Université Paris 6
Année universitaire 2012-2013
Examen terminal du cours *Introduction à la théorie des schémas*, le 8 janvier 2013
Durée : 3 heures. Les calculatrices sont interdites. Seuls les documents issus du cours sont autorisés, et les résultats d'exercices traités en TD pourront être utilisés sans être redémontrés.

Dans ce qui suit, «anneau» signifiera toujours «anneau commutatif unitaire», et les morphismes d'anneaux seront par définition unitaires.

I. Anneaux absolument plats.

On sait que tout module sur un corps *est plat. Le but de ce problème est d'étudier, d'un point de vue algébrique et schématique, la classe de tous les anneaux possédant cette propriété de platitude automatique.*

1) Soit A un un anneau et soit B une A-algèbre. On suppose que B possède la propriété suivante : pour tout couple (N, M) de B-modules, toute application A-linéaire de N vers M est B-linéaire.

1a) Montrez que c'est le cas si B est de la forme A/I (où I est un idéal de A) ou si B est de la forme $S^{-1}A$ (où S est une partie multiplicative de A).

1b) Montrez que si N est un B-module alors $N \otimes_A B \simeq N$, puis que si N et M sont deux B-modules alors $N \otimes_B M \simeq N \otimes_A M$.

1c) Montrez que si M est un B-module qui est A-plat il est également B-plat.

2) On dit qu'un anneau A est *absolument plat* si tout A-module est plat.

2a) Soit A un anneau. Montrez que A est absolument plat si et seulement si $A_{\mathfrak{p}}$ est absolument plat pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A.

2b) Soit A un anneau local d'idéal maximal $\mathfrak{m}$. Montrez que les assertions suivantes sont équivalentes :

i) A est absolument plat ;

ii) $A/\mathfrak{m}$ est un A-module plat ;

iii) $\mathfrak{m} = 0$.

Indication : pour ii)⇒iii), considérer un élément a de $\mathfrak{m}$ et l'inclusion de aA dans A.

2c) Soit A un anneau. Montrez que les assertions suivantes sont équivalentes :

i) A est absolument plat ;

ii) pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A l'anneau local $A_{\mathfrak{p}}$ est un corps ;

iii) A est réduit et tout idéal premier de A est maximal.

3) Soit A un anneau absolument plat et soit X son spectre.

3a) Montrez que si $x \in X$ et si f est un élément de A tel que $f(x) = 0$, alors f est nulle *au voisinage de x.*

3b) Soient x et y deux points distincts de X. Montrez qu'il existe deux ouverts U et V de X tels que $x \in U$ et $y \in V$ et tels que $X = U \coprod V$.

3c) Montrez que pour tout $f \in A$ il existe $g \in A$ tel que $f(1 - gf) = 0$.

4) Soit A un anneau tel que pour tout $f \in A$ il existe $g \in A$ tel que $f(1-gf) = 0$. Montrez que A est absolument plat.

5) Soit A un anneau. Montrez l'équivalence des assertions suivantes :

i) A_{red} est absolument plat.

ii) Spec A est compact (*i.e.* quasi-compact et séparé) et possède une base d'ouverts compacts.

iii) Spec A est séparé.

iv) Tous les points de Spec A sont fermés.

6) *Quelques exemples.*

6a) Soit X un espace topologique compact possédant une base d'ouverts compacts, et soit K un corps. Soit A l'anneau des fonctions localement constantes de X dans K. Montrez que A est absolument plat ; construire une application continue naturelle de X vers Spec A et prouvez qu'il s'agit d'un homéomorphisme.

6b) Soit (A_i) une famille d'anneaux absolument plats. Montrez que $\prod A_i$ est absolument plat.

II. Éclatement de $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[T]$ **et désingularisation de** $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}(\sqrt{5})$.

1) On pose $A = \mathbb{Z}[T], X = \operatorname{Spec} A$ et $Y = \operatorname{Proj} A[U,V]/((T-1)U - 2V)$ **Attention : on voit ici A comme trivialement gradué : la variable T est donc affine, et les variables U et V sont homogènes.** On note π le morphisme naturel de Y vers X.

1a) Vérifiez que l'idéal $\mathfrak{m} := (T-1, 2)$ de A est maximal. Soit x le point fermé de X correspondant. Quel est le corps $\kappa(x)$?

1b) Déterminez $\mathscr{O}_X(X - \{x\})$. Le schéma $X - \{x\}$ est-il affine ?

1c) Montrez que $\pi^{-1}(X - \{x\}) \to X - \{x\}$ est un isomorphisme.

1d) Décrire le $\kappa(x)$-schéma $\pi^{-1}(x)$. Quelle est sa dimension ?

1e) Soit ρ le morphisme naturel de Y vers Spec $\mathbb{Z}$. Montrez que l'on a $\rho^{-1}(\zeta) \simeq \operatorname{Spec} \kappa(\zeta)[T]$ pour tout ζ appartenant à Spec $\mathbb{Z}$ sauf lorsque ζ est le point x_2 associé au nombre premier 2. Montrez que $\rho^{-1}(x_2)$ a deux composantes irréductibles, que l'on décrira et dont on déterminera l'intersection.

