Université Paris 6
Année universitaire 2012-2013
Cours *Les outils de la géométrie algébrique* (Master 2).
Corrigé de l'examen terminal, le 24 octobre 2012.

Exercice 1.

1) a). Il s'agit d'exhiber, pour tout A, un morphisme de A vers $G(F(A))$. Compte-tenu du peu de données dont on dispose (les seuls morphismes que l'on connaisse *a priori* sont les identités), on n'a guère le choix : $\iota_{A,F(A)}$ est pour tout A un isomorphisme $\mathrm{Hom}(F(A),F(A)) \simeq \mathrm{Hom}(A,G(F(A)))$, qui nous fournit un élément de $\mathrm{Hom}(A,G(F(A)))$, à savoir $\iota_{A,F(A)}(\mathrm{Id}_A)$. On ne voit pas (indépendamment du problème précis à traiter !) comment on pourrait en obtenir un autre.

On tente donc notre chance en définissant u comme le morphisme de foncteurs $A \mapsto \iota_{A,F(A)}(\mathrm{Id}_{F(A)})$ (que ce soit un morphisme de foncteurs résulte immédiatement de la bifonctorialité de ι en A et B).

Nous allons montrer qu'il satisfait la condition requise. Soit A un objet de C, soit B un objet de D et soit $f : F(A) \to B$.

La fonctorialité de $\iota_{A,\bullet}$ signifie que pour toute flèche $\lambda : B_0 \to B_1$ dans D, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(F(A),B_0) \arrow[r, "\iota_{A,B_0}"] \arrow[d, "\lambda\circ"'] & \mathrm{Hom}(A,G(B_0)) \arrow[d, "G(\lambda)\circ"] \\
\mathrm{Hom}(F(A),B_1) \arrow[r, "\iota_{A,B_1}"'] & \mathrm{Hom}(A,G(B_1))
\end{tikzcd}$$

commute. Lorsque $B_0 = F(A), B_1 = B$ et $\lambda = f$ ce diagramme devient

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(F(A),F(A)) \arrow[r, "\iota_{A,F(A)}"] \arrow[d, "f\circ"'] & \mathrm{Hom}(A,G(F(A))) \arrow[d, "G(f)\circ"] \\
\mathrm{Hom}(F(A),B) \arrow[r, "\iota_{A,B}"'] & \mathrm{Hom}(A,G(B))
\end{tikzcd}.$$

On a donc pour tout $h \in \mathrm{Hom}(F(A),F(A))$ l'égalité

$$\iota_{A,B}(f \circ h) = G(f) \circ \iota_{A,F(A)}(h).$$

Lorsque $h = \mathrm{Id}_{F(A)}$, il vient

$$\iota_{A,B}(f) = G(f) \circ \iota_{A,F(A)}(\mathrm{Id}_{F(A)}) = G(f) \circ u(A),$$

qui est la formule requise.

1) b). Par le même raisonnement que ci-dessus (ou encore, en appliquant ce qui précède aux catégories opposées à C et D), on montre les assertions suivantes :

• $B \mapsto \iota^{-1}_{G(B),B}(\mathrm{Id}_{G(B)})$ définit un morphisme de foncteurs v de $F \circ G$ vers Id_{D} ;

• pour tout (A, B) et tout $g : A \to G(B)$ le morphisme $\iota_{A,B}^{-1}(g)$ est la flèche composée

$$F(A) \xrightarrow{F(g)} F(G(B)) \xrightarrow{v(B)} B \cdot$$

1) c). Nous allons donner plusieurs exemples (un seul était requis).

