

RECOLLER POUR SÉPARER

DANIEL FERRAND AND BRUNO KAHN

RÉSUMÉ. On introduit une notion de *séparateur* d'un morphisme de schémas $f : T \rightarrow S$: en particulier, un séparateur est universel parmi les morphismes de T vers un S -schéma séparé E . Lorsque f est quasi-séparé, son séparateur existe si et seulement si l'adhérence schématique de la diagonale se projette sur les deux facteurs par des morphismes plats de type fini. En particulier, f admet un séparateur si T est noethérien de Dedekind et $S = \text{Spec}(\mathbf{Z})$, ou si f est étale de présentation finie et que S est normal. Dans tout schéma normal de type fini sur un anneau noethérien, il existe un ouvert contenant les points de codimension 1 et admettant un séparateur. A contrario, on donne plusieurs exemples de morphismes f n'admettant pas de séparateur.

Comme application, on attache à tout schéma lisse T sur une base normale S un morphisme vers un S -schéma étale de présentation finie et *séparé*, qui est universel (variante séparée du "schéma des composantes connexes des fibres"), généralisant simultanément le cas classique où la base est un corps et le cas d'un morphisme propre et lisse (factorisation de Stein).

ABSTRACT. We introduce the notion of a *separator* for a morphism of schemes $f : T \rightarrow S$; in particular, it is universal among morphisms from T to separated S -schemes E . A separator is a local isomorphism; this property conveys the intuition of *gluing some affine covering more*, in order to make the scheme separated. When f is quasi-separated, its separator exists if and only if the schematic closure of the diagonal projects on both factors by flat morphisms of finite type. In particular, f admits a separator if T is Noetherian Dedekind and $S = \text{Spec}(\mathbf{Z})$, or if f is étale of finite presentation and S is normal. Any normal scheme of finite type over a Noetherian ring admits an open subset containing all the points of codimension 1, which has a separator. A contrario, we give several examples of morphisms f that do not admit a separator.

As an application, we attach to every smooth scheme T over a normal base S a morphism to a *separated étale* S -scheme of finite presentation, which is universal (a kind of separated alternative for "scheme of connected components of the fibres"). This simultaneously generalizes the classical case where the base is a field, and the case of a smooth and proper morphism (Stein factorisation).

Date: 22 octobre 2015.

2010 Mathematics Subject Classification. 14A15, 14B25.

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction	2
2. Séparateurs	7
3. Propriété universelle	14
4. Passage au quotient	19
5. Critères d'existence d'un séparateur	22
6. Ouverts admettant un séparateur	27
7. Anneaux locaux apparentés	32
8. Sur les schémas réunion de deux ouverts affines	38
9. Cas des espaces algébriques	44
10. Un adjoint à gauche	45
Annexe A. Isomorphismes locaux et morphismes séparés	55
Annexe B. Adhérence schématique d'une relation d'équivalence	62
Bibliographie	64

1. INTRODUCTION

1.1. La question de l'existence d'une *enveloppe séparée* d'un schéma ne sera pas abordée dans toute sa généralité, mais plutôt sous une forme restreinte : étant donné un schéma T , disons intègre et noethérien, existe-t-il un schéma *séparé* E et un isomorphisme local surjectif $h : T \rightarrow E$? La propriété d'être un isomorphisme local exprime exactement l'intuition que le passage de T à E consiste à *recoller davantage* les ouverts d'un recouvrement. En effet, pour un tel morphisme, chaque point de T est contenu dans un ouvert U sur lequel h induit une immersion ouverte vers E ; si U et V sont des ouverts avec cette propriété, l'image $h(U \cup V) = h(U) \cup h(V)$ est la réunion d'ouverts isomorphes respectivement à U et à V , mais recollés le long de l'ouvert $h(U) \cap h(V)$, lequel contient, éventuellement strictement, l'ouvert $h(U \cap V)$, isomorphe à $U \cap V$.

Dans le cas général où T n'est plus supposé noethérien, ni surtout intègre, il est apparu qu'une hypothèse sur les images dans E des points maximaux de T est indispensable, et que sa bonne formulation utilise le morphisme diagonal, $\Delta : T \rightarrow T \times_E T$: il doit être schématiquement dominant i.e. l'homomorphisme $\mathcal{O}_{T \times_E T} \rightarrow \Delta_*(\mathcal{O}_T)$ doit être injectif.

Dans la situation relative (à un schéma de base S) on est conduit à la définition suivante : partant d'un morphisme $f : T \rightarrow S$, nous dirons qu'un morphisme de S -schémas $h : T \rightarrow E$ est un *séparateur* pour f si E est un S -schéma séparé et si h est un isomorphisme local surjectif quasi-compact et quasi-séparé, dont le morphisme diagonal est schématiquement dominant¹.

1. Rappelons qu'un morphisme de schémas $f : T \rightarrow S$ est dit *quasi-séparé* si son morphisme diagonal Δ_f est quasi-compact ; cette hypothèse implique que l'image directe $(\Delta_f)_*(\mathcal{O}_T)$ est une $\mathcal{O}_{T \times_S T}$ -algèbre quasi-cohérente, et que donc l'adhérence schématique de Δ_f existe ; de plus cette adhérence schématique a pour espace sous-jacent l'adhérence (topologique) de $\Delta_f(T)$ dans $T \times_S T$ [EGA G, 6.10.5]. Enfin, un morphisme est *de type fini* s'il est quasi-compact et localement de type fini.

Si le schéma S lui-même est séparé, les notions de séparateur relatif à S ou relatif à $\text{Spec}(\mathbf{Z})$ coïncident.

Si $h : T \rightarrow E$ est un séparateur pour f , on montre que la restriction de h à tout ouvert U de T , séparé sur S , induit un isomorphisme de U sur son image $h(U)$; de plus, ce morphisme h est universel au sens où tout S -morphisme de T dans un schéma séparé sur S se factorise de façon unique par h ; autrement dit, un séparateur, quand il existe, est aussi une *enveloppe séparée*.

1.2. L'existence d'un séparateur pour T équivaut à l'existence d'un schéma quotient de T par une relation d'équivalence convenable R (qui n'est autre que $T \times_E T \rightrightarrows T$, lorsque le séparateur existe). Le quotient T/R est séparé sur S si le morphisme $R \rightarrow T \times_S T$ est une immersion fermée. Il est donc bien naturel d'envisager a priori, comme relation, l'adhérence schématique de la diagonale $T \rightarrow T \times_S T$. Mais cette adhérence schématique n'est pas toujours une relation d'équivalence.

Cette difficulté apparaît déjà dans la catégorie des espaces topologiques. Soient T un espace topologique et R l'adhérence de la diagonale dans $T \times T$. La relation $(x, y) \in R$ signifie que chaque voisinage de x rencontre chaque voisinage de y ; cette relation n'est en général pas transitive. Mais on vérifie immédiatement que cette adhérence R est une relation d'équivalence dès que les applications composées $R \rightrightarrows T$ sont ouvertes; l'espace topologique quotient T/R est alors séparé et l'application $T \rightarrow T/R$ est ouverte (voir [TG, I.55] pour ces derniers points).

La démarche, proposée ici pour les schémas, présente des analogies avec la remarque précédente, les morphismes plats de schémas remplaçant les applications ouvertes d'espaces topologiques.

En effet, soient T un S -schéma et $R \subset T \times_S T$ l'adhérence schématique de la diagonale. On montre que R définit une relation d'équivalence sur T dès que les morphismes composés $R \rightrightarrows T$ sont plats; si, de plus, ils sont de type fini ces morphismes sont alors des isomorphismes locaux, du moins sous une hypothèse de finitude assez anodine sur T .

On dégage ensuite un énoncé général : soit $d_0, d_1 : R \rightrightarrows T$ une relation d'équivalence sur un schéma T telle que les morphismes d_0 et d_1 soient des isomorphismes locaux et que le morphisme "de réflexivité" $\varepsilon : T \rightarrow R$ soit schématiquement dominant. Alors, le faisceau fppf quotient $\widetilde{T/R}$ est représentable par un schéma.

1.3. Cela ramène donc le problème de l'existence d'un séparateur à une question de platitude. Voici les cas principaux où nous savons démontrer cette existence :

Théorème 1. *Soit $f : T \rightarrow S$ un morphisme de schémas.*

- (1) (prop. 5.3.3) Si $S = \text{Spec}(\mathbf{Z})$ et T est noethérien régulier de dimension 1, f admet un séparateur.
- (2) (cor. 5.3.1) De même si S est normal connexe et f étale de présentation finie.
- (3) (th. 6.1.1) Si $S = \text{Spec}(A)$ où A est noethérien, si f est de type fini et si T est normal, il existe un ouvert $U \subset T$, contenant les points de codimension 1, tel que $f|_U$ admette un séparateur.

1.4. Le langage des anneaux locaux *apparentés*, certes un peu désuet aujourd'hui, éclaire certains aspects de nos constructions. En effet, le passage d'un schéma intègre T à son séparateur, quand ce dernier existe, consiste simplement à identifier les points de T dont les anneaux locaux sont apparentés.

Mais nous définissons un schéma intègre noethérien de dimension 1, n'ayant que deux points fermés et qui n'admet pas de séparateur ; il fournit en un sens l'archétype de la non-séparation. Ce schéma admet cependant une enveloppe séparée, ce qui montre que les deux notions sont différentes.

Pour mettre en lumière ce qu'implique l'existence d'un séparateur, et aussi pour expliquer pourquoi elle n'est pas plus fréquente, nous construisons des morphismes de schémas $f : T \rightarrow S$, où T est réunion de deux ouverts affines, et qui n'admettent pas de séparateurs, bien que f soit, dans un cas, lisse de dimension relative 1 et S régulier, et dans l'autre cas étale sur une base affine de dimension 1. Notons que ces exemples portent sur des schémas noethériens, et qu'il en est de même de tous les contre-exemples du texte ; ce ne sont donc pas des défauts de finitude qui provoquent les défauts de séparation.

1.5. On cherche ensuite à définir un foncteur de la catégorie des schémas (en tout cas plats de présentation finie) sur une base S vers la catégorie des S -schémas étales de présentation finie, foncteur qui soit adjoint à gauche de l'inclusion de ces catégories ; autrement dit, il s'agit d'associer à tout tel schéma T/S un schéma E étale et de présentation finie sur S , muni d'un morphisme de S -schémas $h : T \rightarrow E$ qui soit universel pour les morphismes de T vers un S -schéma étale de présentation finie.

On montre que cette propriété universelle du morphisme $h : T \rightarrow E$ est équivalente au fait que les fibres de h soient géométriquement connexes. C'est d'ailleurs ce qu'on constate dans deux situations classiques :

- Si $f : T \rightarrow S$ est un morphisme propre et lisse, avec S noethérien, la factorisation de Stein

$$h : T \rightarrow \text{Spec}(f_*(\mathcal{O}_T))$$

définit l'adjoint cherché ; et dans ce cas, les fibres de h sont, bien sûr, géométriquement connexes.

- Si S est le spectre d'un corps, cet adjoint est bien connu : il est noté $\pi_0(T/S)$, et il "représente" les composantes connexes de f .

Un résultat développé par ROMAGNY [Rom11] (mais déjà signalé dans le livre LAUMON–MORET-BAILLY [LMB00]) éclaire la suite. Il montre que le “foncteur des composantes connexes des fibres” d’un morphisme lisse $T \rightarrow S$ est représentable par un *espace algébrique* qu’il note $\pi_0(T/S)$; il est muni d’un morphisme $h : T \rightarrow \pi_0(T/S)$ dont les fibres sont, comme prévu, géométriquement connexes ; de plus $\pi_0(T/S)$ est étale sur S . Il ne semble pas qu’on dispose de conditions générales assurant que cet espace algébrique soit un schéma, hormis s’il est *séparé*.

Cela justifie qu’on se restreigne dans la suite à la sous-catégorie des schémas étales de présentation finie, et qui sont de plus *séparés*.

1.6. On cherche donc à associer fonctoriellement à tout S -schéma plat de présentation finie T , un morphisme $h : T \rightarrow E$ de S -schémas, où E est étale et séparé sur S , qui soit universel. On constate d’abord que la catégorie des S -morphisms surjectifs de T vers un S -schéma étale séparé est très simple : elle est isomorphe à un ensemble ordonné filtrant à gauche, et elle possède un élément initial si S est intègre. Ainsi l’adjoint cherché existe dès que S est intègre.

Mais, sans hypothèses supplémentaires, ce foncteur, que l’on note $\pi^s(T/S)$, n’a pas les propriétés attendues ; en particulier il ne commute en général pas aux changements de base $S' \rightarrow S$, même s’ils sont étales.

Or, une variante des résultats de séparation cités en 1.2 s’applique aux espaces algébriques et montre que, sur un schéma *normal* S , un S -espace algébrique étale et quasi-compact F admet un morphisme étale et birationnel $F \rightarrow F^{\text{sep}}$ sur un espace algébrique étale *et séparé*, qui est alors (représentable par) un schéma, d’après un résultat classique. En appliquant cette construction à l’espace algébrique de ROMAGNY, on obtient l’énoncé suivant :

Théorème 2 (Th. 10.6.1 et prop. 10.6.3). *Soient S un schéma normal, $\mathbf{Sm}(S)$ la catégorie des S -schémas lisses de présentation finie et $\mathbf{Et.sep}(S)$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Sm}(S)$ formée des S -schémas étales séparés. Alors le foncteur d’inclusion*

$$\mathbf{Et.sep}(S) \rightarrow \mathbf{Sm}(S)$$

admet un adjoint à gauche, qui commute aux changements de base lisses et aux produits (finis).

Voici un survol du texte.

