

Classification des applications à allure monomiale, d'après Sullivan.

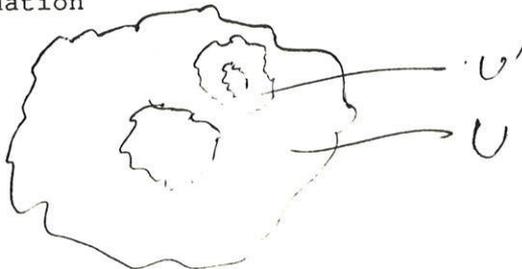
Printemps 1987

(rédigé par Bruno Kahn à partir de notes de A. Douady, Laetizia Hérault et Bodil Brammer, et d'une quinzaine de discussions avec A. Douady.)

I Définition et premières propriétés.

** Définition. Soient $U' \subset U \subset \mathbb{C}$ deux ouverts homéomorphes à des couronnes, avec U' relativement compact dans U , tels que $i_*: \pi_1(U') \rightarrow \pi_1(U)$ soit l'identité (où i est l'injection canonique et $\pi_1(U')$ et $\pi_1(U)$ sont canoniquement identifiés à \mathbb{Z} via l'orientation induite sur U et U' par celle de \mathbb{C}). Une application $f: U' \rightarrow U$ est dite à *allure monomiale* (AAM) si elle est holomorphe et *propre*.

Remarque. La condition $i_* = \text{identité}$ est là pour assurer que l'on n'est pas dans la situation



On note d le degré de f : c'est l'entier tel que $f_* = d$. Grâce aux hypothèses, on a $|d| \geq 2$. On supposera ici $d > 0$, donc $d \geq 2$.

Structure quasi-conforme des applications à allure monomiale.

|| Théorème I.1 (cf [1], th. 1). a) Il existe $R > 1$ et une application $\tilde{\gamma}: C(R) \rightarrow U$ (où $C(R) = \{z \in \mathbb{C} \mid R^{-1} < |z| < R\}$), homéomorphisme quasi-conforme sur son image, telle que $f \circ \tilde{\gamma} = \tilde{\gamma} \circ \tilde{F}$ sur $C(R^{1/d})$, où $\tilde{F}(z) = z^d$.

b) La restriction de $\tilde{\gamma}$ à S^1 est un homéomorphisme bihöldérien de degré 1 de S^1 sur $\Gamma = \bigcap f^{-n}(U')$; tout autre tel homéomorphisme (conjuguant \tilde{F} à f) est de la forme $z \mapsto \tilde{\gamma}(ze^{2\pi i k/(d-1)})$, pour $0 \leq k \leq d-2$.

Remarques 1. On peut montrer (Bowen-Ruelle) que $\dim \text{Haus}(\Gamma) = \dim \text{fr}(\Gamma) = \delta$, $1 \leq \delta < 2$; $0 < \text{mes}_\delta \Gamma < +\infty$.

2. On a $\tilde{\gamma}|_{S^1} = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{-n} \gamma_0 \tilde{F}^n$, où $\gamma_0: S^1 \rightarrow U'$ est continue quelconque de degré 1.

3. En fait, comme le montre l'énoncé du théorème, on ne s'intéresse à une application à allure monomiale qu'au voisinage de son quasi-cercle invariant.

4. Fixer un choix de $\tilde{\gamma}$ revient à se donner un point-base $z = \tilde{\gamma}(0) \in \Gamma$, fixe par f ; lorsqu'on fait un tel choix, on parle d'AAM *marquée*. A partir de maintenant, on travaillera plutôt avec $\gamma = \tilde{\gamma} \circ e$, où $e: \mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow S^1$ est donné par $e(t) = e^{2\pi i t}$. On note $F: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ l'application $t \mapsto dt$.

II. Le problème.

Notation. Si f_1 et f_2 sont deux AAM, munies de points-base z_1 et z_2 , on note $f_1 \sim f_2$ si f_1 et f_2 sont conjuguées (au voisinage de Γ_1 et Γ_2) par une application holomorphe ou antiholomorphe θ telle que $\theta(z_1) = z_2$. Si l'on peut choisir θ holomorphe, on note $f_1 \sim_h f_2$.

N.B. d'après le théorème 1, la restriction d'un tel θ à Γ_1 n'est autre que $\gamma_2 \circ \gamma_1^{-1} := \theta_0$.