- On prend pour C la catégorie des ensembles, pour D celle des groupes, pour F le foncteur «groupe libre sur l'ensemble considéré» et pour G le foncteur oubli.
  Pour tout ensemble E, l'application $u(E)$ envoie un élément x de E sur le mot $\{x\}$ de l'ensemble sous-jacent au groupe libre sur E.
- On prend pour C la catégorie des groupes, pour D celle des groupes abéliens, pour F le foncteur d'abélianisation et pour G le foncteur d'inclusion.
  Pour tout groupe Γ, l'application $u(\Gamma)$ est simplement la flèche quotient de Γ vers son abélianisé (vu comme groupe tout court).
- On fixe un anneau commutatif A et un A-module M. On prend pour C la catégorie des A-modules, pour D aussi, pour F le foncteur $\bullet \otimes M$ et pour G le foncteur $\mathrm{Hom}(M, \bullet)$.
  Pour tout A-module N, l'application $u(N)$ envoie un élément n de N sur l'application $m \mapsto m \otimes n$.
- On se donne une application continue $\varphi : Y \to X$ entre espaces topologiques. On prend pour C la catégorie des faisceaux sur X, pour D celle des faisceaux sur Y, pour F le foncteur φ^{-1} et pour G le foncteur φ_*.
  Soit $\mathscr{F}$ un faisceau sur X, et soit U un ouvert de X. Comme $\varphi(\varphi^{-1}(U))$ est contenu dans U, la section s de $\mathscr{F}(U)$ définit une section t de $\varphi^{-1}\mathscr{F}$ sur $\varphi^{-1}(U)$. Par définition de φ_*, cette section t peut être vue comme une section de $\varphi_*(\varphi^{-1}\mathscr{F})$ sur U. On définit ainsi un morphisme de $\mathscr{F}$ vers $\varphi_*(\varphi^{-1}\mathscr{F})$, dont on vérifie que c'est précisément $u(\mathscr{F})$.

2. **Erratum.** La définition de diagramme utilisée dans cet exercice était trop restrictive pour la question *d*) (elle convenait parfaitement aux autres), mais ceux qui ont eu la bonne démarche pour aborder cette question ont eu les points correspondants.

Indiquons ici la bonne définition à prendre : un diagramme (on se fiche qu'il soit commutatif ou non) dans la catégorie C est la donnée d'une famille $(A_i)_{i \in I}$ d'objets de C et pour tout (i, j), d'un ensemble $F_{i,j}$ de morphismes de A_i dans A_j. Un morphisme de A vers un diagramme $\mathscr{D} = ((A_i), (F_{i,j}))$ est la donné pour tout i d'un morphisme $g_i : A \to A_i$ tel que $f \circ g_i = g_j$ pour tout (i, j) et tout $f \in F_{i,j}$. On définit de même les morphismes d'un diagramme vers un objet de A, et les limites inductives et projectives se définissent comme dans l'énoncé, en prenant des diagrammes comme ci-dessus au lieu des diagrammes commutatifs de l'énoncé. La rédaction des questions a), b), c), et e) n'est en rien modifiée par ce changement.

2 a). Soit $\mathscr{D}$ un diagramme dans la catégorie C possédant une limite inductive (A, u) et soit G un adjoint à droite de F.

Soit B un objet de D. On a des isomorphismes naturels

$$\mathrm{Hom}(F(\mathscr{D}), B) \simeq \mathrm{Hom}(\mathscr{D}, G(B))$$

(par adjonction appliquée sur chacun des objets du diagramme $\mathscr{D}$)

$$\simeq \mathrm{Hom}(A, G(B))$$

(par composition avec u – c'est la définition d'une limite inductive)

$$\simeq \mathrm{Hom}(F(A), B))$$

(par adjonction). On obtient ainsi un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}(F(\mathscr{D}), B) \simeq \mathrm{Hom}(F(A), B),$$

qui est, par construction et par fonctorialité des isomorphismes d'adjonction, donné par la composition avec $F(u)$. Ainsi $(F(A), F(u))$ est la limite inductive de $F(\mathscr{D})$.

On raisonne de façon analogue pour les limites projectives, ou bien on applique ce qui précède aux catégories opposées à C et D.

2 b). Il suffit d'interpréter chacun des types d'objets en jeu (produit cartésien, produit fibré, objet final) comme une limite projective. Or il résulte immédiatement de leurs définitions par propriété universelle que :

• le produit cartésien $X \times Y$ est la limite projective du diagramme

$$X \quad Y$$

(deux objets, pas de flèches).