- Le §2 introduit les séparateurs et en donne les premières propriétés ; une attention particulière est portée à la condition pour le morphisme diagonal d’être schématiquement dominant. Un critère technique pour qu’un morphisme plat soit un isomorphisme local est donné ici ; il resservira plus loin.
- Le §3 montre, entre autres choses, qu’un séparateur, quand il existe, est aussi une enveloppe séparée. Ce paragraphe contient aussi un premier

- exemple de schéma [quasi-séparé] qui admet une enveloppe séparée sans admettre de séparateur.
- Dans le §4, on montre que le faisceau quotient $\text{fppf } \widetilde{T/R}$, d'un schéma T par une relation d'équivalence R , est représentable par un schéma si, essentiellement, les deux projections $R \rightrightarrows T$ sont des isomorphismes locaux.
 - Le §5, qui est le coeur du texte, contient les critères d'existence de séparateurs; ils reposent sur le résultat de §4.
 - Dans le §6, il est démontré qu'un schéma normal de type fini sur un anneau noethérien possède un ouvert contenant les points de codimension 1 et qui admet un séparateur.
 - Dans le §7, adopter l'ancien point de vue des anneaux locaux apparentés s'avère cependant instructif, et cela conduit à l'archétype de ce qui s'oppose à la séparation.
 - Le §8 propose deux autres exemples de morphismes qui n'admettent pas de séparateur.
 - Le §9 contient une extension succincte aux espaces algébriques des résultats du §5.
 - Ces résultats de séparation sont utilisés au §10, où on considère l'adjoint à gauche de l'inclusion de la catégorie des S -schémas étales, dans celle des S -schémas lisses; on montre pourquoi il faut se restreindre aux schémas étales qui sont de plus éparés; cet adjoint (séparé) n'existe, en général, que si S est intègre, et il ne possède les propriétés attendues que si la base S est normale.
 - L'Appendice A rassemble des définitions et des résultats portant sur les isomorphismes locaux et les adhérences schématiques, avec une insistance particulière sur les isomorphismes locaux. Ces résultats sont utilisés partout dans le texte.
 - L'Appendice B montre le rôle de la platitude pour forcer l'adhérence schématique de la diagonale à être une relation d'équivalence.

Il faut souligner, à l'orée d'un travail sur la séparation des schémas, que la terminologie actuelle schéma / schéma séparé, introduite dans la version de EGA I parue en 1971, remplace maintenant la terminologie préschéma / schéma qui était utilisée jusqu'à la fin des années 60; les 7 volumes des EGA II à IV, traitent de préschémas, ainsi que les rééditions de SGA 1 et de SGA 2; mais la réédition de SGA 3 adopte la nouvelle terminologie.

2. SÉPARATEURS

2.1. Définition et propriétés générales.

2.1.1. **Définition.** Soit $f : T \rightarrow S$ un morphisme de schémas. On appelle *séparateur* pour f un morphisme de S -schémas $h : T \rightarrow E$, de but un schéma séparé sur S , et qui vérifie les propriétés suivantes :

- i)* h est un isomorphisme local surjectif, quasi-compact et quasi-séparé.
- ii)* Le morphisme diagonal Δ_h est schématiquement dominant (définition A.4.1).

Lorsque $S = \text{Spec}(\mathbf{Z})$ on parle simplement de séparateur pour T .

2.1.2. Remarques.

i) Un morphisme $f : T \rightarrow S$ qui admet un séparateur est quasi-séparé, ou de manière équivalente, le morphisme diagonal Δ_f est quasi-compact. En effet, en notant $h : T \rightarrow E$ un séparateur, Δ_f se factorise en

$$T \xrightarrow{\Delta_h} T \times_E T \xrightarrow{u} T \times_S T.$$

Puisque h est quasi-séparé, Δ_h est quasi-compact, de plus u est une immersion fermée puisque qu'elle provient, par changement de base, du morphisme diagonal du S -schéma séparé E ; donc le composé est quasi-compact.

ii) Si T est intègre, la propriété *i)* de 2.1.1 implique *ii)*, comme il résultera de l'équivalence entre *a)* et *c)* dans la proposition 2.2.1 ci-dessous.

iii) Pour un isomorphisme local $h : T \rightarrow S$, la propriété d'avoir un morphisme diagonal schématiquement dominant signifie intuitivement que h induit une injection sur l'ensemble des points maximaux de T ; c'est à rapprocher de la notion de morphisme *birationnel* tel que défini dans [EGA G, 2.3.4]; en général, un morphisme $h : T \rightarrow S$ y est dit *birationnel* s'il induit une bijection de l'ensemble des points maximaux de T sur l'ensemble de ceux de S , si, pour tout point maximal s de S , l'ensemble $h^{-1}(s)$ est réduit à un point t et enfin si le morphisme $\mathcal{O}_{S,s} \rightarrow \mathcal{O}_{T,t}$ est bijectif.

Lorsque $h : T \rightarrow S$ est un isomorphisme local, la remarque 2.3.4.1 de loc. cit. entraîne que h est birationnel dès qu'il induit une *bijection* entre les ensembles des points maximaux (cf. la propriété *c)* de la proposition 2.2.1 ci-dessous).

2.1.3. **Lemme.** Soit $h : T \rightarrow E$ un morphisme fidèlement plat quasi-compact et quasi-séparé. Si le morphisme diagonal Δ_h est schématiquement dominant, alors le morphisme canonique $\theta : \mathcal{O}_E \rightarrow h_*(\mathcal{O}_T)$ est un isomorphisme.

Démonstration. Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} T & \xrightarrow{\Delta_h} & T \times_E T & \xrightarrow{p_1} & T \\ & & \downarrow p_0 & & \downarrow h \\ & & T & \xrightarrow{h} & E. \end{array}$$

Puisque h est fidèlement plat quasi-compact, il suffit de vérifier que l'application $h^*(\theta)$ obtenue par changement de base est bijective. Comme le morphisme h est aussi supposé quasi-séparé, on dispose d'après [EGA G, 9.3.3] d'un isomorphisme

$$h^*h_*(\mathcal{O}_T) \simeq p_{1*}p_0^*(\mathcal{O}_T).$$

On est donc ramené à voir que l'application composée, qui sera notée θ' ,

$$\mathcal{O}_T \simeq h^*(\mathcal{O}_E) \xrightarrow{h^*(\theta)} h^*h_*(\mathcal{O}_T) \simeq p_{1*}(\mathcal{O}_{T \times_E T})$$

est bijective. Cette application θ' est isomorphe à l'application canonique associée au morphisme $p_1 : T \times_E T \rightarrow T$, comme on s'en convainc par réduction au cas où T et E sont affines. Notons $\varphi : \mathcal{O}_{T \times_E T} \rightarrow \Delta_{h^*}(\mathcal{O}_T)$ l'application associée au morphisme diagonal. Puisque le composé $p_{1*}\Delta_h$ est l'application identique, l'application composée

$$\mathcal{O}_T \xrightarrow{\theta'} p_{1*}(\mathcal{O}_{T \times_E T}) \xrightarrow{p_{1*}(\varphi)} p_{1*}\Delta_{h^*}(\mathcal{O}_T)$$

est bijective, et par suite, $p_{1*}(\varphi)$ est surjective. Mais, φ étant injective par hypothèse, il en est de même de $p_{1*}(\varphi)$, donc θ' est bien bijective. \square

2.1.4. *Exemple.* Soit T un schéma intègre noethérien régulier de dimension 1 dont l'ensemble des points est fini. Alors le morphisme de T dans son enveloppe affine est un séparateur.

Posons en effet $B = \Gamma(T, \mathcal{O}_T)$; le morphisme canonique $T \rightarrow \text{Spec}(B)$ est l'enveloppe affine de T [EGA G, 9.1.21]. Soit K le corps des fractions de B , i.e. le corps des fonctions rationnelles sur T . Pour tout point fermé t de T , l'anneau local en t est muni d'une injection

$$j_t : \mathcal{O}_{T,t} \rightarrow K$$

dont l'image est un anneau de valuation discrète de K ; on a [EGA G, 8.5.1.1]

$$B = \Gamma(T, \mathcal{O}_T) = \bigcap_{t \in T} j_t(\mathcal{O}_{T,t}).$$

Les anneaux locaux de points fermés distincts peuvent avoir la même image dans K (voir §6); soient A_1, \dots, A_n les anneaux de valuation *distincts* qui proviennent de points de T , de sorte que $B = A_1 \cap \dots \cap A_n$. Le théorème d'approximation [AC, 6, §7.1, prop. 1] indique que, en notant $\mathfrak{p}_i = B \cap \mathfrak{m}(A_i)$, l'inclusion $B \subset A_i$ induit un isomorphisme

$$B_{\mathfrak{p}_i} \xrightarrow{\sim} A_i.$$

Cela montre que le morphisme $T \rightarrow \text{Spec}(B)$ est un isomorphisme local; il est surjectif d'après la proposition 2 de loc.cit, enfin son morphisme diagonal est schématiquement dominant puisque T est intègre (remarque 2.1.2 ii)). \square

Nous montrerons que tout schéma localement noethérien régulier de dimension 1 admet un séparateur (proposition 5.3.3), et nous donnerons un

exemple de schéma noethérien intègre de dimension 1, ayant deux points fermés, et qui n'admet pas de séparateur (exemple 7.3.1).

2.2. Le morphisme diagonal. La proposition qui suit indique quelques conséquences de l'hypothèse *ii*) de la définition 2.1.1, portant sur le morphisme diagonal; nous avons développé certains détails de leur démonstration pour mettre en évidence des arguments que l'on retrouvera souvent dans la suite de ce texte.

2.2.1. Proposition. *Considérons les propriétés suivantes relatives à un isomorphisme local quasi-séparé $h : T \rightarrow S$.*

- a) *Le morphisme diagonal $\Delta_h : T \rightarrow T \times_S T$ est schématiquement dominant.*
- b) *Pour tout ouvert U de T tel que h induise une immersion ouverte de U dans S , le morphisme $U \rightarrow h^{-1}(h(U))$ est schématiquement dominant.*
- b') *Il existe un recouvrement de T par des ouverts ayant les deux propriétés évoquées en b).*
- c) *La restriction du morphisme h à l'ensemble des points maximaux de T est injective.*

Alors la propriété a) est équivalente aux propriétés b) et b'), et elles impliquent c).

Si T est réduit, les propriétés a), b), b') et c) sont équivalentes.

Si T est localement noethérien, de sorte que l'ensemble $\text{Ass}(T)$ des points associés à T est défini, les propriétés a), b) et b') sont aussi équivalentes à

- d) *La restriction de h à l'ensemble $\text{Ass}(T)$ est injective.*

Démonstration. Montrons l'équivalence des propriétés a), b) et b'). Soit $i : U \rightarrow T$ une immersion ouverte. L'immersion ouverte $j : U \rightarrow h^{-1}h(U)$ est égale au composé des morphismes

$$(\star) \quad U \xrightarrow{(1,i)} U \times_S T \xrightarrow{h \times 1} h(U) \times_S T \simeq h^{-1}h(U)$$

Le morphisme $(1, i)$ est la restriction du morphisme diagonal $\Delta_h : T \rightarrow T \times_S T$ à l'ouvert $U \times_S T$. Si h induit un isomorphisme de U sur l'ouvert $h(U)$, $h \times 1$ est un isomorphisme et j est schématiquement dominant si et seulement si le morphisme $(1, i)$ l'est. Cela montre l'implication a) \Rightarrow b).

Comme h est un isomorphisme local, T possède un recouvrement par des ouverts sur lesquels h induit une immersion ouverte, donc b) \Rightarrow b').

Montrons que b') implique a). Considérons un recouvrement de T par des ouverts U isomorphes à leur image, de sorte que $T \times_S T$ est recouvert par les ouverts correspondants $U \times_S T$. Comme on l'a vu ci-dessus, les morphismes notés $(1, i)$ dans (\star) sont schématiquement dominants, et donc Δ_h aussi.

Avant d'aborder la propriété c) qui concerne les points maximaux, remarquons que si $h : T \rightarrow S$ est un isomorphisme local, un point $t \in T$ est maximal si et seulement si $h(t)$ est maximal pour S ; en effet, le morphisme

$\mathcal{O}_{S,h(t)} \longrightarrow \mathcal{O}_{T,t}$ est un isomorphisme, et dire que t est maximal dans T signifie que l'anneau local $\mathcal{O}_{T,t}$ a un seul idéal premier.

Pour vérifier les autres implications de la proposition 2.2.1, nous utiliserons la propriété suivante :

[EGA G, 5.4.3] *Soit $j : U \longrightarrow V$ une immersion ouverte de schémas. Si j est schématiquement dominante, alors les points maximaux de V sont dans U ; réciproquement, si V est réduit et si les points maximaux de V sont dans U alors j est schématiquement dominante.*

Montrons que $a)$ entraîne $c)$. Soit η un point maximal de $h(T) \subset S$ et notons $S_0 = \text{Spec}(\mathcal{O}_{S,\eta})$; il s'agit de vérifier que la fibre $T_0 = T \times_S S_0$ est irréductible, i.e que l'intersection de deux ouverts non vides de T_0 est non vide. Puisque le morphisme $S_0 \longrightarrow S$ est plat, et que l'immersion diagonale Δ_h est quasi-compacte, le morphisme diagonal $T_0 \longrightarrow T_0 \times_{S_0} T_0$ est encore schématiquement dominant (lemme A.4.3) ; soient U et V des ouverts non vides de T_0 ; puisque S_0 a un seul point, le produit fibré $U \times_{S_0} V$ est non vide ; comme l'immersion $U \cap V \longrightarrow U \times_{S_0} V$ est schématiquement dominante, l'intersection $U \cap V$ est non vide.

Voici une autre façon de voir la relation entre les propriétés $a)$ et $c)$.

Remarquons d'abord que pour un isomorphisme local $h : T \longrightarrow S$, l'ensemble sous-jacent au schéma $T \times_S T$ est égal au produit fibré des ensembles sous-jacents aux facteurs ; en effet, soient x un point de $T \times_S T$, $x_i = d_i(x)$ ses deux projections dans T , et s son image dans S ; comme les extensions $\kappa(s) \longrightarrow \kappa(x_i)$ sont des isomorphismes, le schéma $\text{Spec}(\kappa(x_0) \otimes_{\kappa(s)} \kappa(x_1)) \subset T \times_S T$ est réduit à un point, nécessairement égal à x ; de plus les homomorphismes locaux

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{O}_{T,x_0} & \\ \nearrow & & \searrow \\ \mathcal{O}_{S,s} & & \mathcal{O}_{T \times_S T, x} \\ \searrow & & \nearrow \\ & \mathcal{O}_{T,x_1} & \end{array}$$

sont tous des isomorphismes. Par suite, si x est un point maximal de $T \times_S T$, alors x_0 et x_1 sont des points maximaux de T qui ont la même image dans S . Cela montre que h induit une injection sur l'ensemble des points maximaux de T (conditionn $c)$) si et seulement si les points maximaux de $T \times_S T$ sont dans l'image du morphisme diagonal. Enfin, puisque ce morphisme diagonal est une immersion ouverte, cette dernière propriété équivaut, lorsque T est réduit, à la propriété $a)$: le morphisme diagonal $\Delta_h : T \longrightarrow T \times_S T$ est schématiquement dominant.

