Algèbre/*Algebra*

Sous les catégories dérivées

Bernhard KELLER et Dieter VOSSIECK

Résumé — L'objet de cette Note ([1]) est triple : 1° Expliquer la description de D. Happel [3] de la catégorie dérivée d'une algèbre de dimension finie. 2° Simplifier une construction de A. Beilinson, J. Bernstein et P. Deligne [1] qui relie une catégorie dérivée aux catégories dérivées des cœurs de ses t-structures. 3° Étayer des fondations demeurées quelque peu bancales.

Beneath the derived categories

Abstract — *This Note has three objectives: 1. To explain Happel's description* [3] *of the derived category of a finite-dimensional algebra. 2. To simplify a construction of A. Beilinson, J. Bernstein and P. Deligne* [1] *which relates a derived category to the derived categories of the hearts of its t-structures. 3. To buttress foundations which were left somewhat shaky.*

1. CATÉGORIES SUSPENDUES. — 1.1. Étant donné une catégorie $\mathscr{H}$ et un foncteur $S: \mathscr{H} \to \mathscr{H}$, nous appelons S-*suite* une suite de morphismes de la forme $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} SX$.

Une *catégorie suspendue* consiste en la donnée d'une catégorie additive $\mathscr{C}$, d'un foncteur additif associant à tout objet $X \in \mathscr{C}$ sa *suspension* $SX \in \mathscr{C}$, ainsi que d'une classe de S-suites appelées *triangles* et soumises aux axiomes suivants :

SP0 : Toute S-suite isomorphe [6] à un triangle est un triangle.

SP1 : Pour tout $X \in \mathscr{C}$, $0 \to X \xrightarrow{1} X \to 0$ est un triangle.

SP2 : Si $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} SX$ est un triangle, il en va de même de $Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} SX \xrightarrow{-Su} SY$.

SP3 : Étant donné des triangles $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} SX$ et $X' \xrightarrow{u'} Y' \xrightarrow{v'} Z' \xrightarrow{w'} SX'$ et des morphismes $X \xrightarrow{a} X'$ et $Y \xrightarrow{b} Y'$ tels que $u'a = bu$, il y a un $Z \xrightarrow{c} Z'$ tel que $v'b = cv$ et $(Sa)w = w'c$.

SP4 : Étant donné deux morphismes $X \xrightarrow{u} Y$ et $Y \xrightarrow{v} Z$, il existe un diagramme commutatif $(*)$ dont les deux premières lignes et les deux colonnes centrales sont des triangles [3].

$$(*) \qquad \begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "i"] \arrow[d, "v"'] & Z' \arrow[r] \arrow[d] & SX \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r] & Z \arrow[r] \arrow[d] & Y' \arrow[r] \arrow[d] & SX \arrow[d, "Su"'] \\
 & X' \arrow[r, equal] \arrow[d, "j"'] & X' \arrow[r, "j"] \arrow[d] & SY \\
 & SY \arrow[r, "Si"] & SZ'. &
\end{tikzcd}$$

1.2. *Exemples.* — (*a*) Soient $\mathscr{E}$ une catégorie *exacte* [5] ayant assez d'injectifs, $\mathscr{I}$ la sous-catégorie pleine des injectifs de $\mathscr{E}$, $\langle \mathscr{I} \rangle$ l'idéal de $\mathscr{E}$ des morphismes se factorisant par $\mathscr{I}$ et $\overline{\mathscr{E}} = \mathscr{E}/\langle \mathscr{I} \rangle$. On obtient un foncteur *suspension* S en associant à tout $X \in \overline{\mathscr{E}}$ une suite exacte courte $0 \to X \xrightarrow{i_X} IX \xrightarrow{p_X} SX \to 0$ de $\mathscr{E}$ telle que $IX \in \mathscr{I}$ [4]. On obtient une

Note présentée par Pierre GABRIEL.

0249-6291/87/03050225 $ 2.00 © Académie des Sciences

catégorie suspendue en appelant *triangles* de $\overline{\mathscr{E}}$ les S-suites isomorphes aux S-suites $(\bar{e}, \bar{f}, \bar{h})$ associées aux diagrammes commutatifs à lignes exactes de $\mathscr{E}$ de la forme suivante (comparer avec [2], [3]) :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathrm{X} & \xrightarrow{e} & \mathrm{Y} & \xrightarrow{f} & \mathrm{Z} & \to & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \\ 0 & \to & \mathrm{X} & \xrightarrow[i_{\mathrm{X}}]{} & \mathrm{IX} & \xrightarrow[p_{\mathrm{X}}]{} & \mathrm{SX} & \to & 0. \end{array}$$

1.3. Une catégorie *triangulée* est par définition une catégorie suspendue où S est une équivalence [1]. Cela est le cas pour $\overline{\mathscr{E}}$ lorsque la catégorie $\mathscr{E}$ est *frobeniusienne* ([4], [3]). Par exemple, la catégorie $\mathscr{C}(\mathscr{B})$, formée des complexes différentiels d'une catégorie additive $\mathscr{B}$ et munie des suites exactes courtes scindées en chaque degré, est frobeniusienne. On posera $\mathscr{H}(\mathscr{B}) = \overline{\mathscr{C}(\mathscr{B})}$ [3].

