PHILOSOPHIE ET PRATIQUE DES MOTIFS

par

Bruno Kahn

Version préliminaire et évolutive, 17 août 2022.

Table des matières

Introduction

Notation. — Si k est un corps, on note $\mathbf{Sm}(k)$ la catégorie des k-variétés lisses (k-schémas lisses séparés de type fini), et $\mathbf{V}(k)$ sa sous-catégorie pleine formée des variétés projectives lisses.

1. La philosophie des motifs

La philosophie des motifs est le principe que certaines conjectures “motiviques” ont des conséquences qu’on peut essayer de démontrer directement, souvent avec succès. Mais aussi, que si une chose est vraie quelque part (par exemple sur **C**), alors par analogie elle doit être vraie autre part (par exemple sur les corps finis). Premier exemple de cette philosophie : les conjectures de Weil.

1.1. Les conjectures de Weil. — En 1949, après avoir démontré l’“hypothèse de Riemann” pour les courbes sur les corps finis, Weil publie une série de conjectures sur la fonction zêta d’une variété projective lisse quelconque sur un tel corps :

> *This, and other examples which we cannot discuss here, seem to lend some support to the following conjectural statements, which are known to be true for curves, but which I have not so far been able to prove for varieties of higher dimension.*
>
> *Let V be a [projective] variety without singular points, of dimension n, defined over a finite field k with q elements. Let N_ν be the number of rational points on V over the extension k_ν of k of degree ν. Then we have*
>
> $$\sum_1^\infty N_\nu U^{\nu-1} = \frac{d}{dU}\log Z(U)$$
>
> *where $Z(U)$ is a rational function in U, satisfying a functional equation*
>
> $$Z(\frac{1}{q^nU}) = \pm q^{n\chi/2}U^\chi Z(U)$$
>
> *with χ equal to the Euler-Poincaré characteristic of V (intersection number of the diagonal with itself on the product $V\times V$).*
>
> *Furthermore, we have :*
>
> $$Z(U) = \frac{P_1(U)P_3(U)\dots P_{2n-1}(U)}{P_0(U)P_2(U)\dots P_{2n}(U)}$$
>
> *with $P_0(U) = 1-U$, $P_{2n}(U) = 1-q^nU$, and, for $1\le h\le 2n-1$:*
>
> $$P_h(U) = \prod_{i=1}^{B_h}(1-\alpha_{hi}U)$$

> *where the α_{hi} are algebraic integers of absolute value $q^{h/2}$.*
>
> *Finally, let us call the degrees B_h of the polynomials $P_h(U)$ the* Betti numbers *of the variety V ; the Euler-Poincaré characteristic χ is then expressed by the usual formula $\chi = \sum_h (-1)^h B_h$. The evidence at hand seems to suggest that, if $\overline{V}$ is a variety without singular points, defined over a field K of algebraic numbers, the Betti numbers of the varieties $V_\mathfrak{p}$, derived from $\overline{V}$ by reduction modulo a prime ideal $\mathfrak{p}$ in K, are equal to the Betti numbers of $\overline{V}$ (considered as a variety over complex numbers) in the sense of combinatorial topology, for all except at most a finite number of prime ideals $\mathfrak{p}$.*

Beaucoup de choses sont frappantes dans ces conjectures qui, comme le dit Serre, ont enthousiasmé les mathématiciens de l'époque. Je me concentrerai sur la dernière, qui fait un lien entre les points complexes d'une K-variété V et ceux de sa réduction modulo $\mathfrak{p}$ $V_\mathfrak{p}$. Dans un sens, elle dit que la topologie de $V(\mathbf{C})$ influence le nombre de points rationnels de $V_\mathfrak{p}$ sur les extensions finies de $\mathbf{F}_q$ (puisque c'est ce que compte la fonction zêta). Mais on peut aussi la lire dans l'autre sens : la connaissance de ces nombres de points, ou même leur asymptotique, détermine les nombres de Betti de $V(\mathbf{C})$ – qui, de plus, ne doivent pas dépendre du plongement complexe $K \hookrightarrow \mathbf{C}$ choisi !

Étendons-nous sur ce dernier point, qui n'est pas du tout évident : Serre le démontre en 1955 [**39**, no 18] (c'est même vrai pour les bidegrés de Hodge). Mais neuf ans plus tard, il donne des exemples de V et de plongements $\sigma, \tau : K \hookrightarrow \mathbf{C}$ tels que σV et τV ne soient pas homéomorphes : en fait, leurs groupes fondamentaux ne sont pas isomorphes [**41**]. Ces exemples ont été plus récemment raffinés par F. Charles [**11**], qui remplace le groupe fondamental par la cohomologie de Betti à coefficients réels munie de sa structure multiplicative. Pour des exemples simplement connexes, voir Schreieder [**38**].

Ceci est une illustration du premier principe de la philosophie des motifs. Voici une illustration du second : en 1960, Serre s'est inspiré des conjectures de Weil pour en formuler un analogue "kählérien" (pour les variétés complexes) – et le démontrer [**40**]. En retour, ceci a inspiré le programme des "conjectures standard" de Grothendieck pour démontrer lesdites conjectures [**22**]. Elles ont finalement été démontrées autrement, et les conjectures standard restent ouvertes, mais elles restent une inspiration puissante qui a conduit à des développements inconditionnels (voir §§3.4 et 3.5).

Exercice 1. — *Compter le nombre de fois où le nom de Serre est cité ci-dessus.*

1.2. Intersection d'hypesurfaces. — Dans le même esprit, soit U un ouvert de $\mathbf{P}^n_k$, où k est un corps, et soit S son complément réduit. Si S est une intersection complète lisse de multidegré $(d_1, \dots, d_r)$ avec $d_1 = \sup(d_i)$ et si $k = \mathbf{C}$, Deligne calcule dans [13] le type de Hodge de S : par définition, c'est le plus petit entier κ tel que

$$F^\kappa H^i_c(U) = H^i_c(U)$$

pour tout $i \geq 0$, où $H^*_c(U)$ est la cohomologie de U à supports compacts et $F^* H^*_c(U)$ est la filtration induite par la théorie de Hodge mixte. Sa valeur est :

$$\kappa = \left[\frac{n - \sum_2^r d_i}{d_1}\right]. \tag{1}$$

Or un théorème de Ax-Katz [26] dit que, si $k = \mathbf{F}_q$, $|U(\mathbf{F}_q)|$ est divisible par q^κ sous la seule hypothèse que S (peut-être singulière) soit intersection d'hypersurfaces de degrés $(d_1, \dots, d_r)$. Ceci amène Deligne et Dimca [12] à conjecturer que, revenant à $k = \mathbf{C}$, cette condition est suffisante pour (1), ce qu'ils démontrent lorsque $r = 1$. Pour les citer :

> *L'analogie est basée sur la conjecture de Grothendieck (étendue aux motifs mixtes) comme quoi si la réalisation de de Rham d'un motif M vérifie $M_{DR} = F^\mu M_{DR}$, alors M est produit tensoriel du motif de Tate $\mathbf{Q}(-\mu)$ par un motif effectif, et qu'en conséquence, pour une réduction modulo p de M sur $\mathbf{F}_q$ les valeurs propres de Frobenius sont divisibles par q^μ.*

Esnault [17], puis Esnault-Nori-Srinivas [18], démontrent cette conjecture, successivement pour les intersections complètes et en général. Ces preuves n'utilisent pas la théorie des motifs évoquée ci-dessus, qui est aussi conjecturale maintenant qu'alors !

