Foncteurs représentables

Complément au cours de DEA *Introduction à la géométrie algébrique*

Antoine Ducros

Année universitaire 2003-2004

Introduction

C'est à Grothendieck que l'on doit l'utilisation systématique de la notion de *foncteur représentable* en géométrie algébrique. C'est elle qui lui a permis notamment de donner la première définition vraiment satisfaisante de certains "espaces de modules", c'est-à-dire de schémas qui paramètrent des familles de variétés algébriques : ainsi le *schéma de Hilbert* pour la famille des sous-variétés fermées d'une variété projective donnée. Le premier problème consiste à donner une signification mathématique précise au verbe "paramétrer", et c'est justement là qu'intervient le concept de foncteur représentable.

Comme vous le verrez ci-dessous, ce concept en question n'a rien de réellement difficile, et apporte simplement un éclairage nouveau et fécond sur des notions souvent bien connues ; néanmoins ne vous étonnez pas si une première lecture de ce qui suit vous donne la migraine ! Il vous faudra sans doute un peu de temps pour être vraiment à l'aise avec cette façon de voir...

Définitions et premiers exemples

Dans tout ce qui suit, on note **Ens** la catégorie des ensembles. Soit **C** une catégorie et X un objet de **C**. On note $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,.)$ le foncteur covariant de **C** vers **Ens** défini comme suit : il envoie un objet Y de **C** sur l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,Y)$; si $f : Y \to Z$ est une flèche de **C** il l'envoie sur l'application $p \mapsto f \circ p$ de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,Y)$ vers $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,Z)$.

De même, on note $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(.,X)$ le foncteur contravariant de **C** vers **Ens** défini comme suit : il envoie un objet Y de **C** sur l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(Y,X)$; si $f : Y \to Z$ est une flèche de **C** il l'envoie sur l'application $p \mapsto p \circ f$ de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(Z,X)$ vers $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(Y,X)$.

Définition. *On dit qu'un foncteur F covariant (resp. contravariant) de* **C** *vers* **Ens** *est* représentable *s'il existe un objet X de* **C** *tel que F soit isomorphe à* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,.)$ *(resp. à* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(.,X)$*).*

Pour montrer qu'un foncteur F est représentable il suffit donc d'exhiber un objet X de $\mathbf{C}$ *et un isomorphisme entre* F *et* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, .)$ *(ou* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(., X)$*).* On verra plus bas qu'un tel isomorphisme, dont la définition peut sembler très abstraite *a priori*, est en réalité facile à décrire.

Premiers exemples

Comme vous allez le voir ci-dessous, tous les énoncés que vous avez vu jusque là qui affirment l'existence d'un certain objet satisfaisant une propriété universelle peuvent se traduire par la représentabilité d'un foncteur. Vous remarquerez qu'assez souvent on se contente, pour décrire un foncteur, de donner son action sur les objets, sans mentionner celle sur les flèches : le contexte suffit en effet le plus souvent à deviner quelle est cette dernière. Vérifiez une ou deux fois que vous arrivez effectivement à la décrire !

- Soit A un anneau et soit P un sous-ensemble de A. Soit F le foncteur covariant de la catégorie des anneaux vers celle des ensembles qui envoie tout anneau B sur l'ensemble des morphismes d'anneaux de A vers B s'annulant sur P.
  Alors F est représentable. En effet soit (P) l'idéal engendré par P. Si p désigne la flèche $A \to A/(P)$ la donnée pour tout anneau B de la bijection $f \mapsto f \circ p$ de $\mathrm{Hom}(A/(P), B)$ vers $F(B)$ définit un isomorphisme entre les foncteurs $\mathrm{Hom}(A/(P), .)$ et F.

- Soit A un anneau et n un entier. Soit F le foncteur covariant de la catégorie des A-algèbres vers celle des ensembles qui envoie toute A-aglèbre B sur l'ensemble B^n.
  Alors F est représentable. En effet, la donnée pour toute A-algèbre B de la bijection $f \mapsto (f(X_1), \ldots, f(X_n))$ entre $\mathrm{Hom}_A(A[X_1, \ldots, X_n], B)$ et $F(B)$ définit un isomorphisme entre les foncteurs $\mathrm{Hom}_A(A[X_1, \ldots X_n], .)$ et F.

- Soit A un anneau et M et N deux A-modules. Soit F le foncteur covariant de la catégorie des A-modules dans celle des ensembles qui envoie un A-module P sur l'ensemble des applications bilinéaires de $M \times N$ vers P.
  Alors F est représentable. En effet notons β l'application bilinéaire $(m, n) \mapsto m \otimes n$ qui va de $M \times N$ vers $M \otimes_A N$. Alors la donnée pour tout A-module P de la bijection $f \mapsto f \circ \beta$ entre $\mathrm{Hom}_A(M \otimes_A N, P)$ et $F(P)$ définit un isomorphisme entre les foncteurs $\mathrm{Hom}_A(M \otimes_A N, .)$ et F.

- Soit n un entier et soit F le foncteur covariant de la catégorie des groupes dans celle des ensembles qui envoie un groupe G sur le sous-ensemble de G formé des éléments g tels que $g^n = e$.
  Alors F est représentable. En effet la donnée pour tout groupe G de la bijection $f \mapsto f(\bar{1})$ entre $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, G)$ et $F(G)$ définit un isomorphisme de foncteurs entre $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, .)$ et F.

Objets universels

Dans ce qui suit on va travailler, pour fixer les idées, avec des foncteurs *covariants* d'une catégorie $\mathbf{C}$ vers $\mathbf{Ens}$. Le lecteur est invité à énoncer les résultats analogues pour les foncteurs contravariants (qui peuvent être vus, rappelons-le, comme des foncteurs covariants de $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ vers $\mathbf{Ens}$).

Soit donc un foncteur covariant F d'une catégorie $\mathbf{C}$ vers $\mathbf{Ens}$. Supposons-le représentable. Il existe alors un objet X de $\mathbf{C}$ et un isomorphisme de foncteurs

$$\varphi : \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, .) \simeq F.$$

Rappelons qu'un tel φ est la donnée pour tout objet Y de $\mathbf{C}$ d'un isomorphisme $\varphi(Y) : \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y) \simeq F(Y)$, la famille des $\varphi(Y)$ devant être telle que pour toute flèche $Y \to Z$ dans $\mathbf{C}$ le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y) \arrow[r, "\varphi(Y)"] \arrow[d] & F(Y) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Z) \arrow[r, "\varphi(Z)"] & F(Z)
\end{tikzcd}$$

commute.