Problème. Etant donné f_1 et f_2 , z_1 et z_2 , trouver un critère pour que $f_1 \sim_h f_2$.

Voici la solution suggérée par Collet:

** Définition. Soit $x \in \Gamma$ un point périodique de f , de période n , et soit $C = \{f^i(x) \mid i \geq 0\}$ le cycle de f engendré par x . Le *multiplicateur* de x est le nombre $\rho_x = (f^n)'(x) = \prod_{y \in C} f'(y)$. Comme ρ_x ne dépend que de C , on le note aussi ρ_C et on l'appelle le *multiplicateur de C* .

Si $(\Gamma, f) = (T, F)$, les points périodiques de période divisant n sont les $i/(d^n - 1)$. Si (Γ, f, z) est quelconque, les cycles de f sont par le théorème 1 en correspondance biunivoque avec ceux de F . Si (Γ_1, f_1, z_1) et (Γ_2, f_2, z_2) sont deux AAM marquées, on peut donc parler de cycles se correspondant.

?? Conjecture (Collet). $f_1 \sim_h f_2$ ssi $\rho_{C_1} = \rho_{C_2}$ pour tous cycles C_1, C_2 se correspondant.

La conjecture de Collet a été démontrée par Sullivan:

|| Théorème II.1 (Sullivan). La conjecture de Collet est vraie; si l'on remplace les conditions $\rho_{C_1} = \rho_{C_2}$ par $|\rho_{C_1}| = |\rho_{C_2}|$, on a $f_1 \sim f_2$.

Collet avait obtenu certains cas particuliers de ce théorème: cf [2].

Le but de l'exposé est d'expliquer la démonstration de Sullivan. Notons $f_1 \sim_{\mathbb{R}} f_2$ si f_1 et f_2 sont \mathbb{R} -analytiquement conjuguées au voisinage de leurs quasi-cercles invariants.

Idée. La démonstration se fait en quatre étapes:

- A) $f_1 \sim_{\mathbb{R}} f_2 \iff f_1 \sim f_2$.
- B) A f on associe une certaine fonction $v: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$.
- C) $v_1 = v_2 \iff f_1 \sim_{\mathbb{R}} f_2$.
- D) $|\rho_{C_1}| = |\rho_{C_2}| \iff v_1 = v_2$.

Au § III on donne des critères de trivialité pour une AAM; ces critères sont utilisés dans la suite, au § IV pour démontrer A) et au § VI. Au § V, on construit la fonction v de B), et on réduit la démonstration de D) à un énoncé qui sera démontré dans un autre exposé. Enfin, au § VI, on démontre C).

III. Trivialité d'une AAM.

Tout d'abord, introduisons un peu de terminologie, qui sera utilisée dans toute la suite:

i) On dit que f est *triviale* si $(\Gamma, f) \sim_{\mathbb{R}} (\mathbb{T}, F)$.

ii) On dit que Γ est *lisse* si c'est une courbe \mathbb{R} -analytique; si f est triviale, Γ est lisse. (Remarque: si Γ est lisse en un point, elle est lisse partout: c'est dû au fait que f est fortement expansive, cf ci-dessous la fin de la démonstration du th. VI.1).

iii) Si Γ n'est pas lisse, on dira parfois que f est *générique*.

Dans ce paragraphe, on va donner des conditions suffisantes (et nécessaires) pour qu'une AAM soit triviale; ces critères seront utilisés à plusieurs reprises dans la suite.

1) Atlas affines.

** Définition III.1. Soit $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , et soit X un espace topologique. Un atlas K -affine sur X (de dimension n) est un atlas sur X à valeurs dans K^n , tel que les changements de carte soient K -affines.

|| Proposition III.1. Soit $f:U' \rightarrow U$ une AAM, de quasi-cercle invariant Γ .

- a) S'il existe sur U un atlas \mathbb{C} -affine invariant par f , l'application f est triviale.
 b) Si Γ est lisse et s'il existe sur Γ un atlas \mathbb{R} -affine invariant par f , l'application f est triviale.