Ces allers-retours entre $\mathbf{F}_q$ et $\mathbf{C}$ sont typiques d'un aspect de la philosophie des motifs. [1]

1.3. K-théorie et cycles algébriques. — Voici deux exemples d'une autre nature : les conjectures de Beilinson-Soulé et de Bloch-Beilinson–Murre.

La première concerne la longueur de la gamma-filtration sur les groupes de K-théorie algébrique des corps, voire des variétés X lisses sur un corps. Elle prédit que

$$F_\gamma^n K_i(X) \otimes \mathbf{Q} = K_i(X) \otimes \mathbf{Q} \text{ si } i > 0 \text{ et } n \leq i/2 + 1.$$

La seconde concerne $K_0(X) \otimes \mathbf{Q} \simeq \bigoplus_{j \geq 0} CH^j(X) \otimes \mathbf{Q}$, où CH^* désigne les groupes de Chow. Elle prédit l'existence d'une filtration canonique sur les $CH^j(X) \otimes \mathbf{Q}$, ayant des propriétés remarquables.

Comme l'a vu Beilinson [4], ces deux conjectures résulteraient de l'existence d'une t-structure "motivique" (ce qui veut dire : ayant de bonnes propriétés) sur la catégorie triangulée des motifs, disons de Voevodsky. Cette catégorie a été construite, mais l'existence de la t-structure, et les deux conjectures ci-dessus, restent ouvertes en général. (Elles ont été partiellement démontrées dans des cas particuliers.)

Nous reviendrons là-dessus au chapitre 5. Mentionnons ici une réciproque due à Levine [28] : si la conjecture de Beilinson-Soulé est vraie pour $X = \operatorname{Spec} k$, alors la t-structure motivique existe sur la sous-catégorie triangulée engendrée par les motifs de Tate. Un cas important est celui où k est un corps de nombres : la preuve de la conjecture y est essentiellement due à Borel. Ceci a des conséquences sur les valeurs zêta multiples (Furusho [19], Brown [9]...).

2. La philosophie des motifs en action

Dans le chapitre précédent, j'ai donné des exemples du pouvoir prédictif de la philosophie des motifs. Dans celui-ci, je vais donner des exemples de théorèmes dont la démonstration n'a aucunement recours à une théorie de motifs, mais est tout de même dans son principe de nature "motivique".

1. Dans une direction un peu différente, Serre donne dans [43] plusieurs exemples où des énoncés sur un corps algébriquement clos quelconque se réduisent à des énoncés sur des corps finis : il s'agit principalement d'actions de groupes sur des variétés.

2.1. K-théorie des corps finis, d'après Quillen. —

Théorème 1 **([35]).** — *Le groupe* $K_i(\mathbf{F}_q)$ *vaut :*
— 0 *si* i *est pair* > 0 *;*
— $\mathbf{Z}/(q^{\frac{i+1}{2}} - 1)$ *si* i *est impair* (> 0)*.*

(Rappelons que $K_0(\mathbf{F}_q) = \mathbf{Z}$, comme pour tout corps.)

Principe de la démonstration. — Par définition, $K_i(\mathbf{F}_q)$ est le i-ème groupe d'homotopie d'un certain espace $K(\mathbf{F}_q)$. Quillen construit un morphisme

$$K(\mathbf{F}_q) \to F\Psi^q$$

où $F\Psi^q$ est la fibre homotopique de l'application $\Psi^q - 1 : \mathbf{Z} \times BU \to \mathbf{Z} \times BU$ (Ψ^q : la q-ième opération d'Adams), et montre que c'est une équivalence d'homotopie. La conclusion résulte alors de la périodicité de Bott :

$$\pi_i(\mathbf{Z} \times BU) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \text{ est impair} \\ \mathbf{Z} & \text{si } i \text{ est pair} \end{cases}$$

et de l'action de Ψ^q sur $\pi_{2i}(\mathbf{Z} \times BU)$ (la multiplication par q^i).

Pour construire le morphisme, la méthode consiste à relever les $\mathbf{F}_q$-représentations linéaires d'un groupe fini G en des représentations K-linéaires, où K est le corps des fractions de l'anneau de Witt de $\mathbf{F}_q$, puis à plonger K dans $\mathbf{C}$ pour obtenir des représentations $\mathbf{C}$-linéaires. On ne peut pas faire ça en général, mais on peut le faire virtuellement, c'est-à-dire au niveau des anneaux de représentations (relèvement de Brauer). On applique cela au cas universel ($G = GL_n(\mathbf{F}_q)$, représentation identique de degré n), et on fait tendre n vers l'infini.

Pour démontrer l'équivalence d'homotopie, il suffit par le théorème de Whitehead de démontrer une équivalence d'homologie : en effet, $K(\mathbf{F}_q)$ et $\mathbf{Z} \times BU$ sont de gentils espaces (leur π_1 est commutatif et opère trivialement sur les π_i supérieurs). Cela se ramène essentiellement à calculer la cohomologie de $GL_n(\mathbf{F}_q)$ à coefficients entiers, ce qui se ramène à la calculer modulo l pour tout nombre premier l. Pour l différent de la caractéristique, le calcul est plus ou moins le même que pour $BGL_n(\mathbf{C})$ (réduction au "tore maximal") ; pour l égal à la caractéristique p, Quillen démontre que $\varinjlim_n H^i(GL_n(\mathbf{F}_q), \mathbf{Z}/p) = 0$ pour tout $i > 0$. $\square$

2.2. Cohomologie l-adique des anneaux d'entiers de corps de nombres, d'après Soulé. —

Théorème 2 **([44]).** — *Soit K un corps de nombres, et soit l un nombre premier. Choisissons un ensemble fini S de places finies de K contenant les places au-dessus de l. Alors $H^2_{\text{ét}}(O_S, \mathbf{Z}_l(i))$ est fini pour $i \geq 2$.*

(Ce groupe est aussi le groupe de cohomologie galoisienne $H^2(G_S, \mathbf{Z}_l(i))$, où G_S est le groupe de Galois de l'extension maximale de K non ramifiée en dehors de S.)

