Université Paris 6
Année universitaire 2011-2012
Cours *Groupes finis et leurs représentations*
Examen terminal, le 21 mai 2012. Durée : trois heures. Les documents et calculatrices sont interdits.

Exercice 1. Questions de cours. Donnez la définition d'un p-sous-groupe de Sylow d'un groupe G. Énoncez le théorème du cours sur le sujet.

Exercice 2. Soient p et q deux nombres premiers avec $q < p$ et soit G un groupe de cardinal pq.

1) Montrez que G n'a qu'un p-sous-groupe de Sylow.

2) En déduire que G est isomorphe à un produit semi-direct de la forme

$$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}.$$

3) On suppose que q ne divise pas $p - 1$. Montrez que G est cyclique.

4) On suppose que q divise $p-1$. Montrez que si φ et ψ sont deux morphismes non triviaux de $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ dans Aut $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, il existe un automorphisme χ de $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ tel que $\varphi = \psi \circ \chi$.

5) En déduire que si q divise $p-1$, il y a exactement deux classes d'isomorphie de groupes de cardinal pq.

Exercice 3. Un automorphisme non intérieur de $\mathfrak{S}_6$. Pour cet exercice, on admettra que pour tout $n \geqslant 5$, les seuls sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_n$ sont $\{\mathrm{Id}\}, \mathfrak{A}_n$ et $\mathfrak{S}_n$.

a) Montrez que l'ensemble $\mathscr{S}$ des 5-sous-groupes de Sylow de $\mathfrak{S}_5$ est de cardinal 6. On numérote arbitrairement $\mathscr{S}$ de 1 à 6.

b) On fait opérer $\mathfrak{S}_5$ sur $\mathscr{S} \simeq \{1, \ldots, 6\}$ par conjugaison. Montrez que le morphisme $\mathfrak{S}_5 \to \mathfrak{S}_6$ ainsi obtenu est injectif ; on note G son image.

c) On numérote arbitrairement de 1 à 6 les éléments de $\mathfrak{S}_6/G$. On fait opérer $\mathfrak{S}_6$ sur $\mathfrak{S}_6/G \simeq \{1, \ldots, 6\}$ par translations. Montrez que le morphisme $\varphi : \mathfrak{S}_6 \to \mathfrak{S}_6$ ainsi obtenu est un automorphisme.

d) Montrez que G n'a pas de points fixes sur $\{1, \ldots, 6\}$. Que dire de l'ensemble des points fixes de $\varphi(G)$ sur $\{1, \ldots, 6\}$? En déduire que φ n'est pas intérieur.

Exercice 4. Soit k un corps et soit V un k-espace vectoriel de dimension finie n. On note E le sous-espace vectoriel de $V \otimes_k V$ engendré par les éléments de la forme $v \otimes v$ pour $v \in V$, et l'on pose $\Lambda^2 V = (V \otimes_k V)/E$. Pour tout $(v, w) \in V^2$, on note $v \wedge w$ la classe de $v \otimes w$ modulo E. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de V.

a) Montrez que pour tout $(v, w) \in V^2$, l'on a $v \wedge w + w \wedge v = 0$. En déduire que $(e_i \wedge e_j)_{1 \leqslant i < j \leqslant n}$ est une famille génératrice de $\Lambda^2 V$.

b) Montrez que E est contenu dans le sous-espace vectoriel de V engendré par

$$\{e_i \otimes e_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n} \cup \{e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i\}_{1 \leqslant i \leqslant, 1 \leqslant j \leqslant n, i \neq j}.$$

c) En déduire que $(e_i \wedge e_j)_{1 \leqslant i < j \leqslant n}$ est une base de $\Lambda^2 V$. Quelle est la dimension de $\Lambda^2 V$?

d) Soit $f : V \to V$ une application linéaire. Montrez qu'il existe une unique application linéaire $f \otimes f$ de $V \otimes V$ dans $V \otimes V$ telle que

$$(f \otimes f)(v \otimes w) = f(v) \otimes f(w)$$

pour tout $(v,w) \in V^2$. Vérifiez que E est stable sous $f \otimes f$; en déduire qu'il existe une unique application linéaire $\Lambda^2 f$ de $\Lambda^2 V$ dans lui-même telle que $\Lambda^2 f(v \wedge w) = f(v) \wedge f(w)$ pour tout $(v,w) \in V^2$. Vérifez que $\Lambda^2 \mathrm{Id}_V = \mathrm{Id}_{\Lambda^2 V}$ et que $\Lambda_2(f \circ g) = \Lambda^2 f \circ \Lambda^2 g$ pour tout couple (f,g) d'endomorphismes de V.

e) Soit $f : V \to V$ une application linéaire. On note M la matrice de f dans la base $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et N la matrice de $\Lambda^2 f$ dans la base $(e_i \wedge e_j)_{1 \leqslant i < j \leqslant n}$. On suppose que M est diagonale. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on note λ_i le terme diagonal de M correspondant à l'indice i. Montrez que N est diagonale, et que pour tout (i,j) avec $1 \leqslant i < j \leqslant n$, le terme diagonal correspondant de N est égal à $\lambda_i \lambda_j$. En déduire que $2\mathrm{Tr}\, \Lambda^2 f = (\mathrm{Tr}\, f)^2 - \mathrm{Tr}\, f^2$.

Exercice 5. Étude de certaines représentations de $\mathfrak{S}_5$. *Dans tout ce qui suit, les représentations sont implicitement supposées $\mathbb{C}$-linéaires et de dimension finie.* On note $\mathbf{1}$ la représentation triviale de dimension 1 de $\mathfrak{S}_5$, et Σ la représentation «signature» de dimension 1 (définie par le morphisme $\sigma \mapsto \varepsilon(\sigma)$ de $\mathfrak{S}_5$ dans $\mathrm{GL}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$). On note P la représentation $\mathbb{C}e_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}e_5$ sur laquelle $\mathfrak{S}_5$ agit par la formule $\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$, et V la sous-représentation de P formée des vecteurs de la forme $\sum \lambda_i e_i$ avec $\sum \lambda_i = 0$.

a) Décrivez brièvement les classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_5$, en précisant le cardinal de chacune d'elles. Combien y a-t-il (à isomorphisme près) de représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_5$?

b) Vérifiez que $P \simeq \mathbf{1} \oplus V$. Calculez le caractère de P, puis celui de V. Vérifiez que V est irréductible.

c) Calculez le caractère de $V \otimes_{\mathbb{C}} \Sigma$. En déduire que cette représentation est irréductible, et distincte de $\mathbf{1}$, de Σ et de V.

d) *Dans cette question et la suivante, on utilise les notations et les résultats de l'exercice 4.* Vérifiez qu'il existe une opération $\mathbb{C}$-linéaire de $\mathfrak{S}_5$ sur $\Lambda^2 V$ telle que $\sigma(v \wedge w) = \sigma(v) \wedge \sigma(w)$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_5$ et tout $(v,w) \in V^2$. On voit désormais $\Lambda^2 V$ comme une représentation de $\mathfrak{S}_5$ par ce biais.

f) Calculez le caractère de $\Lambda^2 V$. Vérifiez qu'elle est irréductible, et isomorphe à $(\Lambda^2 V) \otimes_{\mathbb{C}} \Sigma$.

g) On a donc exhibé cinq représentations irréductibles du groupe $\mathfrak{S}_5$: $\mathbf{1}, \Sigma, V, V \otimes_{\mathbb{C}} \Sigma$, et $\Lambda^2 V$. Combien en reste-t-il ? Quelles sont leurs dimensions ?