Fields Institute Communications
Volume **00**, 0000

Démonstration géométrique du théorème de Lang-Néron et formules de Shioda-Tate

Bruno Kahn
Institut de Mathématiques de Jussieu
175–179 rue du Chevaleret
75013 Paris
France
kahn@math.jussieu.fr

Résumé. On donne une démonstration "sans hauteurs", dans l'esprit de [8], du théorème de Lang-Néron : si K/k est une extension de type fini régulière et A est une K-variété abélienne, le groupe $A(K)/\operatorname{Tr}_{K/k} A(k)$ est de type fini, où $\operatorname{Tr}_{K/k} A$ désigne la K/k-trace de A au sens de Chow. On en déduit des formules à la Shioda-Tate pour le rang de ce groupe.

Abstract. We give a proof without heights, in the spirit of [8], of the Lang-Néron theorem : if K/k is a regular extension of finite type and A is an abelian K-variety, the group $A(K)/\operatorname{Tr}_{K/k} A(k)$ is finitely generated, where $\operatorname{Tr}_{K/k} A$ denotes the K/k-trace of A in the sense of Chow. We derive Shioda-Tate–like formulas for the rank of this group.

To Spencer Bloch

Introduction

Soit K/k une extension de type fini régulière. Le foncteur d'extension des scalaires

$$\mathbf{Ab}(k) \to \mathbf{Ab}(K)$$

de la catégorie des variétés abéliennes sur k vers celle des variétés abéliennes sur K admet un adjoint à droite : la K/k-trace [8, app. A]. Nous noterons cet adjoint $\operatorname{Tr}_{K/k}$. Cette notion est due à Chow, mais semble avoir été anticipée par Néron [10], *cf.* remarque 1.1.

Nous aurons aussi besoin au §4 de l'adjoint à gauche du foncteur d'extension des scalaires : la K/k-image $\operatorname{Im}_{K/k}$ (*ibid.*).

Soit A une K-variété abélienne. On se propose de donner une démonstration "sans hauteurs" du théorème de Lang-Néron :

Théorème 1 ([9]) *Le groupe $A(K)/\operatorname{Tr}_{K/k} A(k)$ est de type fini.*

2000 *Mathematics Subject Classification.* 11G10, 14C22, 14K30.

(La démonstration de Lang et Néron est exposée dans le langage des schémas dans [8, App. B] et dans [2, §7].)

La démonstration du théorème 1 est donnée au §1 : elle est dans l'esprit de [8], où je n'étais pas parvenu à l'obtenir dans ce style. Un sous-produit en est une formule à la Shioda-Tate [12, 13] pour le rang du groupe $A(K)/\operatorname{Tr}_{K/k} A(k)$ (corollaire 2.1). En fait, de nombreuses formules de ce genre peuvent être obtenues : ces variations sont expliquées au §3.

Remerciements. Je remercie Marc Hindry pour m'avoir signalé ses articles avec Amilcar Pacheco et Rania Wazir [6, 7] et Keiji Oguiso pour une correspondance relative à son article [11] : tous m'ont permis de replacer la présente démonstration dans le contexte de la formule de Shioda-Tate. Je remercie également le rapporteur pour ses remarques qui m'ont aidé à clarifier la rédaction.

Notation. Pour toute variété X lisse sur un corps k, on note $\operatorname{NS}(X)$ le groupe des cycles de codimension 1 modulo l'équivalence algébrique [4, 10.3] : si X est projective et k est algébriquement clos, c'est son groupe de Néron-Severi. Nous utiliserons :

Proposition 0.1 ([8, th. 3]) *Si k est algébriquement clos, $\operatorname{NS}(X)$ est un groupe de type fini pour toute k-variété lisse X.*

(Rappelons brièvement l'argument : on se réduit au cas projectif, en utilisant la résolution des singularités en caractéristique zéro ou le théorème des altérations de de Jong en toute caractérstique.)

1 Démonstration du théorème 1

Comme dans [8, app. B], on se ramène au cas où k est algébriquement clos. Il suffit de démontrer le théorème 1 pour la variété abélienne duale $\hat{A}$. Comme $\hat{A}(K) = \operatorname{Pic}^0(A)$, il suffit de démontrer la génération finie de $\operatorname{Pic}(A)/\operatorname{Tr}_{K/k} \hat{A}(k)$.