• Le produit fibré $X \times_Z Y$ est la limite projective du diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

• L'objet final est la limite projective du *diagramme vide.*

En passant aux catégories opposées, on voit qu'un foncteur commutant aux limites inductives préserve les sommes disjointes, les sommes amalgamées, et l'objet initial s'il existe.

2 c). Là encore, il s'agit d'interpréter l'exactitude d'une suite $M \to N \to P \to 0$ en termes de limite inductive. Or soit $\mathscr{D}$ le diagramme

$$\begin{tikzcd} & M \\ N \arrow[ur] \arrow[dr] & & . \\ & 0 \end{tikzcd}$$

On dispose d'un morphisme naturel u de $\mathscr{D}$ vers P, et dire que la suite ci-dessus est exacte signifie que u fait de P la limite inductive de ce diagramme.

Comme F est exact à droite, le couple $(F(P), F(u))$ est la limite inductive de $F(\mathscr{D})$. Par ailleurs, l'exactitude à droite de F assure qu'il envoie 0 sur l'objet final, donc sur 0. Dès lors $(F(D), F(u))$ est la limite inductive de

$$\begin{tikzcd} & F(M) \\ F(N) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & 0 \end{tikzcd} ,$$

ce qui veut dire que $F(N) \to F(M) \to F(P) \to 0$ est exacte.

En ce qui concerne les sommes directes, l'assertion requise découle du fait que $\bigoplus M_i$ est la limite inductive du diagramme dont la famille d'objets est (M_i) et dont les ensembles de flèches sont vides.

Énoncés duaux : si F commute aux limites projectives, il est exact à gauche et commute aux produits.

Comme le produit tensoriel $N \otimes \bullet$ admet un adjoint à droite (à savoir $\mathrm{Hom}(N, \bullet)$), il commute aux limites inductives ; il est donc exact à droite et commute aux sommes directes quelconques.

2 d). Là encore, il s'agit d'interpréter X/G comme une limite inductive. Considérons le diagramme ayant X comme seul objet et les automorphismes induits par G comme ensemble de flèches. Alors X/G est la limite inductive de $\mathscr{D}$, et $F(X/G)$ est donc la limite inductive de $F(\mathscr{D})$, qui n'est autre que $F(X)/G$.

2 e.) L'objet initial de la catégorie des groupes est $\{e\}$; son ensemble sous-jacent est un singleton, qui n'est pas l'objet initial de la catégorie des ensembles (c'est $\varnothing$). En conséquence, ce foncteur ne commute pas aux limites inductives.

Comme il a un adjoint à gauche (le foncteur «groupe libre associé»), il commute aux limites projectives.

Exercice 2.

a) Soit $\mathfrak{m}$ l'unique idéal maximal de A et soit e un idempotent de A. On a $e^2 = e$, donc $e(e-1) = 0$. Si e est nul modulo $\mathfrak{m}$ alors $1 - e$ ne l'est pas, et $1 - e$ est donc inversible. L'égalité $e(e-1) = 0$ entraîne alors $e = 0$.

Si e est non nul modulo $\mathfrak{m}$ il est inversible, et l'égalité $e(e-1) = 0$ entraîne alors $e = 1$.

Ainsi $e = 0$ ou $e = 1$, ce qu'il fallait démontrer.

b) Supposons que X soit connexe, et soit e un idempotent de $\mathscr{O}_X(X)$.

Pour tout $x \in X$, le germe e_x est un élément idempotent de l'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$; d'après a), il vaut donc 0 ou 1. *Comme un anneau local est non nul* (il possède un idéal maximal), ces deux situations sont exclusives l'une de l'autre.

Soit U (resp. V) l'ensemble des points $x \in X$ tels que $e_x = 1$ (resp. $e_x = 0$). Par ce qui précède, on a $X = U \coprod V$. Par ailleurs, soit $x \in X$. L'égalité $e_x = 1$ signifie que $e = 1$ au voisinage de x, et en particulier que $e_y = 1$ pour tout y suffisamment proche de x. En conséquence, U est ouvert. Par le même raisonnement (avec 0 au lieu de 1), on voit que V est ouvert.