Notons ξ l'image par $\varphi(X)$ de l'identité 1_X de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, X)$. *Remarquez que par sa définition même ξ est un élément de l'ensemble $F(X)$.* Soit Y un objet de $\mathbf{C}$ et soit f une flèche de X vers Y. Le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, X) \arrow[r, "\varphi(X)"] \arrow[d] & F(X) \arrow[d, "F(f)"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y) \arrow[r, "\varphi(Y)"] & F(Y)
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

L'image de l'identité par la flèche verticale de gauche (qui n'est autre que la composition avec f) est simplement f. La commutativité du diagramme implique donc que $\varphi(Y)(f) = F(f)(\varphi(X)(1_X)) = F(f)(\xi)$. On dispose donc d'une description explicite de l'isomorphisme φ : *si Y est un objet de $\mathbf{C}$ alors $\varphi(Y)$ envoie toute flèche $f : X \to Y$ sur l'élément $F(f)(\xi)$ de $F(Y)$.*

Notons que si F est un foncteur covariant *quelconque* de $\mathbf{C}$ vers $\mathbf{Ens}$ et si ξ est un élément de $F(X)$ pour un certain objet X de $\mathbf{C}$ alors la donnée pour tout Y de l'application $f \mapsto F(f)(\xi))$ de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$ vers $F(Y)$ définit un *morphisme de foncteurs* de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, .)$ vers F. Le foncteur F est donc représentable si et seulement si on peut choisir (X, ξ) de sorte que ce morphisme de foncteurs soit un isomorphisme.

Récapitulons.

Proposition et définition. *Soit* $\mathbf{C}$ *une catégorie et* F *un foncteur covariant de* $\mathbf{C}$ *vers* $\mathbf{Ens}$. *Le foncteur* F *est représentable si et seulement si il existe un couple* (X, ξ) *formé d'un objet* X *de* $\mathbf{C}$ *et d'un élément* ξ *de* $F(X)$ *tel que pour tout objet* Y *de* $\mathbf{C}$ *l'application* $f \mapsto F(f)(\xi)$ *de* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$ *vers* $F(Y)$ *soit bijective. Un tel couple est appelé un* représentant *du foncteur* F. *On dit parfois que* ξ *est un* objet universel *relativement au foncteur* F.

Remarque. Par abus de langage on dira parfois simplement que X représente F. Mais notez bien l'ambiguïté : pour le même X plusieurs ξ peuvent convenir.

Considérons de ce nouveau point de vue les exemples déjà traités.

- Soit A un anneau et soit P un sous-ensemble de A. Soit F le foncteur covariant de la catégorie des anneaux vers celle des ensembles qui envoie tout anneau B sur l'ensemble des morphismes d'anneaux de A vers B s'annulant sur P.
  Alors F est représentable par le couple $(A/(P), p)$ où p est le morphisme quotient.

- Soit A un anneau et n un entier. Soit F le foncteur covariant de la catégorie des A-algèbres vers celle des ensembles qui envoie toute A-aglèbre B sur l'ensemble B^n.
  Alors F est représentable par le couple $(A[X_1, \ldots, X_n], (X_1, \ldots, X_n))$.

- Soit A un anneau et M et N deux A-modules. Soit F le foncteur covariant de la catégorie des A-modules dans celle des ensembles qui envoie un A-module P sur l'ensemble des applications bilinéaires de $M \times N$ vers P.
  Alors F est représentable par le couple $(M \otimes_A N,\ (m, n) \mapsto m \otimes n)$.

- Soit n un entier et soit F le foncteur covariant de la catégorie des groupes dans celle des ensembles qui envoie un groupe G sur le sous-ensemble de G formé des éléments g tels que $g^n = e$.
  Alors F est représentable par le couple $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \overline{1})$.

On pourra ainsi dire que $(m, n) \mapsto m \otimes n$ est une application bilinéaire universelle de source $M \times N$, ou que $(X_1, \ldots, X_n)$ est un n-uplet universel d'éléments d'une A-algèbre...

Remarque. Vous pouvez à titre d'exercice considérer n'importe quel objet que vous avez caractérisé quand vous étiez petit(e) par une propriété universelle, et reformuler ladite propriété en terme de représentabilité d'un certain foncteur dont vous donnerez un représentant explicite.

Remarque. Vous savez bien que les objets définis par une propriété universelle sont "uniques à unique isomorphisme près". C'est en fait un résultat général sur les foncteurs représentables :

Lemme (unicité du représentant à unique isomorphisme près). *Soit F un foncteur covariant d'une catégorie $\mathbf{C}$ vers $\mathbf{Ens}$ que l'on suppose représentable. Soient (X, ξ) et (Y, η) deux représentants de F. Il existe alors un unique morphisme f de Y vers X tel que $F(f)(\eta) = \xi$ et c'est un isomorphisme.*

Démonstration. Comme (Y, η) représente F il existe un unique morphisme f de Y vers X tel que $F(f)(\eta) = \xi$. Comme (X, ξ) représente F il existe un unique morphisme g de X vers Y tel que $F(g)(\xi) = \eta$. La composée $f \circ g$ est un endomorphisme de X qui vérifie $F(f \circ g)(\xi) = F(f)(F(g)(\xi)) = F(f)(\eta) = \xi$. Comme (X, ξ) représente F la flèche $h \mapsto F(h)(\xi)$ est une bijection de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, X)$ vers $F(X)$; comme $F(1_X)(\xi) = \xi$ l'application $f \circ g$ est nécessairement égale à 1_X. On montre de même que $g \circ f$ est égale à 1_Y, ce qui achève la preuve. $\square$

Remarque. L'unicité établie ci-dessus a pour conséquence que l'on parlera souvent *du* (et non pas *d'un*) représentant de F, ainsi que *de l'* (et non pas *d'un*) objet universel relatif à F.

Soit $\mathbf{C}$ une catégorie et soient F et G deux foncteurs covariants de $\mathbf{C}$ vers $\mathbf{Ens}$. Soit (X, ξ) un représentant de F et (Y, η) un représentant de G. Soit f un morphisme de Y vers X. La donnée pour tout objet Z de $\mathbf{C}$ de l'application $g \mapsto g \circ f$ de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Z)$ vers $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(Y, Z)$ définit un morphisme de foncteurs de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, .)$ vers $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(Y, .)$ et donc, *via* les isomorphismes donnés par ξ et η, un morphisme $f^\sharp$ de F vers G que l'on dira *induit* par f. La description de ce morphisme est la suivante : fixons un objet Z de $\mathbf{C}$ et considérons un élément λ de $F(Z)$. Il existe par hypothèse une unique flèche $\varphi : X \to Z$ telle que $\lambda = F(\varphi)(\xi)$. La flèche $\varphi \circ f$ va de Y vers Z. On a alors $f^\sharp(Z)(\lambda) = G(\varphi \circ f)(\eta)$.

Lemme (Yoneda). *Soit ρ un morphisme de foncteurs de F vers G. Il existe une unique application f de Y vers X telle que $f^\sharp = \rho$.*

Démonstration. Montrons d'abord l'unicité. Soit $f : Y \to X$ tel que $f^\sharp = \rho$. Calculons $f^\sharp(X)(\xi)$. On utilise la formule donnée ci-dessus, l'application φ correspondant à ξ étant simplement l'identité de X. On obtient l'égalité $G(f)(\eta) = f^\sharp(X)(\xi) = \rho(X)(\xi)$. Comme ρ est donné $\rho(X)(\xi)$ l'est aussi ; comme $f \mapsto G(f)(\eta)$ est une bijection entre $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(Y, X)$ et $G(X)$ on voit que si f convient c'est nécessairement l'unique antécédent de $\rho(X)(\xi)$ par cette bijection.