Les catégories suspendues jouissent d'à peu près la moitié des propriétés usuelles des catégories triangulées.

1.4. Étant donné deux catégories suspendues $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$, un S-*foncteur* de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{C}'$ est formé d'un foncteur additif $\mathrm{F}: \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ et d'un morphisme $\varphi: \mathrm{FS} \to \mathrm{SF}$ tel que, pour tout triangle $\mathrm{X} \xrightarrow{u} \mathrm{Y} \xrightarrow{v} \mathrm{Z} \xrightarrow{w} \mathrm{SX}$ de $\mathscr{C}$, $\mathrm{FX} \xrightarrow{\mathrm{F}u} \mathrm{FY} \xrightarrow{\mathrm{F}v} \mathrm{FZ} \xrightarrow{(\varphi \mathrm{X})(\mathrm{F}w)} \mathrm{SFX}$ soit un triangle de $\mathscr{C}'$. Cette condition, appliquée au cas $\mathrm{Y}=0$, implique que φ est inversible. Si (F, φ) et (F', φ') sont deux S-foncteurs de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{C}'$, un *morphisme* de (F, φ) à (F', φ') est déterminé par un morphisme de foncteurs $\mu: \mathrm{F} \to \mathrm{F}'$ tel que $(\mathrm{S}\mu)\varphi = \varphi'(\mu\mathrm{S})$.

On dit qu'un S-foncteur $(\mathrm{F}, \varphi): \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ est une S-*équivalence* s'il y a un S-foncteur $(\mathrm{G}, \psi): \mathscr{C}' \to \mathscr{C}$ tel que les S-*foncteurs composés* $(\mathrm{GF}, (\psi\mathrm{F})(\mathrm{G}\varphi))$ et $(\mathrm{FG}, (\varphi\mathrm{G})(\mathrm{F}\psi))$ soient isomorphes aux S-*foncteurs identiques* $(\mathbf{1}_{\mathscr{C}}, \mathbf{1}_{\mathrm{S}})$ et $(\mathbf{1}_{\mathscr{C}'}, \mathbf{1}_{\mathrm{S}})$. En fait, (F, φ) *est une* S-*équivalence si et seulement si* F *est une équivalence de catégories.*

1.5. Soit $\mathscr{H}^{+}_{\leqq 0}(\mathscr{I})$ la sous-catégorie pleine de $\mathscr{H}(\mathscr{I})$ (1.2, 1.3) formée des complexes bornés à gauche et *acycliques* pour $n \geqq 0$, c'est-à-dire admettant des suites exactes courtes $0 \to \mathrm{Z}^n\mathrm{X} \xrightarrow{j^n} \mathrm{X}^n \xrightarrow{q^n} \mathrm{Z}^{n+1}\mathrm{X} \to 0$ de $\mathscr{E}$ telles que $j^{n+1} q^n = d^n_{\mathrm{X}}$. L'application $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{Z}^0\mathrm{X}$ fournit un S-foncteur $\mathrm{Z}^0: \mathscr{H}^{+}_{\leqq 0}(\mathscr{I}) \to \overline{\mathscr{E}}$.

1.6. Soient $(\mathrm{R}, \rho): \mathscr{S} \to \mathscr{T}$ et $(\mathrm{L}, \lambda): \mathscr{T} \to \mathscr{S}$ deux S-foncteurs tels que L soit adjoint à gauche à R. Si $\Psi: \mathbf{1}_{\mathscr{T}} \to \mathrm{RL}$ et $\Phi: \mathrm{LR} \to \mathbf{1}_{\mathscr{S}}$ sont des morphismes d'adjonction « compatibles », les conditions suivantes sont équivalentes : (i) $\lambda = (\Phi\mathrm{SL})(\mathrm{L}\rho^{-1}\mathrm{L})(\mathrm{LS}\Psi)$; (ii) $\rho^{-1} = (\mathrm{RS}\Phi)(\mathrm{R}\lambda\mathrm{R})(\Psi\mathrm{SR})$; (iii) $\Phi\mathrm{S} = (\mathrm{S}\Phi)(\lambda\mathrm{R})(\mathrm{L}\rho)$; (iv) $\mathrm{S}\Psi = (\rho\mathrm{L})(\mathrm{R}\lambda)(\Psi\mathrm{S})$. Si elles sont remplies, nous disons que Φ et Ψ sont des morphismes de S-adjonction compatibles et que (L, λ) est S-*adjoint à gauche à* (R, ρ).