La connexité de X implique alors que U ou V est vide. Si $U = \varnothing$, on a $e_x = 0$ pour tout x et donc $e = 0$ (une section d'un faisceau est déterminée par ses germes). De même, si $V = \varnothing$ on a $e_x = 1$ pour tout x et $e = 1$. Ainsi, e est trivial.

Supposons maintenant que $\mathscr{O}_X(X)$ n'a pas d'idempotents non triviaux, et soit $X = U \coprod V$ une écriture de X comme somme disjointe de deux ouverts. Comme $\mathscr{O}_X$ est un faisceau, il existe une unique section e de $\mathscr{O}_X$ sur X dont la restriction à U est égale à 1, et la restriction à V est nulle (il n'y a pas de conditions de coïncidence à tester). On a $e^2 = e$ (c'est vrai sur chacun des deux ouverts du recouvrement de X par U et V). Par hypothèse, on a alors ou bien $e = 0$, ou bien $e = 1$.

Ceci entraîne que U ou V est vide *car* $1 \neq 0$ *dans* $\mathscr{O}_X(W)$ *pour tout ouvert* W *non vide de* X : en effet si W est un tel ouvert, on choisit $x \in W$. Comme $\mathscr{O}_{W,x}$ est local, il est non nul et 1 est donc différent de 0 dans $\mathscr{O}_{X,x}$, et *a fortiori* dans $\mathscr{O}_X(W)$.

Ainsi, X est connexe.

c) Si $A \simeq A_1 \times A_2$ avec A_1 et A_2 non nuls alors l'élément e de A correspondant à $(0, 1)$ est un idempotent qui est non trivial car 0 correspond à $(0, 0)$, car 1 correspond à $(1, 1)$, et car $1 \neq 0$ dans A_1 aussi bien que dans A_2.

Supposons maintenant que A ait un idempotent non trivial e. On a $e \neq 0$ et $e \neq 1$, et $e(1 - e) = 0$. Les idéaux eA et $(1 - e)A$ sont tous deux différents de A, et les quotients correspondants A/eA et $A/(1 - e)A$ sont donc non nuls.

On a $eA + (1 - e)A = A$, car $e + 1 - e = 1$; le lemme Chinois assure alors que $A/(eA)(1 - e)A \simeq A/eA \times A/(1 - e)A$. Par ailleurs, comme $e(1 - e) = e^2 - e = 0$, on a $(eA)(1 - e)A = 0$, et partant $A \simeq A/eA \times A/(1 - e)A$, ce qui achève la démonstration.

Commentaires. On voit ainsi que, d'un point de vue algébrique aussi bien que topologique, la présence d'idempotents non triviaux est liée à l'existence d'une décomposition non triviale des objets en jeu. C'est vrai aussi dans un contexte non commutatif : si M est un module sur un anneau A, l'existence d'un idempotent non trivial p dans $\mathrm{End}(M)$ équivaut à celle d'une écriture non triviale de M comme somme directe de deux de ses sous-modules (exercice !).

d) Il est clair que l'image d'un idempotent de A dans A/I est encore idempotente (un morphisme d'anneau préserve les idempotents). Soit $x \in A$ tel que $\overline{x}$ soit idempotent. Cela signifie que $x^2 = x + j$ pour un certain $j \in I$. Nous allons montrer qu'il existe un unique idempotent de A de classe modulo I égale à x.

Cela revient à montrer qu'il existe un unique $i \in I$ tel que $x + i$ soit idempotent.