Soit X un modèle lisse de K/k choisi de telle sorte que A se prolonge en un schéma abélien $p : \mathcal{A} \to X$.

Lemme 1.1 *La suite*

$$0 \to \operatorname{Pic}(X) \xrightarrow{p^*} \operatorname{Pic}(\mathcal{A}) \xrightarrow{j^*} \operatorname{Pic}(A) \to 0$$

est exacte, où j est l'inclusion de A dans $\mathcal{A}$.

Démonstration On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(A, \mathbb{G}_m) \arrow[r] & \bigoplus\limits_{x \in (\mathcal{A}-A)^{(1)}} \mathbf{Z} \arrow[r] & \operatorname{Pic}(\mathcal{A}) \arrow[r, "j^*"] & \operatorname{Pic}(A) \arrow[r] & 0 \\
K^* \arrow[u, "\wr"] \arrow[r] & \bigoplus\limits_{x \in X^{(1)}} \mathbf{Z} \arrow[u, "\wr"] \arrow[r] & \operatorname{Pic}(X) \arrow[u, "p^*"] \arrow[r] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

de suites exactes de localisation, d'où la suite exacte désirée. □

Lemme 1.2 *Soit $A^1(\mathcal{A}) \subset \operatorname{Pic}(\mathcal{A})$ le sous-groupe des cycles algébriquement équivalents à zéro. Alors $j^* A^1(\mathcal{A}) \subset \operatorname{Tr}_{K/k} \hat{A}(k)$, où $\hat{A} = \operatorname{Pic}^0_{A/K}$ est la variété abélienne duale de A.*

Démonstration Par définition, $A^1(\mathcal{A})$ est engendré via les correspondances algébriques par des jacobiennes de courbes, donc le lemme résulte de la définition de la K/k-trace.

(Voici quelques précisions demandées par le rapporteur : d'après [4, ex. 10.3.2]*, comme k est algébriquement clos, tout cycle algébriquement équivalent à zéro sur $\mathcal{A}$ est de la forme $\gamma_* Z$, où $\gamma \in \mathrm{Pic}(C \times \mathcal{A})$ est une correspondance d'une courbe projective lisse C vers $\mathcal{A}$ et $Z \in \mathrm{Pic}^0(C)$. Considérons le morphisme $j' : C_K \times_K A = C \times_k A \hookrightarrow C \times_k \mathcal{A}$: la correspondance $j'^* \gamma \in \mathrm{Pic}(C_K \times_K A)$ définit un homomorphisme de foncteurs représentables sur les K-schémas affines lisses de type fini :*

$$f : \mathrm{Pic}^0_{C_K/K} \to \mathrm{Pic}^0_{A/K} .$$

Par la propriété universelle de la K/k-trace, f provient d'un morphisme $\tilde{f} : \mathrm{Pic}^0_{C/k} \to \mathrm{Tr}_{K/k} \mathrm{Pic}^0_{A/K}$, donc $j^* \gamma_* Z \in \mathrm{Tr}_{K/k} \mathrm{Pic}^0_{A/K}(k)$.) □

Les lemmes 1.1 et 1.2 montrent que j^* induit une surjection

$$\mathrm{NS}(\mathcal{A}) \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow \mathrm{Pic}(A)/\,\mathrm{Tr}_{K/k} \hat{A}(k).$$

Le théorème 1 en résulte, grâce à la génération finie de $\mathrm{NS}(\mathcal{A})$ (proposition 0.1). □

Remarque 1.1 La démonstration ci-dessus déduit le théorème 1 de la génération finie du groupe de Néron-Severi, via la proposition 0.1. Lang et Néron, quant à eux, faisaient l'inverse dans [9]. Mais la génération finie du groupe de Néron-Severi peut s'obtenir en combinant un argument l-adique et la représentabilité de Pic^τ (*cf.* [8, §1, 4)]), donc l'argument n'est pas circulaire. (Naturellement cette génération finie a une démonstration transcendante facile en caractéristique zéro, *cf.* [8, §1].)

