & & y & - & z & + & t & = & u-v+1 \\ & & & & 0 & & & = & -3u+2v+w \end{array}\right. .$$

Il a par conséquent une solution si et seulement si $-3u+2v+w=0$; autrement dit, $-3u+2v+w=0$ est une équation cartésienne de $\mathrm{Im}\, f$.

Exercice 3.

i) Soit s une similitude. Montrons tout d'abord que s possède une écriture de la forme requise. Par définition, s s'écrit $h_\lambda \circ u$ où λ est un certain réel non nul et u une isométrie. Si $\lambda > 0$, cette écriture est du type voulu. Si $\lambda < 0$ on remarque que $h_\lambda = h_{-\lambda} \circ (-\mathrm{Id})$; on a donc

$$s = h_{-\lambda} \circ (-\mathrm{Id}) \circ u = h_{-\lambda} \circ ((-\mathrm{Id}) \circ u).$$

Mais comme u et $-\mathrm{Id}$ sont des isométries, $(-\mathrm{Id}) \circ u$ est une isométrie ; le réel $(-\lambda)$ étant par ailleurs strictement positif, on obtient bien une écriture de s de la forme requise.

Établissons maintenant son unicité. Supposons donc que l'on a

$$s = h_\lambda \circ u = h_{\lambda'} \circ u'$$

où λ et λ' sont strictement positifs et où u et u' sont des isométries. Comme E est par hypothèse de dimension strictement positive, E est non nul ; choisissons un vecteur non nul x dans E.

L'on a $||s(x)|| = ||h_\lambda(u(x))|| = |\lambda|.||u(x)||$. Cette expression est égale à $\lambda.||u(x)||$ (car $\lambda > 0$) et finalement à $\lambda.||x||$ (car u est une isométrie). On a de même $||s(x)|| = \lambda'.||x||$. Par conséquent, $\lambda.||x|| = \lambda'.||x||$; comme x est non nul, ceci implique que $\lambda = \lambda'$. On a dès lors $h_\lambda \circ u = h_\lambda \circ u'$; en composant à gauche des deux côtés par $h_{\lambda^{-1}}$, l'on obtient $u = u'$, ce qui achève de prouver l'unicité de l'écriture étudiée.

ii) Pour établir l'assertion demandée il suffit, d'après le cours (ou encore d'après l'exercice 1), de vérifier que $s - \mathrm{Id}$ est bijective ; comme E est de dimension finie (par définition d'un espace euclidien), cela revient à vérifier que 1 n'est pas valeur propre de s.

Soit x un vecteur de E appartenant au noyau de $s - \mathrm{Id}$; écrivons s sous la forme $h_\lambda \circ u$ où $\lambda > 0$ et où u est une isométrie (*cf.* question précédente). On a vu lors de la preuve de i) que $||s(x)|| = \lambda.||x||$; comme $x \in \mathrm{Ker}\ (s - \mathrm{Id})$, on a $s(x) = x$; on peut donc écrire $||x|| = \lambda.||x||$, soit encore $(\lambda - 1).||x|| = 0$. Or λ, qui n'est autre que le rapport de s, est par hypothèse différent de 1 ; il s'ensuit que $x = 0$. On a démontré que $\mathrm{Ker}\ (s - \mathrm{Id})$ est nul, c'est-à-dire que 1 n'est pas valeur propre de s, ce que nous souhaitions établir.

iii) Dans ce qui suit, les coordonnées évoquées seront toujours relatives à $\mathcal{R}$. Par définition d'une homothétie, on a $\overrightarrow{Af(M)} = -2\ \overrightarrow{AM}$ pour tout point M de $\mathcal{E}$. Si l'on désigne par x et y les coordonnées de M et par x' et y' celles de $f(M)$, on a donc $x' - 1 = -2(x-1)$ et $y' - 1 = -2(y-1)$, d'où les formules $x' = -2x + 3; y' = -2y + 3$.