Réciproquement prenons pour f cet unique antécédent. Soit Z un objet de $\mathbf{C}$ et λ un élément de $F(Z)$. Soit φ l'unique flèche de X vers Z telle que $\lambda = F(\varphi)(\xi)$. On sait que $f^\sharp(Z)(\lambda) = G(\varphi \circ f)(\eta)$. Ce dernier terme est égal à $G(\varphi)(G(f)(\eta))$ par fonctorialité de G. Or $G(f)(\eta) = \rho(X)(\xi)$ par le choix de f. On en déduit que $G(\varphi)(G(f)(\eta)) = G(\varphi)(\rho(X)(\xi))$. Or comme ρ est un morphisme de foncteurs de F vers G le diagramme

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(\varphi)"] \arrow[d, "\rho(X)"'] & F(Z) \arrow[d, "\rho(Z)"] \\ G(X) \arrow[r, "G(\varphi)"] & G(Z) \end{tikzcd}$$

est commutatif. On en déduit que $G(\varphi)(\rho(X)(\xi)) = \rho(Z)(F(\varphi)(\xi))$. Le membre de droite de l'égalité n'est autre, par définition de φ, que $\rho(Z)(\lambda)$. Les applications $f^\sharp(Z)$ et $\rho(Z)$ coïncident donc pour tout objet Z de $\mathbf{C}$. Autrement dit $f^\sharp = \rho$, ce qu'il fallait démontrer. $\square$

Remarque. Si F, G, H sont trois foncteurs respectivement représentés par (X, ξ), (Y, η) et (Z, ζ), si f est un morphisme de Y vers X et si g est un morphisme de Z vers Y les morphismes de foncteurs $g^\sharp \circ f^\sharp$ et $(f \circ g)^\sharp$, qui vont de F vers H, coïncident. En particulier on en déduit que f est un isomorphisme si et seulement si $f^\sharp$ en est un.

Remarque. Notez bien que $f \mapsto f^\sharp$ renverse le sens des flèches. C'est parce qu'on travaille avec des foncteurs covariants ; vous pouvez vérifier que si l'on s'intéresse à des morphismes entre foncteurs contravariants représentables alors $f \mapsto f^\sharp$ préserve le sens des flèches.

Remarque. Le lemme de Yoneda est particulièrement utile lorsqu'on comprend beaucoup mieux le foncteur représenté par l'objet que l'objet lui-même, ce qui est souvent le cas pour les "espaces de modules" évoqués en introduction par exemple. Même si sa preuve a pu vous rebuter relisez-la tranquillement, elle est en fait complètement formelle et ne présente aucune difficulté. Le seul problème est de bien comprendre où vivent les objets dont on parle... avec un peu d'habitude on y arrive sans problèmes.

Un exemple. Soit A un anneau et m et n deux entiers. Les foncteurs $F : B \mapsto B^n$ et $G : B \mapsto B^m$, qui vont de la catégorie des A-algèbres vers celle des ensembles et sont covariants, sont respectivement représentables par les couples $(A[X_1, \ldots, X_n], (X_1, \ldots, X_n))$ et $(A[Y_1, \ldots, Y_m], (Y_1, \ldots, Y_m))$. Le lemme de Yoneda assure alors que l'application qui à un morphisme de A-algèbres entre $A[Y_1, \ldots, Y_m]$ et $A[X_1, \ldots, X_n]$ associe le morphisme induit de F vers G est une bijection.

Une telle application est donnée par m polynômes $P_1, \ldots, P_m$ en les n-variables $X_1, \ldots, X_n$: ce sont les images des Y_j. Le morphisme de foncteurs correspondant à une telle famille $(P_1, \ldots, P_m)$ de polynômes est simplement la donnée pour toute A-algèbre B de l'application de B^n dans B^m qui à $(b_1, \ldots, b_n)$ associe $(P_1(b_1, \ldots, b_n), \ldots, P_m(b_1, \ldots, b_n))$. Tout morphisme de foncteurs de F vers G est donc donné par une application polynomiale.

Cela traduit rigoureusement l'énoncé suivant : *la seule manière de se donner une formule qui définisse une application de B^n vers B^m pour* n'importe quelle *A-algèbre B consiste à se donner une famille de m polynômes à cœfficients dans A.* Ce qui est conforme à l'intuition : sur une A-algèbre quelconque, on ne sait rien faire d'autre *a priori* qu'additionner et multiplier les éléments, entre eux ou bien par des scalaires.

Autres exemples

On va voir que certaines constructions décrites en cours s'expriment de manière naturelle dans le langage des foncteurs représentables. Par exemple donnons-nous une catégorie $\mathbf{C}$ et une famille (X_i) d'objets de $\mathbf{C}$. Soit F le foncteur contravariant de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{Ens}$ qui envoie Z sur $\prod \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(Z, X_i)$. Soit Z un objet de $\mathbf{C}$. Donnons-nous pour tout i une flèche f_i de Z vers X_i. Il résulte alors de la définition vue en cours que $(Z, (f_i))$ *est un produit des X_i si et seulement si le couple $(Z, (f_i))$ représente le foncteur F.* Dire que le produit $\prod X_i$ existe, c'est donc dire que F est représentable.

Vous êtes invités à traduire par la représentabilité d'un foncteur convenablement défini l'existence de produits fibrés, de sommes amalgamées, de limites projectives ou inductives... Donnons un exemple amusant : choisissons un singleton $\{*\}$ et considérons le foncteur F qui associe à tout objet de $\mathbf{C}$ le singleton en question, et qui envoie chaque flèche sur l'identité. On peut le voir comme un foncteur covariant aussi bien que contravariant. Si on le voit comme un foncteur covariant alors pour tout objet X de $\mathbf{C}$ le couple $(X, *)$ représente F si et seulement si X est un objet initial de $\mathbf{C}$; si on le voit comme un foncteur contravariant alors pour tout objet X de $\mathbf{C}$ le couple $(X, *)$ représente F si et seulement si X est un objet final de $\mathbf{C}$.

Restriction d'un foncteur et produit fibré

Soit $\mathbf{C}$ une catégorie dans laquelle les produits fibrés existent et soit S un objet de $\mathbf{C}$. On note $\mathbf{C}/S$ la catégorie dont les objets sont les flèches $X \to S$, les flèches entre deux objets $X \to S$ et $Y \to S$ de $\mathbf{C}$ étant les éléments de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$ tels que le diagramme $\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[dl] \\ S & \end{tikzcd}$ commute. Remarquons que si S est un objet final de $\mathbf{C}$ alors $\mathbf{C}$ et $\mathbf{C}/S$ coïncident. Pour toute flèche $R \to S$ dans $\mathbf{C}$ le produit fibré permet de définir un foncteur de $\mathbf{C}/S$ vers $\mathbf{C}/R$ qui envoie $X \to S$ sur $X \times_S R \to R$ (cette dernière flèche étant la seconde projection).