Principe de la démonstration. — Le point est l'existence d'homomorphismes surjectifs

$$K_{2i-2}(O_S) \otimes \mathbf{Q}_l \twoheadrightarrow H^2_{\text{ét}}(O_S, \mathbf{Q}_l(i)), \quad i \geq 2. \tag{2}$$

Leur construction (suggérée par Quillen) est formelle : elle consiste à "délacer" les classes de Chern l-adiques des fibrés vectoriels. La surjectivité est une autre affaire, et c'est la contribution principale de Soulé. Elle consiste en un dévissage où l'on se ramène essentiellement au cas $i = 2$, qui se réduit à la surjectivité du symbole galoisien $K_2(K)/l \to H^2(K, \mathbf{Z}/l(2))$, résultat dû à Tate [45] ("théorème de Merkurjev-Suslin pour les corps globaux"). [2]

La démonstration est alors terminée, car on sait que $K_{2i-2}(O_S)$ est de torsion pour $i \geq 2$. Mais comment le sait-on ? D'abord, on se ramène de O_S à O_K par la suite exacte de localisation de Quillen et le théorème 1. Le résultat est alors un théorème de Borel [8], démontré antérieurement par Garland pour $i = 2$ [21]. Ce théorème revient à évaluer la dimension de $H^j(SL_n(O_K), \mathbf{R})$ pour n grand devant j ; la stratégie de Borel consiste à voir $SL_n(O_K)$ comme un groupe arithmétique et à calculer la cohomologie d'espaces symétriques réels correspondants. □

On ne connaît pas d'autre démonstration du théorème 2 ! On conjecture qu'il est aussi vrai pour $i \leq 0$, mais on ne sait pas le démontrer. (Le cas $i = 0$ est la conjecture de Leopoldt.) Voir Kolster [27].

2. Cette surjectivité n'est pas très difficile modulo la théorie du corps de classes (structure du groupe de Brauer de K) ; c'est l'injectivité qui l'est, et qui n'est pas utile ici.

3. Les motifs, les vrais. Mais lesquels ?

Il s'agit de décrire les catégories de motifs purs à la Grothendieck (cycles algébriques), ses variantes dues à Deligne (systèmes de réalisations) et André (cycles motivés), et leurs applications.

3.1. Motifs purs de Grothendieck. — Pour plus de détails, voir [33], [2, ch. 3 et 4] ou [24, ch. 3 et 6].

Soit $\mathbf{V}(k)$ la catégorie des variétés projectives lisses sur un corps k, et soit $\sim$ une relation d'équivalence adéquate (voir plus bas) sur les cycles algébriques à coefficients dans un anneau commutatif F : on note $A^i_\sim(X,F)$ le groupe des cycles de codimension i sur $X\in\mathbf{V}(k)$ à coefficients dans F, modulo $\sim$. Grothendieck construit une chaîne de catégories et foncteurs

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbf{V}(k)^{\mathrm{op}} & \longrightarrow & \mathrm{Corr}_\sim(k,F) & \xrightarrow{\natural} & \mathcal{M}^{\mathrm{eff}}_\sim(k,F) & \xrightarrow{\mathbb{L}^{-1}} & \mathcal{M}_\sim(k,F)\\
X & \mapsto & [X] & \mapsto & h(X) & \mapsto & h(X)\\
f & \mapsto & [{}^t\Gamma_f] & & & &
\end{array}$$

les deux derniers étant pleinement fidèles. Expliquons :

— $\mathrm{Corr}_\sim(k,F)$ a les mêmes objets que $\mathbf{V}(k)$, mais les morphismes sont donnés par les *correspondances algébriques* modulo $\sim$:

$$\mathrm{Corr}_\sim(X,Y;F) = A^{\dim X}_\sim(X\times Y,F).$$

Le foncteur $\mathbf{V}(k)^{\mathrm{op}}\to\mathrm{Corr}_\sim(k,F)$ est l'identité sur les objets, et associe à un k-morphisme le transposé de son graphe. La composition des correspondances est donnée par la formule

$$\beta\circ\alpha = (p_{13})_*(p_{12}^*\alpha\cdot p_{23}^*\beta) \tag{3}$$

pour $\alpha\in\mathrm{Corr}_\sim(X_1,X_2)$ et $\beta\in\mathrm{Corr}_\sim(X_2,X_3)$, où p_{ij} désigne la projection de $X_1\times X_2\times X_3$ sur le facteur $X_i\times X_j$. Voir [20, ch. 16] pour plus de détails.

— La catégorie $\mathrm{Corr}_\sim(k,F)$ est additive (et même F-linéaire) ; l'opération $\natural$ est la pseudo-abélianisation (ajout formel de noyaux pour les endomorphismes idempotents, appelés aussi *projecteurs*). Les objets de $\mathcal{M}^{\mathrm{eff}}_\sim(k,F)$ sont les *motifs effectifs*.

— La catégorie $\mathrm{Corr}_\sim(k,F)$ est aussi monoïdale symétrique, avec $[X]\otimes[Y] := [X\times_k Y]$; elle a l'objet unité $\mathbf{1}=[\mathrm{Spec}\,k]$. L'opération ci-dessus préserve cette structure, et découpe l'objet $[\mathbf{P}^1]$ en

$$h(\mathbf{P}^1) = \mathbf{1}\oplus\mathbb{L}, \tag{4}$$

où $\mathbb{L}$ est le *motif de Lefschetz* : c'est un objet *quasi-inversible*, ce qui veut dire que le foncteur $-\otimes\mathbb{L}$ est pleinement fidèle.

— La catégorie $\mathcal{M}_\sim(k,F)$ est obtenue à partir de $\mathcal{M}^{\text{eff}}_\sim(k,F)$ en inversant $\mathbb{L}$ (pour le produit tensoriel). Elle reste monoïdale symétrique, et est de plus *rigide* : tout objet M a un dual M^* et est naturellement isomorphe à son bidual. C'est la *catégorie des motifs purs* (à coefficients dans F, pour l'équivalence $\sim$). On a la formule

$$h(X)^* \simeq h(X)\otimes\mathbb{L}^{-d} \tag{5}$$

pour $X\in\mathbf{V}(k)$ de dimension d.

Un équivalence adéquate est une relation d'équivalence sur les cycles algébriques qui respecte l'image directe, l'image réciproque par les morphismes plats, et vérifie un *lemme de déplacement* permettant de définir l'image réciproque par les morphismes quelconques, ainsi que le produit d'intersection. Les plus importantes sont

$$\sim_{\text{rat}}\geq\sim_{\text{alg}}\geq\sim_{\text{tnil}}\geq\sim_H\geq\sim_{\text{num}}$$

respectivement, l'équivalence rationnelle, l'équivalence algébrique, l'équivalence de smash-nilpotence de Voevodsky, l'équivalence homologique relative à une cohomologie de Weil H [24, 3.4, 3.5] (lorsque $F=\mathbf{Q}$), et l'équivalence numérique. Le signe $\geq$ indique la relation d'implication entre ces équivalences. L'équivalence rationnelle est la plus fine des équivalences adéquates, et l'équivalence numérique est la moins fine si F est un corps. Pour plus de détails, on pourra consulter Fulton [20, ch. 19] et André [2, ch. 3].