Soit s la réflexion d'axe D. Si M est un point du plan de coordonnées (x, y) la droite orthogonale à D passant par M est l'ensemble des points dont la première coordonnée est égale à x ; elle coupe D en le point de corrdonnées $(x, 1)$ qui est donc le projeté orthogonal $p(M)$ de M sur D. Comme $s(M) = p(M) + \overrightarrow{Mp(M)}$, les coordonnées de $s(M)$ dans $\mathcal{R}$ sont $(x, 1) + (x - x, 1 - y) = (x, 2 - y)$.

L'application g est égale à $t_{(3,0)} \circ s$. Si M est un point du plan de coordonnées (x, y) et si x' et y' désignent les coordonnées de $g(M)$ l'on a donc $x' = x + 3$ et $y' = 2 - y$.

Enfin, donnons les formules qui correspondent à $f \circ g$. Si M est un point du plan de coordonnées (x, y) et si x' et y' désignent les coordonnées de $f \circ g(M)$ l'on a $x' = -2(x+3)+3$ et $y' = -2(2-y)+3$, soit $x' = -2x-3$ et $y' = 2y-1$.

L'application linéaire associée à f est l'homothétie vectorielle h_{-2} de rapport (-2) ; l'application linéaire associée à g est la réflexion vectorielle σ par rapport à la droite vectorielle qui dirige D.

Par conséquent, l'application linéaire associée à $f \circ g$ est

$$h_{-2} \circ \sigma = h_2 \circ ((-\mathrm{Id}) \circ \sigma).$$

Comme E est de dimension paire, $-\mathrm{Id}$ est une isométrie directe E ; quant à σ, c'est une isométrie indirecte de E ; il en découle que $(-\mathrm{Id}) \circ \sigma$ est une isométrie indirecte de E. L'égalité $f \circ g = h_2 \circ ((-\mathrm{Id}) \circ \sigma)$ implique alors que $f \circ g$ est une similitude indirecte de rapport 2.

Par définition, le centre de $f \circ g$ est son unique point fixe. On trouve ses coordonnées en résolvant le système $x = -2x - 3$ et $y = 2y - 1$; on obtient $x = -1$ et $y = 1$.

v) Soit s une similitude de E et soient x et y deux vecteurs orthogonaux de E. Par définition, s s'écrit $h_\lambda \circ u$ pour un certain réel λ non nul et une certaine isométrie u de E. On a $s(x).s(y) = \lambda u(x).\lambda u(y) = \lambda^2 u(x).u(y)$. Comme u est une isométrie et comme x et y sont orthogonaux, on a $u(x).u(y) = 0$, et par conséquent $s(x).s(y) = 0$; ainsi, s préserve l'orthogonalité.

Réciproquement, soit s une bijection linéaire de E dans E préservant l'orthogonalité et soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

Comme s est bijective, $(s(e_1), \ldots, s(e_n))$ est une base de E ; comme s est orthogonale, la base $(s(e_1), \ldots, s(e_n))$ est orthogonale.

Soient i et j deux entiers compris entre 1 et n. On a

$$(e_i + e_j).(e_i - e_j) = ||e_i||^2 - ||e_j||^2 = 1 - 1 = 0 \;;$$

comme s préserve l'orthogonalité, $(s(e_i) + s(e_j)).(s(e_i) - s(e_j)) = 0$, ce qui signifie que $||s(e_i)||^2 = ||s(e_j)||^2$; ceci valant pour tout couple (i, j), les vecteurs $s(e_i)$ ont tous la même norme λ, nécessairement non nulle (ils appartiennent à une base). Soit u l'endomorphisme $h_{1/\lambda} \circ s$ de E. La base

$$(u(e_1), \ldots, u(e_n)) = (s(e_1)/\lambda, \ldots, s(e_n)/\lambda)$$

est alors orthonormée ; comme $(e_1, \ldots, e_n)$ est elle-même orthonormée, u est une isométrie. Mais on a $s = h_\lambda \circ h_{1/\lambda} \circ s = h_\lambda \circ u$; par conséquent, s est une similitude.

