Université Paris 6
Année universitaire 2012-2013
Cours *Les outils de la géométrie algébrique* (Master 2).
Examen terminal, le 24 octobre 2012.
Sauf mention expresse du contraire, ≪anneau≫ signifiera ici ≪anneau commutatif unitaire≫.

Exercice 1 : autour des foncteurs adjoints.

1) On se donne deux catégories C et D, et deux foncteurs covariants $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ et $G : \mathsf{D} \to \mathsf{C}$. On suppose que F est adjoint à gauche de G, c'est-à-dire, rappelons-le, qu'il existe un isomorphisme

$$\iota(A, B) : \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(F(A), B) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, G(B))$$

fonctoriel en A et B.

a) Montrez qu'il existe un morphisme de foncteurs de

$$u : \mathrm{Id}_{\mathsf{C}} \to G \circ F$$

tel que pour tout (A, B) l'isomorphisme $\iota(A, B)$ envoie un morphisme $f : F(A) \to B$ vers le morphisme composé $A \xrightarrow{u(A)} G(F(A)) \xrightarrow{G(f)} G(B)$ ·

b) Énoncez et prouvez un énoncé analogue portant sur le foncteur $F \circ G$.

c) Donnez un exemple d'un tel morphisme u pour un couple (F, G) de votre choix, parmi les exemples vus en cours.

2) On formalise comme suit la notion de diagramme commutatif. Un *diagramme commutatif* dans une catégorie C est la donnée d'un ensemble partiellement ordonné I (pouvant être vide, fini, infini), d'une famille $(A_i)_{i \in I}$ d'objets de C, et, pour tout i, j avec $i \leq j$, d'une flèche f_{ij} de A_i vers A_j ; on demande que $f_{j,k} \circ f_{i,j} = f_{i,k}$ dès que $i \leq j \leq k$, et que $f_{i,i} = \mathrm{Id}_{A_i}$ pour tout i.

Soit $\mathscr{D} = (I, (A_i), (f_{ij}))$ un diagramme commutatif dans C et soit A un objet de C. Un morphisme de A dans $\mathscr{D}$ est la donnée, pour tout i, d'un morphisme $g_i : A \to A_i$, les g_i devant satisfaire les égalités $f_{i,j} \circ g_i = g_j$ dès que $i \leq j$. On définit de façon analogue un morphisme de $\mathscr{D}$ vers A. Si $g = (g_i)$ est un morphisme de A vers $\mathscr{D}$ et $u : B \to A$ un morphisme, la famille $(g_i \circ u)$ est un morphisme de B vers $\mathscr{D}$, noté $g \circ u$; cette opération permet de voir $A \mapsto \mathrm{Hom}(A, \mathscr{D})$ comme un foncteur contravariant. On définit de même $v \circ h$ pour tout $h : \mathscr{D} \to A$ et tout $v : A \to B$; cette opération permet de voir $A \mapsto \mathrm{Hom}(\mathscr{D}, A)$ comme un foncteur covariant

Si $\mathrm{Hom}(\bullet, \mathscr{D})$ est représentable, son représentant (A, u) est appelé la *limite projective de* $\mathscr{D}$. On définit de même la *limite inductive* de $\mathscr{D}$, à partir du foncteur covariant $\mathrm{Hom}(\mathscr{D}, \bullet)$. On dit qu'un foncteur covariant $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ *commute aux limites projectives* si pour tout diagramme commutatif $\mathscr{D}$ admettant une limite projective (A, u), le couple $(F(A), F(u))$ est limite projective du diagramme $F(\mathscr{D})$; on définit de même le fait de commuter aux limites inductives.

a) Si $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ est un foncteur covariant qui possède un adjoint à droite (resp. à gauche) montrez qu'il commute aux limites inductives (resp. projectives).

b) Si $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ est un foncteur covariant qui commute aux limites projectives, montrer qu'il commute à la formation des produits cartésiens et des produits fibrés, et qu'il envoie l'objet final sur l'objet final (si objet final il y a). Donnez (sans démonstration) l'énoncé analogue relatif aux limites inductives.

c) Soient R et S deux anneaux et soit F un foncteur de $R-\mathsf{Mod}$ vers $S-\mathsf{Mod}$. Si F commute aux limites inductives, montrer qu'il est exact à droite et commute aux sommes directes quelconques (finies ou non). Donnez (sans démonstration) l'énoncé analogue relatif aux limites projectives.