3.2. Traces. — Une propriété importante des catégories rigdes est la notion de trace, et sa fonctorialité. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie monoïdale symétrique unitaire, d'objet unité $\mathbf{1}$, et soit $A\in\mathcal{A}$ un objet admettant un dual (fort). À tout endomorphisme f de M, on associe un endomorphisme $\operatorname{tr}(f)$ de $\mathbf{1}$:

$$\mathbf{1}\xrightarrow{\eta}A\otimes A^*\xrightarrow{f\otimes 1}A\otimes A^*\xrightarrow{\sigma}A^*\otimes A\xrightarrow{\varepsilon}\mathbf{1} \tag{6}$$

où η (resp. ε) est l'unité (resp. la coünité) de la dualité et σ est la contrainte de commutativité. On note $\chi(A)=\operatorname{tr}(1_A)$: c'est la *caractéristique d'Euler-Poincaré* de A.

La trace a les propriétés suivantes :

— $\operatorname{tr}(f\otimes g)=\operatorname{tr}(f)\operatorname{tr}(g)$;

— $\mathrm{tr}(fg) = \mathrm{tr}(gf)$ si le but (resp. la source) de g est la source (resp. le but) de f.
— $\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}({}^t f)$, où ${}^t f : A^* \to A^*$ est l'endomorphisme transposé de $f : A \to A$.
— Si $\mathcal{A}$ est F-linéaire, la trace l'est aussi.

De plus, si $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est un foncteur monoïdal symétrique unitaire et si $A \in \mathcal{A}$ est fortement dualisable, alors $T(A)$ est fortement dualisable et on a l'identité évidente :

$$\mathrm{tr} T(f) = T(\mathrm{tr}(f)). \tag{7}$$

C'est la formule des traces !

Exemples 1. —
— $\mathcal{A} = \mathbf{Vec}_F$ (F-modules projectifs de type fini) : on trouve la trace habituelle d'un endomorphisme.
— $\mathcal{A} = \mathbf{Vec}_F^*$($F$-modules projectifs de type fini $\mathbf{Z}$-gradués, contrainte de Koszul) : somme alternée des traces sur les termes gradués.
— $\mathcal{A} = \mathrm{Corr}_\sim(k, F)$, $A = [X]$:

$$\mathrm{tr}(\gamma) = \langle \gamma, \Delta_X \rangle$$

où le second membre est le nombre d'intersection de γ et de la diagonale Δ_X. La preuve est un exercice intéressant, combinant (3), (4), (5) et (6).

La formule (7) offre énormément de flexibilité : d'abord, on peut changer d'équivalence adéquate comme on veut pour calculer la trace d'un endomorphisme de motif. Ensuite, en l'appliquant au foncteur monoïdal symétrique $H^* : \mathcal{M}_H(k, F) \to \mathbf{Vec}_K^*$, où H^* est une cohomologie de Weil à coefficients dans $K \supset F$, on obtient une version concrète de la formule des traces, la *formule des traces de Lefschetz* :

$$\langle \gamma, \Delta_X \rangle = \sum_i (-1)^i \mathrm{tr}(\gamma \mid H^i(X)).$$

3.3. Groupe de Galois motivique et conjectures standard. — Soit $\mathcal{M}$ une catégorie F-linéaire, monoïdale symétrique rigide, où F est un corps de caractéristique 0 (on suppose $\mathrm{End}_{\mathcal{M}}(\mathbf{1}) = F$). Supposons $\mathcal{M}$ abélienne, et soit donné un foncteur $\omega : \mathcal{M} \to \mathbf{Vec}_F$ qui soit monoïdal symétrique, F-linéaire, fidèle et exact. On dit que ω est un *foncteur fibre* (neutre). On démontre [**37, 15**] que le groupe

$$\mathrm{Aut}^\otimes(\omega)$$

des automorphismes de ω (vu comme $\otimes$-foncteur) est le groupe des points rationnels d'un F-groupe proalgébrique $G(\omega)$, appelé le groupe tannakien de ω : il est pro-réductif si (et seulement si) $\mathcal{M}$ est semi-simple. De plus, ω s'enrichit en un foncteur

$$\mathcal{M} \to \mathbf{Rep}_F(G(\omega))$$

qui est une *équivalence de $\otimes$-catégories.*

On aimerait appliquer cette théorie au cas des motifs purs du numéro précédent, et c'est la motivation principale de Grothendieck : le groupe tannakien en question s'appellerait *groupe de Galois motivique*. Le cas qui saute aux yeux est celui où ω est donné par une cohomologie de Weil H à coefficients F, par exemple une cohomologie de Weil classique :

— Pour un nombre premier $l \neq \operatorname{car} k$: cohomologie l-adique ($F = \mathbf{Q}_l$).

— En caractéristique 0 : cohomologie de Betti ($F = \mathbf{Q}$), cohomologie de de Rham algébrique ($F = k$).

— En caractéristique $p > 0$, k parfait : cohomologie cristalline ($F =$ corps des fractions de $W(k)$).

On veut évidemment prendre pour $\sim$ l'équivalence homologique relative à H. Malheureusement, on se heurte à des problèmes :

1. Le foncteur $H(X) = \bigoplus_{i\geq 0} H^i(X)$ est monoïdal, mais n'est pas symétrique : le cup-produit en cohomologie n'est pas commutatif mais commutatif gradué (règle de Koszul). Pour obtenir un foncteur monoïdal symétrique, il faut remplacer H par H^*, prenant ses valeurs dans les vectoriels $\mathbf{Z}$-gradués, ou à tout le moins par $H^\pm$, prenant ses valeurs dans les vectoriels $\mathbf{Z}/2$-gradués, la contrainte de commutativité dans ces deux catégories étant donnée par la règle de Koszul.

   C'est là un problème mineur : on peut modifier la théorie tannakienne en une théorie "super-tannakienne" où le groupe $G(\omega)$ est remplacé par un "super-groupe" [16].

2. On ne sait pas si la catégorie $\mathcal{M}_H(k, F)$ est abélienne. En fait, d'après un théorème de Jannsen [23], $\mathcal{M}_\sim(k, F)$ est abélienne semi-simple si et seulement si $\sim$ est l'équivalence numérique.

Ceci conduit à la plus importante conjecture standard :

***Conjecture 1* (Tate ; Grothendieck, Bombieri)**

Pour toute cohomologie de Weil H, l'équivalence homologique (relative à H) coïncide avec l'équivalence numérique.

Cette conjecture en implique une seconde :

***Conjecture 2* (ibid.)** — *Pour toute cohomologie de Weil H et tout $X \in \mathbf{V}(k)$, les projecteurs de Künneth*

$$H(X) \twoheadrightarrow H^i(X) \hookrightarrow H(X)$$

sur la cohomologie de X, sont les classes de cycles algébriques à coefficients rationnels.

