Contemporary Mathematics

Appendice : Le Dérivateur Triangulé Associé à une Catégorie Exacte

Bernhard Keller

À Ross Street pour son soixantième anniversaire

Résumé. Nous esquissons une démonstration du fait que la catégorie dérivée d'une catégorie exacte est la catégorie fondamentale d'un dérivateur triangulé.

1. La catégorie dérivée

Soit $\mathcal{E}$ une catégorie exacte au sens de Quillen [**2**]. Suivant la terminologie de Gabriel [**1**], nous appelons *conflations* ses suites exactes admissibles, *inflations* ses monomorphismes admissibles et *déflations* ses épimorphismes admissibles. Un complexe

$$\ldots \to M^p \xrightarrow{d^p} M^{p+1} \to \ldots \, , \; p \in \mathbb{Z} \, , \; d^2 = 0 \, ,$$

sur $\mathcal{E}$ est *borné* si M^p s'annule pour tout $|p| \gg 0$. On note $\mathsf{C}^b\mathcal{E}$ *la catégorie des complexes bornés* sur $\mathcal{E}$ et $\mathsf{H}^b\mathcal{E}$ *la catégorie quotient* de $\mathsf{C}^b\mathcal{E}$ par l'idéal des morphismes homotopes à zéro. Rappelons que la catégorie $\mathsf{H}^b\mathcal{E}$ est triangulée au sens de Verdier [**3**].

Un complexe M est *contractile* s'il est isomorphe au complexe nul dans $\mathsf{H}^b\mathcal{E}$. Il est *acyclique* s'il existe des conflations

$$Z^p \xrightarrow{i^p} M^p \xrightarrow{q^p} Z^{p+1} \; , \; p \in \mathbb{Z} \, ,$$

telles que $d^p = i^{p+1}q^p$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$. Si $\mathcal{E}$ est *karoubienne* (c'est-à-dire que tout endomorphisme idempotent d'un objet de $\mathcal{E}$ admet un noyau), alors tout complexe contractile est acyclique. On note $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{\mathcal{E}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathsf{H}^b\mathcal{E}$ dont les objets sont les complexes qui, dans $\mathsf{H}^b\mathcal{E}$, sont isomorphes à des complexes acycliques. Voici une autre description de $\mathcal{N}$: soit $\mathcal{E} \to \widetilde{\mathcal{E}}$ le foncteur additif universel de $\mathcal{E}$ vers une catégorie additive karoubienne. La catégorie $\widetilde{\mathcal{E}}$ devient exacte si on la munit des suites qui sont des facteurs directs d'images de conflations de $\mathcal{E}$. On montre alors qu'un complexe sur $\mathcal{E}$ appartient à $\mathcal{N}$ si et seulement si son image dans $\mathsf{H}^b\widetilde{\mathcal{E}}$ est acyclique. La catégorie $\mathcal{N}_{\widetilde{\mathcal{E}}}$ est une sous-catégorie triangulée épaisse de $\mathsf{H}^b\widetilde{\mathcal{E}}$. On

2000 *Mathematics Subject Classification.* 18E10, 18E30, 18G55.

en déduit que $\mathcal{N}$ est une sous-catégorie triangulée épaisse de $\mathsf{H}^b\mathcal{E}$. On note Σ le système multiplicatif associé à $\mathcal{N}$ et on appelle *quasi-isomorphismes* les éléments de Σ. Un morphisme s de $\mathsf{H}^b\mathcal{E}$ est donc un quasi-isomorphisme si et seulement si dans tout triangle

$$L \xrightarrow{s} M \to N \to L[1]\,,$$

le complexe N appartient à $\mathcal{N}$. La *catégorie dérivée* $\mathsf{D}^b\mathcal{E}$ est la localisée de $\mathsf{H}^b\mathcal{E}$ par rapport à Σ. Il en résulte que $\mathsf{D}^b\mathcal{E}$ est une catégorie triangulée, 2-fonctorielle en la catégorie exacte $\mathcal{E}$.