Il est d'ailleurs très intéressant de voir comment Néron procède dans [10], où il démontre que le groupe $\gamma(K)$ des points rationnels de la jacobienne d'une courbe C de genre g définie sur un corps K de type fini sur son sous-corps premier k_0 est de type fini. Le plus simple est de citer un extrait de l'introduction :

> *Nous allons étudier le cas général où, g étant quelconque, K est de caractéristique p quelconque et engendré sur son sous-corps premier par un nombre fini d'éléments. Nous montrerons que, dans ces conditions, le problème se rattache aux propriétés des diviseurs d'une certaine variété algébrique $\mathcal{C}$. Plus précisément, le groupe $\gamma(K)$ attaché à C est isomorphe à un sous-groupe du produit direct des deux groupes suivants : le groupe $\mathcal{G}/\mathcal{G}_a$ des classes de diviseurs algébriquement équivalents sur $\mathcal{C}$, et le groupe des points d'une variété abélienne Ω (voisine de la variété de Picard de $\mathcal{C}$) qui sont rationnels sur un certain corps de définition algébrique de Ω.*
>
> *D'après le théorème de Weil, le second de ces deux groupes est de type fini. Lorsque la caractéristique est nulle, on sait qu'il en est de même du premier, d'après un théorème de Severi ; dans ce cas, l'application de ce théorème entraîne donc l'extension annoncée.*
>
> *Mais il était naturel de chercher à retrouver ce résultat au moyen de la méthode "de descente infinie", classique en Arithmétique et utilisée en particulier par Mordell et Weil dans la démonstration des théorèmes cités plus haut. Le prolongement de cette méthode au cas actuel est possible et conduit en fait à une démonstration du théorème de Severi par voie algébrique et à une extension de ce théorème au cas où la caractéristique est quelconque.*

En pratique, Néron considère au chapitre II, no 12 un modèle projectif normal $\mathcal{M}$ de K/k_0 et un modèle projectif normal $\mathcal{C} \to \mathcal{M}$ de C/K. Il identifie $\gamma(K)$ à un sous-quotient de ce que nous notons aujourd'hui $CH^1(\mathcal{C})$, puis décrit ce sous-quotient comme extension d'un sous-quotient de $\mathrm{NS}(\mathcal{C})$ par les points rationnels d'une certaine variété abélienne Ω définie sur une extension finie de k_0. Cette variété Ω n'est autre que la K/k-trace de la jacobienne de C, où k est la fermeture algébrique de k_0 dans k...

2 Un calcul de rang

On peut tirer un peu plus de renseignements de la démonstration ci-dessus :

Proposition 2.1 *On a* $j^*A^1(\mathcal{A}) = \mathrm{Tr}_{K/k}\hat{A}(k)$ *dans le lemme 1.1, et une suite exacte scindée*

$$0 \to \mathrm{NS}(X) \xrightarrow{p^*} \mathrm{NS}(\mathcal{A}) \xrightarrow{j^*} \mathrm{Pic}(A)/\mathrm{Tr}_{K/k}\hat{A}(k) \to 0$$

où NS *désigne le groupe des cycles de codimension* 1 *modulo l'équivalence algébrique.*

Démonstration Le lemme du serpent appliqué au diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A^1(\mathcal{A}) & \longrightarrow & \mathrm{Pic}(\mathcal{A}) & \longrightarrow & \mathrm{NS}(\mathcal{A}) & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle p_A^*}\uparrow & & {\scriptstyle p^*}\uparrow & & {\scriptstyle p_N^*}\uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A^1(X) & \longrightarrow & \mathrm{Pic}(X) & \longrightarrow & \mathrm{NS}(X) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

fournit, via le lemme 1.1, une suite exacte

$$\mathrm{Ker}\, p_N^* \to \mathrm{Coker}\, p_A^* \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Pic}\, A \to \mathrm{Coker}\, p_N^* \to 0.$$