Soit maintenant F un foncteur contravariant de $\mathbf{C}/S$ vers $\mathbf{Ens}$ que l'on suppose représentable, et soit $(X \to S, \xi)$ un représentant de F. Soit $f : R \to S$ une flèche. Notons p (resp. q) la projection de $X \times_S R$ vers X (resp. R). Tout objet de $\mathbf{C}/R$ peut être vu, *via* la composition avec f, comme un objet de $\mathbf{C}/S$, et tout $\mathbf{C}/R$-morphisme entre objets de $\mathbf{C}/R$ est un $\mathbf{C}/S$-morphisme. Cela permet de définir, en un sens évident, la *restriction* à $\mathbf{C}/R$ du foncteur F.

On va montrer que cette restriction est représentable par le couple

$$(X \times_S R \to R, F(p)(\xi)).$$

Soit $Z \to R$ un objet de $\mathbf{C}/R$ et $Y \to S$ un objet de $\mathbf{C}/S$. La flèche $Z \to R$ considérée sera également notée ρ.

i) $g \mapsto F(g)(\xi)$ établit une bijection entre $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}/S}(Z, X)$ et $F(Z)$.

ii) $\psi \mapsto (p \circ \psi, q \circ \psi)$ établit une bijection entre $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}/S}(Y, X \times_S R)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}/S}(Y, X) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}/S}(Y, R)$.

iii) Un élément ψ de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}/S}(Z, X \times_S R)$ appartient à $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}/R}(Z, X \times_S R)$ si et seulement si $q \circ \psi$ est la flèche $Z \to R$.

Des assertions *i)* et *ii)* l'on déduit que $\psi \mapsto p \circ \psi$ établit une bijection entre $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}/R}(Z, X \times_S R)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}/S}(Z, X)$; il découle alors, en vertu de l'assertion *i)*, que $\psi \mapsto F(p \circ \psi)(\xi)$ établit une bijection entre $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}/R}(Z, X \times_S R)$ et $F(Z)$. Or $F(p \circ \psi)(\xi) = F(\psi)(F(p))(\xi)$. On vient donc de montrer que $\psi \mapsto F(\psi)(F(p)(\xi))$ établit une bijection entre $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}/R}(Z, X \times_S R)$ et $F(Z)$, et ce pour tout objet Z de $\mathbf{C}/R$. Autrement dit $(X \times_S R \to R, F(p)(\xi))$ représente la restriction du foncteur F à $\mathbf{C}/R$.

Exemples géométriques

L'espace affine de dimension n en géométrie algébrique

Soit n un entier. On appelle *espace affine de dimension n sur* Spec $\mathbb{Z}$, et l'on note $\mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}}$, le spectre de l'anneau de polynômes $\mathbb{Z}[T_1, \ldots, T_n]$. Soit X un schéma quelconque. Comme $\mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}}$ est affine la composition par la flèche naturelle $X \to \mathrm{Spec}\,\Gamma(X, \mathscr{O}_X)$ établit une bijection entre

$$\mathrm{Hom}(X, \mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}}) \text{ et } \mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}\,\Gamma(X, \mathscr{O}_X), \mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}}).$$

Le schémas Spec $\Gamma(X, \mathscr{O}_X)$ et $\mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}}$ étant affines le terme de droite est en bijection avec

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[T_1, \ldots, T_n], \Gamma(X, \mathscr{O}_X)),$$

c'est-à-dire encore avec $(\Gamma(X, \mathscr{O}_X))^n$ puisque $(\mathbb{Z}[T_1, \ldots, T_n], (T_1, \ldots, T_n))$ représente le foncteur $B \mapsto B^n$. On a donc établi l'existence d'une bijection

$$\mathrm{Hom}(X, \mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}}) \simeq \Gamma(X, \mathscr{O}_X)^n,$$

bijection que l'on peut expliciter (en se référant à sa construction ci-dessus) : elle envoie un morphisme φ sur le n-uplet $(\varphi^*(T_1), \ldots, \varphi^*(T_n))$.

On vient de démontrer que le foncteur contravariant de la catégorie des schémas vers celle des ensembles qui envoie X sur $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)^n$ est représentable, et que

$$(\mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}}, (T_1, \ldots, T_n))$$

en est un représentant.

Si Y est un schéma quelconque on note $\mathbb{A}^n_Y$, et on appelle *espace affine de dimension n sur Y*, le produit $Y \times \mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}}$ que l'on peut voir également comme un produit fibré $Y \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}} \mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}}$ puisque $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ est l'objet final de la catégorie des schémas. Remarquez que $\mathbb{A}^n_Y$ est muni, en tant que produit, de deux projections, l'une vers Y, l'autre vers $\mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}}$. On note encore $T_1, \ldots, T_n$ les images inverses, par la projection $\mathbb{A}^n_Y \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}}$, des fonctions T_i dans l'anneau $\Gamma(\mathbb{A}^n_Y, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_Y})$. Notez que si Y est le spectre d'un anneau commutatif A alors $\mathbb{A}^n_Y$ s'identifie au spectre de $A[T_1, \ldots, T_n]$.

Il résulte de ce qui précède et du paragraphe consacré au lien entre les restrictions de foncteurs et les produits fibrés que le foncteur $X \mapsto \Gamma(X, \mathcal{O}_X)^n$, vu comme un foncteur covariant de la catégorie des *Y-schémas* vers celle des ensembles, est représentable par le couple

$$(\mathbb{A}^n_Y, (T_1, \ldots, T_n)).$$

On dira parfois que le morphisme d'un schéma Y-schéma X vers $\mathbb{A}^n_Y$ qui correspond à un n-uplet $(f_1, \ldots, f_n)$ d'éléments de $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ est *défini par les n fonctions $f_1, \ldots, f_n$*.

L'espace projectif de dimension n en géométrie différentielle ou analytique

On se donne un corps $\mathbb{K}$ égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et on travaille dans l'une des catégories suivantes, dont on appellera simplement les objets *variétés* : si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la catégorie des variétés de classe C^k où k est un élément de $\{0, 1, \ldots, \infty\}$, ou bien celle des variétés analytiques réelles ; si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la catégorie des variétés analytiques complexes. Un *morphisme* sera, sauf mention expresse du contraire, un morphisme dans la catégorie en question.

Fixons un entier n positif ou nul et notons $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{K}^{n+1}$; c'est l'espace projectif de dimension n sur $\mathbb{K}$.

Nous allons le munir d'une structure de variété. Pour ce faire on identifie $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ au quotient de $\mathbb{K}^{n+1} - \{0\}$ par la relation de colinéarité. On note $X_0, \ldots, X_n$ les $n+1$ coordonnées sur $\mathbb{K}^{n+1}$. Soit

$$p : (\mathbb{K}^{n+1} - \{0\}) \to \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$$

l'application quotient. Pour tout i compris entre 0 et n on note V_i l'ouvert de $\mathbb{K}^{n+1}$ défini par la condition $X_i \neq 0$ et U_i le sous-ensemble $p(V_i)$ de $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$.