2. Le dérivateur triangulé

Soit $\mathcal{E}$ une catégorie exacte. Soit A une petite catégorie. La catégorie des préfaisceaux

$$\mathcal{E}(A) = \underline{\mathsf{Hom}}(A^\circ, \mathcal{E})$$

devient une catégorie exacte si on la munit des suites qui sont des conflations argument par argument. Nous avons un isomorphisme de catégories exactes

$$\widetilde{\mathcal{E}(A)} \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathcal{E}}(A).$$

On en déduit qu'un morphisme s de $\mathsf{H}^b(\mathcal{E}(A))$ appartient à $\Sigma_{\mathcal{E}(A)}$ si et seulement si $s(a)$ appartient à $\Sigma_{\mathcal{E}}$ pour tout objet a de A. On pose

$$\mathbb{D}(A) = \mathbb{D}_{\mathcal{E}}(A) = \mathsf{D}^b(\mathcal{E}(A)).$$

On obtient ainsi un 2-foncteur $\mathbb{D} : \mathcal{C}at^\circ \to \mathcal{C}at$ défini sur la 2-catégorie des petites catégories. On montre que $\mathbb{D}$ satisfait aux axiomes **Der 1** et **Der 2** d'un dérivateur.

Dorénavant nous considérons la restriction de $\mathbb{D}$ à la 2-catégorie des catégories directes finies. Nous la notons encore $\mathbb{D}$. Nous allons esquisser une démonstration du fait qu'elle est un dérivateur triangulé.

Soit A une catégorie directe finie et a un objet de A. Notons $i_{A,a} : e \to A$ le foncteur déterminé par a. Le foncteur d'évaluation

$$i_{A,a}^* : \mathcal{E}(A) \to \mathcal{E}(e)\,,\ F \mapsto F(a)$$

admet un adjoint à droite $i_{A,a\,*}$ qui envoie un objet M de $\mathcal{E}$ sur le préfaisceau

$$b \mapsto \prod_{\mathsf{Hom}_A(a,b)} M.$$

Les foncteurs $i_{A,a}^*$ et $i_{A,a\,*}$ sont exacts. Ils induisent donc un couple de foncteurs adjoints, désignés par les mêmes symboles, entre $\mathbb{D}(A)$ et $\mathbb{D}(e)$.

Lemme 1. *La catégorie triangulée $\mathbb{D}(A)$ est engendrée par les objets $i_{A,a\,*}M$, où a parcourt les objets de A et M ceux de $\mathcal{E}$.*

Démonstration. Comme $\mathbb{D}(A)$ est engendrée par $\mathcal{E}(A)$, il suffit de montrer que tout objet de $\mathcal{E}(A)$ appartient à la sous-catégorie triangulée de $\mathbb{D}(A)$ engendrée par les $i_{A,a\,*}M$. Soit F un objet de $\mathcal{E}(A)$. Considérons le morphisme

$$F \xrightarrow{\varphi F} \prod_{a \in \mathsf{Ob}(A)} i_{A,a\,*}(F(a))$$

dont les composantes sont les morphismes d'adjonction. Pour tout objet a de A, le morphisme $(\varphi F)(a)$ admet une rétraction. Donc φF est une inflation de $\mathcal{E}(A)$.

Notons IF son but et CF son conoyau. Nous obtenons un complexe acyclique naturel

$$0 \to F \to IF \to ICF \to \dots \to IC^pF \to \dots ,$$

d'où un quasi-isomorphisme entre F et ce complexe amputé de F. On vérifie que C^pF s'annule dès que p excède la longueur maximale d'une chaîne

$$a_0 \to a_1 \to \dots \to a_n$$

de morphismes non identiques de A. L'affirmation en découle. □

Lemme 2. *Soient $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ des catégories triangulées. Supposons que $\mathcal{T}$ est engendrée, en tant que catégorie triangulée, par une classe d'objets $\mathcal{X}$.*

a) Un foncteur triangulé $F : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ admet un adjoint à droite si (et seulement si) pour tout objet $X \in \mathcal{X}$, le foncteur

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(F(\,?\,),\, X) : \mathcal{S}^\circ \to \mathsf{A}b$$

est représentable. Dans ce cas, cet adjoint se complète de manière canonique en un foncteur triangulé.

b) Soient G, G' : $\mathcal{T} \to \mathcal{S}$ deux foncteurs triangulés et $\varphi : F \to G$ un morphisme de foncteurs triangulés. Le morphisme φ est inversible si (et seulement si) φX est inversible pour tout objet $X \in \mathcal{X}$.