PROPOSITION. — *Soient* $\mathscr{S}$, $\mathscr{T}$ *deux catégories triangulées,* $(\mathrm{R}, \rho): \mathscr{S} \to \mathscr{T}$ *un* S-*foncteur,* L *un adjoint à gauche à* R, $\Phi: \mathrm{LR} \to \mathbf{1}_{\mathscr{S}}$ *et* $\Psi: \mathbf{1}_{\mathscr{T}} \to \mathrm{RL}$ *des morphismes d'adjonction compatibles et* $\lambda = (\Phi\mathrm{SL})(\mathrm{L}\rho^{-1}\mathrm{L})(\mathrm{LS}\Psi)$. *Alors* (L, λ) *est un* S-*foncteur* S-*adjoint à gauche à* (R, ρ).

Exemple. — Soient $\mathscr{H}^{+}_{b}(\mathscr{E})$ et $\mathscr{H}^{+}_{b}(\mathscr{I})$ les sous-catégories pleines de $\mathscr{H}(\mathscr{E})$ et $\mathscr{H}(\mathscr{I})$ (1.3) formées des complexes bornés à gauche et « acycliques en grands degrés » (1.5). L'inclusion $\mathscr{H}^{+}_{b}(\mathscr{I}) \to \mathscr{H}^{+}_{b}(\mathscr{E})$ admet un S-adjoint à gauche i.

2. L'EXTENSION D'UNE CATÉGORIE SUSPENDUE. — 2.1. A toute catégorie suspendue $\mathscr{C}$ est associée une catégorie triangulée $\mathbf{Z}\mathscr{C}$ qui est *tendue*, c'est-à-dire telle que S y soit un

automorphisme [6]. Un objet de $\mathbf{Z}\mathscr{C}$ est un couple $(p, X) =: {}_pX$ tel que $p \in \mathbf{Z}$ et $X \in \mathscr{C}$. On pose $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}\mathscr{C}}({}_pX, {}_qY) = \varinjlim_{n \geqq p, q} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(S^{n-p}X, S^{n-q}Y)$.

La composition de $\mathbf{Z}\mathscr{C}$ est fournie par les morphismes composés $S^{n-p}X \to S^{n-q}Y \to S^{n-r}Z$ de $\mathscr{C}$. On munit $\mathbf{Z}\mathscr{C}$ d'un foncteur suspension S tel que $S_pX = {}_{p-1}X$ et de triangles ${}_pX \to {}_qY \to {}_rZ \to {}_{p-1}X$ associés aux S-suites $S^{n-p}X \xrightarrow{u} S^{n-q}Y \xrightarrow{v} S^{n-r}Z \xrightarrow{w} SS^{n-p}X$ de $\mathscr{C}$ telles que $(u, v, (-1)^n w)$ soit un triangle.

PROPOSITION. — *Posons* $EX = {}_0X$ *et notons* $\varepsilon X : ESX \to SEX$ *l'image canonique de* $\mathbf{1}_{SX}$. *Munie de* S *et des triangles ci-dessus,* $\mathbf{Z}\mathscr{C}$ *est une catégorie triangulée tendue et* $(E, \varepsilon) : \mathscr{C} \to \mathbf{Z}\mathscr{C}$ *un* S-*foncteur. C'est une* S-*équivalence si* $\mathscr{C}$ *est triangulée.*

2.2. Notons $\mathscr{H}om_S(\mathscr{C}, \mathscr{C}')$ la catégorie des S-foncteurs de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}'$ et $\mathscr{H}om_t(\mathscr{C}, \mathscr{C}')$ la sous-catégorie pleine formée des (F, φ) tels que $FS = SF$ et $\varphi = \mathbf{1}$.