Soit $i \in I$. L'élément $x + i$ est idempotent si et seulement si

$$x + i = (x + i)^2 = x^2 + 2ix + i^2 = x + j + 2ix$$

car $i^2 = 0$ par hypothèse sur I. Cela équivaut à $i(1 - 2x) = j$. Il suffit donc pour conclure de monter que $1 - 2x$ est inversible (et on aura alors une unique solution, à savoir $i = (1 - 2x)^{-1}j$). Si $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal de A, il contient j (un idéal premier contient tous les nilpotents), et l'on a donc $x^2 = x$ modulo $\mathfrak{m}$. Comme $A/\mathfrak{m}$ est un corps, il en résulte que x est égal à 0 ou 1 modulo $\mathfrak{m}$. Par conséquent, $1 - 2x$ est égal à 1 ou -1 modulo $\mathfrak{m}$, et est en particulier non nul modulo $\mathfrak{m}$. Ainsi, $1-2x$ n'appartient à aucun idéal maximal de $\mathfrak{m}$, et il est donc inversible.

Preuve alternative du fait que $1-2x$ est inversible, qui a l'avantage conceptuel et esthétique de ne pas utiliser l'axiome du choix, contrairement à la précédente. On a
$$(1-2x)^2 = 1 + 4x^2 - 4x = 1 + 4j.$$
Il vient $(1-2x)(1-2x)(1-4j) = 1 - 16j^2 = 1$, et $1-2x$ est inversible.

e1) Supposons que $u \in J$ et soit $b \in B$. Si $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal de B alors $bu \in J \subset \mathfrak{m}$; il s'ensuit que $1 + bu \notin \mathfrak{m}$ (sinon, 1 appartiendrait à $\mathfrak{m}$). N'appartenant à aucun idéal maximal de B, l'élément $1 + bu$ est inversible.

Supposons que $1 + bu$ est inversible pour tout $b \in B$, et soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de B. Si u n'appartenait pas à $\mathfrak{m}$, on aurait $\mathfrak{m} + Bu = B$, et il existerait donc $b \in B$ et $m \in \mathfrak{m}$ tels que $1 = bu + m$, soit encore $1 - bu = m$. Mais $1 - bu$ est inversible par hypothèse, et l'on aboutit ainsi à une contradiction. Il s'ensuit que b appartient à tous les idéaux maximaux de B, ce qu'il fallait démontrer.

e2) Si $\mathfrak{n}$ est un idéal maximal de B, son image réciproque dans A est, en vertu du *going-down*, un idéal maximal de A. C'est donc $\mathfrak{m}$, ce qui implique que $\mathfrak{m}B \subset \mathfrak{n}$. Ceci valant pour tout $\mathfrak{n}$, il vient $\mathfrak{m}B \subset J$.

e3) Soient e et e' deux idempotents de B égaux modulo I. Posons $x = e - e'$. On a
$$(e-e')^3 = e^3 + 3e^2e' + 3e(e')^2 - (e')^3 = e - e'.$$
Ainsi, $x^3 = x$, c'est-à-dire encore $x(1-x^2) = 0$. Comme $x \in J$, l'élément $1 - x^2$ de B est inversible (question e_1) ; en conséquence, $x = 0$ et $e = e'$.

Supposons que $B = A$ et $I = \mathfrak{m}$. Comme $A/\mathfrak{m}$ est un corps, ses seuls idempotents sont les idempotents triviaux. L'assertion d'injectivité établie ci-dessus assure alors que les seuls idempotents de A sont les idempotents triviaux, et l'on retrouve a).

Exercice 3.

a) Soient M, Net N' trois A-espaces vectoriels, soit $i : N \hookrightarrow N'$ une injection A-linéaire, et soit f une application A-linéaire de N vers M. Nous allons montrer qu'il existe un morphisme g comme dans la définition, ce qui établira l'injectivité de M. Pour cela on suppose, quitte à identifier N à son image dans N', que N est un sous-espace vectoriel de N'. Il s'agit alors de *prolonger* le morphisme f en une application linéaire définie sur N' tout entier. Mais comme on travaille sur un corps, N a un supplémentaire S dans N', et on peut alors (par exemple) prolonger f en l'application $f \oplus 0 : N' = N \oplus S \to M$.

b) On applique la définition de l'injectivité à l'injection $M \hookrightarrow M'$ et à l'application linéaire Id_M. On en déduit l'existence d'une application linéaire $r : M' \to M$ telle que $r \circ i = \mathrm{Id}_M$. Soit S le noyau de r ; nous allons montrer que c'est un supplémentaire de $i(M)$.