□

Soit $u : A \to B$ un foncteur entre catégories directes finies. Pour montrer l'existence de l'adjoint à droite u_*, affirmée par l'axiome **Der 3**, vérifions la condition du point a) du lemme 2. Soient a un objet de A, M un objet de $\mathcal{E}$ et F un objet de $\mathbb{D}(B)$. Alors nous avons des bijections, fonctorielles en F,

$$\mathsf{Hom}_{\mathbb{D}(A)}(u^*F, i_{A,a\,*}M) \xrightarrow{\sim} \mathsf{Hom}_{\mathbb{D}(e)}(F(u(a)), M) \xrightarrow{\sim} \mathsf{Hom}_{\mathbb{D}(B)}(F, i_{B,u(a)\,*}M)\ .$$

Le foncteur $\mathsf{Hom}_{\mathbb{D}(A)}(u^*(\,?\,), i_{A,a\,*}M)$ est donc bien représentable et u^* admet un adjoint à droite.

A l'aide du point b) du lemme 2, on vérifie facilement la partie de l'axiome **Der 4** relative à u_*. En effet, par le lemme, il suffit de vérifier l'affirmation pour $F = i_{A,a*}(M)$, où M est un objet de $\mathcal{E}$ et a un objet de A. Avec ces notations, nous avons

$$u_*(F) = u_* i_{A,a*}(M) = i_{B,u(a)*}(M)$$

et cet objet est le préfaisceau

$$b \mapsto \prod_{\mathsf{Hom}_B(u(a),b)} M.$$

Ainsi, pour un object b de B, nous avons

$$(u_*(F))_b = \prod_{\mathsf{Hom}_B(u(a),b)} M.$$

De l'autre côté, l'objet $F \mid A/b$ est le préfaisceau qui envoie un couple $(a', u(a') \to b)$ sur

$$\prod_{\mathsf{Hom}_A(a,a')} M.$$

Pour chaque $(a', g : u(a') \to b)$, l'ensemble $\mathsf{Hom}_A(a, a')$ est la réunion disjointe des ensembles de morphismes d'un $(a, f : u(a) \to b)$ vers $(a', g : u(a') \to b)$. Ainsi, le préfaisceau $F \,|\, A/b$ est le produit des préfaisceaux

$$(i_{A/b,(a,f)})_*(M) \ ,$$

où f parcourt les flèches $f : u(a) \to b$ de B. On a

$$\underleftarrow{\mathrm{holim}}(i_{A/b,(a,f)})_*(M) = (p_{A/b})_*(i_{A/b,(a,f)})_*(M) = (1_e)_*(M) = M$$

et donc

$$\underleftarrow{\mathrm{holim}}\, F \,|\, A/b = \prod_{f:u(a) \to b} M \ ,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Considérons l'axiome **Der 6**. Si u est pleinement fidèle on montre que u_* l'est aussi, c'est-à-dire que le morphisme d'adjonction $u^* u_* \to \mathbf{1}_{\mathbb{D}(A)}$ est inversible (on utilise le point b) du lemme 2). Si u est un cocrible, on se sert du point a) du lemme 2, pour montrer l'existence de l'adjoint à droite de u_*.

Les assertions des axiomes **Der 3**, **Der 4** et **Der 6** relatives à l'existence et les propriétés de l'adjoint à gauche $u_!$ découlent de ce qui précède appliqué à la catégorie exacte $\mathcal{E}^\circ$ grâce à l'isomorphisme entre $\mathbb{D}_{\mathcal{E}^\circ}$ et le 2-foncteur

$$A \mapsto (\mathbb{D}_{\mathcal{E}}(A^\circ))^\circ.$$

Considérons l'axiome **Der 7**. L'inclusion

$$i_{\lrcorner} : \lrcorner \to \square \quad (\text{resp. } i_{\ulcorner} : \ulcorner \to \square)$$

est un crible (resp. un cocrible). Donc les foncteurs $i_{\lrcorner *}$ et $i_{\ulcorner !}$ sont pleinement fidèles. Il s'agit de vérifier que les images essentielles de ces deux foncteurs coïncident. Pour cela, il suffit de prouver que l'image essentielle de $i_{\lrcorner *}$ est formée d'objets cocartésiens et celle de $i_{\ulcorner !}$ d'objets cartésiens. Pour montrer la première de ces assertions, il suffit de vérifier que les images par $i_{\lrcorner *}$ des générateurs $i_{\lrcorner, a\, *} M$, $a \in \mathsf{Ob}(\lrcorner)$, $M \in \mathsf{Ob}(\mathcal{E})$, sont cocartésiennes. Or ces images ne sont autres que $i_{\square, a\, *} M$, $a \in \mathsf{Ob}(\lrcorner)$, et la vérification est facile. La deuxième assertion se déduit de la première appliquée à la catégorie exacte opposée $\mathcal{E}^\circ$.