Par le lemme 1.2, $\varphi(\mathrm{Coker}\, p_A^*) \subset \mathrm{Tr}_{K/k}\hat{A}(k)$. D'après la proposition 0.1, $\mathrm{Coker}\, p_N^*$ est de type fini. Le groupe $\mathrm{Tr}_{K/k}\hat{A}(k)/\varphi(\mathrm{Coker}\, p_A^*)$, divisible et de type fini, est donc nul. On obtient donc un isomorphisme $\mathrm{Pic}(A)/\mathrm{Tr}_{K/k}\hat{A}(k) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Coker}\, p_N^*$. Enfin, $\mathrm{Ker}\, p_N^* = 0$ car p a une section. □

Corollaire 2.1 $\mathrm{rg}\left(\hat{A}(K)/\mathrm{Tr}_{K/k}\hat{A}(k)\right) = \rho(\mathcal{A}) - \rho(X) - \rho(\hat{A})$*, où* $\rho(Y)$ *désigne le rang de* $\mathrm{NS}(Y)$ *pour toute variété lisse* Y*. (Noter que* $\rho(\hat{A})$ *est calculé "sur* K*".)* □

Remarque 2.1 La proposition 2.1 est parallèle à la proposition 2.2 de Hindry, Pacheco et Wazir [7], qui donne (dans le cas d'une fibration de variétés propres et lisses) une suite exacte de variétés de Picard. Mais les deux méthodes de démonstration sont différentes : celle de Hindry-Pacheco-Wazir repose sur une variante relative [7, lemme 2.1] du "théorème de l'indice de Hodge en codimension 1" (Segre-Grothendieck, [5, ch. V, th. 1.9, p. 364]), alors que la présente méthode, reposant sur le lemme 1.2, est inspirée d'une idée de Bloch [3, Lect. 1, lemme 1.3].

3 Variantes du corollaire 2.1

Dans ma grande inculture, je n'ai réalisé qu'après avoir obtenu le corollaire 2.1 qu'il était une variante des "formules de Shioda-Tate" [14, 12, 13, 6, 7, 11]. La méthode du §2 est assez flexible pour s'adapter à des situations et besoins divers, pour obtenir des variantes de ce corollaire. Voici quelques exemples :

3.1 On peut toujours remplacer X par un ouvert, de façon à supposer que $\rho(X) = 0$. Ou bien on peut se ramener au cas où X est un ouvert de $\mathbf{P}^n$, quitte à écrire K comme extension finie séparable d'un corps K_0 transcendant pur sur k et à remplacer A par sa restriction des scalaires à la Weil $R_{K/K_0}A$. (Dans ce cas, $\rho(X) = 1$ ou 0.)

3.2 a) Sous la résolution des singularités, on peut prendre une base X projective lisse, ainsi que l'espace total $\mathcal{A}$. Le calcul est alors différent : soit $U \subset X$ l'ouvert maximal de X au-dessus duquel p est lisse. Dans la démonstration du lemme 1.1, la seconde flèche verticale à partir de la gauche reste un isomorphisme au-dessus des points de U, mais les points de codimension 1 $P_1, \dots, P_n$ de $X - U$ peuvent avoir des fibres réductibles. Soit m_i le nombre de composantes de codimension 1 dans $p^{-1}(\overline{\{P_i\}})$: on obtient alors un complexe

$$0 \to \mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{p^*} \mathrm{Pic}(\mathcal{A}) \xrightarrow{j^*} \mathrm{Pic}(A) \to 0$$

exact sauf au milieu, où l'homologie est isomorphe à $\bigoplus_i \mathbf{Z}^{m_i}/\mathbf{Z}$.[1] Dans la démonstration du lemme 2.1, on ne peut plus invoquer le fait que p a une section. Toutefois, $A^1(X)$ et $A^1(\mathcal{A})$ ne sont autres que $\mathrm{Pic}^0(X)$ et $\mathrm{Pic}^0(\mathcal{A})$; de plus, la démonstration du lemme 1.2 montre que le morphisme φ intervenant dans la démonstration de la proposition 2.1 est induit par un morphisme de variétés abéliennes

$$\mathrm{Pic}^0_{\mathcal{A}/k} / \mathrm{Pic}^0_{X/k} \to \mathrm{Tr}_{K/k} \hat{A}.$$