Exercice 4. Premier exercice.

i) Soit $<\;|\;>$un produit scalaire sur E tel que $< u|u >=< v|v >= 1$ et $< u|v >= \lambda$. Soient x et y deux vecteurs de E ; comme (u, v) est une base de

E, on peut écrire $x = au + bv$ et $y = a'u + b'v$ avec a, b, a' et b' dans $\mathbb{R}$. L'on a alors

$$< x|y >= aa' < u|u > +ab' < u|v > +ba' < v|u > +bb' < v|v >$$

$$= aa' + \lambda(ab' + ba') + bb' \quad (*) \quad .$$

On voit donc qu'il y a au plus un produit scalaire satisfaisant les conditions requises : l'application de E^2 dans $\mathbb{R}$ donnée par la formule $(*)$.

ii) L'inégalité de Cauchy-Schwartz assure que $| < u|v > | \leqslant ||u||.||v|| = 1$; de plus, on sait que l'on a égalité si et seulement si u et v sont liés, ce qui n'est pas le cas ici. Par conséquent, $| < u|v > | < 1$; autrement dit, $-1 < \lambda < 1$.

iii) Considérons l'application $< | >$ de E^2 dans $\mathbb{R}$ qui envoie un couple (x, y) de vecteurs de coordonnées respectives (a, b) et (a', b') dans la base (u, v) sur $aa' + \lambda(ab' + ba') + bb'$; nous allons montrer qu'elle répond à la question.

Il résulte de sa définition même que $< u|u >=< v|v >= 1$ et $< u|v >= \lambda$; la bilinéarité et la symétrie de $< | >$ découlent immédiatement de la formule qui la décrit. Il reste à s'assurer qu'elle est définie positive ; cela revient à vérifier que pour tout couple (a, b) de réels non tous deux nuls, on a $a^2 + b^2 + 2\lambda ab > 0$.

Soit donc (a, b) un couple de réels. On a

$$a^2 + b^2 + 2\lambda ab = (a + \lambda b)^2 + (1 - \lambda^2)b^2.$$

Comme $-1 < \lambda < 1$, on a $1 - \lambda^2 > 0$ et l'expression étudiée est donc positive ou nulle ; de plus, elle est nulle si et seulement si $b = 0$ et $a - \lambda b = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $a = b = 0$; par conséquent, $< | >$ est bien définie positive, ce qui achève la démonstration.

iv) Soit $< | >$ un produit scalaire sur E pour lequel u et v sont unitaires ; posons $\lambda =< u|v >$. On a alors $< w|w >=< au + bv|au + bv >= a^2 + b^2 + 2\lambda ab$; par conséquent, w est unitaire pour $< | >$ si et seulement si $\lambda = \dfrac{1 - a^2 - b^2}{2ab}$ (rappelons que a et b sont tous deux non nuls).

On en déduit que l'existence d'un produit scalaire pour lequel u, v et w sont unitaires équivaut à l'existence d'un produit scalaire pour lequel u et v sont unitaires et tel que

$$< u|v >= \frac{1 - a^2 - b^2}{2ab}.$$

Il résulte des questions ii) et iii) qu'un tel produit scalaire existe si et seulement si

$$-1 < \frac{1 - a^2 - b^2}{2ab} < 1.$$

v) Commençons par quelques remarques. Supposons qu'il existe un produit scalaire sur E tel que $\vec{OA}, \vec{OB}$ et $\vec{OC}$ soient tous trois unitaires ; dans ce cas O est situé à égale distance des trois sommets du triangle (ABC), et est donc le centre de son cercle circonscrit.

Réciproquement , supposons qu'il existe un produit scalaire $< | >$ relativement auquel O soit le centre du cercle circonscrit à (ABC) ; dans ce cas, $\vec{OA}, \vec{OB}$ et $\vec{OC}$ ont tous trois même norme, disons λ ; mais $< | > /\lambda$ est alors encore un produit scalaire (c'est évident) pour lequel $\vec{OA}, \vec{OB}$ et $\vec{OC}$ sont unitaires.