Pour tout i l'application de ψ_i de $\mathbb{K}^n$ vers U_i qui envoie $(x_0, \ldots, x_{n-1})$ sur $p(x_0, \ldots, x_{i-1}, 1, x_i, \ldots, x_{n-1})$ est une bijection. Pour tout couple (i, j) la restriction de $\psi_j^{-1} \circ \psi_i$ à $\psi_i^{-1}(U_i \cap U_j)$ est un morphisme de l'ouvert $\psi_i^{-1}(U_i \cap U_j)$ de $\mathbb{K}^n$ vers $\mathbb{K}^n$ (pour le voir, écrivez-la explicitement !). La famille des (U_i, ψ_i) définit donc un atlas qui fait de $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ une variété.

On a ainsi muni l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{K}^{n+1}$ d'une structure de variété. Le but est de montrer que cette structure est, en un sens que l'on va préciser ci-dessous, canonique.

Sous-fibrés en droites

Soit Y une variété et soit $\mathbb{D}$ la droite $\mathbb{K}(1, 0, \ldots, 0)$ de $\mathbb{K}^{n+1}$. On appellera *sous-fibré en droites de* $\mathbb{K}^{n+1} \times Y$ tout sous-ensemble Z de $\mathbb{K}^{n+1} \times Y$ possédant la propriété suivante : *pour tout y appartenant à Y il existe un ouvert U de Y contenant y et un morphisme*

$$\varphi : U \to \mathbf{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$$

tel que l'automorphisme $(\mathbf{x}, u) \mapsto (\varphi(u)\mathbf{x}, u)$ de $\mathbb{K}^{n+1} \times U$ sur lui-même identifie $\mathbb{D} \times U$ à $Z \cap (\mathbb{K}^{n+1} \times U)$. On dira que l'application φ *trivialise Z au-dessus de U.*

Remarque. Si l'on note A l'anneau des morphismes de U vers $\mathbb{K}$ alors se donner un morphisme de U vers $\mathbf{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$ équivaut à se donner un élément de $\mathbf{GL}_{n+1}(A)$, c'est-à-dire un élément *inversible* de $M_{n+1}(A)$, c'est-à-dire encore une matrice carrée de taille $n+1$ à cœfficients dans A dont le déterminant est un élément *inversible* de A ; notez que les éléments inversibles de A sont exactement les morphismes de U vers $\mathbb{K}$ qui ne s'annulent pas.

Remarque. Il résulte aussitôt de la définition ci-dessus qu'un sous-fibré en droites Z de $\mathbb{K}^{n+1} \times Y$ en est en particulier une sous-variété, puisque pour tout ouvert U de Y le produit $\mathbb{D} \times U$ est une sous-variété de $\mathbb{K}^{n+1} \times U$.

Remarque. Soit Z un sous-fibré en droites de $\mathbb{K}^{n+1} \times Y$ et soit y un point de Y. La fibre en y de $\mathbb{K}^{n+1} \times Y$ s'identifie à $\mathbb{K}^{n+1}$; notons Z_y le sous-ensemble de $\mathbb{K}^{n+1}$ correspondant à $Z \cap (\mathbb{K}^{n+1} \times \{y\})$ *via* cette identification. Alors Z_y est une droite vectorielle ; si on considère un ouvert U contenant y et un morphisme $\varphi : U \to \mathbf{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$ qui trivialise Z au-dessus de U alors la bijection linéaire $\varphi(y)$ envoie $\mathbb{D}$ sur Z_y. On peut donc voir la famille $y \mapsto Z_y$ comme *une famille de droites (dans un sens compatible avec la catégorie de variétés sur laquelle on travaille) paramétrée par Y*, puisque localement on peut écrire $Z_y = \varphi(y)(\mathbb{D})$ où φ est un morphisme à valeurs dans $\mathbf{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$.

Exemple. Soit Δ une droite vectorielle de $\mathbb{K}^{n+1}$. Alors $\Delta \times Y$ est un sous-fibré en droites de $\mathbb{K}^{n+1} \times Y$; en effet si g est un élément de $\mathbf{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$ envoyant $\mathbb{D}$ sur

Δ alors on peut prendre pour U la variété Y elle-même et pour φ l'application constante égale à g.

Exemple. Considérons le sous ensemble $\mathscr{E}$ de $\mathbb{K}^{n+1} \times \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ formé des couples $(\mathbf{x}, y)$ tels que $\mathbf{x}$ appartienne à la droite vectorielle qui correspond au point y de $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$. Vous pouvez montrer, à titre d'exercice, que $\mathscr{E}$ est un sous-fibré en droites de $\mathbb{K}^{n+1} \times \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$.

Fonctorialité. Soit $f : X \to Y$ un morphisme entre deux variétés et soit Z un sous-fibré en droites de $\mathbb{K}^{n+1} \times Y$. L'image réciproque de Z par l'application $\mathbb{K}^{n+1} \times X \to \mathbb{K}^{n+1} \times Y$ déduite de f est notée f^*Z. C'est un sous-fibré en droites de $\mathbb{K}^{n+1} \times X$. En effet soit x un point de X et soit y son image par f. Soit U un ouvert de Y contenant y et soit φ un morphisme de U dans $\mathbf{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$ qui trivialise Z au-dessus de U. Alors il est immédiat que $\varphi \circ f$ trivialise f^*Z au-dessus de $f^{-1}(U)$. Si T est une variété et si $g : T \to X$ est un morphisme alors $(f \circ g)^*Z = g^*f^*Z$.

Exemple. Si U est un ouvert de Y et si $i : U \hookrightarrow Y$ est l'inclusion alors pour tout sous-fibré en droites Z de $\mathbb{K}^{n+1} \times Y$ le sous-fibré i^*Z de $\mathbb{K}^{n+1} \times U$ n'est autre que $Z \cap (\mathbb{K}^{n+1} \times U)$. Si U est un ouvert d'une variété X et si f est un morphisme de X vers une variété Y alors pour tout sous-fibré en droites Z de $\mathbb{K}^{n+1} \times Y$ alors $f^*Z \cap (\mathbb{K}^{n+1} \times U)$ et $f_{|U}^*Z$, qui sont deux sous-fibrés en droites de $\mathbb{K}^{n+1} \times U$, coïncident.

On définit un foncteur F contravariant de la catégorie des variétés vers celle des ensembles comme suit :

- Si Y est une variété alors $F(Y)$ est l'ensemble des sous-fibrés en droites de $\mathbb{K}^{n+1}$.

- Si $f : X \to Y$ est un morphisme entre deux variétés alors $F(f)$ envoie tout sous-fibré en droites Z de $\mathbb{K}^{n+1} \times Y$ sur le sous-fibré en droites f^*Z de $\mathbb{K}^{n+1} \times X$.

Proposition. *Le foncteur F est représentable par le couple* $(\mathbb{P}^n(\mathbb{K}), \mathscr{E})$.

Démonstration. Soit Y une variété et soit Z un sous-fibré en droites de $\mathbb{K}^{n+1} \times Y$.