$d) \Leftrightarrow a)$ Rappelons d'abord le critère suivant :

[EGA IV₂, 3.1.8] Soit $j : U \rightarrow V$ une immersion ouverte de schémas localement noéthériens. Alors j est schématiquement dominante si et seulement si les points associés de V sont dans U , i.e. si $\text{Ass}(U) = \text{Ass}(V)$.

Supposons maintenant que T soit localement noéthérien. Soit $x \in T$ un point associé; pour tout $x' \in T$ tel que $h(x) = h(x')$, on a un isomorphisme $\mathcal{O}_{S, h(x)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{T, x'}$, donc x' est aussi associé. Le raisonnement fait plus haut pour les points maximaux, mais appliqué maintenant aux points associés, montre que le morphisme h induit une injection $\text{Ass}(T) \rightarrow \text{Ass}(S)$ si et seulement si l'ensemble $\text{Ass}(T \times_S T)$ est contenu dans l'ouvert $\Delta_h(T)$, c'est-à-dire si Δ_h est schématiquement dominant. \square

2.3. Existence d'isomorphismes locaux. (cf. A.3) Sont rassemblés ici divers critères assurant que des morphismes sont des isomorphismes locaux; ils seront souvent utilisés dans la suite.

2.3.1. Proposition. Soient $f : Y \rightarrow X$ et $t : X_0 \rightarrow X$ des morphismes de schémas, et $f_0 : Y_0 = X_0 \times_X Y \rightarrow X_0$ le morphisme déduit de f par changement de base. On suppose que f est plat, que t est quasi-compact, quasi-séparé et schématiquement dominant, et enfin que f_0 est un monomorphisme. Alors,

- a) Si f est affine, c'est un isomorphisme.
- b) Si f est ouvert, c'est un isomorphisme local.

L'existence du morphisme $t : X_0 \rightarrow X$ possédant les propriétés indiquées est en particulier vérifiée lorsque X et Y sont intègres et que f est birationnel; il suffit alors de prendre pour X_0 le point générique de X .

Démonstration. Considérons d'abord le cas où f est affine. Quitte à se restreindre à un ouvert affine de X , on peut supposer de plus que f est fidèlement plat. Introduisons le \mathcal{O}_X -module $F = \text{Coker}(\mathcal{O}_X \rightarrow f_*(\mathcal{O}_Y))$. Il est quasi-cohérent, et il est plat [AC, I §3.5, prop. 9]. Puisque f est affine, l'homomorphisme canonique $t^*f_*(\mathcal{O}_Y) \rightarrow f_{0*}(\mathcal{O}_{Y_0})$ est bijectif [EGA G, 9.3.3]; d'où l'on tire l'isomorphisme

$$t^*(F) \simeq \text{Coker}(\mathcal{O}_{X_0} \rightarrow f_*(\mathcal{O}_{Y_0})).$$

D'après l'hypothèse f_0 est un monomorphisme plat et affine, et il est surjectif; c'est donc un isomorphisme; par suite, on a $t^*(F) = 0$; comme t est un morphisme quasi-compact, quasi-séparé et schématiquement dominant, F est nul (lemme A.4.2).

On suppose maintenant que f est ouvert, et on va se ramener au cas a). Soit y un point de Y et V un ouvert affine de Y contenant y et tel que l'ouvert $U = f(V)$ soit contenu dans un ouvert affine de X ; il est donc séparé et la restriction de f à V donne un morphisme $g : V \rightarrow U$ qui est fidèlement plat et affine [EGA G, 5.3.10], et on va voir que g est un isomorphisme. Pour pouvoir utiliser a), il faut vérifier que le morphisme $g_0 : V_0 \rightarrow U_0$ est un

isomorphisme (notations évidentes). Or, posons $W = f^{-1}(U) \subset Y$, ce qui permet d'écrire g comme le composé

$$V \xrightarrow{j} W \xrightarrow{f'} U,$$

où j est une immersion ouverte et où $f' = f \times_X 1_U$ est fidèlement plat. On en tire la décomposition $g_0 = f'_0 j_0$; mais g_0 est surjectif, et f'_0 est un isomorphisme; l'immersion ouverte j_0 est donc surjective, c'est-à-dire un isomorphisme; cela montre que g_0 est un isomorphisme \square

2.3.2. Proposition. *Soient $U \xrightarrow{v} W \xrightarrow{w} V$ deux morphismes de schémas possédant les propriétés suivantes :*

- (i) *w est affine plat, et, en outre, l'une des hypothèses suivantes est satisfaite :*
 - a) *le morphisme w est ouvert ;*
 - b) *l'ensemble des composantes irréductibles de V est localement fini, et w est de type fini ;*
- (ii) *v est quasi-compact, et schématiquement dominant, i.e. l'application canonique $\mathcal{O}_W \rightarrow v_*(\mathcal{O}_U)$ est injective (cf. définition A.4.1) ;*
- (iii) *le composé $t = wv : U \rightarrow V$ est une immersion ouverte.*

Alors w est une immersion ouverte.

Notons que si le morphisme w est de présentation finie et plat alors il est ouvert, et l'hypothèse (i) a) est donc satisfaite; la condition sur les composantes irréductibles dans (i) b) n'est donc requise que si w est de type fini sans être de présentation finie.

La démonstration procède par étapes.

I. Montrons d'abord que, en posant $W_0 = w^{-1}t(U)$, v et w induisent des isomorphismes

$$U \xrightarrow{\sim} W_0 \xrightarrow{\sim} t(U),$$

et que l'immersion ouverte $W_0 \rightarrow W$ est quasi-compacte et schématiquement dominante. Notons $v_0 : U \rightarrow W_0$ et $w_0 : W_0 \rightarrow t(U)$ les morphismes en questions. Leur composé $w_0 v_0$ est un isomorphisme d'après (iii) donc v_0 est une immersion fermée puisque w_0 est affine (propriété (i)). Par ailleurs, v_0 est schématiquement dominant comme v (propriété (ii)); donc v_0 est un isomorphisme, et par suite, w_0 est aussi un isomorphisme; enfin, l'immersion $W_0 \rightarrow W$ est quasi-compacte et schématiquement dominante puisque v a ces deux propriétés.

II. Montrons que si l'ensemble $w(W)$ est un ouvert de V , en particulier si le morphisme w est ouvert (hypothèse (i) a)), alors w est une immersion ouverte.

Notons $\tilde{w} : W \rightarrow w(W)$ le morphisme déduit de w . Il est fidèlement plat, et affine [EGA G, 9.1.1], et d'après l'étape I, la restriction de \tilde{w} à l'ouvert rétro-compact et schématiquement dominant $W_0 \subset W$ est un isomorphisme.

En appliquant 2.3.1, on voit que \tilde{w} est un isomorphisme, donc que w est une immersion ouverte.

III. Montrons que si w est de type fini, alors c'est une immersion.

Il s'agit d'exhiber un ouvert V' de V , contenant $w(W)$ et tel que le morphisme $w' : W \rightarrow V'$ soit une immersion fermée. Notons d'abord que la conclusion étant locale sur V , on peut supposer que V est affine ; cela entraîne que W l'est aussi puisque le morphisme w est affine ; notons $B = \Gamma(V) \rightarrow \Gamma(W) = C$ l'homomorphisme d'anneaux sous-jacent à w , et soit $\bar{B} \subset C$ l'image de B dans C . Pour tout élément $x \in C$ l'ensemble $V(x) \subset V$ des \mathfrak{p} tels que $x \in \bar{B}_{\mathfrak{p}}$, est formé des \mathfrak{p} qui ne contiennent pas l'idéal des dénominateurs de x , soit l'idéal $\{s \in B, sx \in \bar{B}\}$; $V(x)$ est donc un ouvert. On a $w(W) \subset V(x)$: en effet, soit \mathfrak{p} un idéal premier de B qui se relève à C , donc tel que l'homomorphisme $B_{\mathfrak{p}} \rightarrow C_{\mathfrak{p}}$ soit fidèlement plat ; la proposition 2.3.1 entraîne que cet homomorphisme est un isomorphisme, donc que l'on a $B_{\mathfrak{p}} \simeq (\bar{B})_{\mathfrak{p}} = C_{\mathfrak{p}}$; en particulier, $\mathfrak{p} \in V(x)$.

Comme C est une B -algèbre de type fini, engendrée, disons, par x_1, \dots, x_n , la partie $V' = V(x_1) \cap V(x_2) \cap \dots \cap V(x_n)$ est un ouvert de V , et elle contient $w(W)$; son image réciproque $w^{-1}(V')$ est donc égale à W . Par construction, pour tout idéal premier $\mathfrak{p} \in V'$, on a $(\bar{B})_{\mathfrak{p}} = C_{\mathfrak{p}}$, donc w induit une immersion fermée $W \rightarrow V'$.

IV. Fin de la démonstration. La conclusion sous l'hypothèse (i) b) résulte du

2.3.3. Lemme. *Soit $w : W \rightarrow V$ une immersion plate. Si l'ensemble des composantes irréductibles de V est localement fini, alors w est une immersion ouverte.*

Sans hypothèse sur les composantes irréductibles, il existe des immersions fermées plates qui ne sont pas ouvertes [EGA G, 4.2.3].

Démonstration. Puisque w est une immersion fermée dans un ouvert de V , on peut se restreindre à cet ouvert et supposer que w est une immersion fermée. Pour tout $x \in W$ l'homomorphisme surjectif $\mathcal{O}_{V,w(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{W,x}$ est aussi injectif puisqu'il est fidèlement plat. Ces isomorphismes $\mathcal{O}_{V,w(x)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{W,x}$ montrent que l'ensemble fermé $w(W)$ est stable par générisation, et il s'agit de voir qu'il est ouvert. Or, son complémentaire est stable par spécialisation ; c'est donc la réunion des composantes irréductibles de V qui sont disjointes de $w(W)$. Par hypothèse, l'ensemble de ces composantes est localement fini ; leur réunion est donc localement (i.e sur chaque ouvert affine) un fermé ; c'est un fermé. \square

Voici enfin une variante de 2.3.1 où l'hypothèse "générique" (i.e. liée à $t : X_0 \rightarrow X$), est conséquence d'une hypothèse sur la diagonale.

2.3.4. Corollaire. *Soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme plat quasi-séparé et ouvert. On suppose que le morphisme diagonal Δ_f est schématiquement dominant. Alors f est un isomorphisme local.*

Démonstration. En procédant comme dans le début de la démonstration de 2.3.1 b), dont nous reprenons les notations, on se ramène à la situation suivante : on considère un morphisme $g : V \rightarrow U$, qui est le composé

$$V \xrightarrow{j} W \xrightarrow{f'} U,$$

où j est une immersion ouverte et où le morphisme $f' = f \times_X 1_U$ est fidèlement plat, ouvert et à morphisme diagonal $\Delta_{f'}$ schématiquement dominant ; de plus, le morphisme $g = f'j$ est supposé fidèlement plat et *affine*. Il s'agit de montrer que g est un isomorphisme.

C'est le morphisme $f' : W \rightarrow U$ qui tient ici le rôle du morphisme $t : X_0 \rightarrow X$ de loc. cit. On va donc vérifier que le morphisme $w = g \times_U 1_W$ est un isomorphisme ; comme il est surjectif, il suffit de vérifier que c'est une immersion ouverte ; cela découlera de 2.3.2.

Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{g} & U \\ \updownarrow v & \searrow j & \uparrow f' \\ W' & \xrightarrow{w} & W \end{array},$$

où $W' = V \times_U W$, et où v est caractérisé par l'égalité $j = wv$. On sait déjà que w est plat affine et ouvert (propriété (i) de 2.3.2). Pour voir que le morphisme v est quasi-compact et schématiquement dominant (propriété (ii)), on remarque que le carré

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\Delta_{f'}} & W \times_U W \\ \uparrow & & \uparrow j \times 1 \\ V & \xrightarrow{v} & W' = V \times_U W \end{array}$$

est cartésien et que $\Delta_{f'}$ a ces propriétés par hypothèse ; enfin la propriété (iii) requiert que wv soit une immersion ouverte, ce qui est bien le cas. \square

3. PROPRIÉTÉ UNIVERSELLE

3.1. Propriété universelle des séparateurs.

3.1.1. Proposition. *Soient $f : T \rightarrow S$ un morphisme et $T \xrightarrow{h} E \xrightarrow{g} S$ un séparateur de f . Alors*

- (i) *Pour tout ouvert U rétrocompact dans T , $h(U)$ est un ouvert de E , et le morphisme $U \rightarrow h(U)$ induit par h est un séparateur de U .*
- (ii) *Soit U un ouvert de T qui est séparé sur S (par exemple un ouvert séparé). Alors, la restriction de h induit un isomorphisme de U sur l'ouvert $h(U)$. En particulier, si T est séparé sur S , h est un isomorphisme.*
- (iii) (Propriété universelle du séparateur) *Pour tout S -morphisme $h' : T \rightarrow E'$ dans un schéma séparé sur S , il existe un unique S -morphisme $u : E \rightarrow E'$ tel que $h' = uh$.*

Démonstration. i) L'hypothèse sur U signifie que le morphisme $i : U \rightarrow T$ est quasi-compact, i.e. que pour tout ouvert affine V de T , $U \cap V$ est quasi-compact. Sans hypothèse sur U , il est clair que $h(U)$ est un ouvert de E ;

c'est donc un schéma séparé sur S . Notons $h' : U \rightarrow h(U)$ la restriction de h ; c'est un isomorphisme local. Considérons le carré cartésien suivant.

$$\begin{array}{ccccc} U & \xrightarrow{\Delta_{h'}} & U \times_{h(U)} U & \xrightarrow{u} & U \times_E U \\ \downarrow i & & & & \downarrow i \times i \\ T & \xrightarrow{\Delta_h} & T \times_E T & & \end{array}$$

Le morphisme u est un isomorphisme puisque $h(U) \rightarrow E$ est une immersion; comme $i \times i$ est une immersion ouverte et que l'immersion Δ_h est quasi compacte et schématiquement dominante, il en est de même de $\Delta_{h'}$ (lemme A.4.3). Pour voir que h' est un séparateur, il reste à vérifier que h' est quasi-compact; or, on peut l'écrire comme le composé de l'immersion ouverte $U \rightarrow h^{-1}(h(U))$ qui est quasi-compacte puisque i est quasi-compact, et du morphisme $h^{-1}(h(U)) \rightarrow h(U)$ qui est quasi-compact car h l'est.

ii) Soit U un ouvert de T séparé sur S ; le morphisme $U \rightarrow E$ induit par h est séparé d'après le lemme A.2.1. L'hypothèse sur Δ_h implique d'après la proposition 2.2.1 que h induit une injection sur l'ensemble des points maximaux de U ; donc, (proposition A.3.1 ii)), la restriction de h à U est une immersion ouverte.

iii) Soit $h' : T \rightarrow E'$ un S -morphisme vers un schéma séparé sur S . Dans le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\Delta_h} & T \times_E T \\ \Delta_{h'} \downarrow & \swarrow w & \downarrow \phi \\ T \times_{E'} T & \xrightarrow{\phi'} & T \times_S T \end{array}$$

les morphismes ϕ et ϕ' sont des immersions fermées puisque E et E' sont séparés sur S , et Δ_h est schématiquement dominant par hypothèse; le lemme A.5.3 assure l'existence du morphisme w rendant les triangles commutatifs. Considérons maintenant le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} T \times_E T & \rightrightarrows & T & \xrightarrow{h} & E \\ w \downarrow & & \parallel & & \downarrow u \\ T \times_{E'} T & \rightrightarrows & T & \xrightarrow{h'} & E' \end{array}$$

La ligne supérieure est exacte puisque h est fidèlement plat quasi-compact, donc un épimorphisme effectif [SGA 1, VIII 5.3]; d'où l'existence et l'unicité de u . \square

Le corollaire suivant précise la relation entre séparateur sur S et séparateur « absolu » i.e. sur $S = \text{Spec}(\mathbf{Z})$. Rappelons (lemme A.2.1) que si le schéma E est séparé tout morphisme $E \rightarrow S$ est séparé, et que si S est séparé ainsi que le morphisme $E \rightarrow S$, alors le schéma E est séparé.