PROPOSITION. — *Soit* $\mathscr{C}$ *une catégorie suspendue. Pour toute catégorie triangulée* $\mathscr{T}$, *le foncteur* $\mathscr{H}om_S((E, \varepsilon), \mathscr{T}) : \mathscr{H}om_S(\mathbf{Z}\mathscr{C}, \mathscr{T}) \to \mathscr{H}om_S(\mathscr{C}, \mathscr{T})$ *est une équivalence. Si* $\mathscr{T}$ *est tendue, le foncteur induit de* $\mathscr{H}om_t(\mathbf{Z}\mathscr{C}, \mathscr{T})$ *dans* $\mathscr{H}om_S(\mathscr{C}, \mathscr{T})$ *est un isomorphisme.*

2.3. *Exemple.* — 1.5 et 2.2 fournissent des S-foncteurs

$$\mathscr{H}_b^+(\mathscr{I}) \underset{\sim}{\xleftarrow{F}} \mathbf{Z}\mathscr{H}^+_{\leqq 0}(\mathscr{I}) \xrightarrow{ZZ^0} \mathbf{Z}\overline{\mathscr{E}}.$$

Si F^- est un quasi-inverse de F et $G = (\mathbf{Z}Z^0)F^-$, on a $GX \cong {}_nZ^nX$ lorsque n est grand.

Il s'ensuit que $\mathscr{H}_b^+(\mathscr{I})/\mathscr{H}^b(\mathscr{I}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}\overline{\mathscr{E}}$, où $\mathscr{H}^b(\mathscr{I})$ est formée des complexes bornés. Si $\mathscr{E}$ est frobeniusienne et que E^- est un quasi-inverse de E, on posera $Z = E^- G : \mathscr{H}_b^+(\mathscr{I}) \to \overline{\mathscr{E}}$.

3. APPLICATIONS. — 3.1. Soient A une algèbre de dimension finie sur un corps k, $\mathscr{M}_A$ la catégorie des A-modules à droite, $\nu : \mathscr{M}_A \to \mathscr{M}_A$ le foncteur de Nakayama $? \otimes_A \mathrm{Hom}_k(A, k)$ et $\mathscr{E}$ la catégorie frobeniusienne suivante : Les objets sont les suites $(M_i, m_i)_{i \in \mathbf{Z}}$ de A-modules M_i et d'applications $m_i \in \mathrm{Hom}_A(\nu M_i, M_{i+1})$ telles que $m_{i+1} \circ \nu m_i = 0$ pour tout i et $M_i = 0$ pour presque tout i. Un morphisme $(M_i, m_i) \to (N_i, n_i)$ est fourni par une suite de $f_i \in \mathrm{Hom}_A(M_i, N_i)$ telle que $n_i \circ \nu f_i = f_{i+1} \circ m_i$ pour tout i.

THÉORÈME [3]. — *Le foncteur* $\mathscr{M}_A \to \overline{\mathscr{E}}$ *qui associe à* M *la suite* (M_i, m_i) *telle que* $M_0 = M$ *et* $M_i = 0$ *pour* $i \neq 0$ *se prolonge en un* S-*foncteur pleinement fidèle de* $\mathscr{D}^b(\mathscr{M}_A)$ (= *la catégorie dérivée des complexes bornés de* $\mathscr{M}_A$) *dans* $\overline{\mathscr{E}}$. *Celui-ci est une* S-*équivalence si* $\mathrm{gldim}\, A < \infty$.

L'essentiel de la démonstration réside dans la construction d'un prolongement, que nous obtenons par composition :

$$\mathscr{D}^b(\mathscr{M}_A) \to \mathscr{H}_b^+(\mathscr{I}_A) \to \mathscr{H}_b^+(\mathscr{E}) \xrightarrow{i} \mathscr{H}_b^+(\mathscr{I}) \xrightarrow{Z} \overline{\mathscr{E}}.$$

Ici $\mathscr{I}_A$ désigne la sous-catégorie pleine de $\mathscr{M}_A$ formée des injectifs, le premier S-foncteur est un quasi-inverse de la S-équivalence canonique, le deuxième est induit par le foncteur $\mathscr{M}_A \to \mathscr{E}$ ci-dessus, i et Z sont définis en 1.6 et 2.3.

3.2. Notons $\mathscr{H}^b(\mathscr{B})$ la sous-catégorie pleine de $\mathscr{H}(\mathscr{B})$ (1.2) formée des complexes bornés et identifions les objets de $\mathscr{B}$ à des complexes concentrés en degré 0.

THÉORÈME. — *Soient* $\mathcal{E}$ *une catégorie frobeniusienne,* $\mathcal{B}$ *une catégorie additive et* $F : \mathcal{B} \to \overline{\mathcal{E}}$ *un foncteur additif tel que*

$$(*) \qquad \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{E}}}(S^n FA, FB) = 0, \qquad \forall A, B \in \mathcal{B}, \quad et \quad \forall n > 0.$$

(*a*) F *se prolonge en un* S-*foncteur* $\tilde{F} : \mathcal{H}^b(\mathcal{B}) \to \overline{\mathcal{E}}$. *Pour que* $\tilde{F}$ *soit pleinement fidèle il faut et il suffit que* F *le soit et que* $\mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{E}}}(FA, S^n FB) = 0$, *pour tous* $A, B \in \mathcal{B}$ *et* $n > 0$.