Soit y un point de Y. Il possède un voisinage ouvert U au-dessus duquel existe une trivialisation $\varphi : U \to \mathbf{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$ de Z. Numérotons de 0 à n les coordonnées d'un élément de $\mathbb{K}^{n+1}$ et pour tout i notons λ_i le morphisme de U dans $\mathbb{K}$ qui envoie x sur la i-ième coordonnée de $\varphi(x)((1, 0, \ldots, 0))$ (c'est simplement le terme $(i, 1)$ de la matrice φ). Ce dernier vecteur étant non nul il existe i tel que $\lambda_i(y)$ soit non nul. Quitte à restreindre U on peut supposer que λ_i ne s'annule pas sur U. Soit ρ le morphisme

$$x \mapsto \left(\frac{\lambda_0(x)}{\lambda_i(x)}, \ldots, \frac{\lambda_{i-1}(x)}{\lambda_i(x)}, \frac{\lambda_{i+1}(x)}{\lambda_i(x)}, \ldots, \frac{\lambda_n(x)}{\lambda_i(x)}\right)$$

défini sur U et à valeurs dans $\mathbb{K}^n$ et soit f la composée $\psi_i \circ \rho$ (l'application ψ_i a été définie au début du paragraphe).

La structure de variété dont on a muni $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ provient de l'atlas fourni par la famille des ψ_i ; l'application f est donc un morphisme de U vers $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$.

On vérifie (faites-le vous-même, ce n'est pas difficile car tout est construit pour !) que $f^*\mathscr{E}$ est précisément $Z \cap (\mathbb{K}^{n+1} \times U)$, et que f est le seul morphisme de U vers $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ à posséder cette propriété ; plus généralement si W est un ouvert inclus dans U alors $f^*_{|W}\mathscr{E}$ est précisément $Z \cap (\mathbb{K}^{n+1} \times W)$, et $f_{|W}$ est le seul morphisme de W vers $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ à posséder cette propriété.

Qualifions de *bon* ouvert tout ouvert V de Y possédant la propriété suivante : *pour tout ouvert W inclus dans V il existe un unique morphisme $f_W : W \to \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ tel que $f^*_W\mathscr{E}$ soit égal à Z.* Notez que si V est bon on a nécessairement $(f_V)_{|W} = f_W$ pour tout ouvert W inclus dans V.

On a montré ci-dessus que tout point de Y était contenu dans un bon ouvert. Si U et V sont deux tels ouverts alors $(f_U)_{|U\cap V} = (f_V)_{|U\cap V} = f_{U\cap V}$. Ceci permet de définir par recollement un morphisme $f : Y \to \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ dont la restriction à tout bon ouvert U est précisément f_U. Soit U un bon ouvert de Y. L'intersection de $f^*\mathscr{E}$ avec $\mathbb{K}^{n+1} \times U$ est égale à $f^*_{|U}\mathscr{E}$ et donc à $Z \cap (\mathbb{K}^{n+1} \times U)$. Comm les bons ouverts recouvrent Y le sous-fibré en droites $f^*\mathscr{E}$de $\mathbb{K}^{n+1} \times Y$ est égal à Z. Si g est un morphisme de Y vers $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ tel que $g^*\mathscr{E}$ soit égal à Z alors pour tout bon ouvert U de Y on a $g^*_{|U}\mathscr{E} = Z \cap (\mathbb{K}^{n+1} \times U)$ et donc $g_{|U} = f_U = f_{|U}$. Or les bons ouverts recouvrent Y ; on en déduit que les morphismes g et f coïncident, ce qui achève la preuve. □

L'espace projectif de dimension n en géométrie algébrique

Soit k un corps et soit n un entier. On note $X_0, \ldots, X_n$ les $n+1$ fonctions coordonnées sur l'espace affine $\mathbb{A}^{n+1}_k$ et $\mathbb{D}$ le fermé Zariski de $\mathbb{A}^{n+1}_k$ défini par l'idéal $(X_1, \ldots, X_n)$; notez que la fonction X_0 induit un isomorphisme entre $\mathbb{D}$ et $\mathbb{A}^1_k$. On note $\mathbb{P}^n_k$ *l'espace projectif sur k*. C'est une k-variété de dimension n munie d'un morphisme

$$p : \mathbb{A}^{n+1}_k - \{0\} \to \mathbb{P}^n_k.$$

Il existe une famille $(U_i)_{0\leq i\leq n}$ d'ouverts affines de $\mathbb{P}^n_k$ satisfaisant les conditions suivantes :

- Les U_i recouvrent $\mathbb{P}^n_k$ et pour tout i l'ouvert $p^{-1}(U_i)$ de $\mathbb{A}^n_k - \{0\}$ est le lieu $D(X_i)$ d'inversibilité de X_i.

- Il existe pour tout i un isomorphisme de k-variétés $\psi_i : \mathbb{A}^n_k \simeq U_i$ tel que $\psi_i^{-1} \circ p$ soit donné par les n fonctions

$$\left(\frac{X_0}{X_i}, \ldots, \frac{X_{i-1}}{X_i}, \frac{X_{i+1}}{X_i}, \ldots, \frac{X_n}{X_i}\right).$$

Soit X un schéma et soit φ un élément de $\mathbf{GL}_{n+1}(\Gamma(X, \mathscr{O}_X))$. Les lignes et les colonnes de φ seront numérotées de 0 à n ; pour tout couple (i, j) on notera $\varphi_{i,j}$ le terme d'indice (i, j) de φ. Chaque $\varphi_{i,j}$ est un élément de $\Gamma(X, \mathscr{O}_X)$. Alors φ définit un automorphisme $\hat{\varphi}$ du X-schéma $\mathbb{A}^{n+1}_X$ de la manière suivante : pour tout ouvert *affine* U de X le schéma $\mathbb{A}^n_U$ est affine, et plus précisément s'identifie au spectre de $\Gamma(U, \mathscr{O}_X)[T_0, \ldots, T_n]$. Notons $\hat{\varphi}_U$ l'automorphisme de $\mathbb{A}^n_U$ défini par l'automorphisme de la $\Gamma(U, \mathscr{O}_X)$-algèbre $\Gamma(U, \mathscr{O}_X)[T_0, \ldots, T_n]$ qui envoie T_i sur $\sum \varphi_{i,j|U} T_j$ pour tout i. Il est immédiat que si V est un ouvert affine inclus dans U alors l'automorphisme de $\mathbb{A}^n_V$ induit par $\hat{\varphi}_U$ est $\hat{\varphi}_V$. En particulier si U et W sont deux ouverts affines de X alors pour tout ouvert affine V inclus dans $U \cap W$ les automorphismes respectivement induits par $\hat{\varphi}_U$ et $\hat{\varphi}_W$ sur V coïncident (et sont égaux à $\hat{\varphi}_V$). La famille des $\hat{\varphi}_U$, où U parcourt l'ensemble des ouverts affines de X, définit donc un automorphisme du X-schéma $\mathbb{A}^{n+1}_X$, que l'on notera $\hat{\varphi}$. Si $Y \to X$ est un morphisme de schéma l'automorphisme de $\mathbb{A}^{n+1}_Y \simeq \mathbb{A}^{n+1}_X \times_X Y$ induit par $\hat{\varphi}$ sera noté $\hat{\varphi}_Y$. Si l'on désigne par φ_Y l'image de φ par la flèche naturelle

$$\mathbf{GL}_{n+1}(\Gamma(X, \mathscr{O}_X)) \to \mathbf{GL}_{n+1}(\Gamma(Y, \mathscr{O}_Y))$$

alors $\hat{\varphi}_Y = \widehat{\varphi_Y}$. Notez que la notation $\hat{\varphi}_Y$ est *a posteriori* cohérente avec la notation $\hat{\varphi}_V$ introduite ci-dessus lors de la construction de $\hat{\varphi}$. Si A est un anneau commutatif et $\operatorname{Spec} A \to X$ une flèche on écrira parfois φ_A et $\hat{\varphi}_A$ au lieu $\varphi_{\operatorname{Spec}\ A}$ et $\hat{\varphi}_{\operatorname{Spec} A}$.

