Université Paris 6
Année universitaire 2011-2012
Cours de *Géométrie affine et euclidienne* (LM 323)
Examen terminal du mardi 29 mai 2012 ; durée : 2 heures. Les documents et calculatrices sont interdits.
Barème indicatif : 3 points pour l'exercice 1, 6 points pour l'exercice 2, 4 points pour l'exercice 3, 3 points pour l'exercice 4, 4 points pour l'exercice 5.

Exercice 1. Questions de cours.

a) Soit k un corps et soit E un k-espace vectoriel. Donnez la définition d'un espace affine sur k d'espace directeur E.

b) Soient E un espace vectoriel euclidien. Donnez les définitions équivalentes d'une isométrie de E.

Exercice 2. *Dans cet exercice, on travaille sur le corps $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. On demande de donner tous les résultats sous formes d'entiers modulo 5, sans fractions. Par exemple, comme $2 \times 3 = 1$ modulo 5, on écrira 2 au lieu de $1/3$.*

Soit $f : (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2 \to (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3$ l'application affine dont la matrice dans les repères canoniques de $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$ et $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3$ est égale à

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Décrivez f par une formule.

b) Donnez un système d'équations cartésiennes de l'image de f.

c) Si $P = (\alpha, \beta, \gamma)$ est un point de l'image de f, donnez un point et une base de l'espace directeur de $f^{-1}(P)$ (la réponse est bien entendu à exprimer en fonction de α, β, et γ.

d) Soit $\mathscr{R}$ le repère cartésien de $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$ dont l'origine est $(1,1)$ et la base $((1,1); (-1,1))$, et soit $\mathscr{S}$ le repère cartésien de $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3$ dont l'origine est $(1,0,-1)$ et la base $((0,1,0); (1,0,0); (0,0,-1))$ (on ne demande pas de vérifier que l'on a bien affaire à des bases). Calculez $\mathrm{Mat}_{\mathscr{R},\mathscr{S}} f$, et exprimez f par une formule en coordonnées dans les repères $\mathscr{R}$ et $\mathscr{S}$.

Exercice 3. On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure usuelle d'espace affine euclidien. Soient a, b et c trois nombres réels, et soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même donnée par la formule

$$f(x,y,z) = (-z + a, y + b, -x + c).$$

Décrire, en fonction de a, b, et c l'application f ainsi que ses éléments remarquables (c'est-à-dire, en fonction de la nature de f, l'axe, l'angle, le plan, le vecteur de glissement... le cas échéant, l'axe ou le plan seront décrits au moyen d'un point et d'une base de l'espace directeur).

Exercice 4. Soit $\mathscr{E}$ un plan affine euclidien orienté. Soit $O \in \mathscr{E}$ et soit θ un réel non nul modulo 2π. Soit Δ une droite de $\mathscr{E}$ ne contenant pas O. Montrez que la composée $s_\Delta \circ r(O, \theta)$ n'a pas de point fixe. Quelle est la nature de cette application ? *Indication : on pourra raisonner en terme de distance au point O.*

Exercice 5. Soit $\mathscr{E}$ un plan affine euclidien, et soit (ABC) un repère affine de $\mathscr{E}$. On suppose que (ABC) est équilatéral, c'est-à-dire que $\|\overrightarrow{AB}\|$, $\|\overrightarrow{AC}\|$ et $\|\overrightarrow{BC}\|$ sont tous trois égaux à un même réel r.

a) Posons $O = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$. Montrez que O est l'intersection des médiatrices de (ABC).

b) On suppose à partir de maintenant que $\|\overrightarrow{OA}\| = \|\overrightarrow{OB}\| = \|\overrightarrow{OC}\| = 1$. Calculez r, puis les produits scalaires $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$, et $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}$.

c) Soit (α, β, γ) un triplet de réels de somme nulle. On désigne par u le vecteur $\alpha A + \beta B + \gamma C$. Calculez $\|u\|^2$ en fonction de α, β et γ ; on exprimera le résultat sous forme d'un polynôme homogène de degré 2 en α, β, et γ ne faisant intervenir que les monômes $\alpha\beta, \alpha\gamma$ et $\beta\gamma$.

d) Soit (α, β, γ) un triplet de réels de somme 1. Posons $M = \alpha A + \beta B + \gamma C$. Calculez $\|\overrightarrow{OM}\|^2$ en fonction de α, β et γ ; on exprimera le résultat sous forme d'un polynôme de degré 2 en α, β, et γ ne faisant intervenir que les monômes $\alpha\beta, \alpha\gamma$ et $\beta\gamma$ ainsi qu'un terme constant.

e) Montrez qu'il existe un cercle de centre O passant par A, B et C, et donnez son équation en coordonnées barycentriques dans le repère affine (A, B, C). Montrez qu'il existe un cercle de centre O passant par les milieux des côtés du triangle ABC, et donnez son équation en coordonnées barycentriques dans le repère affine (A, B, C).