Université Paris 6
Année universitaire 2011-2012
Master enseignement première année, cours d'algèbre
Feuille d'exercices numéro 1

On fixe un corps K de caractéristique nulle.

Exercice 1. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrez que

$$\dim (F+G) = \dim F + \dim G - \dim (F \cap G).$$

Exercice 2. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et soit $f : E \to E$ une application linéaire. Montrez que les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$;
ii) $\text{Ker } f$ admet un supplémentaire stable par f.

Plus précisément montrez que si ii) est vérifiée, un tel supplémentaire est unique, et nécessairement égal à $\text{Im } f$.

Donnez un exemple d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie qui ne vérifie pas ces propriétés.

Exercice 3. *Interpolation de Lagrange.* Soit n un entier. On rappelle que si P est un polynôme non nul à coefficients dans K et de degré n, il a au plus n racines dans K. Soient $x_0, \ldots, x_n$ des éléments de K deux à deux distincts et soit P un polynôme à coefficients dans K de degré au plus n tel que $P(x_i) = 0$ pour tout i. Que peut-on dire de P ?

En déduire *sans le moindre calcul*, par un argument d'algèbre linéaire, que pour toute famille $(y_0, \ldots, y_n)$ d'éléments de K, il existe un et un seul polynôme $P \in K[X]$ de degré au plus n tel que $P(x_i) = y_i$ pour tout i.

Pouvez-vous exhiber un tel P par une formule explicite ?

Exercice 4. *Noyaux et images itérés.* Soit E un K-espace vectoriel et soit $f : E \to E$ un endomorphisme.

1) Montrez que

$$E \supset \text{Im } f \supset \text{Im } f^2 \supset \ldots \supset \text{Im } f^n \supset \text{Im } f^{n+1} \supset \ldots$$

et

$$\{0\} \subset \text{Ker } f \subset \text{Ker } f^2 \subset \ldots \subset \text{Ker } f^n \subset \text{Ker } f^{n+1} \subset \ldots$$

2) Soit n un entier tel que $\text{Im } f^n = \text{Im } f^{n+1}$; montrez que $\text{Im } f^m = \text{Im } f^n$ pour tout $m \geqslant n$; expliquez pourquoi un tel entier n existe nécessairement si E est de dimension finie, et pourquoi il est au plus égal à la dimension de E.

3) Mêmes questions que 2), avec les noyaux au lieu des images.

On suppose à partir de maintenant que E est de dimension finie N.

4) Suppons que f est nilpotent, c'est-à-dire qu'il existe $n \geqslant 0$ tel que $f^n = 0$. Montrez que $f^N = 0$.

5) On ne suppose plus que f est nilpotent. Soit n un entier. Montrez que les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $\mathrm{Im}\ f^n = \mathrm{Im}\ f^{n+1}$;
ii) $\mathrm{Ker}\ f^n = \mathrm{Ker}\ f^{n+1}$;
iii) $E = \mathrm{Im}\ f^n \oplus \mathrm{Ker}\ f^n$.

6) Montrez par un contre-exemple que ces assertions ne sont plus équivalentes en général lorsque E est de dimension infinie.

Exercice 5. Soit E un sous-espace vectoriel *de dimension finie* de l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrez qu'il existe une base $(f_1, \ldots, f_n)$ de E et une famille $(x_1, \ldots, x_n)$ de réels tel que $f_i(x_j) = \delta_{ij}$ pour tout i. Indication : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note ev_x la forme linéaire sur E qui envoie f sur $f(x)$ (évaluation en x) ; on pourra considérer le sous-espace vectoriel de E^* engendré par les ev_x, et calculer son orthogonal dans E.