3.1.2. Corollaire. Soient $f : T \rightarrow S$ un morphisme de schémas et $u : S \rightarrow S'$ un morphisme séparé.

- (i) Si f admet le séparateur $T \xrightarrow{h} E \xrightarrow{g} S$, alors uf admet le séparateur $T \xrightarrow{h} E \xrightarrow{ug} S'$.
- (ii) Si uf admet le séparateur $T \xrightarrow{h'} E' \xrightarrow{g'} S'$, alors g' se factorise par $u : g' = ug''$, et $T \xrightarrow{h'} E' \xrightarrow{g''} S$ est un séparateur pour f .

En particulier, si S est séparé, c'est-à-dire si le morphisme $S \rightarrow \text{Spec}(\mathbf{Z})$ est séparé, les notions de séparateur pour f et de séparateur "absolu" sont équivalentes.

Démonstration. Rappelons que deux séparateurs du même morphisme sont canoniquement isomorphes (proposition 3.1.1, *iii*). Le diagramme suivant résume la situation de l'énoncé.

$$\begin{array}{ccccc}
 E & \xleftarrow{h} & T & \xrightarrow{h'} & E' \\
 & \searrow g & \downarrow f & \swarrow g'' & \\
 & & S & & \\
 & & \downarrow u & \nearrow g' & \\
 & & S' & &
 \end{array}$$

i) Comme le morphisme ug est séparé, la conclusion de *i)* découle de la définition.

ii) D'après la propriété universelle du S' -séparateur E' (proposition 3.1.1, *iii*), il existe un unique S' -morphisme $g'' : E' \rightarrow S$ tel que $f = g''h'$. Il faut voir que le morphisme g'' est séparé; or, l'immersion fermée $\Delta_{g'} : E' \rightarrow E' \times_{S'} E'$ se décompose en

$$E' \xrightarrow{\Delta_{g''}} E' \times_S E' \xrightarrow{v} E' \times_{S'} E'$$

où v est une immersion; il résulte donc de A.1.1 que $\Delta_{g''}$ est une immersion fermée. \square

3.2. Enveloppes séparées.

3.2.1. Définition. Un S -schéma $f : T \rightarrow S$ admet une enveloppe séparée s'il existe un S -morphisme $\varphi : T \rightarrow F$, avec F séparé sur S , qui vérifie la propriété universelle (iii) de la proposition 3.1.1.

La proposition 3.1.1 dit qu'un séparateur est une enveloppe séparée. On trouvera en 7.3.1 un exemple de schéma (intègre noethérien de dimension 1) qui n'admet pas de séparateur bien qu'il possède une enveloppe séparée.

Voici une autre famille d'exemples. (Voir aussi l'exemple 6.4.1 et le §8.1.2.)

3.2.2. Proposition. Soient $U_0 \xrightarrow{i} U \xrightarrow{\theta} V$ deux morphismes de S -schémas. On suppose que les morphismes i et $j = \theta i$ sont des immersions ouvertes, et

qu'elles sont schématiquement dominantes (ce sera le cas si ces trois schémas sont intègres); enfin, on suppose que V est séparé sur S . On définit un S -schéma T par recollement de U et de V le long de U_0 . Alors

i) Ce schéma admet une enveloppe séparée.

ii) Supposons de plus que θ soit quasi-compact. Alors, pour que T admette un séparateur sur S il faut et il suffit que U_0 soit retrocompact dans U et que θ soit un isomorphisme local quasi-séparé.

Démonstration. Désignons par $u : U \rightarrow T$ et $v : V \rightarrow T$ les immersions ouvertes canoniques, de sorte qu'on a la figure suivante :

$$\begin{array}{ccc} U_0 & \xrightarrow{i} & U \\ j \downarrow & \searrow w & \downarrow u \\ V & \xrightarrow{v} & T \end{array}$$

où $w = ui = vj$; notons que les immersions ouvertes u, v et w sont schématiquement dominantes puisque $i : U_0 \rightarrow U$ et $j : U_0 \rightarrow V$ le sont et que le carré suivant de faisceaux sur T est cartésien

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_T & \longrightarrow & u_*(\mathcal{O}_U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ v_*(\mathcal{O}_V) & \longrightarrow & w_*(\mathcal{O}_{U_0}) \end{array}$$

comme il découle de la définition du recollement.

i) Soit $\varphi : T \rightarrow V$ le morphisme défini par $\varphi u = \theta$ et $\varphi v = \text{id}_V$. Montrons que φ est une enveloppe séparée. Soit $\psi : T \rightarrow Z$ un S -morphisme vers un S -schéma séparé Z . Comme $\varphi v = \text{id}_V$ on voit qu'il y a au plus une factorisation de ψ par φ . Pour l'existence de la factorisation on va montrer que $\psi = \psi v \varphi$, ce qui prouvera notre assertion.

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\varphi} & V \\ \psi \downarrow & \swarrow \psi v & \\ Z & & \end{array}$$

Puisque Z est séparé sur S , le schéma des coïncidences $\text{Ker}(\psi, \psi v \varphi)$ est un sous-schéma fermé de T [EGA G, 5.2.5]; pour voir qu'il est égal à T , il suffit de vérifier que l'immersion ouverte schématiquement dominante $w = ui = vj$ se factorise par lui, i.e. que l'on a $\psi v \varphi w = \psi w$. Or, on a $\psi v \varphi u i = \psi v \theta i$ puisque $\varphi u = \theta$; comme $\theta i = j$ on trouve bien $\psi v \varphi(ui) = \psi(vj)$.

ii) Supposons que T admette un séparateur sur S ; alors ce dernier est égal à φ en vertu de l'unicité de l'enveloppe séparée; cela implique que le morphisme $\varphi u = \theta$ soit un isomorphisme local; montrons que θ est quasi-séparé. Considérons le morphisme diagonal Δ_φ . En identifiant U et V avec les ouverts de T qui leur correspondent, on voit que $T \times_V T$ est recouvert par les ouverts $U \times_V U, U \times_V V, V \times_V U$ et $V \times_V V$; il faut prendre garde que dans

ces produits fibrés la structure de schéma sur V est donnée par φ ; restreint à ces ouverts, le morphisme diagonal s'écrit respectivement

$$\begin{array}{cccc} U \times_V U & U \times_V V & V \times_V U & V \times_V V \\ \Delta_\theta \uparrow & \uparrow (i,j) & (j,i) \uparrow & \parallel \\ U & U_0 & U_0 & V \end{array}$$

Puisque φ est un séparateur, il est quasi-séparé, ce qui implique que les morphismes Δ_θ et (i, j) sont quasi-compacts, et, en particulier, que θ est quasi-séparé. Composé avec l'isomorphisme $U \times_V V \simeq U$, le morphisme (i, j) devient $i : U_0 \rightarrow U$; la quasi-compacité de cette immersion ouverte signifie que U_0 est rétrocompact dans U . Les conditions indiquées sont donc nécessaires.

Abordons la réciproque. Il faut montrer que si θ est un isomorphisme local quasi-compact et quasi-séparé, et si U_0 est rétrocompact, alors φ est un séparateur. Le fait qu'il soit un isomorphisme local est clair, ainsi que sa quasi-compacité. Les hypothèses, et la décomposition du morphisme diagonal indiquée plus haut montrent que Δ_φ est quasi-compact, i.e. que φ est quasi-séparé. Il reste à voir que Δ_φ est schématiquement dominant, et il suffit de voir que Δ_θ est schématiquement dominant puisque, par hypothèse, i est schématiquement dominant. Considérons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\Delta_\theta} & U \times_V U \\ i \uparrow & & \uparrow i \times i \\ U_0 & \xrightarrow{\Delta_j} & U_0 \times_V U_0 \end{array}$$

Comme j est une immersion ouverte, Δ_j est un isomorphisme; pour pouvoir conclure il suffit donc de montrer que $i \times i$ est schématiquement dominant. Or l'immersion i est quasi-compacte et schématiquement dominante; le morphisme $i \times 1_{U_0} : U_0 \times_V U_0 \rightarrow U \times_V U_0$ est donc encore schématiquement dominant puisque $j : U_0 \rightarrow V$ est une immersion ouverte; et la platitude de $\theta : U \rightarrow V$ entraîne que $1_U \times i : U \times_V U_0 \rightarrow U \times_V U$ est schématiquement dominant (lemme A.4.3). \square

Dans cet esprit, on peut hasarder la conjecture suivante :

3.2.3. Conjecture. *Soit T un schéma intègre noethérien. On suppose qu'il existe un morphisme universellement fermé surjectif et birationnel de schémas noethériens intègres $p : T' \rightarrow T$, et que T' possède un séparateur. Alors T possède une enveloppe séparée $\varphi : T \rightarrow F$ au sens de la définition 3.2.1.*

Il est même possible qu'en désignant encore par T_1 l'adhérence schématique de la diagonale de $T \times T$, on ait une suite exacte dans la catégorie des schémas

$$T_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{d_0} \\ \xrightarrow{d_1} \end{array} T \xrightarrow{\varphi} F.$$

4. PASSAGE AU QUOTIENT

4.1. Représentabilité de certains faisceaux quotients.

4.1.1. Proposition. *Soient S un schéma et $d_0, d_1 : T_1 \rightrightarrows T_0$ un couple de morphismes de S -schémas provenant d'une relation d'équivalence sur T_0 . Notons $T_0 \xrightarrow{\varepsilon} T_1 \xrightarrow{d} T_0 \times_S T_0$ la décomposition canonique du morphisme diagonal, où $d = (d_0, d_1)$. On suppose que le morphisme ε est schématiquement dominant, et que d_0 et d_1 sont des isomorphismes locaux.*

Alors, le faisceau fppf quotient $\widetilde{T_0/T_1}$ est représenté par un schéma E sur S , et le morphisme canonique $h : T_0 \rightarrow E$ est un isomorphisme local. Si, de plus, d_0 et d_1 sont quasi-compacts, alors $h : T_0 \rightarrow E$ est quasi-compact.

Démonstration. On va définir un représentant du faisceau quotient $\widetilde{T_0/T_1}$ par recollement des ouverts séparés de T_0 le long d'ouverts attachés à la relation d'équivalence, et précisés plus bas.

Soit $U_0 \subset T_0$ un ouvert séparé; soit $U_1 \subset T_1$ la restriction à U_0 de la relation d'équivalence. On a donc un diagramme commutatif à carrés cartésiens, et dont les flèches verticales sont des immersions ouvertes

$$\begin{array}{ccccc} T_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & T_1 & \xrightarrow{d} & T_0 \times_S T_0 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ U_0 & \xrightarrow{\varepsilon'} & U_1 & \xrightarrow{d'} & U_0 \times_S U_0 \end{array}$$

Montrons que le morphisme ε' est un isomorphisme, i.e. une immersion fermée schématiquement dominante. En effet, c'est une immersion fermée d'après A.1.1 puisque le morphisme diagonal $d'\varepsilon' : U_0 \rightarrow U_0 \times_S U_0$ est une immersion fermée (U_0 est séparé sur S , cf. lemme A.2.1, et que d' est un monomorphisme; de plus ε' est schématiquement dominant puisque c'est la restriction à l'ouvert U_1 du morphisme schématiquement dominant ε).

Cela montre que la relation d'équivalence induit l'égalité sur les ouverts de T_0 qui sont séparés.

Soit maintenant U'_0 un second ouvert séparé de T_0 , et soit $W \subset T_1$ l'ouvert image réciproque de $U_0 \times_S U'_0 \subset T_0 \times_S T_0$, de sorte que les carrés de la figure suivante sont cartésiens

$$\begin{array}{ccccc} T_0 & \longrightarrow & T_1 & \xrightarrow{d} & T_0 \times_S T_0 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ U_0 \cap U'_0 & \longrightarrow & W & \longrightarrow & U_0 \times_S U'_0 \end{array}$$

Puisque d_0 et d_1 sont des isomorphismes locaux, ce sont des applications ouvertes; donc $d_0(W)$ est un ouvert de U'_0 , et $d_1(W)$ est un ouvert de U_0 .

