Université Paris 6
Année universitaire 2011-2012.
Master 1 Enseignement, cours d'algèbre.
Corrigé de l'interrogation de contrôle continu du 24 février 2012.

Exercice 1. Questions de cours. Soit k un corps et soient $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ deux espaces affines sur k d'espaces directeurs respectifs E et F.

1) Une application f de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$ est dite affine s'il existe une application linéaire φ de E dans F telle que $f(M+u) = f(M) + \varphi(u)$ pour tout $M \in \mathscr{E}$ et tout $u \in E$.

2) Si $\mathscr{E}'$ est un sous-espace affine de $\mathscr{E}$ d'espace directeur E', alors $f(\mathscr{E}')$ est un sous-espace affine de $\mathscr{F}$ dirigé par $\vec{f}\,(E')$.

Si $\mathscr{F}'$ est un sous-espace affine de $\mathscr{F}$ d'espace directeur F', alors $f^{-1}(\mathscr{F}')$ est ou bien vide, ou bien un sous-espace affine de $\mathscr{E}$ dirigé par $\vec{f}^{\,-1}\,(F')$.

Exercice 2. Soit E l'espace directeur de $\mathscr{E}$. Supposons que $\mathscr{F}$ soit non vide, et choisissons $M \in \mathscr{F}$. Soit $u \in E$. On a

$$M + u \in \mathscr{F} \iff f(M+u) = M + u$$

$$\iff f(M)+ \vec{f}\,(u) = M + u \iff M+ \vec{f}\,(u) = M + u$$

(puisque $f(M) = M$ par hypothèse). Ainsi $f(M+u) = M+u$ si et seulement si $\vec{f}\,(u) = u$, c'est-à-dire si et seulement si $u \in \operatorname{Ker}\,(\vec{f} - \mathrm{Id})$. Par conséquent, $\mathscr{F}$ est un sous-espace affine de $\mathscr{E}$ dirigé par $\operatorname{Ker}\,(\vec{f} - \mathrm{Id})$.

Supposons maintenant que $\vec{f} - \mathrm{Id}$ soit bijective, et fixons $O \in \mathscr{E}$. Soit $M \in \mathscr{E}$. On a

$$f(M) = M \iff f(O)+ \vec{f}\,(\overrightarrow{OM}) = M$$

$$\iff \vec{f}\,(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{f(O)M} = \overrightarrow{f(O)O} + \overrightarrow{OM}$$

$$\iff (\vec{f} - \mathrm{Id})(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{f(O)O}$$

$$\iff \overrightarrow{OM} = (\vec{f} - \mathrm{Id})^{-1}(\overrightarrow{f(O)O}),$$

d'où l'existence et l'unicité de M.

Exercice 3. On échelonne la matrice.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & \bullet & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & \bullet & 2a \\ 1 & -3 & 3 & 1 & \bullet & 4-a \end{pmatrix}$$

$$L_2 \to L_2 - L_1, L_3 \to L_3 - L_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & \bullet & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & \bullet & 2a-1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & \bullet & 3-a \end{pmatrix}$$

$$L_3 \mapsto L_3 + L_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & \bullet & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & \bullet & 2a-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & a+2 \end{pmatrix}$$

$$L_2 \to \frac{1}{2}L_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & \bullet & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \bullet & a-(1/2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & a+2 \end{pmatrix}$$

$$L_1 \to L_1 + L_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & \bullet & a+(1/2) \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \bullet & a-(1/2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & a+2 \end{pmatrix}.$$

Le système initial est donc équivalent à

$$\begin{cases} x & & & + & t & = & a+(1/2) \\ & y & - & z & & = & a-(1/2) \\ 0 & & & & & = & a+2 \end{cases}$$

Il a une solution si et seulement si $a = -2$, auquel cas l'ensemble de ses solutions est $\{(-t-3/2, z-5/2, z, t)\}_{(z,t)\in\mathbb{R}^2}$, soit encore

$$\{(-3/2, -5/2, 0, 0) + t.((-1, 0, 0, 1) + z(0, 1, 1, 0)\}_{(z,t)\in\mathbb{R}^2}.$$

Par conséquent, $\mathscr{E}$ est non vide si et seulement si $a = -2$, et est dans ce cas le sous-espace affine de $\mathbb{R}^4$ passant par $(-3/2, -5/2, 0, 0)$ et dirigé par le plan de base $((-1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0))$ (ces vecteurs sont visiblement linéairement indépendants – en fait, le procédé d'échelonnement *garantit* que la famille de vecteurs qui apparaît à la fin est libre).