Démonstration. Traitons le cas a), le cas b) étant identique. Dire que f laisse l'atlas de U invariant est dire que f est affine localement sur les cartes. Soit \tilde{U} le revêtement universel de U , et soient (V_i, φ_i) les cartes de U relevées à \tilde{U} . Comme \tilde{U} est simplement connexe, on peut modifier les φ_i par des applications affines de sorte que les changements de carte deviennent l'identité; on a alors une "carte" $\tilde{\varphi}: \tilde{U} \rightarrow W \subset \mathbb{C}$, morphisme étale de \tilde{U} sur un ouvert W de \mathbb{C} , telle qu'il existe $f_0: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ affine rendant le diagramme:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{U} & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & W \\ \tilde{f} \downarrow & & f_0 \downarrow \\ \tilde{U}' & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \mathbb{C} \end{array}$$

commutatif, où \tilde{f} (resp. \tilde{U}') est le relèvement de f (resp. de U') à \tilde{U} . Soit $\sigma: \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}$ l'automorphisme du revêtement $\tilde{U} \rightarrow U$ correspondant à un générateur de $\pi_1(U) \simeq \mathbb{Z}$; alors $\sigma_0 := \tilde{\varphi} \sigma \tilde{\varphi}^{-1}: W \rightarrow W$ est affine. Mais, comme f est de degré d , on a $f_0 \sigma_0 = \sigma_0^d f_0$; cela implique que σ_0 est une translation et f_0 une homothétie de rapport d ; ceci démontre la trivialité de f .

2) Le principe de J. Lelong-Ferrand: applications.

** Définition III.2. a) Soient M et M' deux variétés riemanniennes. Une application $C^1 f: M' \rightarrow M$ est dite *fortement dilatante* sur un ouvert U' de M' s'il existe $\lambda > 1$ tel que $\forall x \in U', \forall v \in T_x M', \|f'(x).v\|_x \geq \lambda \|v\|_x$.

b) Supposons que M' soit un ouvert de M . Sans supposer M riemannienne, on dit que f est *fortement expansive* si elle est fortement dilatante pour une métrique riemannienne convenable sur M (et la métrique induite sur M').

|| Lemme III.1. Une AAM $f: U' \rightarrow U$ est fortement dilatante pour la métrique de Poincaré de U .

Démonstration. Tout d'abord, on remarque que f n'a pas de points critiques: cela résulte de la formule de Riemann-Hurwitz. Par conséquent, on peut définir $\tilde{f}^{-1}: \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}'$ (revêtements universels), qui est lipschitzienne pour la métrique de Poincaré de \tilde{U} . Comme \tilde{U}' est strictement contenu dans \tilde{U} , \tilde{f}^{-1} est fortement contractante sur tout ouvert $V \subset \tilde{U}'$ tel que $\tilde{f}^{-1}(V)$ soit relativement compact dans \tilde{U} . Grâce à l'invariance par l'action de $\pi_1(U)$, on en déduit que \tilde{f}^{-1} est fortement contractante sur \tilde{U} , donc que f est fortement dilatante sur U .

|| Proposition III.2. ("principe de J. Lelong-Ferrand"). Soit $f: M' \rightarrow M$ une application fortement expansive, où M' est relativement compact dans M et $f(M') = M$, et soit ω une p -forme sur M' (avec $p > 0$), invariante par f . Alors $\omega = 0$.

Démonstration. Soit $\mu = \|\cdot\|$ une métrique pour laquelle f est fortement dilatante. Comme M' est relativement compact dans M , on a $\|\omega\|_{M'} < \infty$. Soient $x \in M$ et $t \in \Lambda^p T_x M$; choisissons une suite $(x_n, t_n) \in M \times TM$ avec $(x_0, t_0) = (x, t)$, $t_n \in \Lambda^p T_{x_n} M$, $f(x_{n+1}) = x_n$ et $\Lambda^p T_{x_{n+1}} f(t_{n+1}) = t_n$. Comme f est fortement dilatante, $\|t_n\| \rightarrow 0$.

Puisque $\|\omega\|_M < \infty$, on en déduit que $\langle \omega_n(x_n), t_n \rangle \rightarrow 0$. Mais $\langle \omega_n(x_n), t_n \rangle = \langle \omega(x), t \rangle$; on a donc $\langle \omega(x), t \rangle = 0$, c'est-à-dire (en faisant varier x et t) $\omega = 0$.