Montrons que d_0 et d_1 induisent des isomorphismes

$$U'_0 \supset d_0(W) \xleftarrow{\sim} W \xrightarrow{\sim} d_1(W) \subset U_0.$$

Il suffit de voir que les restrictions de d_0 et d_1 à W sont des applications (ensemblistes) injectives puisqu'un isomorphisme local injectif est une immersion ouverte; montrons-le pour d_1 . Soient donc w et w' deux points de W tels que $d_1(w) = d_1(w')$; notant \sim la relation d'équivalence induite par T_1 sur les points de T_0 , on a, puisque $W \subset T_1$,

$$d_0(w) \sim d_1(w) = d_1(w') \sim d_0(w').$$

Par transitivité, on en tire l'équivalence $d_0(w) \sim d_0(w')$; mais ces deux éléments sont dans l'ouvert séparé U'_0 , et sur un tel ouvert, on a vu que la relation d'équivalence est l'identité; donc $d_0(w) = d_0(w')$, et cela entraîne l'égalité voulue $w = w'$ puisque le morphisme $d = (d_0, d_1)$ est une immersion.

On va définir le *schéma* qui représentera le quotient en recollant les couples d'ouverts séparés de T_0 le long des ouverts du type $d_0(W)$ et $d_1(W)$ introduits ci-dessus. Précisément, soit (U_λ) un recouvrement de T_0 par des ouverts séparés, par exemple des ouverts affines [EGA G, 5.3]. Pour tout couple (λ, μ) on note $W_{\lambda\mu}$ l'ouvert de T_1 induit par l'ouvert $U_\lambda \times_S U_\mu$, de sorte qu'on a un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} W_{\lambda\mu} & \longrightarrow & U_\lambda \times_S U_\mu \\ \downarrow & & \downarrow \\ T_1 & \xrightarrow{d} & T_0 \times_S T_0 \end{array}$$

D'après ce qui précède, les projections d_0 et d_1 induisent des isomorphismes de $W_{\lambda\mu}$ sur les images $d_0(W_{\lambda\mu}) = V_{\mu\lambda}$ et $d_1(W_{\lambda\mu}) = V_{\lambda\mu}$, lesquelles sont des ouverts; il existe donc un unique isomorphisme $\varphi_{\mu\lambda}$ rendant commutatif le diagramme suivant

$$(4.1) \quad \begin{array}{ccc} & W_{\lambda\mu} & \\ d_1 \swarrow & & \searrow d_0 \\ U_\lambda \supset V_{\lambda\mu} & \xrightarrow{\varphi_{\mu\lambda}} & V_{\mu\lambda} \subset U_\mu \end{array}$$

Comme ces trois flèches sont des isomorphismes, et que l'on peut se représenter $W_{\lambda\mu}$ comme l'ensemble des couples $(x, y) \in U_\lambda \times U_\mu$ tels que $x \sim y$, l'isomorphisme $\varphi_{\mu\lambda}$ est caractérisé par la propriété suivante :

Pour $x \in V_{\lambda\mu}$, $\varphi_{\mu\lambda}(x)$ est l'unique élément $y \in U_\mu$ tel que $x \sim y$.

Il faut vérifier la *condition de recollement*; elle sera une conséquence de la transitivité de la relation d'équivalence comme on va le voir en suivant [EGA G, 4.1.7], dont nous adoptons les notations, et aussi [TG, I.16].

Il est clair que $\varphi_{\lambda\lambda}$ est l'identité de U_λ . La condition de recollement à vérifier s'énonce alors ainsi (*loc. cit.*) : pour tout triplet (λ, μ, ν) , on a $\varphi_{\mu\lambda}(V_{\lambda\mu} \cap V_{\lambda\nu}) \subset V_{\mu\nu}$, et, sur cette intersection, on a

$$\varphi_{\nu\lambda} = \varphi_{\nu\mu} \circ \varphi_{\mu\lambda}.$$

Or, soit $x \in V_{\lambda\mu} \cap V_{\lambda\nu}$; la caractérisation des isomorphismes φ conduit aux relations

$$\varphi_{\mu\lambda}(x) \sim x \sim \varphi_{\nu\lambda}(x)$$

La transitivité de la relation d'équivalence montre qu'on a donc un couple d'éléments équivalents

$$(\varphi_{\mu\lambda}(x), \varphi_{\nu\lambda}(x)) \in U_\mu \times U_\nu.$$

L'interprétation des ouverts W rappelée en (4.1) implique l'existence d'un unique élément $z \in W_{\mu\nu}$ tel que $\varphi_{\mu\lambda}(x) = d_1(z)$ et $\varphi_{\nu\lambda}(x) = d_0(z)$; cela s'écrit aussi

$$\varphi_{\nu\lambda}(x) = \varphi_{\nu\mu}(\varphi_{\mu\lambda}(x)).$$

La condition de recollement est donc satisfaite.

Soit E le schéma défini par le recollement des schémas U_λ en identifiant l'ouvert $V_{\lambda\mu} \subset U_\lambda$ à l'ouvert $V_{\mu\lambda} \subset U_\mu$ au moyen de l'isomorphisme $V_{\lambda\mu} \xrightarrow{\varphi_{\mu\lambda}} V_{\mu\lambda}$. On aura remarqué les inclusions $U_\lambda \cap U_\mu \subset V_{\lambda\mu}$ et que l'isomorphisme $\varphi_{\mu\lambda}$ induit l'identité sur $U_\lambda \cap U_\mu$; ainsi les recollements qui définissent T_0 sont conséquences de ceux qui définissent E : on recolle « davantage ». Il existe donc un morphisme de schémas $h : T_0 \rightarrow E$; c'est un isomorphisme local surjectif puisque la restriction de h aux ouverts U_λ est une immersion ouverte; enfin, la définition du recollement signifie que les carrés

$$\begin{array}{ccc} W_{\lambda\mu} & \xrightarrow{d_1} & U_\lambda \\ d_0 \downarrow & & \downarrow h \\ U_\mu & \xrightarrow{h} & E \end{array}$$

sont *cartésiens*; comme les ouverts de la forme $U_\lambda \times_E U_\mu$ recouvrent $T_0 \times_E T_0$, le morphisme canonique

$$(4.2) \quad T_1 \longrightarrow T_0 \times_E T_0$$

est un isomorphisme.

Cet isomorphisme permet de conclure que E représente le faisceau quotient $\widetilde{T_0/T_1}$; rappelons l'argument. Par définition, on a une suite exacte de faisceaux (où la notation \widetilde{X} désigne ici le faisceau fppf représenté par le schéma X)

$$\widetilde{T_1} \begin{array}{c} \xrightarrow{d_1} \\ \xrightarrow{d_0} \end{array} \widetilde{T_0} \longrightarrow \widetilde{T_0/T_1}.$$

On a donc un morphisme de faisceaux $\widetilde{T_0/T_1} \rightarrow \widetilde{E}$, qui est surjectif puisque $T_0 \rightarrow E$ est un isomorphisme local surjectif, donc un morphisme fppf ; mais ce morphisme de faisceaux est aussi injectif en vertu de l'isomorphisme (4.2).

Supposons de plus que les morphismes d_0 et d_1 soient quasi-compacts, et montrons que $h : T_0 \rightarrow E$ est alors quasi-compact. Lorsque U parcourt les ouverts affines de T_0 les $h(U) \subset E$ sont des ouverts, d'ailleurs isomorphes à U , et qui recouvrent E . Il faut donc voir que pour un tel U , l'ouvert $h^{-1}h(U)$ est quasi compact. Or, on a $h^{-1}h(U) = d_0(d_1^{-1}(U))$; de plus l'ouvert $d_1^{-1}(U)$ est quasi-compact puisque d_1 est un morphisme quasi-compact, et l'image par le morphisme surjectif d_0 d'un quasi-compact est quasi-compact. \square

4.1.2. *Remarque.* Contrairement à l'énoncé trop optimiste figurant dans des versions antérieures de ce texte, on ne peut pas se passer d'une hypothèse sur le morphisme $\varepsilon : T_0 \rightarrow T_1$. En effet, L. MORET-BAILLY nous a fait remarquer que, d'après HIRONAKA, il existe un schéma X , propre sur un corps et muni de l'action d'un groupe G à deux éléments, tels que l'action soit libre et que l'espace algébrique quotient ne soit pas un schéma [Knu71, p. 14]. Or, l'action étant libre, le morphisme $G \times X \rightarrow X \times_S X$ est un monomorphisme, et c'est même une immersion fermée puisque X est propre ; donc $G \times X \simeq X \sqcup X$ est une relation d'équivalence sur X et les deux projections sur X sont des isomorphismes locaux.

5. CRITÈRES D'EXISTENCE D'UN SÉPARATEUR

Dans ce paragraphe nous donnons des critères pour qu'un schéma T sur S admette un séparateur.

5.1. Deux énoncés proches.

5.1.1. **Théorème.** *Soit $f : T \rightarrow S$ un morphisme quasi-séparé, et soit $T_1 \subset T \times_S T$ l'adhérence schématique de la diagonale $\Delta_f : T \rightarrow T \times_S T$. Considérons les propriétés suivantes.*

- (i) *Le morphisme f admet un séparateur (définition 2.1.1).*
- (ii) *Les morphismes composés $T_1 \rightarrow T \times_S T \rightrightarrows T$ sont plats et de type fini.*

Alors on a l'implication (i) \Rightarrow (ii) ; la réciproque est vraie si, de plus, l'ensemble des composantes irréductibles de T est localement fini.

5.1.2. *Remarque.* Soit $h : T \rightarrow E$ un séparateur. La propriété pour le morphisme Δ_h d'être schématiquement dominant signifie intuitivement que h induit "génériquement" une injection ; c'est le cas si T est intègre. Une caractérisation précise est donnée dans la proposition 2.2.1.

Lorsque T n'est pas intègre, la condition sur le morphisme diagonal Δ_h est bien nécessaire pour obtenir la platitude de T_1 évoquée en ii). Voici, en effet, un exemple d'isomorphisme local $h : T \rightarrow E$ sur un schéma noethérien

affine, pour lequel T_1 n'est pas plat sur T ; cet isomorphisme local h n'admet donc pas de séparateur.

Soient k un corps et $A = k[X, Y]/(XY)$; on pose $E = \text{Spec}(A)$ (deux droites sécantes). Notons que le complémentaire de la droite $X = 0$ est la droite époincée $U_0 = \text{Spec}(A_X) = \text{Spec}(k[X]_X)$. Soit T le schéma obtenu en recollant deux exemplaires U et V de $\text{Spec}(A)$ le long de l'ouvert U_0 (deux droites sécantes, l'une étant dédoublée). Comme U et V sont isomorphes à E , on a un isomorphisme local $h : T \rightarrow E$. Restreint à l'ouvert $U \times_E V \subset T \times_E T$, le morphisme Δ_h s'écrit

$$(\star) \quad U \cap V \rightarrow U \times_E V.$$

Mais, h induisant un isomorphisme $V \simeq E$, la projection sur U est un isomorphisme $U \times_E V \xrightarrow{\sim} U$ qui permet d'identifier l'application (\star) ci-dessus à l'immersion ouverte $\text{Spec}(A_X) = U_0 \rightarrow U = \text{Spec}(A)$; sa factorisation par adhérence schématique correspond aux morphismes d'anneaux

$$A \rightarrow A/YA \rightarrow A_X, \quad \text{soit} \quad k[X, Y]/(XY) \rightarrow k[X] \rightarrow k[X]_X.$$

Il est clair que A/YA n'est pas plat sur A . \square

Cependant, des hypothèses légèrement plus restrictives, et plus maniables, rendent inutile la condition sur Δ_h ; elles conduisent à l'énoncé suivant :

5.1.3. Proposition. *Soient S un schéma intègre de point générique η , et $f : T \rightarrow S$ un morphisme plat et quasi-séparé. Considérons les propriétés suivantes :*

- (i) *Le morphisme f se factorise en*

$$T \xrightarrow{h} E \xrightarrow{g} S$$

où g est séparé et où h est un isomorphisme local quasi-compact et qui induit un isomorphisme $T_\eta \xrightarrow{\sim} E_\eta$.

- (ii) *La fibre générique $T_\eta \rightarrow \eta$ est séparée, et en désignant par $T_1 \subset T \times_S T$ l'adhérence schématique de la diagonale $\Delta_f : T \rightarrow T \times_S T$, les morphismes composés $T_1 \rightarrow T \times_S T \rightrightarrows T$ sont plats et de type fini.*

Alors on a l'implication (i) \Rightarrow (ii) ; la réciproque est vraie si, de plus, l'ensemble des composantes irréductibles de T est localement fini.

Si ces propriétés sont vérifiées, le morphisme h de (i) est un séparateur i.e. h est aussi quasi-séparé et Δ_h est schématiquement dominant.

5.2. Démonstration du théorème 5.1.1 et de la proposition 5.1.3.

5.2.1. *i) \Rightarrow ii).* Supposons que f se factorise en $T \xrightarrow{h} E \xrightarrow{g} S$. Comme $h : T \rightarrow E$ est un isomorphisme local quasi-compact il en est de même des projections $T \times_E T \rightrightarrows T$; en particulier, elles sont plates et de type fini.

Considérons le diagramme suivant où le carré est cartésien

$$\begin{array}{ccccc} T & \xrightarrow{\Delta_h} & T \times_E T & \xrightarrow{\Delta'} & T \times_S T \\ & & \downarrow & & \downarrow h \times h \\ & & E & \xrightarrow{\Delta_g} & E \times_S E \end{array}$$

Notons que le morphisme diagonal Δ_h est quasi-compact, i.e. h est quasi-séparé : c'est une des hypothèses du théorème 5.1.1, et l'hypothèse de quasi-séparation de f dans la proposition 5.1.3 implique que le composé $\Delta' \Delta_h$ est quasi-compact, donc que Δ_h l'est aussi puisque Δ' est une immersion (cf. A.1.1).