La conjecture 2 permet de résoudre le problème 1 en modifiant la contrainte de commutativité de $\mathcal{M}_H$ (de l'avis de l'auteur, c'est une manière artificielle de procéder). Concernant le problème 2 et le théorème de Jannsen, on pourrait demander à $\mathcal{M}_\sim$ d'être seulement abélienne et pas nécessairement semi-simple ; mais on a le joli résultat suivant de André [**1**, appendice] : la conjecture 1 est vraie pour H si et seulement si la conjecture 2 est vraie pour H et $\mathcal{M}_H$ est abélienne.

Il semble donc difficile d'échapper à la conjecture 1 dans le cadre des motifs de Grothendieck. Elle est tout de même vraie dans un cas important : celui des *variétés abéliennes* en caractéristique zéro (Lieberman [**31**]). Ainsi, en caractéristique zéro, la sous-catégorie épaisse (i.e. strictement pleine et stable par facteurs directs) de $\mathcal{M}_H(k, \mathbf{Q})$ engendrée par les motifs des variétés abéliennes et les motifs des extensions finies de k, pour H la cohomologie de Betti, est abélienne semi-simple et possède un groupe de Galois motivique, qui est pro-réductif.

3.4. Motifs de Deligne. — Dans [**15**], Deligne reprend la construction de Grothendieck du §3.1, mais en remplaçant le groupe des classes de cycles algébriques (pour une cohomologie de Weil) par un groupe plus gros : celui des *cycles de Hodge absolus*. Ici, le corps de base k est de caractéristique zéro, et plongeable dans $\mathbf{C}$. On dispose alors de toute une batterie de cohomologies de Weil classiques : celles mentionnées au §3.3, plus les *isomorphismes de comparaison* :

- **Betti–l-adique (M. Artin) :** $H^i_B(X, \mathbf{Q}) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}_l \simeq H^*_{\text{ét}}(X, \mathbf{Q}_l)$, $X \in \mathbf{V}(\mathbf{C})$;
- **Betti–de Rham (Grothendieck) :** $H^i_B(X, \mathbf{Q}) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C} \simeq H^*_{\text{dR}}(X/\mathbf{C})$, $X \in \mathbf{V}(\mathbf{C})$;
- **Changement de base l-adique (Grothendieck, M. Artin) :** $H^*_{\text{ét}}(X, \mathbf{Q}_l) \xrightarrow{\sim} H^*_{\text{ét}}(X_K, \mathbf{Q}_l)$, $X \in \mathbf{V}(k)$, où K/k est une extension de corps algébriquement clos ;

Changement de base pour la cohomologie de de Rham algébrique (trivial) : $H^*_{\mathrm{dR}}(X/k) \otimes_k K \xrightarrow{\sim} H^*_{\mathrm{dR}}(X/K)$, $X \in \mathbf{V}(k)$, où K/k est une extension quelconque.

Soit $\sigma : k \hookrightarrow \mathbf{C}$ un plongement : il définit une cohomologie de Betti H_σ sur $\mathbf{V}(k)$. Un cycle de Hodge (de codimension p) sur $X \in \mathbf{V}(k)$ relatif à σ est, comme toujours, un élément de $H^{2p}_\sigma(X)$ qui est de type (p,p). Grâce aux isomorphismes de comparaison, il fournit une famille de classes de cohomologie de X par rapport aux diverses cohomologies ci-dessus. Un *cycle de Hodge absolu* est un cycle, au sens précédent, qui est de Hodge pour tout σ. (Cette description est un peu vague : pour la définition précise, voir [**14**, p. 28 et 36].) La famille des classes de tout cycle algébrique est un cycle de Hodge absolu.

Notons $\mathcal{M}^D(k)$ la catégorie correspondante, à coefficients dans $\mathbf{Q}$. Elle est abélienne, semi-simple, et munie pour tout $\sigma : k \hookrightarrow \mathbf{C}$ d'un foncteur fibre H_σ (obtenu après avoir modifié la contrainte de commutativité comme évoqué en 3.3). En particulier, elle admet un groupe de Galois motivique : Deligne a contourné les conjectures standard (au grand déplaisir de Grothendieck) ! Quand un mathématicien travaillant avec les fonctions L parle de motifs, il parle en général de ces motifs-là.

Le point principal de la construction de Deligne est le théorème suivant, qui permet de démontrer des résultats sur les périodes :

Théorème 3 **([15]).** — *Tout cycle de Hodge sur une variété abélienne est de Hodge absolu.*

3.5. Motifs d'André. — Dans [**1**], André construit une catégorie intermédiaire entre $\mathcal{M}_H(k,\mathbf{Q})$ et $\mathcal{M}^D(k)$: aux classes de cycles algébriques, il adjoint simplement les cycles qui sont prédits être algébriques par les conjectures standard. Ces cycles sont appelés *motivés*. La catégorie $\mathcal{M}^A(k)$ qui en résulte a les mêmes propriétés que $\mathcal{M}^D(k)$, mais a plus de flexibilité : on peut faire varier son groupe de Galois motivique en famille. L'analogue du théorème 3 est vrai :

Théorème 4 **([1]).** — *Tout cycle de Hodge sur une variété abélienne est motivé.*

Comme application frappante de la théorie de [**1**], citons le théorème suivant de Cadoret-Tamagawa : soit $f : \mathcal{X} \to S$ un morphisme projectif lisse, où S est une courbe lisse sur un corps k. Pour tout point $s \in S$, on peut considérer le groupe de Néron-Severi $\mathrm{NS}(\mathcal{X}_{\bar{s}})$ de la fibre géométrique de f en s ; si η est le point générique de S, on a un morphisme de spécialisation

$$\mathrm{NS}(X_{\bar\eta}) \to \mathrm{NS}(X_{\bar s}) \tag{8}$$

qui est injectif.

***Théorème 5* ([10, th. 5.4]).** — *Supposons que* $\operatorname{car} k = 0$. *Alors l'ensemble des* $s \in S(k)$ *tels que* (8) *ne soit pas bijectif est fini.*

Pour un énoncé analogue concernant le groupe de Griffiths, voir [25, th. 3].

4. K-théorie et cycles algébriques

4.1. K_0. — Dès l'origine, la K-théorie algébrique est liée aux cycles algébriques (groupes de Chow) : pour une variété lisse $X \in \mathbf{Sm}(k)$ sur un corps k, on a les applications classe de cycle

$$CH^i(X) \twoheadrightarrow \operatorname{gr}^i K_0(X)$$

où gr^* est la graduation par rapport à la codimension du support, et l'isomorphisme

$$K_0(X) \otimes \mathbf{Q} \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i\geq 0} CH^i(X) \otimes \mathbf{Q} \tag{9}$$

donné par le caractère de Chern. Ceci remonte à l'introduction de K_0 par Grothendieck, pour démontrer et généraliser la formule de Riemann-Roch (1957). Voir SGA6.