2) Soit B l'anneau de l'ouvert affine $D(V)$ de Y. On se propose dans cette question de démontrer que le A-module B n'est pas plat. Si f est une application A-linéaire entre deux A-modules, on notera f_B l'application induite par tensorisation avec B. Soit j l'inclusion de $\mathfrak{m}$ dans A.

2a) Construire une suite exacte de A-modules

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} A \oplus A \xrightarrow{q} \mathfrak{m} \longrightarrow 0 \cdot$$

2b) Montrez que $T-1$ n'est pas inversible dans B. En déduire que l'application $(B \oplus B)/(i_B(B)) \to B$ induite par $(j \circ q)_B$ n'est pas injective, puis que B n'est pas plat sur A.

3) Soit ξ le point de la fibre générique de $X \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ correspondant à l'idéal maximal $(T^2 - 5)$ de $\mathbb{Q}[T]$ et soit Z le fermé $\overline{\{\xi\}}$ de X, muni de sa structure réduite.

3a) Décrire l'anneau des fonctions de Z.

3b) Soit p un nombre premier et soit x_p le point correspondant de Spec $\mathbb{Z}$; décrire la fibre de Z en x_p comme schéma sur $\mathbb{F}_p$. Montrez qu'elle est toujours non vide, qu'elle est réduite pour tous les nombres premiers p sauf un nombre fini d'entre eux que l'on déterminera explicitement. Lorsqu'elle est réduite, la décrire (nombre de points, corps résiduels de ces derniers) en fonction de propriétés arithmétiques du nombre premier p.

Vérifiez que la fibre de Z en x_2 est ensemblistement égale à $\{x\}$.

3c) Posons $Z' = Y \times_X Z$. Montrez que Z' est la réunion de deux fermés irréductibles de Y :

- le fermé $\pi^{-1}(x)$;
- un fermé irréductible Z'' d'équation

$$V^2 + UV - U^2 = 0.$$

Indication : écrire Z' sous la forme Proj C *pour C convenable et montrer que $4U(V^2 + UV - U^2) = 0$ dans C.*

3d) On munit Z'' de sa structure réduite. Montrez que Z'' est un schéma affine dont on décrira l'anneau des fonctions. Montrez que $\varphi : Z'' \to Z$ est fini, et qu'il induit un isomorphisme de $\varphi^{-1}(Z - \{x\})$ sur $Z - \{x\}$. Montrez que $\varphi^{-1}(x)$ est un singleton $\{z\}$, qui est l'intersection de Z'' et de $\pi^{-1}(x)$. Quel est le corps résiduel de z ? En tant que $\kappa(x)$-schéma, la fibre $\varphi^{-1}(\{x\})$ est-elle réduite ?

3e) Le morphisme $Z'' \to Z$ est-il plat ? (On dit qu'un morphisme entre schémas affines est plat si le morphisme d'anneaux correspondant $R \to S$ fait de S un R-module plat).

English version

In what follows, ring will always mean 'commutative ring with unit', and by definition, any morphism of rings sends the unit element to the unit element. .

I. Absolutely flat rings

One knows that every module over a field *is flat. The purpose of this problem is to study, as well from the algebraic view point as from the schematic one, the class of all rings that enjoy this 'automatic flatness' property.*

1) Let A be a ring and let B be an A-algebra. Let us assume that B satisfies the following properties : for every couple (N, M) of B-modules, every A-linear map from N to $M$is B-linear.

1a) Prove that this holds as soon as B is of the form A/I (where I is an ideal of A) or of the form $S^{-1}A$ (where S is a multiplicative subset of A).

1b) Prove that if N is a B-module then $N \otimes_A B \simeq N$, and that if N and M are two B-modules then $N \otimes_B M \simeq N \otimes_A M$.

1c) Prove that if M is a B-module which is A-flat, it is also B-flat.

2) A ring A is said to be *absolutely flat* if every A-module is flat.

2a) Let A be a ring. Prove that A is absolutely flat if and only if $A_\mathfrak{p}$ is absolutely flat for every prime ideal $\mathfrak{p}$ of A.

2b) Let A be a local ring with maximal ideal $\mathfrak{m}$. Prove that the following are equivalent :

i) A is absolutely flat ;

ii) $A/\mathfrak{m}$ is a flat A-module ;

iii) $\mathfrak{m} = 0$.

Hints : for ii)⇒iii), consider an element $a \in \mathfrak{m}$ and the inclusion of aA in A.

2c) Let A be a ring. Prove that the following are equivalent :

i) A is absolutely flat ;

ii) for every prime ideal $\mathfrak{p}$ of A the local ring $A_{\mathfrak{p}}$ is a field ;

iii) A is reduced and every prime ideal of A is maximal.

3) Let A be an absolutely flat ring and let X denote its spectrum.

3a) Prove that if $x \in X$ and if f is an element of A such that $f(x) = 0$, then $f = 0$ *in a neighborhood of* x.