Exercice 4. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$. Il appartient à D si et seulement si il existe t tel que $(x, y, z) = (1, i, -i) + t.(1, i, 1)$, soit encore

$$\begin{cases} x & = & 1 & + & t \\ y & = & i & + & it \\ z & = & -i & + & t \end{cases},$$

ce que l'on récrit

$$\begin{cases} t & = & x-1 \\ t & = & -iy-1 \\ t & = & z+i \end{cases}$$

Ce système a une solution (en t, à x, y et z fixés) si et seulement si $x = -iy$ et $x - 1 = z + i$, auquel cas il a d'ailleurs une unique solution, à savoir

$$t = x - 1 \ (= -iy - 1, \ = z + i).$$

Par conséquent,

$$\begin{cases} x & + & iy & & & = & 0 \\ x & & & - & z & = & 1+i \end{cases}$$

est sun système d'équations cartésiennes de D.

Exercice 5. Rappelons les résultats du cours que nous allons utiliser.

Si $F + G = E$ alors $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} \neq \emptyset$; si $F + G \neq E$ il peut arriver que $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} = \emptyset$.

Si $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} \neq \emptyset$ c'est un sous-espace affine dirigé par $F \cap G$, et $\langle \mathscr{F} \cup \mathscr{G} \rangle$ est dirigé par $F + G$.

Si $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} = \emptyset$ alors $\langle \mathscr{F} \cup \mathscr{G} \rangle$ est de dimension $\dim(F + G) + 1$.

Enfin dans chacun des cas considérés on déduira $\dim(F + G)$ de la formule $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.

a) On a $\dim(F+G) = 4 < 5$ donc on peut avoir $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} = \emptyset$.
Si $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} = \emptyset$ on a $\dim\langle \mathscr{F} \cup \mathscr{G} \rangle = 4 + 1 = 5$.
Si $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} \neq \emptyset$, on a $\dim(\mathscr{F} \cap \mathscr{G}) = 0$ et $\dim\langle \mathscr{F} \cup \mathscr{G} \rangle = 4$.

b) On a $\dim(F+G) = 5$ donc $F + G = E$ et $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} \neq \emptyset$.
On a $\dim(\mathscr{F} \cap \mathscr{G}) = 0$ et $\dim\langle \mathscr{F} \cup \mathscr{G} \rangle = 5$.

c) On a $\dim(F+G) = 4 < 5$ donc on peut avoir $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} = \emptyset$.
Si $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} = \emptyset$ on a $\dim\langle \mathscr{F} \cup \mathscr{G} \rangle = 4 + 1 = 5$.
Si $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} \neq \emptyset$, on a $\dim(\mathscr{F} \cap \mathscr{G}) = 1$ et $\dim\langle \mathscr{F} \cup \mathscr{G} \rangle = 4$.

d) On a $\dim(F+G) = 3 < 5$ donc on peut avoir $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} = \emptyset$.
Si $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} = \emptyset$ on a $\dim\langle \mathscr{F} \cup \mathscr{G} \rangle = 3 + 1 = 4$.
Si $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} \neq \emptyset$, on a $\dim(\mathscr{F} \cap \mathscr{G}) = 1$ et $\dim\langle \mathscr{F} \cup \mathscr{G} \rangle = 3$.

e) On a $\dim(F+G) = 5$ donc $F + G = E$ et $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} \neq \emptyset$.
On a $\dim(\mathscr{F} \cap \mathscr{G}) = 2$ et $\dim\langle \mathscr{F} \cup \mathscr{G} \rangle = 5$.