L'exercice revient donc à chercher une condition nécessaire et suffisante sur (α, β, γ) pour qu'il existe un produit scalaire sur E relativement auquel $\vec{OA}, \vec{OB}$ et $\vec{OC}$ soient unitaires.

Par définition de α, β et γ l'on a $\alpha \vec{OA} + \beta \vec{OB} + \gamma \vec{OC} = 0$; comme γ est non nul ceci peut se récrire

$$\vec{OC} = (-\alpha/\gamma) \vec{OA} + (-\beta/\gamma) \vec{OB} \ .$$

Comme (ABC) est un repère affine, $(\vec{OA}, \vec{OB})$ est une base de E ; par ailleurs, $(-\alpha/\gamma)$ et $(-\beta/\gamma)$ sont non nuls.

On déduit alors de la question iv) qu'il existe un produit scalaire sur E relativement auquel $\vec{OA}, \vec{OB}$ et $\vec{OC}$ soient unitaires si et seulement si

$$-1 < \frac{1 - (\alpha^2/\gamma^2) - (\beta^2/\gamma^2)}{2(\alpha\beta/\gamma^2)} < 1,$$

ce que l'on peut récrire

$$-1 < \frac{\gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2}{2\alpha\beta} < 1 \ .$$

C'est la condition nécessaire et suffisante demandée par l'énoncé.

Posons $\alpha = \beta = 1/10$ et $\gamma = 4/5$. On a alors

$$\frac{\gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2}{2\alpha\beta} = \frac{(64/100) - (2/100)}{2/100} = 31 \notin]-1; 1[.$$

Si O désigne le point de $\mathcal{E}$ de coordonnées barycentriques (α, β, γ) dans (ABC), il résulte de ce qui précède qu'il n'existe pas de produit scalaire sur E relativement auquel O soit le centre du cercle circonscrit à (A, B, C).

Second exercice.

i) Soit N un point de Δ. On a $\rho(N) = N$: comme ρ est une isométrie, $|| \overrightarrow{\rho(N)\rho(M)} || = || \vec{NM} ||$; autrement dit, $|| \overrightarrow{N\rho(M)} || = || \vec{NM} ||$. Par conséquent, tout point de Δ est équidistant de M et $\rho(M)$, et est donc situé sur le plan médiateur du segment $[M\rho(M)]$; ainsi, la droite Δ est bien contenue dans le plan en question.

ii) Soit H le plan orthogonal à Δ et contenant P. Comme $\vec{PQ}$ est orthogonal à Δ (puisque Δ est contenue dans le plan médiateur de $[PQ]$), le point Q appartient à H. Soit I l'intersection de Δ et H.

Se donner une rotation d'axe Δ, c'est se donner une rotation du plan H de centre I (à une rotation ρ d'axe Δ on fait correspondre $r_{|H}$; à une rotation r de H on fait correspondre l'unique application affine ρ de $\mathcal{E}$ dans lui-même telle que $\rho(x) = x$ pour tout $x \in \Delta$ et $\rho(x) = r(x)$ pour tout $r \in H$).

Il suffit donc de montrer qu'il existe une et une seule rotation du plan H de centre I qui envoie P sur Q ou encore une unique rotation vectorielle du plan directeur de H envoyant $\vec{IP}$ sur $\vec{IQ}$; mais ce dernier point est clair, compte-tenu du fait que I est sur Δ et partant sur le plan médiateur de $[PQ]$, ce qui entraîne que $|| \vec{IP} || = || \vec{IQ} ||$.

iii) Commençons par l'unicité ; on suppose donc donné un triplet (ρ_1, ρ_2, ρ_3) satisfaisant aux conditions requises, et l'on veut montrer qu'il est uniquement déterminé. On note O le point de concours de $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$; on choisit un point M sur $\mathcal{D}_3$ qui est différent de O. Remarquons que $M \notin \mathcal{P}$; en particulier, il n'appartient ni à $\mathcal{D}_1$ ni à $\mathcal{D}_2$; il s'ensuit notamment que $M \neq \rho_1(M)$ (comme $\rho_1 \neq \mathrm{Id}$, l'ensemble de ses points fixes est exactement $\mathcal{D}_1$).