Expliquez comment on peut déduire sans effort de ce qui précède différentes propriétés du produit tensoriel démontrées en cours.

d) Soit F un foncteur covariant de Ens dans Ens commutant aux limites inductives, soit X un ensemble et soit G un groupe agissant sur X ; il agit par fonctorialité sur $F(X)$. Montrez que $F(X/G)$ s'identifie naturellement à $F(X)/G$.

e) Le foncteur d'oubli des groupes vers les ensembles commute-t-il aux limites inductives ? Aux limites projectives ?

Exercice 2 : éléments idempotents. On dit qu'un élément e d'un anneau A est *idempotent* si $e^2 = e$. Un idempotent est dit *trivial* s'il est égal à 0 ou 1. Les questions a), b), c), d) et e) sont indépendantes les unes des autres.

a) Soit A un anneau local. Montrez que tout idempotent de A est trivial.

b) Soit $(X, \mathscr{O}_X)$ un espace localement annelé. Montrez que X est connexe si et seulement si tout idempotent de $\mathscr{O}_X(X)$ est trivial.

c) Soit A un anneau. Montrez qu'il existe un idempotent non trivial dans A si et seulement si il existe deux anneaux non nuls A_1 et A_2 et un isomorphisme
$$A \simeq A_1 \times A_2.$$

d) Soit A un anneau et soit I un idéal de A de carré nul. Montrez que $e \mapsto \overline{e}$ établit une bijection entre l'ensemble des idempotents de A et l'ensemble des idempotents de A/I.

e) Soit B un anneau. On note J l'intersection de tous les idéaux maximaux de B.

- e1) Montrez que $u \in J$ si et seulement si $1+bu$ est inversible pour tout $b \in B$.
- e2) Si B est une algèbre entière sur un anneau local A d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, montrez que $\mathfrak{m}B \subset J$.
- e3) Si I est un idéal de B contenu dans J, montrez que l'application $e \mapsto \overline{e}$, qui va de l'ensemble des idempotents de B vers l'ensemble des idempotents de B/I, est injective. Expliquez en quoi a) est un cas très particulier de ce résultat.

Exercice 3 : modules injectifs. Soit A un anneau. On dit qu'un A-module M est *injectif* si pour toute application A-linéaire injective $i : N \hookrightarrow N'$ et toute application A-linéaire $f : N \to M$, il existe une application linéaire $g : N' \to M$ telle que

$$\begin{tikzcd} M & \\ N \arrow[u, "f"] \arrow[r, "i"] & N' \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd}$$

commute.

a) Si A est un corps, montrez que tout A-module est injectif.

b) Soit M un A-module injectif et soit $i : M \hookrightarrow M'$ une application linéaire injective. Montrez que $i(M)$ possède un supplémentaire dans M'.

c) On suppose à partir de maintenant que $A = \mathbb{Z}$ (un A-module est donc un groupe abélien). On dit qu'un groupe abélien M est *divisible* si pour tout $m \in M$ et tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, il existe $m' \in M$ tel que $m = nm'$. Montrez que si M est injectif, il est divisible.

d) Réciproquement, montrez qu'un groupe abélien divisible est injectif. *Indication : en reprenant les notations du début de l'exercice, identifiez N à un sous-module de N'* via i*, utilisez le lemme de Zorn pour vous ramener au cas où N' est de la forme $N + Ax$, et construire un prolongement explicite de f en utilisant la divisibilité de M.*

e) Montrez que si M est un groupe abélien, il existe un groupe abélien injectif N et un plongement $M \hookrightarrow N$ (traiter le cas où $M = \mathbb{Z}$, puis s'en inspirer pour le cas général).

f) On suppose à nouveau A quelconque. Soit F un foncteur de $\mathbb{Z} - \mathsf{Mod}$ vers $A - \mathsf{Mod}$. On suppose que F possède un adjoint à gauche G qui est lui-même exact à gauche. Montrez que F transforme tout groupe abélien injectif en un A-module injectif.

g) Si M est un groupe abélien, on note $F(M)$ le A-module $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, M)$ (la loi externe envoie (a, f) sur $b \mapsto f(ab)$). Montrez en utilisant f) que F transforme tout groupe abélien injectif en un A-module injectif. En déduire que tout A-module se plonge dans un A-module injectif.