4.2. K-théorie topologique. — Alors la main passe des géomètres algébristes aux topologues : Atiyah, Bott, Hirzebruch développent une K-théorie topologique $K^*(X)$ associée à tout espace topologique raisonnable X, et construisent pour un tel espace une suite spectrale

$$E_2^{p,q} = \begin{cases} H^p(X, \mathbf{Z}) & \text{si } q \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } q \text{ est impair} \end{cases} \Rightarrow K^{p+q}(X) \tag{10}$$

où $H^*(X, \mathbf{Z})$ est la cohomologie singulière de X (suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch). Les classes de Chern, ou γ-opérations, ou les opérations d'Adams, font dégénérer cette suite spectrale à des factorielles près, ce qui donne un analogue de (9) en topologie, en remplaçant $CH^i(X)$ par $H^{2i}(X, \mathbf{Z})$.

4.3. K-théorie algébrique. — La main repasse alors aux (géomètres) algébristes, qui essayent de faire aussi bien que les topologues. Bass définit un groupe K_1, puis Milnor un groupe K_2. Bloch voit très vite un lien entre K_2 et les cycles algébriques, via sa célèbre formule

$$CH^2(X) = H^2_{\mathrm{Zar}}(X, \mathcal{K}_2).$$

Finalement, au début des années 1970 plusieurs mathématiciens proposent des définitions de groupes de K-théorie algébrique "supérieurs", comme groupes d'homotopie d'un espace convenable. Toutes ces définitions coïncident "en général" ; c'est celle de Quillen [**36**] qui a vraiment lancé le sujet, étant donné sa simplicité et sa maniabilité. Des améliorations ultérieures sont dues à Waldhausen, Thomason-Trobaugh et Morel-Voevodsky (ces derniers utilisant la théorie homotopique des schémas).

La K-théorie algébrique est définie, mais quid de la cohomologie singulière algébrique ? La dégénérescence de la suite spectrale (10) suggère une définition au moins quitte à perdre de la petite torsion, en utilisant la γ-*filtration* sur la K-théorie algébrique ; c'est ce que Soulé dit presque explicitement dans [**44**, IV.6] :

> *Il paraît dès lors raisonnable de penser que c'est le groupe $Gr^i K_{2i-k}(X; \mathbf{Z}_\ell)$ qui doit en général être comparé à $H^k(X; \mathbf{Z}_\ell(i))$ (quand X est, par exemple, une variété quasi-projective sur un corps qui est algébriquement clos ou de type fini sur un corps premier).*
>
> *Peut-être la γ-filtration permet-elle aussi d'étendre les liens supposés entre K-théorie et fonctions zêta. Pour la partie libre on est conduit à l'énoncé suivant :*
>
> ***Conjecture 3.*** — *Soient X une variété projective et lisse de dimension d sur un corps global, ζ_X sa fonction zêta (on la suppose prolongée analytiquement, cf* [**42**]*), et i un entier supérieur à $(d+1)/2$. Les groupes $Gr^i K_n(X) \otimes \mathbf{Q}$ sont alors de dimension finie sur $\mathbf{Q}$ et l'ordre du zéro (resp. pôle) de ζ_X au point $d+1-i$ est égal en valeur absolue à la somme (finie) $\sum_n (-1)^{n+1} \dim_{\mathbf{Q}}(Gr^i K_n(X) \otimes \mathbf{Q})$ quand celle-là est positive (resp. négative).*

4.4. Génération finie des groupes de K-théorie des anneaux d'entiers de corps globaux. —

4.5. A la recherche de la cohomologie motivique. — Dans [3], Beilinson pose la définition audacieuse

$$H^p_{\mathcal{A}}(X, \mathbf{Q}(q)) = Gr^q K_{2q-p}(X) \otimes \mathbf{Q}$$

où $\mathcal{A}$ est là pour "cohomologie absolue". Dans les années 1980, plusieurs tentatives sont faites pour définir cette cohomologie a priori, et si possible à coefficients entiers. La terminologie change : absolue, arithmétique, avant de se fixer sur "motivique". La situation est résumée de manière amusante par Beilinson, MacPherson et Schechtman dans [5] :

> *Imagine a world in which the K-theory $K^*(X)$ of a topological space X had been defined, but the ordinary cohomology groups $H^*(X)$ had not yet been discovered. Then the rational cohomology groups $H^*(X, \mathbf{Q})$ would be known at least as functors, since they could be defined as the associated graded of the Atiyah-Hirzebruch filtration of $K^*(X) \otimes \mathbf{Q}$. However, there would be at least three difficulties in the situation :*
>
> 1. *This world would not have our explicit cocycles representing cohomology classes. These are often interesting geometric objects like differential forms or Cech cocycles which relate cohomology to other mathematical ideas.*
> 2. *The integral cohomology groups would not be defined.*
> 3. *The powerful computational techniques of cohomology theory would not be available.*
>
> *In such circumstances, one might well expect to find a quest going on for a geometrically defined cohomology theory which, when tensored with the rationals, would admit a Chem character isomorphism from $K^*(X) \otimes \mathbf{Q}$.*
>
> *Present day algebraic geometry is such a world. The algebraic K-groups $K_i(X)$ of an algebraic variety X have been known since 1973 [36], but a cohomology theory which is appropriately related to these algebraic K-groups has not been found. Precise conjectures as to what properties this hoped-for cohomology theory were given in [4] for the Zariski topology, and then in [32] for the étale topology. In a sense the quest for the hoped-for cohomology theory dates back to Grothendieck who, working before algebraic K-theory was defined, was looking for a cohomology theory of algebraic varieties with*

certain universal properties. (We know about Grothendieck's ideas through the work of Manin [**33**]*.) Following Grothendieck, we call the hoped-for cohomology theory motivic cohomology. (Lichtenbaum calls it arithmetic cohomology in honor of its conjectured relations with number theory, which constitute one of the main reasons for seeking it.)*

Il y a sans doute une confusion sur l'idée de Grothendieck d'une "théorie cohomologique universelle" à valeurs dans une catégorie abélienne universelle. Quoi qu'il en soit, la bonne construction pour le problème considéré ci-dessus se révèle être celle de Bloch dans [**6, 7**] : celle des *groupes de Chow supérieurs* $CH^i(X,n)$. Leur définition est facile : quand X est quasi-projectif et équidimensionnel, $CH^i(X,n)$ est l'homologie du complexe de terme général

$$\mathcal{Z}^i(X,n) = \mathbf{Z}[(X \times_k \Delta^n)^{[i]}]$$

où $\Delta^n = \operatorname{Spec} k[t_0,\dots,t_n]/(\sum t_i - 1)$ est le n-simplexe algébrique standard, et l'exposant $[i]$ désigne l'ensemble des cycles de codimension i qui sont en bonne position relativement à toutes les faces de $X \times_k \Delta^n$, ce qui permet de définir les différentielles comme la somme alternée des restrictions à ces faces… Lorsque X n'est pas nécessairement quasi-projectif, il faut prendre l'hypercohomologie du complexe de faisceaux Zariski associé.