Remarque. On peut définir $\hat{\varphi}$ d'une autre manière : le couple

$$(\mathbb{A}^{n+1}_X, (T_0, \ldots, T_n))$$

représente le foncteur contravariant qui associe à un X-schéma Z l'ensemble $\Gamma(Z, \mathscr{O}_Z)^{n+1}$. La donnée pour tout X-schéma Z de la bijection de $\Gamma(Z, \mathscr{O}_Z)^{n+1}$ définie par la matrice φ_Z définit un automorphisme du foncteur $Z \mapsto \Gamma(Z, \mathscr{O}_Z)^{n+1}$, automorphisme qui provient par le lemme de Yoneda d'un unique automorphisme du X-schéma $\mathbb{A}^{n+1}_X$. Vous pouvez vérifier que l'automorphisme en question est précisément $\hat{\varphi}$.

Un cas particulier. On applique ce qui précède au cas d'un morphisme Spec $L \to X$ où L est un corps. Soit x l'image sur X de l'unique point de Spec L ; le corps L apparaît naturellement comme une extension de $\kappa(x)$. L'automorphisme $\hat{\varphi}$ du X-schéma $\mathbb{A}^{n+1}_X$ induit un automorphisme de la fibre $\mathbb{A}^{n+1}_{\kappa(x)}$ de $\mathbb{A}^{n+1}_X$ en x, qui induit à son tour une bijection de $\mathbb{A}^{n+1}_{\kappa(x)}(L) \simeq L^{n+1}$ sur lui-même. De la remarque précédente on déduit que cette bijection est simplement celle donnée par la matrice φ_x, image de φ par la flèche canonique $\mathbf{GL}_{n+1}(\Gamma(X, \mathscr{O}_X)) \to \mathbf{GL}_{n+1}(\kappa(x))$. On peut donc voir φ comme *une famille algébrique de bijections linéaires paramétrées par* φ.

Définition. *Soit Y un k-schéma. On appellera* sous-fibré en droites de $\mathbb{A}^{n+1}_Y$ *tout fermé Zariski Z de $\mathbb{A}^{n+1}_Y$ satisfaisant la condition suivante : pour tout point y de Y il existe un voisinage U de y et un élément φ de $\mathbf{GL}_{n+1}(\Gamma(U, \mathscr{O}_U))$ tel que l'automorphisme $\hat{\varphi}$ de $\mathbb{A}^{n+1}_U$ induise un isomorphisme entre les fermés Zariski $\mathbb{D} \times_k U$ et $Z \times_X U$ de $\mathbb{A}^{n+1}_U$. On dira que* φ trivialise Z au-dessus de U.

Soit Y un k-schéma et soit Z un sous-fibré en droites de $\mathbb{A}^{n+1}_Y$. Soit y un point de Y et L une extension de $\kappa(y)$ (il revient au même de se donner directement un morphisme Spec $L \to Y$). Notons Z_L le fermé Zariski de $\mathbb{A}^{n+1}_L$ image réciproque de Z par la flèche Spec $L \to Y$. Donnons-nous un voisinage U de y dans Y et une trivialisation φ de Z au-dessus de U. L'automorphisme $\hat{\varphi}_L$ de $\mathbb{A}^{n+1}_L$ identifie $\mathbb{D} \times_k L$ et Z_L ; en particulier Z_L est isomorphe à $\mathbb{A}^1_L$. Si l'on regarde ce qui se passe au niveau des L-points la bijection entre les deux sous-ensembles $\mathbb{D}(L) = L(1, 0, \ldots, 0)$ (qui est une droite vectorielle) et $Z_L(L)$ de $\mathbb{A}^{n+1}(L) \simeq L^{n+1}$ est donnée par l'application linéaire de matrice φ_L, qui est en fait à cœfficients dans $\kappa(y)$; plus précisément c'est l'image φ_y de φ par la flèche naturelle

$$\mathbf{GL}_{n+1}(\Gamma(Y, \mathscr{O}_Y)) \to \mathbf{Gl}_{n+1}(\kappa(y)).$$

En conséquence $Z_L(L)$ est la droite vectorielle de $\mathbb{A}^{n+1}(L) \simeq L^{n+1}$ image de $L(1, 0, \ldots, 0)$ par l'application linéaire de matrice φ_y. On peut ainsi voir Z comme *une famille algébrique de droites vectorielles.*

Exemple. Donnons-nous une famille $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ de n formes linéaires indépendantes de k^{n+1}. Pour tout i on note $\varphi_i = \sum a_{i,j} e_j^*$ où (e_j) est la base canonique de k^{n+1}. Soit g un élément de $\mathbf{GL}_{n+1}(k)$ qui envoie la droite engendrée par $(1, \ldots, 0)$ sur celle définie par l'annulation des φ_i. Soit Δ le sous-schéma fermé de $\mathbb{A}^{n+1}_k$ défini par l'idéal qu'engendrent les $\sum a_{i,j} T_j$ où i varie de 1 à n. Soit Y un k-schéma et soit Z le sous-schéma fermé $\Delta \times_k Y$ de $\mathbb{A}^{n+1}_Y$. C'est un sous-fibré en droites de $\mathbb{A}^{n+1}_Y$: on vérifie en effet que la matrice g vue comme élément de $\mathbf{GL}_{n+1}(\Gamma(Y, \mathscr{O}_Y))$ est une trivialisation de Z au-dessus de Y.

Exemple. Soit i un entier. On va travailler avec le produit $\mathbb{A}_k^{n+1} \times_k \mathbb{A}_k^n$; les coordonnées du premier facteur seront notées $X_0, \ldots, X_n$ et celles du second $(T_0, \ldots, T_{i-1}, T_{i+1}, \ldots, T_n)$. Soit $\mathscr{F}_i$ le fermé Zariski de $\mathbb{A}_k^{n+1} \times_k \mathbb{A}_k^n$ défini par les équations

$$\{X_j - X_i T_j = 0\}_{j \neq i} .$$

Par le biais de l'isomorphisme $\psi_i^{-1} : U_i \to \mathbb{A}_k^n$ correspond à $\mathscr{F}_i$ un fermé Zariski $\mathscr{E}_i$ de $\mathbb{A}_k^{n+1} \times_k U_i$. On vérifie (c'est un calcul sans difficulté) que les $\mathscr{E}_i$ se recollent en un fermé Zariski $\mathscr{E}$ de $\mathbb{A}_k^{n+1} \times_k \mathbb{P}_k^n$ qui se révèle être un sous-fibré en droites de $\mathbb{A}_k^{n+1} \times_k \mathbb{P}_k^n$.