Montrons que l'adhérence schématique T_1 de la diagonale dans $T \times_S T$ s'identifie à $T \times_E T$, ce qui entraînera que les projections $d_0, d_1 : T_1 \rightrightarrows T$ sont des isomorphismes locaux quasi-compacts. Comme g est séparé, le morphisme diagonal Δ_g est une immersion fermée ; donc Δ' est aussi une immersion fermée ; il reste donc à voir que l'application

$$(*) \quad \mathcal{O}_{T \times_E T} \longrightarrow (\Delta_h)_*(\mathcal{O}_T)$$

est injective, i.e. que Δ_h est schématiquement dominant ; or, cela fait partie des hypothèses sur h dans le théorème 5.1.1, *i*). Sous les hypothèses de la proposition 5.1.3 *i*), les morphismes $T \rightarrow S$ et $T \rightarrow E$ sont plats, donc $T \times_E T$ est plat sur S ; par suite (lemme A.5.1), le morphisme $(T \times_E T)_\eta \rightarrow T \times_E T$ est schématiquement dominant ; par hypothèse, le morphisme générique $T_\eta \rightarrow E_\eta$ est un isomorphisme, donc le morphisme diagonal induit un isomorphisme $T_\eta \xrightarrow{\sim} (T \times_E T)_\eta$ sur les fibres génériques ; par suite, le morphisme $\Delta_h \circ i : T_\eta \rightarrow T \times_E T$ est schématiquement dominant ; ainsi, le morphisme vertical de gauche dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{T \times_E T} & \xrightarrow{(*)} & (\Delta_h)_*(\mathcal{O}_T) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\Delta_h \circ i)_*(\mathcal{O}_{T_\eta}) & \xlongequal{\quad} & (\Delta_h)_* i_*(\mathcal{O}_{T_\eta}) \end{array}$$

est injectif. L'injectivité de $(*)$ provient donc de la commutativité de ce diagramme.

On a donc vérifié que les deux morphismes composés $T_1 \rightarrow T \times_S T \rightrightarrows T$ sont des isomorphismes locaux quasi-compacts, et aussi que h est un séparateur sous les hypothèses de la proposition 5.1.3 *i*).

5.2.2. Réciproquement, on suppose maintenant que l'ensemble des composantes irréductibles de T est localement fini, et que les morphismes $d_0, d_1 : T_1 \rightrightarrows T$ sont plats et de type fini, et on va montrer que ce sont des isomorphismes locaux quasi-compacts. Par symétrie, il suffit de le faire pour d_0 , et on peut supposer que S est affine.

Il s'agit d'exhiber un recouvrement de T_1 par des ouverts W sur lesquels d_0 induit une immersion ouverte dans T , i.e tels que $d_0(W)$ soit un ouvert de T et que d_0 induise un isomorphisme de $W \xrightarrow{\sim} d_0(W)$.

Or, le schéma $T \times_S T$ est recouvert par les ouverts affines de la forme $U \times_S V$, pour U et V des ouverts affines de T . Considérons la factorisation par adhérence schématique du morphisme diagonal, soit $T \rightarrow T_1 \rightarrow T \times_S T$, et sa restriction à $U \times_S V$:

$$U \cap V \xrightarrow{v} W \xrightarrow{u} U \times_S V,$$

où u est une immersion fermée et où v est une immersion ouverte (lemme A.5.2), schématiquement dominante, et quasi compacte puisque uv est quasi-compact (T est quasi-séparé). Le schéma W est affine comme sous-schéma fermé du schéma affine $U \times_S V$. En composant avec la projection sur V , on obtient les morphismes

$$U \cap V \xrightarrow{v} W \xrightarrow{d_0} V.$$

Par hypothèse, le morphisme $W \rightarrow V$ est plat et de type fini ; la proposition 2.3.2 permet donc de conclure que d_0 est une immersion ouverte.

Puisque les morphismes $d_0, d_1 : T_1 \rightrightarrows T$ sont plats, on peut appliquer la proposition B.2.1 à la relation triviale T_* , celle pour laquelle pour tout n , $T_n = T$, muni de l'application diagonale dans T^{n+1} ; on en tire que les morphismes $d_0, d_1 : T_1 \rightrightarrows T$ définissent une relation d'équivalence sur T . Mais on vient de voir que ces morphismes sont des isomorphismes locaux de type fini, et, de plus, le morphisme canonique $\varepsilon : T \rightarrow T_1$ est schématiquement dominant par construction ; la proposition 4.1.1 affirme alors qu'il existe un S -schéma E et un isomorphisme local quasi-compact et surjectif de S -schémas $h : T \rightarrow E$ tel que $T_1 \rightarrow T \times_E T$ soit un isomorphisme. Il reste à voir que E est séparé sur S ; mais h est fidèlement plat et quasi-compact, et on dispose du carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} T_1 = T \times_E T & \xrightarrow{d} & T \times_S T \\ \downarrow & & \downarrow h \times h \\ E & \xrightarrow{\Delta_g} & E \times_S E \end{array}$$

dans lequel d est une immersion fermée puisque T_1 est une adhérence schématique ; donc Δ_g est une immersion fermée [EGA IV₂, 2.3.13].

Enfin le morphisme diagonal $\Delta_h : T \rightarrow T \times_E T$ est schématiquement dominant puisqu'il s'identifie au morphisme $\varepsilon : T \rightarrow T_1$.

Dans la proposition 5.1.3 *ii*), on suppose de plus que S est intègre de point générique η , et que la fibre générique $T_\eta \rightarrow \eta$ est séparée ; on en déduit que l'immersion diagonale $T_\eta \rightarrow T_\eta \times_\eta T_\eta$ est fermée, donc que $T_\eta = T_{1\eta}$, ce qui entraîne l'isomorphisme $T_\eta \xrightarrow{\sim} E_\eta$.

Ceci conclut les deux démonstrations. \square

5.3. Conséquences.

5.3.1. Corollaire. *Soit S un schéma normal dont l'ensemble des composantes irréductibles est localement fini. Soit $f : T \rightarrow S$ un morphisme étale quasi-compact et quasi-séparé. Alors f admet un séparateur $h : T \rightarrow E$, et pour tout point maximal η de S , ce morphisme induit un isomorphisme $T_\eta \xrightarrow{\sim} E_\eta$. Enfin, le morphisme $E \rightarrow S$ est étale quasi-compact et quasi-séparé.*

Démonstration. Comme les anneaux locaux de S sont intègres, les composantes irréductibles de ce schéma sont deux à deux disjointes ; elles sont donc ouvertes puisque leur ensemble est localement fini ; ainsi S est somme de ses composantes irréductibles. On peut donc supposer que S est intègre ; soit η son point générique.

Vérifions que les conditions de la proposition 5.1.3, *ii*) sont satisfaites. On note d'abord que, f étant étale et quasi-compact, la fibre générique $T_\eta \rightarrow \eta$, est discrète (donc séparée) et a un nombre fini de points, qui sont les points maximaux de T . Comme $T \times_S T$ est étale sur le schéma normal S , c'est un schéma normal ([EGA IV₃, 11.3.13], ou plus directement RAYNAUD [Ray70, p. 75]). En particulier, les anneaux locaux de ce schéma sont intègres. D'autre part, l'ensemble des points maximaux de $T \times_S T$ est fini puisqu'il est égal à l'ensemble des points de la fibre $(T \times_S T)_\eta = T_\eta \times_\eta T_\eta$, laquelle est un schéma fini sur le corps η ; enfin, le morphisme diagonal $\Delta_f : T \rightarrow T \times_S T$ est quasi-compact puisque f est quasi-séparé. Toutes les hypothèses du lemme A.5.5 sont satisfaites, et on en tire que l'adhérence schématique T_1 de la diagonale est un ouvert et fermé de $T \times_S T$; chacun des morphismes $d_0, d_1 : T_1 \rightrightarrows T$ est donc plat et de type fini. \square

5.3.2. Corollaire. *Soit T un schéma quasi-séparé dont l'ensemble des composantes irréductibles est localement fini. Alors T admet un séparateur si et seulement si pour tout couple U, V d'ouverts affines de T , le schéma $U \cup V$ admet un séparateur. Il suffit même pour cela qu'il existe un recouvrement de T par des ouverts affines U_λ tel que chaque réunion $U_\lambda \cup U_\mu$ de deux d'entre eux admette un séparateur.*

Démonstration. Montrons que la condition est nécessaire. Soient U et V deux ouverts affines. Puisque T est quasi-séparé, l'intersection d'un ouvert affine avec $U \cup V$ est quasi-compacte, autrement dit, l'ouvert $U \cup V$ est rétrocompact dans T ; il suffit donc d'appliquer la proposition 3.1.1, *i*).

Montrons que la condition est suffisante. L'ouvert $(U \cup V) \times (U \cup V) \subset T \times T$ est réunion des ouverts $U \times U, U \times V, V \times U$ et $V \times V$; les traces du fermé $T_1 \rightarrow T \times T$ sur le premier et le dernier de ces ouverts sont isomorphes, respectivement, à U et à V ; elle sont donc plates et de type fini sur T sans hypothèses. Notons $W = T_1 \cap (U \times V)$; l'hypothèse et l'implication *i*) \Rightarrow *ii*) du théorème 5.1.1, montrent que les deux projections $d_1 : W \rightarrow U$ et $d_0 : W \rightarrow V$ sont plates et de type fini. Toujours parce que T est quasi-séparé, les immersions ouvertes $U \rightarrow T$ et $V \rightarrow T$ sont (plates et) de type

fini ; enfin, les ouverts $U \times V$, avec U et V affines, forment un recouvrement de $T \times T$; on voit donc que les deux projections de T_1 sur T sont plates et de type fini ; il suffit alors, pour pouvoir conclure, d'invoquer l'implication $ii) \Rightarrow i)$ du théorème 5.1.1. \square

5.3.3. Proposition. *Un schéma localement noethérien régulier de dimension 1 admet un séparateur.*

Démonstration. Elle utilise l'implication $ii) \Rightarrow i)$ du théorème 5.1.1. Soit T un schéma localement noethérien régulier de dimension 1. Comme les anneaux locaux de T sont intègres, les composantes irréductibles de T sont deux à deux disjointes ; elles sont donc ouvertes puisque leur ensemble est localement fini. On suppose donc désormais que T est intègre. Soit T_1 l'adhérence schématique de la diagonale dans $T \times T$, de sorte qu'on a les morphismes

$$T \xrightarrow{\varepsilon} T_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{d_0} \\ \xrightarrow{d} \\ \xrightarrow{d_1} \end{array} T \times T \rightrightarrows T$$

On va montrer directement (i.e. sans utiliser la proposition 2.3.2) que les d_i sont des isomorphismes locaux de type fini. Il suffit de le faire pour, disons, d_0 . Soient donc U et V deux ouverts affines non vides de T , et considérons la restriction à $U \times V$ de la factorisation de la diagonale par adhérence schématique, soit

$$U \cap V \xrightarrow{v} W \xrightarrow{u} U \times V$$

où u est une immersion fermée et où v est une immersion ouverte (lemme A.5.2), schématiquement dominante. En composant avec la projection sur V , on obtient les morphismes

$$U \cap V \xrightarrow{v} W \xrightarrow{d_0} V,$$

et il s'agit de voir que d_0 est une immersion ouverte. Les schémas V et W sont affines. Montrons d'abord que l'ensemble $d_0(W)$ est ouvert : comme V est noethérien intègre de dimension 1 et que $U \cap V$ est non vide, le fermé complémentaire $V - U \cap V$ est un ensemble fini de points fermés, donc l'ensemble $V - d_0(W)$, qui est contenu dans $V - U \cap V$, est fermé.

Puisque v est schématiquement dominant, l'anneau $B = \Gamma(W, \mathcal{O}_W)$ est contenu dans le corps des fractions K de l'anneau de Dedekind $A = \Gamma(V, \mathcal{O}_V)$; pour tout idéal premier \mathfrak{p} de A , $B_{\mathfrak{p}}$ est donc égal à K , ou à $A_{\mathfrak{p}}$, et ce dernier cas correspond aux \mathfrak{p} qui se relèvent à B , c'est-à-dire aux idéaux premiers correspondant aux points de l'ouvert $d_0(W)$, puisque W est affine. Ainsi, d_0 permet d'identifier W à l'ouvert $d_0(W)$ de V ; enfin, d_0 est de type fini puisque c'est une immersion ouverte affine [EGA G, 6.3.4]. \square

6. OUVERTS ADMETTANT UN SÉPARATEUR

6.1. Énoncé et premières réductions.

6.1.1. Théorème. *Soit R un anneau noethérien et $T \rightarrow \text{Spec}(R)$ un morphisme de type fini. On suppose que T est intègre et normal. Alors il existe un ouvert U de T contenant tous les points de codimension 1, et possédant un séparateur.*

Soit U un ouvert non vide. Comme T est intègre, les points de codimension 1 de T qui ne sont pas dans U sont des points maximaux du fermé $T - U$; ils sont donc en nombre fini. Par suite, le théorème est une conséquence immédiate du résultat suivant :

6.1.2. Proposition. *Gardons les mêmes hypothèses sur R et T . Soit U un ouvert non vide admettant un séparateur, et soit s un point de T de codimension 1. Alors, il existe un ouvert $U' \subset U$, contenant tous les points de codimension 1 de U , et un ouvert affine V de T contenant s tels que $U' \cup V$ admette un séparateur.*

La démonstration utilise la conséquence suivante de 5.1.1; désormais, et sauf mention expresse du contraire, tous les produits de schémas seront des produits sur $\text{Spec}(R)$ sans que cette base soit mentionnée.

6.1.3. Lemme. *Soit $X = U \cup V$ un schéma réunion de deux ouverts. On suppose que les schémas U et V admettent un séparateur. Alors X admet un séparateur si les deux projections*

$$\begin{array}{ccc} & \overline{U \cap V} & \\ d_0 \swarrow & \downarrow & \searrow d_1 \\ V & \longleftarrow U \times V \longrightarrow & U \end{array}$$

d_0, d_1 sont plates et de type fini, où, par abus de notation, $\overline{U \cap V}$ désigne l'adhérence schématique de $U \cap V$ dans $U \times V$.