On a $S \cap i(M) = \{0\}$. En effet soit $x \in i(M) \cap S$. On a $x = i(m)$ pour un certain $m \in M$. Comme $x \in \operatorname{Ker} r$, on a $r(x) = r(i(m)) = 0$. Mais $r \circ i = \mathrm{Id}_M$, et l'on a donc $m = 0$ et $x = i(m) = 0$.

On a $M' = i(M) + S$. En effet, soit $x \in M'$. On a $x = i(r(x)) + (x - i(r(x))$. De plus,

$$r(x - i(r(x))) = r(x) - (r \circ i)(r(x)) = r(x) - r(x) = 0,$$

et $x \in i(M) + S$, ce qui termine la preuve.

c) Supposons M injectif, soit n un entier relatif non nul et soit $m \in M$. Soit i la multiplication par n de $\mathbb{Z}$ dans lui-même ; c'est une injection linéaire. Soit f l'application linéaire $z \mapsto zm$ de $\mathbb{Z}$ vers M.

Par injectivité de M, il existe $g : \mathbb{Z} \to M$ tel que $g \circ i = f$. On a alors

$$m = f(1) = g(i(1)) = g(n) = ng(1),$$

et M est bien divisible.

d) Supposons M divisible et soient N', N, i et f comme dans le préambule. Le but est de construire une application linéaire g possédant la propriété requise. Pour cela on suppose, quitte à identifier N à son image dans N', que N est un sous-groupe de N'. Il s'agit alors de *prolonger* le morphisme f en une application linéaire définie sur N' tout entier.

Pour cela, on considère l'ensemble $\mathscr{E}$ formé des couples (L, λ) où L est un sous-groupe de N' contenant N et où λ est une application linéaire de L vers M prolongeant f. On le munit de la relation d'ordre pour laquelle $(L, \lambda) \simeq (L', \lambda')$ si $L \subset L'$ et si $\lambda'_{|L} = \lambda$.

Cet ensemble est inductif. En effet, soit $((L_i, \lambda_i))_i$ une famille totalement ordonnée d'objets de $\mathscr{E}$; nous allons en exhiber un majorant. Si elle est vide on prend (N, f). Sinon, on pose $L = \bigcup L_i$. C'est un sous-groupe de N' contenant N. Si $x \in L$, il appartient à L_i pour un certain i, et $\lambda_i(x)$ de x ne dépend pas de i, par définition de notre relation d'ordre. On peut donc le noter $\lambda(x)$, et on vérifie aussitôt que (L, λ) est un majorant de $((L_i, \lambda_i))_i$.

Par le lemme de Zorn, $\mathscr{E}$ a un élément maximal (L, λ). On va montrer que $L = N'$, ce qui permettra de conclure (on prendra alors $g = \lambda$). On raisonne par l'absurde.

Supposons que $L \neq N'$, et choisissons $x \in N' \setminus L$. Nous allons prolonger λ à $L + \mathbb{Z}x \supsetneq L$, ce qui contredira la maximalité de (L, λ). L'ensemble des entiers n tels que $nx \in L$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$, il est donc de la forme $d\mathbb{Z}$ pour un certain d.

Supposons que $d = 0$. On a alors $L + \mathbb{Z}x = L \oplus \mathbb{Z}x$, et on prolonge λ par 0 sur le facteur $\mathbb{Z}x$ (par exemple).

Supposons que $d \neq 0$. On a $dx \in L$; comme M est divisible, il existe $m \in M$ tel que $\lambda(dx) = dm$.