On a $CH^i(X,0) = CH^i(X)$, $CH^n(k,n) = K_n^M(k)$, et l'isomorphisme (9) se généralise en des isomorphismes (pour X lisse)

$$K_n(X) \otimes \mathbf{Q} \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i\geq 0} CH^i(X,n) \otimes \mathbf{Q}. \tag{11}$$

La question suivante était d'obtenir une suite spectrale analogue de la suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch (10). Dans un manuscrit non publié, Bloch et Lichtenbaum en proposent une construction pour $X = \operatorname{Spec} k$, mais un point technique n'y est pas justifié. Il faudra le travail de Friedlander-Suslin, puis Levine, pour parvenir à combler ce trou [**29, 30**]. Le résultat est une suite spectrale

$$E_2^{p,q} = CH^{-q/2}(X, -p-q) \Rightarrow K_{-p-q}(X) \tag{12}$$

où X est (pour simplifier) une k-variété lisse et le terme E_2 est interprété comme valant 0 si q est impair.

4.6. Groupes de Chow supérieurs et cohomologie motivique. — Une idée différente pour définir la cohomologie motivique remonte à Suslin (1987), et utilise des complexes d'une ressemblance trompeuse avec ceux de Bloch : si $X \in \mathbf{Sm}(k)$ est une k-variété lisse, il définit avec Voevodsky des groupes $H^q(X, \mathbf{Z}(i))$ comme les groupes d'hypercohomologie de Zariski de X à valeurs dans un complexe $\mathbf{Z}(i)$ dont le terme général est le faisceau

$$U \mapsto e_i \operatorname{Cor}(U \times_k \Delta^q, \mathbb{G}_m^i)$$

où, pour $V, W \in \mathbf{Sm}(k)$, $\operatorname{Cor}(V, W)$ est le groupe abélien libre de base les fermés intègres Z de $V \times_k W$ tels que la projection $Z \to V$ soit finie surjective sur une composante connexe de V, et e_i est un certain idempotent obtenu à partir des compositions

$$\mathbb{G}_m^i \xrightarrow{p_j} \mathbb{G}_m \xrightarrow{\iota_j} \mathbb{G}_m^i,$$

où p_j est la j-ème projection et ι_j est l'inclusion $t \mapsto (1, \dots, 1, t, 1, \dots 1)$. Pour plus de détails, voir [34, Lect. 2 et 3].

***Théorème 6* (Voevodsky, [46]).** — *On a des isomorphismes*

$$CH^i(X, n) \simeq H^{2n-i}(X, \mathbf{Z}(i))$$

canoniques, et naturels en $X \in \mathbf{Sm}(k)$.

La cohomologie motivique de Suslin-Voevodsky est intrinsèquement liée aux catégories triangulées de motifs construites par Voevodsky, expliquées au chapitre qui suit.

5. Des motifs purs vers les motifs mixtes

5.1. Une vision de Beilinson [4, 5.10 A]. —

> *One hopes that for any scheme S and an appropriate commutative ring A (say $A = \mathbf{Z}, \mathbf{Z}/n, \mathbf{Q}, \bar{\mathbf{Q}}$), there exists a certain abelian A-category $M(S, A)$ of (mixed) motivic (perverse) A-sheaves over S together with a corresponding derived category $DM(S, A)$. These categories should resemble very much the categories of mixed ℓ-adic sheaves ;*
> — *there should be inner $\otimes$ and* Hom
> — *there should be Tate sheaves $A_{\mathcal{M}}(i)$; the Tate twist $M \mapsto M(i) = M \otimes A_{\mathcal{M}}(i)$ is automorphism of $M(S, A)$*
> — *for any morphism $f : S_1 \to S_2$ of finite type there should be corresponding functors $f_*, f^*, f_!, f^!$ between $DM(S_i)$*

— *for* $A \supset \mathbf{Q}$ *there should be a canonical weight filtration* $W.$ *on the objects of* $M(S, A)$ *such that any morphism is strictly compatible with* $W.$ *and any* $Gr^W_{\cdot} M$ *is semisimple.*

All these things should behave the same way as in the mixed ℓ*-adic situation. One should also have realisation functors* r *on* $M(S)$ *and* $DM(S)$ *with values in mixed* ℓ*-adic sheaves, or Hodge sheaves (if* S *is an* $\mathbf{R}$*-scheme, see no E below)... If* $A \supset \mathbf{Q}$ *these realisation functors should be exact, faithful on* $M(S)$*, and should commute with all the above structures. Note that such* r *induces the morphism between corresponding (absolute) cohomology groups : say*

$$r : H^*(S, M(*)) := \mathrm{Ext}^i(\mathbf{Q}_{\mathcal{M}}(0), M(*)) \\ \to \mathrm{Ext}^i(\mathbf{Q}_\ell, r_{\mathbf{Q}_\ell}(M)(*)) = H^i(S, r_{\mathbf{Q}_\ell}(M)(*)).$$

If $S = \operatorname{Spec} k$*,* k *is a field, and* $A \supset \mathbf{Q}$*, then the category of semisimple objects in* $M(S, A)$ *should be equivalent to the category of Grothendieck's* A*-motives over* k *constructed by means of algebraic correspondences modulo homological equivalence.*

5.2. Catégories triangulées de motifs. — Les catégories $M(S, A)$ sont loin d'être construites, au moins en termes de cycles algébriques. La situation est toute différente pour les catégories $DM(S, A)$: trois constructions différentes en ont été proposées, par Levine, Hanamura et Voevodsky. Au moins quand $S = \operatorname{Spec} k$, on sait qu'elles sont toutes équivalentes. La plus utilisée est celle de Voevodsky : le livre [**34**] expose très bien sa construction quand la base est un corps.

Ici : catégories triangulées de motifs et conjecture sur l'existence d'une t-structure motivique. Aussi, motifs de Nori/Arapura.

6. Généralisations : motifs birationnels, motifs avec modules

Les premiers ont été définis et étudiés par moi et Sujatha ; les seconds sont en développement avec trois collègues japonais.

Références

[1] Y. André *Pour une théorie inconditionnelle des motifs*, Publ. Math. IHÉS **83** (1996), 5–49.

[2] Y. André Une introduction aux motifs : motifs purs, motifs mixtes, périodes, Panoramas et synthèses **17**, SMF, 2004.

[3] A. Beilinson *Higher regulators and values of L-functions*, Current problems in mathematics **24**, Itogi Nauki i Tekhniki, Akad. Nauk SSSR, Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow, 1984, 181–238.

[4] A. Beilinson *Height pairing between algebraic cycles*, *in* K-theory, arithmetic and geometry (Yu. Manin, ed.), Lect. Notes in Math. **1289**, Springer, 1987, 1–26.