Fonctorialité. Soit $f : X \to Y$ un morphisme entre deux k-schémas et soit Z un sous-fibré en droites de $\mathbb{A}_Y^{n+1}$. Le produit fibré

$$Z \times_{\mathbb{A}_Y^{n+1}} \mathbb{A}_X^{n+1}$$

est alors un sous-fibré en droites de $\mathbb{A}_X^{n+1}$; en effet soit x un point de X et soit y son image sur Y. Soit U un voisinage de y dans Y au-dessus duquel existe une trivialisation φ de Z. Alors il est immédiat que $\varphi_{f^{-1}(U)}$ est une trivialisation de $Z \times_{\mathbb{A}_Y^{n+1}} \mathbb{A}_X^{n+1}$ au-dessus de $f^{-1}(U)$. Le sous-fibré en droites $Z \times_{\mathbb{A}_Y^{n+1}} \mathbb{A}_X^{n+1}$ de $\mathbb{A}_X^{n+1}$ sera noté f^*Z. Si $g : T \to X$ est un morphisme d'un k-schéma T vers X on a alors $(f \circ g)^*Z = g^*f^*Z$.

On définit un foncteur F contravariant de la catégorie des k-schémas vers celle des ensembles comme suit :

- Si Y est un k-schéma alors $F(Y)$ est l'ensemble des sous-fibrés en droites de $\mathbb{A}_Y^{n+1}$.

- Si $f : X \to Y$ est un morphisme entre deux k-schémas alors $F(f)$ envoie tout sous-fibré en droites Z de $\mathbb{A}_Y^{n+1}$ sur le sous-fibré en droites f^*Z de $\mathbb{A}_X^{n+1}$.

Proposition. *Le foncteur F est représentable par le couple* $(\mathbb{P}_k^n, \mathscr{E})$.

Démonstration. Soit Y une variété et soit Z un sous-fibré en droites de $\mathbb{A}_k^{n+1}$.

Soit y un point de Y. Il possède un voisinage ouvert U au-dessus duquel existe une trivialisation φ de Z. Pour tout i notons λ_i le cœfficient $\varphi_{i,1}$ de φ ; c'est un élément de $\Gamma(U, \mathscr{O}_U)$.

Remarque. Si $T \to U$ est un morphisme de k-schémas le lecteur est invité à vérifier que l'image de λ_i dans $\Gamma(T, \mathscr{O}_T)$ est la i-ième coordonnée de l'élément $\varphi_T((1, 0, \ldots, 0))$ de $\Gamma(T, \mathscr{O}_T)^{n+1}$.

L'image φ_y de φ par la flèche canonique $\mathbf{GL}_{n+1}(\Gamma(U, \mathscr{O}_U)) \to \mathbf{GL}_{n+1}(\kappa(y))$ est une matrice inversible à cœfficients dans $\kappa(y)$. Sa première colonne est donc non nulle, et il existe en conséquence un entier i tel que $\lambda_i(y)$ soit non nul ; cela revient à dire que la i-ième coordonnée de $\varphi_y((1, 0, \ldots, 0))$ est non triviale. Quitte à restreindre U on peut supposer que λ_i est un élément inversible de $\Gamma(U, \mathscr{O}_U)$.

Soit ρ le morphisme de k-schémas de U vers $\mathbb{A}^n_k$ défini par la famille

$$\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_i}, \ldots, \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i}, \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}, \ldots, \frac{\lambda_n}{\lambda_i}\right)$$

d'éléments de $\Gamma(U, \mathscr{O}_U)$ et soit f la composée $\psi_i \circ \rho$; on la voit comme un morphisme de U vers $\mathbb{P}^n_k$.

On vérifie (faites-le vous-même, ce n'est pas difficile car tout est construit pour !) que $f^*\mathscr{E}$ est précisément $Z \times_{\mathbb{A}^{n+1}_Y} \mathbb{A}^{n+1}_U$, c'est-à-dire encore $Z \times_Y U$, c'est-à-dire encore l'ouvert de Z image réciproque de U par la flèche $Z \to Y$. De surcroît f est le seul morphisme de U vers $\mathbb{P}^n_k$ à posséder cette propriété ; plus généralement si W est un ouvert inclus dans U alors $f^*_{|W}\mathscr{E}$ est précisément $Z \times_Y W$ et $f_{|W}$ est le seul morphisme de W vers $\mathbb{P}^n_k$ à posséder cette propriété.
Qualifions de *bon* ouvert tout ouvert V de Y possédant la propriété suivante : *pour tout ouvert W inclus dans V il existe un unique morphisme $f_W : W \to \mathbb{P}^n_k$ tel que $f^*_W\mathscr{E}$ soit égal à $Z \times_Y W$*. Notez que si V est bon on a nécessairement $(f_V)_{|W} = f_W$ pour tout ouvert W inclus dans V.

On a montré ci-dessus que tout point de Y était contenu dans un bon ouvert. Si U et V sont deux tels ouverts alors $(f_U)_{|U\cap V} = (f_V)_{|U\cap V} = f_{U\cap V}$. Ceci permet de définir par recollement un morphisme $f : Y \to \mathbb{P}^n_k$ dont la restriction à tout bon ouvert U est précisément f_U. Soit U un bon ouvert de Y. Le produit fibré $f^*\mathscr{E} \times_Y U$ est égal à $f^*_{|U}\mathscr{E}$ et donc à $Z \times_Y U$. Comme les bons ouverts recouvrent Y le sous-fibré en droites $f^*\mathscr{E}$ de $\mathbb{A}^{n+1}_Y$ est égal à Z. Si g est un morphisme de Y vers $\mathbb{P}^n_k$ tel que $g^*\mathscr{E}$ soit égal à Z alors pour tout bon ouvert U de Y on a $g^*_{|U}\mathscr{E} = Z \times_Y U$, et donc $g_{|U} = f_U = f_{|U}$. Or les bons ouverts recouvrent Y ; on en déduit que les morphismes g et f coïncident, ce qui achève la preuve. $\square$

1 Exercices

i) Montrez que le foncteur covariant de la catégorie des anneaux vers celle des ensembles qui associe à un anneau A l'ensemble A^* de ses éléments inversibles est représentable. En déduire que le foncteur contravariant de la catégorie des schémas vers celle des ensembles qui associe à X l'ensemble $\Gamma(X, \mathscr{O}_X)^*$ est représentable.

ii) Montrez que le foncteur covariant de la catégorie des anneaux vers celle des ensembles qui à un anneau associe l'ensemble de ses éléments nilpotents n'est pas représentable.

iii) Soit n un entier. Montrez que le foncteur covariant de la catégorie des groupes vers celle des ensembles qui associe à un groupe G l'ensemble des éléments d'ordre fini de G n'est pas représentable.

iv) Soit n un entier. Montrez que le foncteur covariant de la catégorie des groupes vers celle des ensembles qui associe à un groupe G l'ensemble G^n est représentable.

v) Refaire ce qui a été fait sur les espaces projectifs (dans le cadre différentiel aussi bien qu'algébrique) pour les grassmanniennes : définissez le bon foncteur et montrez qu'il est représenté par la grassmannienne.