Démonstration. Soit X_1 l'adhérence schématique de la diagonale dans $X \times X$. D'après le théorème 5.1.1, le schéma X admet un séparateur si et seulement si les deux projections $X_1 \rightarrow X \times X \rightrightarrows X$ sont plates et de type fini; cela se vérifie sur les ouverts du recouvrement

$$(U \times U, V \times V, U \times V, V \times U)$$

de $X \times X$; ce recouvrement induit sur le fermé X_1 le recouvrement

$$(U_1, V_1, \overline{U \cap V}, \overline{V \cap U}).$$

Puisque les schémas U et V admettent un séparateur, les projections de source les schémas U_1 et V_1 sont plates et de type fini. L'hypothèse sur $\overline{U \cap V}$, et l'isomorphisme de symétrie $U \times V \simeq V \times U$, entraînent donc la conclusion. \square

6.2. Construction de l'ouvert U' . Posons $S = \text{Spec}(\mathcal{O}_{T,s})$; c'est le spectre d'un anneau de valuation discrète puisque T est normal intègre et noethérien. Notons $F = \overline{U \cap S}$ l'adhérence *schématique* de $U \cap S$ dans $U \times S$. On peut écarter le cas où s est déjà dans U , et donc supposer que l'ouvert $U \cap S$ de S est réduit à son point générique η . Comme U est de type fini sur R , le morphisme d_0 de projection $F \rightarrow U \times S \rightarrow S$ est de type fini; soit $F_s = d_0^{-1}(s)$ sa fibre fermée. Pour tout $x \in F_s$ l'homomorphisme $\mathcal{O}_{T,s} \rightarrow \mathcal{O}_{F,x}$ est un isomorphisme, en vertu de la maximalité de l'anneau de valuation discrète $\mathcal{O}_{T,s}$ dans son corps des fractions $K = \mathcal{O}_{T,\eta}$; de sorte que, si $F_s \neq \emptyset$, le schéma F est la réunion d'un ensemble fini de copies de S recollées en leur point générique. Soit $Z \subset d_1(F_s) \subset U$ l'ensemble (éventuellement vide) des points $d_1(x)$ qui sont de codimension > 1 dans U ; c'est un ensemble fini, et on pose

$$U' = U \cap (T - \bar{Z}).$$

Comme la formation de l'adhérence schématique commute à la restriction à l'ouvert $U' \times S \subset U \times S$, le schéma $F' = d_1^{-1}(U')$ est l'adhérence schématique de $U' \cap S$ dans $U' \times S$. La projection $d_1 : F' \rightarrow U'$ est un morphisme plat puisque pour tout $x \in F'$ tel que $d_0(x) = s$, l'anneau $\mathcal{O}_{U',d_1(x)}$ est de valuation discrète.

6.3. Démonstration de la proposition 6.1.2. En vertu de ce qui précède, quitte à remplacer U par U' on peut faire l'hypothèse supplémentaire

6.3.1. *Le morphisme composé $F = \overline{U \cap S} \rightarrow U \times S \rightarrow U$ est plat.*

Nous commencerons par trouver un voisinage ouvert affine V_1 de s tel que la projection $\overline{U \cap V_1} \rightarrow V_1$ soit plate, puis un ouvert $V_2 \subset V_1$ contenant s , et tel que la projection $\overline{U \cap V_2} \rightarrow U$ soit plate; on pourra alors conclure du lemme 6.1.3 que l'ouvert $U \cup V_2$ admet un séparateur.

Pour la commodité du lecteur, rappelons un résultat général de passage à la limite énoncé ici sous les hypothèses particulières où nous l'utiliserons pour trouver l'ouvert V_1 .

6.3.2 ([EGA IV₃, 11.2.6 (ii)]). *Soient S_0 un schéma affine, (S_λ) un système projectif de S_0 -schémas affines, de sorte que la limite projective de ce système est un schéma affine noté $S = \varprojlim S_\lambda$.*

Soient X_0 un S_0 schéma de présentation finie, $X_\lambda = S_\lambda \times_{S_0} X_0$ et $X = \varprojlim X_\lambda = S \times_{S_0} X_0$.

Alors, X est plat sur S si et seulement si il existe λ tel que le morphisme $X_\lambda \rightarrow S_\lambda$ soit plat. \square

Soit V_0 un ouvert affine de T contenant s ; notons \mathbf{V} l'ensemble des ouverts affines de T contenant s et contenus dans V_0 ; les systèmes projectifs considérés seront indexés par \mathbf{V} ; en particulier,

$$\varprojlim_{\mathbf{V}} V = \text{Spec}(\mathcal{O}_{T,s}) = S$$

Pour $V \in \mathbf{V}$ on désigne par $F_V = \overline{U \cap V}$ l'adhérence schématique de $U \cap V$ dans $U \times V$.

Pour deux ouverts de \mathbf{V} , $V' \subset V$, le carré

$$\begin{array}{ccc} F_{V'} & \longrightarrow & V' \\ \downarrow & & \downarrow \\ F_V & \longrightarrow & V \end{array}$$

est cartésien puisque la formation de l'adhérence schématique commute au changement de base plat $V' \subset V$ (lemme A.5.1, [EGA IV₂, 2.3.2]). Comme les morphismes $V \rightarrow V_0$ sont des immersions ouvertes affines, il en est de même des morphismes $F_V \rightarrow F_{V_0}$; ils permettent d'identifier F_V à un ouvert de F_{V_0} , et aussi d'écrire

$$F = \bigcap F_V.$$

Montrons comment trouver un ouvert V tel que la projection

$$F_V \rightarrow U \times V \rightarrow V$$

soit plate. Puisque U est de type fini sur le schéma noethérien $\text{Spec}(R)$, et que F_V est fermé dans $U \times V$, F_V est de présentation finie sur V . On peut donc utiliser 6.3.2 en remplaçant les données $(S_0, (S_\lambda), X_0)$ par $(V_0, (V)_{V \in \mathbf{V}}, F_{V_0})$; la limite $X = \varprojlim X_\lambda = S \times_{S_0} X_0$ est ici $F = \varprojlim F_V = S \times_{V_0} F_{V_0}$.

Or, en passant à la limite sur les $V \in \mathbf{V}$, on trouve les morphismes

$$\varprojlim U \cap V = U \cap S = \eta \rightarrow \varprojlim F_V = F \rightarrow \varprojlim V = S$$

Le morphisme de type fini $d_0 : F \rightarrow S$ est plat puisque S est un trait. D'après 6.3.2 il donc existe $V_1 \in \mathbf{V}$ tel que le morphisme $d_0 : F_{V_1} \rightarrow V_1$ soit plat; notons qu'alors pour tout $V \in \mathbf{V}$ tel que $V \subset V_1$, le morphisme $F_V \rightarrow V$ est plat.

Considérons maintenant la projection sur l'autre facteur $d_1 : F_{V_1} \rightarrow U$. Soit $W \subset F_{V_1}$ son ouvert (non vide) de platitude ([EGA IV₃, 11.1.1]). La platitude du morphisme $F \rightarrow U$ (hypothèse 6.3.1), se traduit par l'inclusion $F \subset W$; en identifiant les F_V à des ouverts de F_{V_1} , elle s'écrit aussi

$$\bigcap F_V \subset W,$$

pour V parcourant la famille des ouverts affines de T , contenant s et contenus dans V_1 . Le théorème 7.2.5 de [EGA G] montre alors qu'il existe $V_2 \subset V_1$ tel que F_{V_2} soit contenu dans W , donc tel le morphisme $F_{V_2} \rightarrow U$ soit plat. Mais plutôt que d'invoquer le résultat très général de loc.cit., on peut, sous nos hypothèses très particulières, esquisser une idée de la démonstration : soit $X = F_{V_1} - W$ le schéma réduit induit sur ce fermé; posons $Y_V = F_V \cap X$; on obtient une famille filtrante d'ouverts de X d'intersection vide, et il faut voir que l'un des Y_V est vide; comme X est quasi-compact et que la famille est filtrante on peut supposer de plus que X est affine; puisque les immersions

ouvertes $F_V \subset F_{V_1}$ sont affines, les ouverts Y_V sont alors affines ; mais une limite inductive d'anneaux ne peut être nulle que si l'un d'eux l'est déjà. \square

6.4. Un exemple.

6.4.1. *Exemple.* Soit $Y = \text{Spec}(R)$ le spectre d'un anneau local régulier de dimension 2 ; notons y son point fermé et Y' l'ouvert complémentaire. Soit $p : X \rightarrow Y$ le morphisme d'éclatement de Y en l'idéal maximal \mathfrak{m} de R , de sorte que p induit un isomorphisme $p^{-1}(Y') \xrightarrow{\sim} Y'$; on note x le point générique de $p^{-1}(y)$. Soit T le schéma obtenu par recollement de X et de Y le long de Y' ; plus précisément, T est défini par l'exactitude (dans la catégorie des schémas) de la suite

$$Y' \simeq p^{-1}(Y') \xrightarrow[p]{j} X \sqcup Y \longrightarrow T$$

où $j : Y' \rightarrow X$ désigne l'immersion ouverte $p^{-1}(Y') \rightarrow X$.

On désignera par le même symbole les éléments ou parties de X et de Y et leur image dans T .

Alors,

- (a) Le schéma T est régulier de dimension 2.
- (b) L'ouvert X de T est séparé et $T - X = \{y\}$; en particulier X contient les points de T de codimension 1.
- (c) Aucun ouvert de T contenant x et y n'admet de séparateur.
- (d) L'ouvert (séparé) Y de T est maximal parmi les ouverts admettant un séparateur, mais il ne contient pas le point x qui est de codimension 1.

Vérifions (c). Soit U un ouvert de T contenant x et y ; il contient donc l'ouvert Y ; par suite U est le recollement de $U \cap X$ et de Y le long de l'ouvert Y' ; appliquons la proposition 3.2.2, avec ici $(Y' \subset U \cap X \xrightarrow{p} Y)$ à la place des données $(U_0 \subset U \xrightarrow{\theta} V)$ de loc.cit. ; comme U contient le point générique x du diviseur exceptionnel $p^{-1}(y) \simeq \mathbf{P}_1$, cet ouvert contient aussi un point fermé de $x' \in p^{-1}(y) \subset X$, si bien que l'homomorphisme $\mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x'}$ n'est pas un isomorphisme ; cela montre que la restriction de p à $U \cap X$ n'est pas un isomorphisme local, et que donc U n'admet pas de séparateur (proposition 3.2.2).

Cet exemple montre que dans la proposition 6.1.2, on ne peut éviter la restriction de U à U' , ici la restriction de Y à Y' : dans T , Y est un ouvert séparé, et le point x est de codimension 1, bien que T ne contienne pas d'ouvert admettant un séparateur et contenant x et Y ; par contre, l'ouvert séparé X contient x et $Y' = Y - \{y\}$.

Par ailleurs, le morphisme $\varphi : T \rightarrow Y$ dont la restriction à X est égale à p , et dont la restriction à Y est l'application identique, est une enveloppe séparée de T , et aussi d'ailleurs son enveloppe affine (proposition 3.2.2). Soit $q : T' \rightarrow T$ le morphisme d'éclatement de T en le point fermé y ; en identifiant, comme plus haut Y à son image dans T , on voit que la restriction

de q à $q^{-1}(Y)$ redonne le morphisme $p : X \rightarrow Y$, et sa restriction à l'ouvert $X \subset T$ est l'identité ; ainsi, T' est-il isomorphe au schéma obtenu en recollant deux exemplaires de X le long de l'ouvert $p^{-1}(Y')$; le morphisme évident $h' : T' \rightarrow X$ est donc un séparateur de T' . Finalement, le diagramme suivant résume la situation.

$$\begin{array}{ccc} T' & \xrightarrow{h'} & X \\ q \downarrow & & \downarrow p \\ T & \xrightarrow{\varphi} & Y \end{array}$$

Cet exemple est compatible avec la conjecture 3.2.3.

7. ANNEAUX LOCAUX APPARENTÉS

Nous allons relier les résultats qui précèdent aux « Critères de séparation d'un schéma intègre » qui font l'objet du §8.5 de [EGA G]. Notons que dans la première édition de EGA I, les mêmes développements étaient annoncés sous le titre « §8. Les schémas de Chevalley » ; les schémas en question, introduits dans le séminaire Cartan-Chevalley de 1955, étaient juste évoqués en fin de paragraphe, et cette évocation elle-même a disparu dans la nouvelle édition ; mais on la trouve toujours dans [God58, p.125].

Le concept d'anneaux locaux « apparentés », dégagé par CHEVALLEY, plutôt abandonné aujourd'hui, permet cependant d'éclairer un peu la démarche suivie ici ; mais il ne semble pas qu'on puisse l'étendre à des schémas qui ne seraient pas intègres.

7.1. Le langage.

7.1.1. Reprenons [EGA G, 8.5.2]. Soit K un anneau intègre (par exemple un corps). Deux sous-anneaux locaux M et N de K sont dits *apparentés* s'il existe un sous-anneau local Q de K dominant à la fois M et N . Cette propriété est équivalente à la suivante : soit $P \subset K$ le sous-anneau engendré par $M \cup N$, c'est-à-dire l'image de l'homomorphisme canonique

$$M \otimes N \rightarrow K ;$$

alors il existe un idéal premier \mathfrak{p} de P tel que les homomorphismes $M \rightarrow P_{\mathfrak{p}}$ et $N \rightarrow P_{\mathfrak{p}}$ soient locaux.

Soit T un schéma intègre de point générique ξ ; désignons par $K = \mathcal{O}_{T,\xi}$ le corps des fonctions rationnelles sur T . Pour tout point $t \in T$, l'homomorphisme de restriction induit un homomorphisme injectif

$$j_t : \mathcal{O}_t \rightarrow K.$$

Contrairement à [EGA G, 8.5], on n'identifiera pas, dans ce qui suit, l'anneau $\mathcal{O}_{T,t}$ à son image $j_t(\mathcal{O}_t) \subset K$.

Considérons les propriétés suivantes portant sur un couple x, y de points de T :

- a) $x = y$;
- b) $j_x(\mathcal{O}_x) = j_y(\mathcal{O}_y)$;
- c) $j_x(\mathcal{O}_x)$ et $j_y(\mathcal{O}_y)$ sont apparentés.

La séparation de T signifie que pour tout couple x, y de points de T les propriétés a) et c) sont équivalentes (corollaire 6.3). On va montrer que, sous une condition usuelle de finitude, le schéma T admet un séparateur si pour tout couple x, y les propriétés b) et c) sont équivalentes.

Le schéma T étant supposé intègre, son morphisme diagonal $\Delta_T : T \rightarrow T \times T$ admet une factorisation par adhérence schématique [EGA G, 6.10.5] :

$$T \rightarrow T_1 \rightarrow T \times T.$$

On note encore $d_0, d_1 : T_1 \rightrightarrows T$ les deux projections sur T .