(*b*) *Si la catégorie* $\mathcal{B}$ *est exacte et que l'image de toute suite exacte courte* $0 \to A \xrightarrow{e} B \xrightarrow{f} C \to 0$ *se laisse insérer dans un triangle* $FA \xrightarrow{Fe} FB \xrightarrow{Ff} FC \to SFA$, *alors* $\tilde{F}$ *se décompose en* $\mathcal{H}^b(\mathcal{B}) \xrightarrow{\mathrm{can}} \mathcal{D}^b(\mathcal{B}) \xrightarrow{\hat{F}} \overline{\mathcal{E}}$. *Dans ce cas, pour que* $\hat{F}$ *soit pleinement fidèle, il faut et il suffit que* F *le soit et qu'il existe pour tous* $A, A' \in \mathcal{B}$, $n > 0$ *et* $f \in \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{E}}}(FA', S^n FA)$ *une suite exacte courte* $0 \to A \xrightarrow{j} B \to C \to 0$ *de* $\mathcal{B}$ *vérifiant* $(S^n F j) f = 0$.

Nous exhibons la construction de $\tilde{F}$, qui est due à B. Keller (comparer avec [1]) ; Soient $\mathcal{X}$ et $\overline{\mathcal{X}}$ les sous-catégories pleines de $\mathcal{E}$ et $\overline{\mathcal{E}}$ formées des objets isomorphes dans $\overline{\mathcal{E}}$ aux images de F. Il suffit de trouver un prolongement $\tilde{I} : \mathcal{H}^b(\overline{\mathcal{X}}) \to \overline{\mathcal{E}}$ de l'inclusion $I : \overline{\mathcal{X}} \to \overline{\mathcal{E}}$. Or $\mathcal{H}^b(\mathcal{X}) \xrightarrow{\mathrm{can}} \mathcal{H}^b(\overline{\mathcal{X}})$ et la restriction de $Z \circ i$ à $\mathcal{H}^b(\mathcal{X})$ s'annullent sur $\mathcal{H}^b(\mathcal{I})$. On a donc un diagramme commutatif de S-foncteurs :

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{H}^b(\mathcal{X}) \arrow[dl, "\mathrm{can}"'] \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{can}"'] & \mathcal{H}_b^+(\mathcal{E}) \arrow[r, "i"] & \mathcal{H}_b^+(\mathcal{I}) \arrow[d, "Z"] \\
\mathcal{H}^b(\overline{\mathcal{X}}) & \mathcal{H}^b(\mathcal{X})/\mathcal{H}^b(\mathcal{I}) \arrow[l, dashed, "K"'] \arrow[rr, dashed, "H"] & & \overline{\mathcal{E}}.
\end{tikzcd}$$

K est une S-équivalence. On pose $\tilde{I} = HK^{-}$, K^{-} étant un quasi-inverse de K.

(1) Nous remercions P. Gabriel pour ses conseils dans l'élaboration de nos résultats.

Note reçue le 18 mai 1987, acceptée le 25 mai 1987.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] A. A. BEILINSON, J. BERNSTEIN et P. DELIGNE, Faisceaux pervers, *Astérisque*, 100, 1982.

[2] S. I. GELFAND, *Fibrés sur* $\mathbf{P}_n$ *et problèmes d'algèbre linéaire*, appendice à la traduction russe de *Vector bundles on complex projective spaces* par C. OKONEK, M. SCHNEIDER et H. SPINDLER, Moscou, Mir, 1984.

[3] D. HAPPEL, On the derived category of a finite-dimensional algebra, *Comment. Math. Helv.* ~~(à paraître)~~.

[4] A. HELLER, The loop-space functor in homological algebra, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 96, 1960, p. 382-394.

[5] D. QUILLEN, Higher Algebraic K-theory I, *Algebraic* K-*theory* I, Lecture Notes in Math., n° 341, Springer, 1973, p. 85-147.

[6] J.-L. VERDIER, Catégories dérivées, état 0, *SGA* 4 1/2, Lecture Notes in Math., n° 569, Springer, 1977, p. 262-311.

B. K. : Mathematik, G 28.2, *E.T.H.-Zentrum*, 8092 *Zürich, Suisse;*

D. V. : *Mathematisches Institut, Universität Zürich, Rämistrasse* 74, 8051 *Zürich, Suisse.*