Considérons l'axiome **Der 5**. Il suffit de montrer que le foncteur canonique

$$\mathsf{D}^b(\underline{\mathsf{Hom}}(\Delta_1^\circ, \mathcal{E})) \to \underline{\mathsf{Hom}}(\Delta_1^\circ, \mathsf{D}^b \mathcal{E})$$

est plein et essentiellement surjectif. À l'aide du calcul des fractions pour la classe $\Sigma_{\mathcal{E}}$ de $\mathsf{H}^b \mathcal{E}$, on montre aisément qu'il est essentiellement surjectif. Soient maintenant L et M deux objets de $\mathsf{D}^b(\underline{\mathsf{Hom}}(\Delta_1^\circ, \mathcal{E}))$. On note $L_1 \to L_0$ l'image de L dans $\underline{\mathsf{Hom}}(\Delta_1^\circ, \mathsf{D}^b \mathcal{E})$. Soit

$$\begin{tikzcd} L_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d] & M_1 \arrow[d] \\ L_0 \arrow[r, "f_0"'] & M_0 \end{tikzcd}$$

un morphisme de $\underline{\mathsf{Hom}}(\Delta_1^\circ, \mathsf{D}^b\mathcal{E})$. À l'aide du calcul des fractions, on montre qu'il existe un objet M' de $\mathsf{D}^b(\underline{\mathsf{Hom}}(\Delta_1^\circ, \mathcal{E}))$ et un diagramme commutatif dans $\mathsf{H}^b\mathcal{E}$

$$\begin{tikzcd} L_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d] & M_1' \arrow[d] & M_1 \arrow[l, "s_1"'] \arrow[d] \\ L_0 \arrow[r, "g_0"'] & M_0' & M_0 \arrow[l, "s_0"] \end{tikzcd} ,$$

où s_1 et s_0 sont des quasi-isomorphismes tels que $s_1^{-1}g_1 = f_1$ et $s_0^{-1}g_0 = f_0$ dans $\mathsf{D}^b\mathcal{E}$. Ainsi, il reste à montrer que tout carré commutatif

$$\begin{tikzcd} U_1 \arrow[r, "\overline{w_1}"] \arrow[d, "\overline{u}"'] & V_1 \arrow[d, "\overline{v}"] \\ U_0 \arrow[r, "\overline{w_0}"'] & V_0 \end{tikzcd}$$

de $\mathsf{H}^b\mathcal{E}$ se relève en un morphisme de $\mathsf{D}^b(\mathcal{E}(\Delta_1))$. Ici, nous notons $\overline{f}$ la classe d'homotopie d'un morphisme de complexes f. Choisissons une factorisation

$$vw_1 - w_0u = hk$$

à travers un complexe contractile I. Considérons le diagramme commutatif de $\mathsf{C}^b\mathcal{E}$

$$\begin{tikzcd} U_1 \arrow[d, "u"'] & U_1 \arrow[l, "\mathbf{1}"'] \arrow[r, "w_1"] \arrow[d, "\begin{bmatrix} u \\ k \end{bmatrix}"] & V_1 \arrow[d, "v"] \\ U_0 & U_0 \oplus I \arrow[l, "{[\mathbf{1}\ 0]}"] \arrow[r, "{[w_0\ h]}"'] & V_0 \end{tikzcd}$$

Clairement, il fournit un morphisme de $\mathsf{D}^b(\mathcal{E}(\Delta_1))$ qui relève le morphisme donné $(\overline{w_0}, \overline{w_1})$.

Références

[1] B. Keller, *Chain complexes and stable categories*, Manus. Math. **67** (1990), 379–417.

[2] D. Quillen, *Higher Algebraic K-theory I*, Springer LNM **341** (1973), 85–147.

[3] J.-L. Verdier, *Des catégories dérivées des catégories abéliennes*, édité par G. Maltsiniotis, Astérisque **239** (1996).

UFR de Mathématiques, UMR 7586 du CNRS, Université Paris 7, Case 7012, 2, place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05, France

E-mail address: keller@math.jussieu.fr

URL: www.math.jussieu.fr/~keller