Université Paris 6
Année universitaire 2010-2011
Cours de *Géométrie affine et euclidienne* (LM 323)
Examen terminal du mercredi premier juin 2011 ; durée : 2 heures. Les documents et calculatrices sont interdits. *Barème indicatif, sur 80 : 12 points pour l'exercice 1, 10 points pour l'exercice 2, 15 points pour l'exercice 3, 15 points pour l'exercice 4, 12 points pour l'exercice 5, 16 points pour l'exercice 6.*

Exercice 1. Questions de cours. Soit k un corps.

a) Soit E un k-espace vectoriel ; donnez la définition d'un espace affine sur k d'espace directeur E.

b) Soient E et F deux espaces vectoriels sur k et soient $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ deux espaces affines sur k d'espaces directeurs respectifs E et F ; donnez la définition d'une application affine de $\mathscr{E}$ vers $\mathscr{F}$.

c) Soient E et F deux espaces vectoriels sur k et soient $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ deux espaces affines sur k d'espaces directeurs respectifs E et F. Soit $f : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ une application affine et soit $\mathscr{F}'$ un sous-espace affine de $\mathscr{F}$ dont on note F' l'espace directeur. Que peut-on dire de $f^{-1}(\mathscr{F}')$? *Justifiez votre réponse par une démonstration.*

Exercice 2. Soit f l'application affine de $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$ dans lui-même donnée par la formule

$$(x, y) \mapsto (2x - y + 3, x + y + 1).$$

Soit $\mathscr{R}$ le repère cartésien (M, e_1, e_2) de $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$ où $M = (1, -1)$, où $e_1 = (2, 1)$ et où $e_2 = (1, 2)$. Décrivez l'application f par une formule en coordonnées dans $\mathscr{R}$. *Comme on travaille dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, on demande que tous les coefficients de vos formules soient des (classes d') entiers ; donc si vous devez par exemple diviser par 2, songez que modulo 5 on a $2 \times 3 = 6 = 1$ et donc (1/2)=3.*

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application affine dont la matrice dans les repères canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$ est égale à

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Décrivez f par une formule.

b) Donnez un point et une base de l'espace directeur de l'image de f.

c) Si (α, β, γ) est un point de l'image de f, donnez un point et une base de l'espace directeur de $f^{-1}((\alpha, \beta, \gamma))$ (la réponse est bien entendu à exprimer en fonction de α, β et γ).

Exercice 4. Soit $\mathscr{E}$ un plan affine euclidien dont on note E l'espace directeur. On suppose que E est orienté et l'on fixe une base orthonormée directe $\mathscr{B}$ de E. On rappelle que si A, B et C sont trois points de $\mathscr{E}$, on appelle *aire orientée* de (ABC) le réel $\mathsf{det}_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, que l'on notera $\mathsf{a}(A, B, C)$.

a) Soient A, B, C trois points de $\mathscr{E}$ et soit $M \in \mathscr{E}$. Montrez que

$$\mathsf{a}(MAB) + \mathsf{a}(MBC) + \mathsf{a}(MCA) = \mathsf{a}(ABC).$$

On suppose à partir de maintenant que (ABC) est un repère affine de $\mathscr{E}$.

b) Soit N le point $\frac{1}{2}A + \frac{7}{2}B - 3C$; calculez $\mathsf{a}(NAB)$ en fonction de $\mathsf{a}(ABC)$.

c) Soit D l'ensemble des points M de $\mathscr{E}$ tels que $\mathsf{a}(MAB) = \mathsf{a}(MCA)$. Décrire D par une équation en coordonnées barycentriques dans (ABC), en déduire qu'il s'agit d'une droite et la reconnaître.

d) Soit r un réel et soit Δ l'ensemble des points M du plan $\mathscr{E}$ tels que $\mathsf{a}(MBC) = r$. Montrez que Δ possède, en coordonnées barycentriques dans (ABC), une équation de la forme $\lambda x + \mu y + \nu z = 0$ où λ, μ et ν sont trois réels non tous égaux que l'on déterminera (ils dépendent de r et de $\mathsf{a}(ABC)$, et le cas $r = 0$ devra être traité à part) ; en déduire que Δ est une droite parallèle à (BC).

Exercice 5. Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien de dimension 3 dont on note E l'espace directeur, soit $\mathscr{D}$ une droite de $\mathscr{E}$ et soit r une rotation d'axe $\mathscr{D}$ et d'angle (défini modulo 2π et au signe près) non nul. Soit v un vecteur de E, et soit D l'espace directeur de $\mathscr{D}$.

a) Si v est orthogonal à D, montrez que $t_v \circ r$ a un point fixe.

b) Inversement, supposons que $t_v \circ r$ a un point fixe ; montrez que v est orthogonal à D. *Indication : décomposez v selon la somme directe $E = D \oplus D^{\perp}$, puis utiliser a) et un théorème du cours.*

Exercice 6. Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien de dimension 3 dont on note E l'espace directeur. Soit u un vissage de $\mathscr{E}$; on suppose que son angle θ (défini modulo 2π et au signe près) est non nul, et l'on appelle $\mathscr{D}$ son axe. Soit λ appartenant à $\mathbb{R} - \{0, 1\}$ et soit h une homothétie de $\mathscr{E}$ de rapport λ dont on note O le centre.

a) Si $\lambda \neq -1$ ou $\theta \neq \pi$, montrez que chacune des applications $u \circ h$ et $h \circ u$ a un unique point fixe.

b) On suppose maintenant que $\lambda = -1$ et que $\theta = \pi$. Montrez que si $x \in \mathscr{E}$, le milieu de $[x; u(x)]$ est situé sur $\mathscr{D}$. Quel est le milieu de $[x; h(x)]$?

b1) Montrez que si $O \in \mathscr{D}$ chacune des applications $u \circ h$ et $h \circ u$ possède un point fixe. Quelle est alors le sous-espace directeur de l'ensemble des points fixes de $u \circ h$, et celui de l'ensemble des points fixes de $h \circ u$?

b2) Utilisez la première question de b) pour montrer, réciproquement, que si $u \circ h$ ou $h \circ u$ possède un point fixe, alors $O \in \mathscr{D}$.