On va appliquer la prop. III.2 dans deux situations différentes.

|| Proposition III.3. Sous les hypothèses de la proposition III.2, supposons $n=2$. Soit μ une métrique presque invariante par f , au sens que $f^*\mu = \lambda\mu$ pour un scalaire λ convenable. Alors μ est plate.

Démonstration. La courbure de μ est une 2-forme dont l'hypothèse implique qu'elle est invariante par f ; l'affirmation résulte donc de la prop. III.2.

** Définition III.3. Un feuilletage sur une surface de Riemann est dit harmonique s'il est donné localement par les lignes de niveau d'une fonction harmonique.

|| Proposition III.4. Soit X une surface de Riemann; soit \mathcal{F} un feuilletage sur un ouvert U' de X . Si \mathcal{F} est invariant par une application $f:U' \rightarrow X$ expansive (pour la métrique de Poincaré), \mathcal{F} est harmonique.

Démonstration abrégée. L'obstruction à l'harmonicité de \mathcal{F} est mesurée par une 2-forme ω , que l'on obtient ainsi: soit α une 1-forme définissant \mathcal{F} , et soit β une 1-forme telle que $\beta \wedge \alpha = d\alpha$ et $\beta \wedge (*\alpha) = d(*\alpha)$; alors $\omega = d\beta$. Si \mathcal{F} est invariant par f , la forme ω est invariante par f , donc nulle puisque f est fortement expansive.

3) Deux cas de trivialité d'une AAM.

|| Théorème III.1. Soit $f:U' \rightarrow U$ une AAM, de quasi-cercle invariant Γ .

a) Supposons qu'il existe sur U une métrique presque invariante par f . Alors f est triviale.

b) Supposons que Γ soit lisse et qu'il existe sur Γ une métrique presque invariante par f . Alors f est triviale.

Démonstration. a) d'après la prop. III.3 et le lemme III.1, la métrique considérée est plate. Elle définit donc un atlas affine qui est invariant par f . La prop. III.1 montre alors que f est triviale.

b) Même raisonnement (dans ce cas, la métrique est automatiquement plate).

|| Théorème III.2. Soit $f:U' \rightarrow U$ une AAM, de quasi-cercle invariant Γ . Supposons qu'il existe un feuilletage \mathfrak{F} sur U' , invariant par f . Alors f est triviale.

Démonstration. D'après la prop. III.4 et le lemme III.1, \mathfrak{F} est harmonique. En prenant les conjuguées harmoniques, on fabrique un atlas complexe sur U' . Les changements de carte conservent les lignes de niveau; et en particulier envoient les lignes horizontales (correspondant aux feuilles) sur des lignes horizontales. Par conséquent, leur dérivée est réelle; comme elle est aussi holomorphe, elle est constante. Par conséquent, les changements de carte sont affines, i.e. l'atlas est affine. La prop. III.1 montre alors que f est triviale.

IV. Démonstration du point A).

On va démontrer un résultat un peu plus précis:

|| Théorème IV.1. Soient $f_1:U_1' \rightarrow U_1$ et $f_2:U_2' \rightarrow U_2$ deux AAM, de quasi-cercles invariants Γ_1 et Γ_2 , conjuguées par une application \mathbb{R} -analytique θ . Alors f_1 et f_2 sont conjuguées par une application holomorphe ou antiholomorphe selon que θ préserve ou renverse l'orientation.

Remarque. Si Γ_1 est lisse, elle possède un automorphisme renversant l'orientation; dans ce cas, on aura toujours une conjugante holomorphe (cf d'ailleurs la démonstration). Il n'en est pas de même lorsque Γ n'est pas lisse.

Pour démontrer le théorème, distinguons deux cas:

1) Γ_1 est lisse (donc aussi Γ_2). Alors θ induit un isomorphisme \mathbb{R} -analytique entre deux courbes \mathbb{R} -analytiques, qui se prolonge en un isomorphisme \mathbb{C} -analytique au voisinage de Γ_1 (c'est évident sur une carte).