Comme $\mathrm{Ker}\, p_N^*$ est de type fini, on en déduit que $\mathrm{Ker}\, \varphi$ *est fini*, d'où un complexe

$$0 \to \mathrm{NS}(X) \xrightarrow{p^*} \mathrm{NS}(\mathcal{A}) \xrightarrow{j^*} \mathrm{Pic}(A)/ \mathrm{Tr}_{K/k} \hat{A}(k) \to 0$$

qui, modulo des groupes finis, est acyclique partout sauf en $\mathrm{NS}(X)$, où l'homologie est $\bigoplus_i \mathbf{Z}^{m_i}/\mathbf{Z}$. Ceci généralise la preuve de la formule de Shioda-Tate donnée par M. Hindry et A. Pacheco dans [6, §3], avec un argument un peu différent. On en déduit la formule

$$\mathrm{rg}\left(\hat{A}(K)/ \mathrm{Tr}_{K/k} \hat{A}(k)\right) = \rho(\mathcal{A}) - \rho(X) - \rho(\hat{A}) - \sum_i (m_i - 1)$$

généralisant celle du corollaire 2.1.
b) Dans le cas ci-dessus, on pourrait demander que X et $\mathcal{A}$ soient seulement normaux, dans l'esprit de Néron (*cf.* remarque 1.1). Si X est tout de même lisse, on peut raisonner partiellement comme ci-dessus en remplaçant les groupes de Picard par des groupes de cycles de codimension 1 modulo l'équivalence rationnelle. Sans supposer X lisse, K. Oguiso a fait le même calcul dans un cas particulier [11, th. 1.1]. (Voir *loc. cit.*, th. 3.1 pour une jolie application.)
c) En généralisant encore, on peut considérer un morphisme propre surjectif $\mathcal{A} \to X$ de variétés lisses, à fibre générique A lisse et géométriquement irréductible (on ne suppose plus que A est une variété abélienne). Les résultats sont les mêmes qu'en a) : on peut le voir en se ramenant au cas où X et $\mathcal{A}$ sont propres, grâce au théorème de de Jong. (Voir aussi [7].)

3.3 a) Si K est de degré de transcendance 1 sur k, on peut choisir pour X le modèle projectif lisse de K et prendre pour $\mathcal{A}$ le *modèle de Néron* de A. Comme p est alors lisse et a une section, les calculs du §1 et en particulier le corollaire 2.1 sont les mêmes. (Ici, $\rho(X) = 1$.)
b) Sous la même hypothèse, si A est la jacobienne d'une courbe C (cas auquel on peut toujours essentiellement se ramener en pratique), on peut remplacer $\mathcal{A}$ par une surface projective lisse minimale, fibrée sur X et de fibre générique C. C'est la situation de Hindry et Pacheco [6]. Les résultats sont les mêmes qu'en 3.2 a), *mutatis mutandis*.

[1] On remarquera que les homomorphismes $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}^{m_i}$ sous-jacents à la somme directe peuvent faire intervenir des multiplicités : les groupes notés $\mathbf{Z}^{m_i}/\mathbf{Z}$ sont donc de rang $m_i - 1$, mais peuvent contenir un sous-groupe cyclique de torsion.

4 Groupe de Lang-Néron et 1-motifs

Les calculs du §2 ont une interprétation éclairante en termes de 1-motifs, dans le cadre développé dans [1]. Supposons seulement k parfait ; soit $\mathcal{M}_1$ la catégorie des 1-motifs de Deligne sur k et soit $D^b(\mathcal{M}_1)$ sa catégorie dérivée au sens de [1, déf. 1.5.2]. Soient $\mathrm{LAlb}(X)$ et $\mathrm{LAlb}(\mathcal{A})$ les objets de $D^b(\mathcal{M}_1)$ associés à X et $\mathcal{A}$ par [1, déf. 8.1.1], et soit $\mathrm{LAlb}(\mathcal{A}/X)$ la fibre du morphisme $p_* : \mathrm{LAlb}(\mathcal{A}) \to \mathrm{LAlb}(X)$. D'après [1, cor. 10.2.3], on a, pour toute k-variété lisse Y :