[5] A. Beilinson, R. MacPherson, V. Schechtman *Notes on motivic cohomology*, Duke Math. J. **54** (1987), 679–710.

[6] S. Bloch *Algebraic cycles and higher K-theory*, Adv. in Math. **61** (1986), 267–304.

[7] S. Bloch *The moving lemma for higher Chow groups*, J. Algebraic Geom. **3** (1994), 537–568.

[8] A. Borel *Stable real cohomology of arithmetic groups*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. **7** (1974), 235–272.

[9] F. Brown *Mixed Tate motives over* $\mathbf{Z}$, Ann. of Math. (2) **175** (2012), no. 2, 949–976.

[10] A. Cadoret *Motivated cycles under specialization*, *in* "Groupes de Galois Géométriques et differentiel", P. Boalch and J.-M. Couveignes, éds., Sém. & Congrès **27** (2012), SMF, 25–55.

[11] F. Charles *Conjugate varieties with distinct real cohomology algebras*, J. Reine Angew. Math. **630** (2009), 125–139.

[12] P. Deligne, A. Dimca *Filtrations de Hodge et par l'ordre du pôle pour les hypersurfaces singulières*, Ann. sci. É.N.S. **23** (1990), 645–656.

[13] P. Deligne *Cohomologie des intersections complètes*, exposé XI *in* SGA7 (II), Lect. notes in Math. **340**, Springer, 1973, 39–61.

[14] P. Deligne *Hodge cycles on abelian varieties* (notes by J. Milne), Lect. Notes in Math. **900**, Springer, 1982, 9–100.

[15] P. Deligne, J. Milne *Tannakian categories*, Lect. Notes in Math. **900**, Springer, 1982, 101–228.

[16] P. Deligne *Catégories tensorielles*, Dedicated to Yuri I. Manin on the occasion of his 65th birthday. Mosc. Math. J. **2** (2002), 227–248.

[17] H. Esnault *Hodge type of subvarieties of* $\mathbf{P}^n$ *of small degrees*, Math. Ann. **288** (1990), 549–551.

[18] H. Esnault, M. Nori, V. Srinivas *Hodge type of projective varieties of low degree*, Math. Ann. **293** (1992), 1–6.

[19] H. Furusho *The multiple zeta value algebra and the stable derivation algebra*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **39** (2003), no. 4, 695–720.

[20] W. Fulton Intersection theory, Springer (nouvelle éd.), 1998.

[21] H. Garland *A finiteness theorem for K_2 of a number field*, Ann. of Math. **94** (1971), 534–548.

[22] A. Grothendieck *Standard conjectures on algebraic cycles*, Algebraic Geometry (Internat. Colloq., Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 1968) Oxford Univ. Press, London, 1969, 193–199.

[23] U. Jannsen *Motives, numerical equivalence and semi-simplicity*, Invent. Math. **107** (1992), 447–452.

[24] B. Kahn Fonctions zêta et L de variétés et de motifs, collection Nano **103**, Calvage & Mounet, 2018.

[25] B. Kahn *Albanese kernels and Griffiths groups* (avec un appendice de Yves André), Tunis. J. Math. **3** (2021), no. 3, 589–656.

[26] N. Katz *On a theorem of J. Ax*, Amer. J. Math. **93** (1971), 485–499.

[27] M. Kolster *Remarks on étale K-theory and Leopoldt's conjecture*, Sém. Th. Nombres, Paris, 1991–92, Progr. in Math. **116**, Birkhäuser, 1993, 37–62.

[28] M. Levine *Tate motives and the vanishing conjectures for algebraic K-theory*, *in* Algebraic K-theory and algebraic topology (Lake Louise, AB, 1991), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C : Math. Phys. Sci., **407**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1993, 167–188,

[29] M. Levine *Techniques of localization in the theory of algebraic cycles*, J. Algebraic Geom. **10** (2001), 299–363.

[30] M. Levine *Blowing up monomial ideals*, J. Pure Appl. Algebra **160** (2001), no. 1, 67–103.

[31] D. I. Lieberman *Numerical and homological equivalence of algebraic cycles on Hodge manifolds*, Amer. J. Math. **90** (1968), 366–374.

[32] S. Lichtenbaum *Values of zeta-functions at non-negative integers*, Journées Arithmétiques, Noordwijkenhoot, Springer, 1983.

[33] Yu. I. Manin *Correspondences, motifs, and monoidal transformations*, Mat. Sb. (N.S.) 77, 119 (1968), 475–507.

[34] C. Mazza, V. Voevodsky, C. Weibel Lecture notes on motivic cohomology, Clay Math. Monographs **2**, AMS, 2006.

[35] D. Quillen *On the cohomology and K-theory of the general linear groups over a finite field*, Ann. of Math. **96** (1972), 552–586.

[36] D. Quillen *Higher algebraic K-theory, I*, Lect. Notes in Math. **341**, Springer, 1972, 85–147.

[37] N. Saavedra Rivano Catégories tannakiennes, Lect. Notes in Math. **265**, Springer, 1972.

[38] S. Schreieder *Multiplicative sub-Hodge structures of conjugate varieties*, Forum Math. Sigma **2** (2014), e1, 37 pp.

[39] J.-P. Serre *Géométrie algébrique et géométrie analytique*, Ann. Inst. Fourier **6** (1955–56), 1–42 = Œuvres, Vol. I, **32**.

[40] J.-P. Serre *Analogues kählériens de certaines conjectures de Weil*, Ann. of Math. (2) **71** (1960), 392-–394.

[41] J.-P. Serre *Exemples de variétés projectives conjuguées non homéomorphes*, C. R. Acad. Sci. Paris **258** (1964), 4194–4196 = Œuvres, Vol. II, **63**.

[42] J.-P. Serre *Facteurs locaux des fonctions zêta des variétés algébriques : définitions et conjectures*, Sém. Delange-Pisot-Poitou, 1969–70 = Œuvres, vol. II,

[43] J.-P. Serre *How to use finite fields for problems concerning infinite fields*, Arithmetic, geometry, cryptography and coding theory, Contemp. Math. **487**, AMS, 2009, 183–193.

[44] C. Soulé *K-théorie des anneaux d'entiers de corps de nombres et cohomologie étale*, Invent. Math. **55** (1979), 251–295.

[45] J. Tate *Relations between K_2 and Galois cohomology*, Invent. Math. **36** (1976), 257–274.

[46] V. Voevodsky *Motivic cohomology groups are isomorphic to higher Chow groups in any characteristic*, Int. Math. Res. Not. **2002**, 351–355.

[47] A. Weil *Numbers of solutions of equations in finite fields*, Bull. AMS **55** (1949), 497–508 = Œuvres scientifiques, vol. I, [1949b].

23 mars 2020

Bruno Kahn, IMJ-PRG, Case 247, 4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France
E-mail : `bruno.kahn@imj-prg.fr`