D'après i), la droite $\mathcal{D}_1$ appartient au plan médiateur du segment $[M\rho_1(M)]$. Comme $\rho_3(M) = M$ (puisque M est sur $\mathcal{D}_3$) et comme $\rho_3 = \rho_2 \circ \rho_1$ l'on a $\rho_2(\rho_1(M)) = M$; le point M n'est pas situé sur $\mathcal{D}_2$, le point $\rho_1(M)$ ne l'est donc pas non plus ; l'égalité $\rho_2(\rho_1(M)) = M$ implique alors, là encore d'après i), que ρ_2 appartient au plan médiateur de $[M\rho_1(M)]$.

Le plan médiateur de $[M\rho_1(M)]$ contenant $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, il coïncide avec $\mathcal{P}$; par conséquent, $\rho_1(M)$ est nécessairement égal au symétrique orthogonal N de M par rapport à $\mathcal{P}$; l' égalité $\rho_1(M) = N$ (resp. $\rho_2(N) = \rho_2(\rho_1(M)) = M$) assure alors que ρ_1 est nécessairement l'unique rotation d'axe $\mathcal{D}_1$ envoyant M sur N (resp. ρ_2 est nécessairement l'unique rotation d'axe $\mathcal{D}_2$ envoyant N sur M) (*cf.* iii).

Ainsi, ρ_1 et ρ_2 sont uniquement déterminées ; comme $\rho_3 = \rho_2 \circ \rho_1$, il en va de même de ρ_3 et l'on obtient bien l'unicité du triplet (ρ_1, ρ_2, ρ_3).

Établissons maintenant son existence, en s'inspirant ce ce qui précède. On désigne toujours par N le symétrique orthogonal de M par rapport à $\mathcal{P}$, qui diffère de M puisque $M \notin \mathcal{P}$. Par conséquent, la question iii) assure qu'il existe une unique rotation ρ_1 d'axe $\mathcal{D}_1$ telle que $\rho_1(M) = N$; de même, il existe une unique rotation ρ_2 d'axe $\mathcal{D}_2$ telle que $\rho_2(N) = M$; comme $M \neq N$, les rotations ρ_1 et ρ_2 sont toutes deux différentes de l'identité. Posons $\rho_3 = \rho_2\rho_1$; c'est une isométrie directe de l'espace, et donc un vissage ; ce n'est pas l'identité, car sinon l'on aurait $\rho_2 = \rho_1^{-1}$ et l'axe de ρ_2 serait égal à Δ_1, ce qui est absurde.

Comme $O \in \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$, on a $\rho_3(O) = O$; comme ρ_3 a un point fixe c'est une rotation ; comme ce n'est pas l'identité elle a un axe bien déterminé, qui passe par O. On a par ailleurs $\rho_3(M) = \rho_2(\rho_1(M)) = \rho_2(N) = M$. Par conséquent, M appartient à l'axe de ρ_3 ; celui-ci coïncide donc avec la droite (OM), qui n'est autre que $\mathcal{D}_3$.

Le triplet (ρ_1, ρ_2, ρ_3) satisfait les conditions requises.

iv) Soient r_1, r_2, et r_3 les applications linéaires de $\mathbb{R}^3$ de matrices respectives

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique. Il est immédiat que r_1 (resp. r_2, resp. r_3) est un demi-tour(*i.e.* une rotation d'angle π) d'axe $\mathcal{D}_1$ (resp. $\mathcal{D}_2$, resp. $\mathcal{D}_3$.) On vérifie aussitôt, en faisant le produit de leurs matrices, que $r_2 \circ r_1 = r_3$.

Le triplet (ρ_1, ρ_2, ρ_3) cherché est donc égal à (r_1, r_2, r_3).