3b) Let x and y be two distinct points of X. Prove that there exist two open subsets U and V of X such that $x \in U$ and $y \in V$, and such that $X = U \coprod V$.

3c) Prove that for every $f \in A$ there exist $g \in A$ such that $f(1 - gf) = 0$.

4) Let A be a ring such that for every $f \in A$there exist $g \in A$ such that $f(1 - gf) = 0$. Prove that A is absolutely flat.

5) Let A be a ring. Prove that the following are equivalent :

i) A_{red} is absolutely flat.

ii) Spec A is compact (*i.e.* quasi-compact and Hausdorff) and has a basis of compact open subsets.

iii) Spec A is Hausdorff.

iv) All points of Spec A are closed.

6) *Some examples.*

6a) Let X be a compact topological space admitting a basis of compact open subsets, and let K be a field. Let Abe the ring of locally constant functions from X to K. Prove that A is absolutely flat ; build a natural continuous map from X to Spec A and show that this m ap is a homeomorphism.

6b) Let (A_i) be a family of absolutely flat rings. Prove that $\prod A_i$ is absolutely flat.

II. Blow-up of Spec $\mathbb{Z}[T]$ **and desingularization of** Spec $\mathbb{Z}(\sqrt{5})$.

1) We set $A = \mathbb{Z}[T], X = \text{Spec } A$ and $Y = \text{Proj } A[U,V]/((T-1)U - 2V)$ **Be aware that A is trivially graded : the variable T is thus affine, and variables U and V are homogeneous.** We denote by π the natural morphism from Y to X.

1a) Check that the ideal $\mathfrak{m} := (T-1, 2)$ of A is maximal. Let x be the corresponding closed point of X. What is the field $\kappa(x)$?

1b) Compute $\mathscr{O}_X(X - \{x\})$. Is $X - \{x\}$ an affine scheme ?

1c) Prove that $\pi^{-1}(X - \{x\}) \to X - \{x\}$ is an isomorphism.

1d) Describe the $\kappa(x)$-scheme $\pi^{-1}(x)$. What is its dimension ?

1e) Let ρ be the natural morphism from Y to Spec $\mathbb{Z}$. Prove that one has $\rho^{-1}(\zeta) \simeq \text{Spec } \kappa(\zeta)[T]$ for every ζ belonging to Spec $\mathbb{Z}$ except for ζ being the point x_2 associated to the prime 2. Show that $\rho^{-1}(x_2)$ has two irreducible components. Describe them and determine their intersection.

2) Let B be the function ring of the open affine subset $D(V)$ of Y. Our aim is to prove that the A-module B is not flat. If f is an A-linar map between

two A-modules, we will denote by f_B the application deduced from f after tensorisation with B. Let j be the inclusion of $\mathfrak{m}$ in A.

2a) Build an exact sequence of A-modules

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} A \oplus A \xrightarrow{q} \mathfrak{m} \longrightarrow 0 \cdot$$

2b) Prove that $T-1$ is not invertible in B. Deduce from this fact that the map $(B \oplus B)/(i_B(B)) \to B$ induced by $(j \circ q)_B$ is not injective, and then that B is not flat over A.

3) Let ξ be the point of the generic fiber of $X \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ that correspond to the maximal idéal (T^2-5) of $\mathbb{Q}[T]$, and let Z b the closes subset $\overline{\{\xi\}}$ of X, equipped with its reduced structure.

3a) Describe the function ring of Z.

3b) Let p be a prime number and let x_p be the corresponding point of $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$; describe the fiber of Z at x_p as an $\mathbb{F}_p$-scheme. Prove that it is always non-empty, that it is reduced for all but finitely many prime numbers p (and determine explicitly those for which it is not). When it is reduced, describe it (number of points, residue fields of the latter) ; the answer will depend on some arithmetic properties of the prime p.

Check that the fiber of Z at x_2 is set-theoretically equal to $\{x\}$.

3c) Set $Z' = Y \times_X Z$. Prove that Z' is the union of two irreducible closed subsets of Y :

- the fiber $\pi^{-1}(x)$;
- a closed irreducible subset Z'' given by the equation

$$V^2 + UV - U^2 = 0.$$

Hints : write Z' as Proj C *for some suitable C and prove that $4U(V^2+UV-U^2) = 0$ in C.*

3d) We endow Z'' with its reduced structure. Prove that Z'' is an affine scheme and describe its function ring. Prove that $\varphi : Z'' \to Z$ is finite, and that it induces an isomorphism $\varphi^{-1}(Z - \{x\}) \simeq Z - \{x\}$. prove that $\varphi^{-1}(x)$ is a one-element set $\{z\}$, which is the intersection of Z'' and $\pi^{-1}(x)$. What is the residue field of z ? As a $\kappa(x)$-scheme, is the fiber $\varphi^{-1}(\{x\})$ reduced ?

3e) Is the morphism $Z'' \to Z$ flat ? (A morphism between affine schemes is said to be flat if the corresponding morphism of rings $R \to S$ makes S a flat R-module).