$$\mathrm{L}_i\mathrm{Alb}(Y) = \begin{cases} [\mathbf{Z}[\pi_0(Y)] \to 0] & \text{si } i = 0 \\ [0 \to \mathcal{A}^0_{Y/k}] & \text{si } i = 1 \\ [0 \to \mathrm{NS}^*_{Y/k}] & \text{si } i = 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $\pi_0(Y), \mathcal{A}^0_{Y/k}$ et $\mathrm{NS}^*_{Y/k}$ désignent respectivement l'ensemble des composantes connexes géométriques, la variété d'Albanese et le dual de Cartier du groupe de Néron-Severi (au sens ci-dessus) de Y ; les $\mathrm{L}_i\mathrm{Alb}(Y)$ sont calculés par rapport à une t-structure convenable sur $D^b(\mathcal{M}_1)$ ($\mathrm{L}_0\mathrm{Alb}(Y)$ et $\mathrm{L}_1\mathrm{Alb}(Y)$ sont des 1-motifs de Deligne, mais en général $\mathrm{L}_2\mathrm{Alb}(Y)$ est un 1-motif "avec cotorsion"). Le lemme 1.1, la proposition 2.1, [1, th. 10.3.2 b)] et un calcul facile de suite exacte donnent de plus

$$\mathrm{L}_i\mathrm{Alb}(\mathcal{A}/X) = \begin{cases} [0 \to \mathrm{Im}_{K/k} A] & \text{si } i = 1 \\ [0 \to M^*] & \text{si } i = 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $\mathrm{Im}_{K/k} A$ est la K/k-image de A et $M(\bar{k}) := \mathrm{Pic}(A_{\bar{k}})/\operatorname{Tr}_{K/k} \hat{A}(\bar{k})$ est une extension

$$0 \to \hat{A}(\bar{k}K)/\operatorname{Tr}_{K/k} \hat{A}(\bar{k}) \to M(\bar{k}) \to \mathrm{NS}(A_{\bar{k}K}) \to 0$$

$\bar{k}$ étant une clôture algébrique de k. En particulier, $\mathrm{LAlb}(\mathcal{A}/X)$ ne dépend pas du choix de X.

Références

[1] L. Barbieri-Viale, B. Kahn *On the derived category of 1-motives*, prépublication, 2006.

[2] B. Conrad *Chow's K/k-image and K/k-trace, and the Lang-Néron theorem*, Enseign. Math. **52** (2006), 37–108.

[3] S. Bloch Lectures on algebraic cycles, Duke Univ. Math. Series IV, 1980.

[4] W. Fulton Intersection theory, Springer, 1984.

[5] R. Hartshorne Algebraic geometry, Springer, 1977.

[6] M. Hindry, A. Pacheco *Sur le rang des jacobiennes sur un corps de fonctions*, Bull. Soc. Math. France **133** (2005), 275–295.

[7] M. Hindry, A. Pacheco, R. Wazir *Fibrations et conjecture de Tate*, J. Number Theory **112** (2005), 345–368.

[8] B. Kahn *Sur le groupe des classes d'un schéma arithmétique* (avec un appendice de Marc Hindry), Bull. Soc. Math. France **134** (2006), 395–415.

[9] S. Lang, A. Néron. *Rational points of abelian varieties over function fields*, Amer. J. Math. **81** (1959), 95–118.

[10] A. Néron *Problèmes arithmétiques et géométriques rattachés à la notion de rang d'une courbe algébrique dans un corps*, Bull. SMF **80** (1952), 101–166.

[11] K. Oguiso *Shioda-Tate formula for an abelian fibred variety and applications*, prépublication, 2007, math.AG/0703245.

[12] T. Shioda *On elliptic modular surfaces*, J. Math. Soc. Japan **24** (1972), 20–59.

[13] T. Shioda *Mordell-Weil lattices for higher genus fibration over a curve*, *in* New Trends in Algebraic Geometry, London Math. Soc. Lect. Notes Series **264** (1999), 359–373.

[14] J. Tate *On the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer and a geometric analog*, Sém. Bourbaki **9** Exp. No. 306, 415–440, Soc. Math. France, Paris, 1995.