Université Paris 6
Année universitaire 2010-2011
Cours de *Géométrie affine et euclidienne* (LM 323)
Examen de seconde session, le 23 juin 2011 ; durée : 2 heures. Les documents et calculatrices sont interdits. *Barème indicatif, sur 75 : 12 points pour l'exercice 1, 12 points pour l'exercice 2, 12 points pour l'exercice 3, 15 points pour l'exercice 4, 10 points pour l'exercice 5, 14 points pour l'exercice 6.*

Exercice 1. Questions de cours. Soit k un corps.

a) Soit E un k-espace vectoriel ; donnez la définition d'un espace affine sur k d'espace directeur E.

b) Soient E et F deux espaces vectoriels sur k et soient $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ deux espaces affines sur k d'espaces directeurs respectifs E et F ; donnez la définition d'une application affine de $\mathscr{E}$ vers $\mathscr{F}$.

c) Soient E et F deux espaces vectoriels sur k et soient $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ deux espaces affines sur k d'espaces directeurs respectifs E et F. Soit $f : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ une application affine et soit $\mathscr{F}'$ un sous-espace affine de $\mathscr{F}$ dont on note F' l'espace directeur. Que peut-on dire de $f^{-1}(\mathscr{F}')$? *Justifiez votre réponse par une démonstration.*

Exercice 2. Soit f l'application affine de $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^2$ dans lui-même donnée par la formule

$$(x, y) \mapsto (x - y + 2, -x + 3y + 3).$$

Soit $\mathscr{R}$ le repère cartésien (M, e_1, e_2) de $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^2$ où $M = (2, 1)$, où $e_1 = (3, -1)$ et où $e_2 = (1, 1)$. Décrivez l'application f par une formule en coordonnées dans $\mathscr{R}$. *Comme on travaille dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, on demande que tous les coefficients de vos formules soient des (classes d') entiers ; donc si vous devez par exemple diviser par 2, songez que modulo 7 on a $2 \times 4 = 8 = 1$ et donc (1/2)=4.*

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'application affine dont la matrice dans les repères canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$ est égale à

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 5 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Décrivez f par une formule.

b) Donnez un système d'équations de l'image de f.

c) Si $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ est un point de l'image de f, donnez un point et une base de l'espace directeur de $f^{-1}((\alpha, \beta, \gamma, \delta))$.

Exercice 4. On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure usuelle de plan affine euclidien orienté. Vérifiez que chacune des applications $f, g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ci-dessous est une isométrie, donnez sa nature précise (rotation, réflexion, etc.) et les données géométriques pertinentes qui lui sont associées (centre et angle pour une rotation, axe pour une réflexion, etc.).

$$f : (x, y) \mapsto (\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - 1, -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y) ;$$

$$g : (x, y) \mapsto (y - 1, x + 1) \ ;$$
$$h : (x, y) \mapsto (\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + 1, \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y).$$

Exercice 5. Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien de dimension 3, soit $\mathscr{D}$ une droite de $\mathscr{E}$, soit r une rotation de $\mathscr{E}$ d'axe $\mathscr{D}$ et soit θ l'angle de r (qui n'est défini que modulo 2π et au signe près).

1) Soit u une isométrie de $\mathscr{E}$. Montrez que $u \circ r \circ u^{-1}$ est une rotation d'axe $u(\mathscr{D})$ et d'angle θ.

2) Trouvez une isométrie directe v de $\mathscr{E}$ telle que $v \circ r \circ v^{-1} = r^{-1}$.

Exercice 6. On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne usuelle. Soient a, b, c trois réels et soit $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application affine dont la matrice dans le repère canonique est égale à

$$\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 & a \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 & b \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrez que u est un vissage, et déterminez, en fonction de a, b, et c, son axe (on en donnera un point et un vecteur directeur), son angle (au signe près) et son vecteur de glissement. Pour quelles valeurs de a, b et c ce vissage est-il une rotation ?