2) Cas général. Considérons le champ d'ellipses infinitésimales sur U_1' , images réciproques par θ' du champ de cercles standard sur U_2' . Distinguons encore deux cas:

a) Il existe un point x de Γ_1 dont l'ellipse est un cercle. En utilisant l'holomorphie de f_1 et f_2 , on voit que toutes les ellipses correspondant aux points de $f_1^{-\infty}(x) := \bigcup_{n \geq 1} f_1^{-n}(x)$ sont des cercles; comme $f_1^{-\infty}(x)$ est dense dans Γ_1 , cela montre que toutes les ellipses en les points de Γ_1 sont des cercles. Si les ellipses au voisinage de Γ_1 sont aussi des cercles, θ est holomorphe au voisinage de Γ_1 (puisque'elle conserve l'orientation). Sinon, Γ_1 est lisse: en effet,

la condition "être un cercle" est une condition \mathbb{R} -analytique. On est donc ramené au cas 1).

b) *Aucune des ellipses au voisinage de Γ_1 n'est un cercle.* Alors les grands axes des ellipses définissent un feuilletage au voisinage de Γ_1 , qui est f_1 -invariant par construction. D'après le théorème III.2, f_1 est triviale; en particulier Γ_1 est lisse, et on est encore ramené au cas 1).

V. Définition de V; "démonstration" du point D).

Pour toute fonction $\Phi: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, notons $F^*\Phi = \Phi \circ F$, $F_*\Phi(t) = \sum_{dx=t} \Phi(x)$, et $\text{osc}(\Phi, \varepsilon) = \max\{|\Phi(x) - \Phi(y)|; |x-y| \leq \varepsilon\}$.

|| Proposition V.1. Soit $U: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction höldérienne, vérifiant $\int_{\mathbb{T}} U(t) dt = 0$. Alors il existe un couple (B, V) de fonctions höldériennes sur \mathbb{T} , avec V unique, telles que $U = F^*B - B + V$ et $F_*V = 0$. De plus, on peut choisir $B(t) = \sum_{n \geq 1} 1/d^n (F_*)^n U(t)$.

Démonstration. Montrons que la série converge. Posons $B_n(t) = 1/d^n (F_*)^n U(t)$; on remarque que $B_n(t)$ est la d^n -ième somme de Darboux (de subdivision régulière) correspondant à l'intégrale $\int_{\mathbb{T}} U(t) dt$. On a donc $|B_n(t)| = |B_n(t) - \int_{\mathbb{T}} U(t) dt| \leq \text{osc}(U, 1/d^n)$. Comme U est höldérienne, la série définissant B est uniformément majorée par une série géométrique, donc converge normalement. D'autre part, par définition de B_n , $\text{osc}(B_n, \varepsilon) \leq \text{osc}(U, \varepsilon/d^n)$, donc $\text{osc}(B, \varepsilon) \leq \sum_{n \geq 1} \text{osc}(U, \varepsilon/d^n)$, ce qui montre que B est höldérienne (de même exposant que U). On calcule:

$$\begin{aligned} F_*(F^*B - B) &= dB - F_*B = \sum_{n \geq 0} 1/d^n (F_*)^{n+1} U - \sum_{n \geq 1} 1/d^n (F_*)^{n+1} U \\ &= F_*U. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a bien $U = F^*B - B + V$, avec $F_*V = 0$. Il est clair que V est höldérienne.

Montrons l'unicité. Soit B continue telle que $F_*(F^*B - B) = 0$. Cela s'écrit encore $B = 1/dF_*B = 1/d^n(F_*)^n B$ pour tout $n \geq 1$. Mais les $1/d^n(F_*)^n B$ convergent vers $\int_T B$; donc B est constante et $F^*B - B = 0$.

On applique la proposition à $U = \log(|f'| \circ \gamma) - \int_T \log(|f'| \circ \gamma)$; on obtient $|f'| \circ \gamma = K(f) \nu F^*b/b$, où $K(f) = \exp(\int_T \log(|f'| \circ \gamma))$.

** Définition. La fonction ν est l'invariant de Sullivan de (Γ, f) .

Remarque. Ce n'est pas l'invariant originel de Sullivan; le vrai invariant de Sullivan vérifie $F_*\nu = 1$, alors que celui-ci vérifie $F_*\log \nu = 0$. Toutefois, l'invariant utilisé ici est plus maniable pour démontrer la conjecture de Collet.

|| Proposition V.2. a) $K(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \prod_{C \in X_n} \rho_C \right|^{1/d^n - 1}$, où X_n est l'ensemble des cycles de f d'ordre divisant n (en particulier, $K(f)$ est déterminé par les multiplicateurs des cycles de f).

b) Pour tout cycle C de f de longueur ℓ , on a

$$|\rho_C| = K(f)^\ell \cdot \prod_{x \in C} \nu(\gamma^{-1}(x)).$$

c) Si $f_1 \sim_{\mathbb{R}} f_2$, $\nu_1 = \nu_2$.