Soit $\xi \in L + \mathbb{Z}x$; écrivons $\xi = \ell + zx$. L'élément $\lambda(\ell) + zm$ ne dépend alors pas de l'écriture $\ell + zx$ choisie. En effet, si $\xi = \ell' + z'x$, on a $(\ell - \ell') = (z - z')x$, et par définition de d l'entier $z - z'$ s'écrit alors dz'' pour un certain z''. L'égalité

$$(\ell - \ell') = z''dx$$

assure que $\lambda(\ell) - \lambda(\ell') = z''\lambda(dx) = z''dm = (z - z')m$, et donc que

$$\lambda(\ell) + zm = \lambda(\ell') + z'm,$$

ce qu'il fallait démontrer.

On a ainsi défini sans ambiguïté une application de $L + \mathbb{Z}x$ vers M. Il est immédiat qu'elle est linéaire et prolonge λ, ce qui termine la preuve.

e) Le groupe abélien $\mathbb{Z}$ se plonge dans $\mathbb{Q}$, qui est divisible.

Soit M un groupe abélien. Choisissons une famille génératrice $(e_i)_{i\in I}$ de M. Elle induit une surjection $\mathbb{Z}^{(I)} \to M$, dont on note K le noyau. On peut donc identifier M à $\mathbb{Z}^{(I)}/K$. On dispose alors d'une injection naturelle

$$M \simeq \mathbb{Z}^{(I)}/K \hookrightarrow \mathbb{Q}^{(I)}/K,$$

et le groupe de droite est divisible en tant que quotient d'un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.

f) Soit M un groupe abélien injectif, soit $i : N \hookrightarrow N'$ une injection A-linéaire et soit f une application A-linéaire de N vers $F(M)$.

Comme G est exact à gauche, il préserve les injections et la flèche $G(i) : G(N) \to G(N')$ est donc injective. Par ailleurs, l'application linéaire f correspond par adjonction à une application linéaire $u : G(N) \to M$. Par injectivité de M, il existe une application linéaire $v : G(N') \to M$ telle que $v \circ G(i) = u$. Par adjonction, v correspond à une application linéaire $g : N' \to F(M)$ telle que $g \circ i = f$; ainsi, $F(M)$ est injectif.

g) Pour pouvoir appliquer ce qui précède, nous allons d'abord vérifier que F possède un adjoint à gauche qui est lui-même exact à gauche ; nous allons plus précisément montrer que le foncteur d'oubli G, de la catégorie des A-modules vers celle des groupes abéliens, est adjoint à gauche de F ; notons que G est visiblement exact à gauche, et même exact tout court.

Soit donc L un A-module, et M un groupe abélien. On dispose alors d'une bijection naturelle

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G(L), M) \simeq \mathrm{Hom}_A(L, F(M)),$$

qui se décrit comme suit :

- elle envoie $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G(L), M)$ sur $\ell \mapsto (a \mapsto \varphi(a\ell))$;
- sa réciproque envoie $\psi \in \mathrm{Hom}_A(L, F(M))$ sur $\ell \mapsto \psi(\ell)(1)$.

Ainsi, G adjoint à gauche de F.

Remarque. Le foncteur G a le privilège d'avoir un adjoint à droite (c'est F) et un adjoint à gauche (c'est $M \mapsto A \otimes_{\mathbb{Z}} M$). D'après l'exercice 1), il commute donc à toutes les limites, projectives comme inductives.

Il découle alors de f) que F transforme un groupe abélien injectif en un A-module injectif.

Soit M un A-module. D'après e), le groupe abélien $G(M)$ sous-jacent à M se plonge dans un groupe abélien injectif I. La flèche

$$F(G(M)) \to F(I) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, G(M)) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, I)$$

est visiblement injective (le lecteur amateur de catégorismes pourrait le justifier conceptuellement en disant que puisque F admet un adjoint à gauche, il commute aux limites projectives et est donc exacte à gauche, *cf.* exercice 1).

On dispose par ailleurs d'un plongement naturel et A-linéaire de M dans le A-module $F(G(M))$, qui envoie m sur $a \mapsto am$. La flèche composée

$$M \hookrightarrow F(G(M)) \hookrightarrow F(I)$$

est une injection de M dans le A-module injectif $F(I)$.