Démonstration. Pour a), on observe une fois de plus que les logarithmes des termes du second membre sont des sommes de Darboux convergeant vers $\int_T \log(|f'| \circ \gamma)$. b) résulte d'un calcul trivial; enfin pour c), un calcul élémentaire montre que

$$|f_2'| \circ \gamma_2 = |f_1'| \circ \gamma_1 \cdot F^*|\theta' \circ \gamma_1| / |\theta' \circ \gamma_1|,$$

si θ est un conjuguant \mathbb{R} -analytique de f_1 et f_2 . L'égalité de ν_1 et ν_2 en résulte par l'unicité dans la prop. V.1.

L'invariant V étant construit, le point D) de la démonstration de Sullivan résulte du théorème suivant:

|| Théorème V.1. (Livschisch?) Soit $W: T \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction höldérienne, possédant les propriétés suivantes:

1) $F_*W = 0$;

2) pour tout cycle C de F , on a $\sum_{x \in C} W(x) = 0$.

Alors $W = 0$.

En effet, supposons ce théorème démontré, et soient $(f_1, z_1), (f_2, z_2)$ deux AAM marquées telles que $|\rho_{C_1}| = |\rho_{C_2}|$ pour tous cycles C_1 et C_2 se correspondant. D'après la prop. V.2 a), on a $K(f_1) = K(f_2)$. La proposition V.2 b) montre alors que $W = \log v_1/v_2$ vérifie les hypothèses du théorème; on a donc $v_1 = v_2$.

`Le théorème V.1 sera démontré dans un autre exposé.

VI. Démonstration de C): polychotomie.

Pour démontrer C), on va utiliser la structure de prévariété (\mathbb{R} -analytique) de Γ :

** Définition VI.1. Une prévariété de dimension $\leq n$ est un espace topologique annelé, localement isomorphe à une partie localement fermée de \mathbb{R}^n munie du faisceau induit par le faisceau des fonctions \mathbb{R} -analytiques sur \mathbb{R}^n .

Comme Γ est plongée dans \mathbb{R}^2 , elle est munie naturellement d'une structure de prévariété de dimension 1 (si Γ est lisse) ou 2 (dans le cas générique) avec une seule carte! Notons \mathcal{O}_Γ son faisceau structural. Si $(f_1, \Gamma_1), (f_2, \Gamma_2)$ sont deux AAM marquées, conjuguées à

(F, T) par γ_1 et γ_2 , on dispose sur T de deux faisceaux $\gamma_1^* \mathcal{O}_{\Gamma_1}$ et $\gamma_2^* \mathcal{O}_{\Gamma_2}$; $\theta|_{\Gamma_1}$ se prolonge en un isomorphisme \mathbb{R} -analytique au voisinage de Γ_1 si et seulement si $\gamma_1^* \mathcal{O}_{\Gamma_1} = \gamma_2^* \mathcal{O}_{\Gamma_2}$. En vertu de cette remarque, il suffit de démontrer:

|| Théorème VI.1. La fonction v détermine le faisceau $\gamma^* \mathcal{O}_\Gamma$ sur T .

Démonstration. Faisons d'abord une remarque préliminaire:

|| Lemme VI.1. $v_\Gamma = v \circ \gamma^{-1}$ est la restriction à Γ d'une fonction \mathbb{R} -analytique (que l'on notera encore v_Γ).

Cela résulte de la construction de v telle qu'elle a été indiquée dans la prop. V.1. En effet, $U_\Gamma = \log|f'|$ est harmonique (puisque f n'a pas de points critiques, cf dém. du lemme III.1). Les fonctions $1/d^n(f_*)^n U_\Gamma(t)$ sont donc également harmoniques, et la série $\sum_{n \geq 1} 1/d^n(f_*)^n U_\Gamma(t)$ converge au voisinage de Γ vers une fonction harmonique, donc \mathbb{R} -analytique, que l'on note $B_\Gamma(t)$. Alors $v_\Gamma = K(f)^{-1} |f'| \exp(B_\Gamma - f^* B_\Gamma)$ est encore \mathbb{R} -analytique au voisinage de Γ .

Pour démontrer le théorème VI.1, on traite d'abord un cas particulier:

|| Lemme VI.2. Supposons v constante sur T . Alors f est triviale.

Remarquons d'abord que si v est constante, on a $v = 1$, puisque par construction $F_* \log v = 0$. Supposons d'abord v_Γ constante au voisinage de Γ . On a alors $|f'| \circ \gamma = K(f) F^* b/b$ (cf V), ou encore $|f'| = K(f) f^* b_\Gamma / b_\Gamma$, où $b_\Gamma = b \circ \gamma^{-1}$. Soit $|||$ la métrique donnée par $||| dx ||| = 1/b_\Gamma(x) |dx|$; alors on a $f^* ||| = K(f) |||$, c'est-à-dire que $|||$ est presque invariante par f au sens de la prop. III.3. Le théorème III.1 a) implique donc que f est triviale.

Supposons maintenant $v_\Gamma = 1$ sur Γ , mais v_Γ non constante au voisinage de Γ . Alors Γ est lisse (cf lemme VI.1: Γ est une

composante de l'ensemble des zéros d'une fonction \mathbb{R} -analytique) et muni d'une métrique presque stable par f comme ci-dessus. Le théorème III.1 b) implique donc que f est triviale.

Le résultat montre *a posteriori* que le deuxième cas envisagé est impossible. Dégageons ceci en un corollaire qui servira plus bas:

|| Corollaire. Si v_Γ est constante sur Γ , elle est constante au voisinage de Γ .

Passons maintenant au cas général; on va montrer que si f n'est pas triviale, le faisceau $\gamma^* \mathcal{O}_\Gamma$ est engendré (comme faisceau d'algèbres \mathbb{R} -analytiques) par les branches des $v_\Gamma \circ f^{-n}$.

On introduit le feuilletage \mathfrak{F} des lignes de niveau de v_Γ . Plusieurs cas peuvent se produire:

a) $\mathfrak{F} = f^* \mathfrak{F}$ au voisinage de Γ . Alors f laisse un feuilletage invariant, donc est triviale d'après le th. III.2.

b) $\mathfrak{F} \neq f^* \mathfrak{F}$ au voisinage de Γ , mais $\mathfrak{F} // f^* \mathfrak{F}$ sur Γ . Alors Γ est lisse (il est déterminé par une condition \mathbb{R} -analytique de dimension 1). Le feuilletage \mathfrak{F} est transverse à Γ en au moins un point x ; sinon v_Γ serait constante sur Γ mais pas au voisinage de Γ , ce qui contredirait le corollaire au lemme VI.1. Alors $v'_\Gamma(x)$ est non nulle, donc (par le théorème des fonctions implicites) v_Γ engendre le faisceau \mathcal{O}_Γ sur un voisinage V de x . Soit $y \in \Gamma$; comme f est fortement expansive (lemme III.1), il existe $n \geq 1$ tel que $y \in f^n(V)$; alors les branches de $v_\Gamma \circ f^{-n}$ engendrent \mathcal{O}_Γ au voisinage de y .

c) \mathfrak{F} est transverse à $f^* \mathfrak{F}$ en un point x de Γ (c'est le cas générique). Alors les différentielles de v_Γ et de $v_\Gamma \circ f$ en x sont linéairement indépendantes; par conséquent, v_Γ et $v_\Gamma \circ f$ engendrent le faisceau des fonctions \mathbb{R} -analytiques sur \mathbb{R}^2 au voisinage de x . Par le même argument qu'en b), \mathcal{O}_Γ est engendré au voisinage d'un point y de Γ par les branches de $v_\Gamma \circ f^{-n}$ et de $v_\Gamma \circ f^{-n+1}$, pour $n \geq 1$

convenable (dépendant de y).

Cela termine la démonstration du théorème VI.1.

Références

[1] A.Douady, J.Hubbard On the dynamic of polynomial-like mappings, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. **18** (1985), 287-343.

[2] P.Collet Local C^∞ -conjugacy on the Julia set for some holomorphic perturbations of $z \mapsto z^2$, J. Math. Pures et Appl. **63** (1984), 391-406.