Puisque l'immersion ouverte $T \rightarrow T_1$ est schématiquement dominante, et que le morphisme d'inclusion du point générique $\xi \rightarrow T$ est aussi schématiquement dominant, le morphisme composé $\xi \rightarrow T \rightarrow T_1$ est schématiquement dominant ; par suite, pour tout $z \in T_1$, on a l'homomorphisme de restriction $j_z : \mathcal{O}_{T_1, z} \rightarrow \mathcal{O}_{T, \xi} = K$. Comme les morphismes composés $T \rightarrow T_1 \rightrightarrows T$ sont l'identité, pour $z \in T_1$, l'homomorphisme composé

$$\mathcal{O}_{T, d_0(z)} \rightarrow \mathcal{O}_{T_1, z} \rightarrow K$$

est égal à l'injection $j_{d_0(z)}$, et idem pour $j_{d_1(z)}$.

7.1.2. Proposition. *Gardons les notations qui précèdent. Soient x et y des points de T . Alors $j_x(\mathcal{O}_x)$ et $j_y(\mathcal{O}_y)$ sont apparentés si et seulement si il existe $z \in T_1$ tel que $x = d_0(z)$ et $y = d_1(z)$. Autrement dit, la relation définie sur les points de T par le fermé T_1 de $T \times T$ est exactement la relation d'apparement.*

Démonstration. La condition est suffisante, car l'anneau local $j_z(\mathcal{O}_{T_1, z})$ est un sous-anneau local du corps K des fonctions rationnelles sur T , et par hypothèse il domine $j_x(\mathcal{O}_{T, x})$ et $j_y(\mathcal{O}_{T, y})$.

Réciproquement, le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} T_1 & \longrightarrow & T \times T \\ \psi \uparrow & & \uparrow \varphi \\ W & \longrightarrow & \text{Spec}(\mathcal{O}_{T, x}) \times \text{Spec}(\mathcal{O}_{T, y}) \end{array}$$

définit un sous-schéma fermé W du schéma affine $\text{Spec}(\mathcal{O}_{T, x}) \times \text{Spec}(\mathcal{O}_{T, y})$; c'est donc un schéma affine, et il est intègre puisque φ , et donc aussi ψ , sont des monomorphismes plats. L'anneau P de W est engendré par les sous-anneaux $M = j_x(\mathcal{O}_{T, x})$ et $N = j_y(\mathcal{O}_{T, y})$ de K . Puisque M et N sont supposés apparentés il existe un idéal premier \mathfrak{p} de P tel que $P_{\mathfrak{p}}$ domine M et N ; soit $w \in W = \text{Spec}(P)$ le point correspondant à \mathfrak{p} ; en prenant $z = \psi(w)$ on a $x = d_0(z)$ et $y = d_1(z)$. \square

Du résultat qui précède on déduit immédiatement le critère de séparation de [EGA G, 8.5.5] :

7.1.3. Corollaire. *Pour qu'un schéma intègre T soit séparé, il faut et il suffit que la relation « $j_x(\mathcal{O}_x)$ et $j_y(\mathcal{O}_y)$ sont apparentés » entre points x et y de T implique $x = y$.*

Démonstration. En effet, le morphisme $T_1 \rightarrow T \times T$ étant une immersion fermée, la diagonale de T est fermée si et seulement si le morphisme $T \rightarrow T_1$ est surjectif ; il est alors un isomorphisme. \square

7.2. Platitude et apparentement.

7.2.1. Corollaire. *Soit T un schéma intègre. Gardons les notations de 7.1.1. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) *Les morphismes $d_0, d_1 : T_1 \rightrightarrows T$ sont plats.*
- (ii) *Pour tout couple x, y de points de T , si les anneaux locaux $j_x(\mathcal{O}_x)$ et $j_y(\mathcal{O}_y)$ sont apparentés, alors ils sont égaux.*

Démonstration. On a vu plus haut que pour $z \in T_1$, l'homomorphisme composé

$$\mathcal{O}_{T, d_0(z)} \longrightarrow \mathcal{O}_{T_1, z} \longrightarrow K$$

est égal à l'injection canonique $j_{d_0(z)}$, et idem pour $j_{d_1(z)}$.

Montrons que (i) implique (ii). D'après la proposition, si les anneaux locaux $j_x(\mathcal{O}_x)$ et $j_y(\mathcal{O}_y)$ sont apparentés il existe $z \in T_1$ tel que $x = d_0(z)$ et $y = d_1(z)$; l'hypothèse (i) implique que les homomorphismes locaux $\mathcal{O}_{T, x} \rightarrow \mathcal{O}_{T_1, z}$ et $\mathcal{O}_{T, y} \rightarrow \mathcal{O}_{T_1, z}$ sont fidèlement plats ; comme ils sont birationnels, ce sont des isomorphismes, et les sous-anneaux $j_x(\mathcal{O}_x)$ et $j_y(\mathcal{O}_y)$ de K sont égaux à l'image de $\mathcal{O}_{T_1, z}$ dans K .

Montrons que (ii) implique (i). Considérons un point $z \in T_1$, d'images x et y dans T ; on va montrer que les homomorphismes $u : \mathcal{O}_{T, x} \rightarrow \mathcal{O}_{T_1, z}$ et $v : \mathcal{O}_{T, y} \rightarrow \mathcal{O}_{T_1, z}$ sont surjectifs, donc bijectifs puisqu'ils sont birationnels ; cela entraînera la platitude annoncée.

La proposition 7.1.2 dit que les sous-anneaux locaux $j_x(\mathcal{O}_x)$ et $j_y(\mathcal{O}_y)$ de K sont apparentés, donc égaux d'après l'hypothèse (ii). Comme les injections j_x et j_y se factorisent respectivement par u et par v , on voit que les images $\text{Im}(u)$ et $\text{Im}(v)$ sont des sous-anneaux *égaux* de $\mathcal{O}_{T_1, z}$. Considérons de nouveau le sous-anneau $P \subset K$ engendré par $j_x(\mathcal{O}_x)$ et $j_y(\mathcal{O}_y)$; puisque T_1 est un sous-schéma fermé de $T \times T$, l'anneau local $\mathcal{O}_{T_1, z}$ est un localisé de P , soit

$P_{\mathfrak{p}} = \mathcal{O}_{T_1, z}$. Considérons le diagramme suivant, où w est surjectif

$$\begin{array}{ccccc}
 & \mathcal{O}_{T,x} & & & \\
 & \downarrow & \searrow u & & \\
 & \mathcal{O}_{T,x} \otimes \mathcal{O}_{T,y} & \xrightarrow{w} & P & \longrightarrow P_{\mathfrak{p}} \\
 & \uparrow & \nearrow v' & \nearrow v & \\
 & \mathcal{O}_{T,y} & & &
 \end{array}$$

Comme P est intègre, l'homomorphisme $P \rightarrow P_{\mathfrak{p}}$ est injectif; d'où l'égalité $\text{Im}(u') = \text{Im}(v')$; mais w est surjectif par définition de P ; on en déduit les égalités $P = \text{Im}(w) = \text{Im}(u') = \text{Im}(v')$; par suite, P est un anneau local, donc $P = P_{\mathfrak{p}}$, et cela permet de conclure que u et v sont surjectifs. \square

7.2.2. Proposition. *Soit T un schéma intègre et quasi-séparé. Alors T admet un séparateur si et seulement si les morphismes $d_0, d_1 : T_1 \rightrightarrows T$ sont de type fini, et si pour tout couple x, y de points de T , les propriétés b) et c) de 7.1.1 sont équivalentes, autrement dit : les anneaux locaux $j_x(\mathcal{O}_x)$ et $j_y(\mathcal{O}_y)$ sont égaux dès qu'ils sont apparentés.*

Démonstration. D'après le théorème 5.1.1, l'existence d'un séparateur est équivalente à la propriété pour les morphismes d_i d'être plats et de type fini, et d'après le corollaire 7.2.1 la condition portant sur les couples de points équivaut à la platitude des d_i . La proposition découle donc de ce qui précède.

Mais on peut aussi montrer que les conditions de l'énoncé sont suffisantes sans utiliser le théorème 5.1.1, en décrivant explicitement un séparateur $h : T \rightarrow E$; on verra que le passage de T à E consiste simplement à *identifier les points x et y de T lorsque les anneaux locaux $j_x(\mathcal{O}_x)$ et $j_y(\mathcal{O}_y)$ sont égaux*. Notons d'abord que le corollaire 7.2.1 entraîne que les morphismes d_i sont plats (et de type fini); on peut donc invoquer la proposition 2.3.2 pour conclure que les d_i sont des isomorphismes locaux.

On note encore par K le corps des fonctions rationnelles sur T , et par $j_t : \mathcal{O}_t \rightarrow K$ l'injection canonique dans K de l'anneau local en un point de T .

On définit donc E comme l'ensemble des sous-anneaux locaux de K de la forme $j_t(\mathcal{O}_t)$, pour t parcourant T ; on a donc une application surjective d'ensembles

$$h : T \rightarrow E.$$

Il résulte de la proposition 7.1.2 et du corollaire 7.1.3 que la restriction de l'application h à un ouvert séparé, p.ex. affine, est injective.

On munit E de la topologie engendrée par les ensembles $h(U)$, pour U parcourant l'ensemble des ouverts affines de T . Pour voir que l'application h est continue il faut vérifier que, pour tout ouvert affine U de T , l'ensemble $h^{-1}h(U)$ est ouvert; or, c'est l'ensemble des $x \in T$ pour lesquels il existe $y \in U$ tel que $h(x) = h(y)$, i.e. $j_x(\mathcal{O}_x) = j_y(\mathcal{O}_y)$; par hypothèse cette égalité

est équivalente à : $j_x(\mathcal{O}_x)$ et $j_y(\mathcal{O}_y)$ sont apparentés ; d'après la proposition 7.1.2, cette dernière relation équivaut à l'existence d'un élément $z \in T_1$ tel que $x = d_0(z)$ et $y = d_1(z)$; bref, $h^{-1}h(U) = d_0d_1^{-1}(U)$; c'est bien un ouvert puisque d_0 est une application ouverte.

Finalement, on définit un faisceau \mathcal{O}_E d'anneaux sur E en associant à un ouvert V de E l'intersection (dans K) des anneaux locaux éléments de V ; mais, d'après [EGA G, 8.5.1.1], ou [God58, pp. 124–126], cette intersection est aussi égale à

$$\bigcap_{x \in h^{-1}(V)} j_x(\mathcal{O}_{T,x}) = \Gamma(h^{-1}(V), \mathcal{O}_T).$$

En d'autres termes, l'homomorphisme de faisceaux sur E

$$\mathcal{O}_E \longrightarrow h_*(\mathcal{O}_T)$$

est bijectif, et il aurait permis de définir plus simplement \mathcal{O}_E comme cette image directe. Il reste à voir que l'espace annelé (E, \mathcal{O}_E) est un schéma. Or, si U est un ouvert affine de T , le morphisme h induit un isomorphisme d'espaces annelés de (U, \mathcal{O}_U) sur $(h(U), \mathcal{O}_{j(U)})$.

Cela montre que E est un schéma et que h est un isomorphisme local de schémas, quasi-compact et quasi-séparé ; E est séparé en vertu du corollaire 7.1.3. \square

7.3. Un exemple.

7.3.1. *Exemple.* Il existe un schéma intègre noethérien T , de dimension 1, n'ayant que 2 points fermés, et qui n'admet pas de séparateur. Cependant, son morphisme d'enveloppe affine [EGA G, 9.1.21]

$$i_T : T \longrightarrow T^0 = \text{Spec}(\Gamma(T))$$

est universel pour les morphismes de T vers un schéma séparé.

Pour le construire, partons d'un anneau de valuation discrète P de corps des fractions K ; notons $a \mapsto \bar{a}$ le morphisme vers le corps résiduel : $P \longrightarrow P/\mathfrak{m} = k$. On suppose qu'il existe deux sous-corps *distincts* k_1 et k_2 de k tels que $[k : k_1] = [k : k_2] = 2$.

Soit $A_i \subset P$, pour $i = 1, 2$, les sous-anneaux formés des $a \in P$ tels que, respectivement, $\bar{a} \in k_1$ et $\bar{a} \in k_2$; on vérifiera plus bas les points suivants.

- a) La clôture intégrale de A_i est égale à P .
- b) L'homomorphisme $A_1 \otimes A_2 \longrightarrow P$, défini par $a \otimes b \mapsto ab$ est surjectif.

Supposons ces points acquis. On définit le schéma T par recollement des schémas $U_i = \text{Spec}(A_i)$ le long de l'ouvert $U_0 = \text{Spec}(K)$. En notant x_1 et x_2 les deux points fermés, on a $j_{x_i}(\mathcal{O}_{x_i}) = A_i$; ces deux anneaux locaux sont apparentés (par P), et ils ne sont pas égaux. On en tire, via le corollaire 7.2.1, que les morphismes $d_0, d_1 : T_1 \rightrightarrows T$ ne sont pas plats ; en particulier, le schéma T n'admet pas de séparateur.

Vérifions que l'enveloppe affine de T est aussi son enveloppe séparée. La suite exacte (dans la catégorie des schémas)

$$U_0 \begin{array}{c} \xrightarrow{u_1} \\ \xrightarrow{u_2} \end{array} U_1 \sqcup U_2 \longrightarrow T$$

montre que $\Gamma(T) = A_1 \cap A_2 = \{b \in P \mid \bar{b} \in k_1 \cap k_2\}$. Posons $V = \text{Spec}(P)$ et désignons par $v_i : V \rightarrow U_i$ les morphismes locaux associés aux inclusions $A_i \subset P$.

Considérons un morphisme $u : T \rightarrow S$ vers un schéma séparé ; il faut montrer l'existence d'un unique morphisme $u^0 : T^0 \rightarrow S$ tel que $u = u^0 \circ i_T$. Désignons par $u_i : U_i \rightarrow S$ les restrictions de u . Montrons que $u_1 v_1 = u_2 v_2$, autrement dit que le carré suivant est commutatif.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{v_1} & U_1 \\ v_2 \downarrow & & \downarrow u_1 \\ U_2 & \xrightarrow{u_2} & S \end{array}$$

Or, les morphismes $u_1 v_1$ et $u_2 v_2$ sont, par hypothèse, égaux sur l'ouvert U_0 de V ; puisque S est séparé, ils sont égaux sur un fermé de V , et ce fermé contient U_0 : il est donc égal à V , et on a bien $u_1 v_1 = u_2 v_2$. On en déduit, les morphismes v_i étant locaux, que les points fermés x_i de U_i ont la même image $s \in S$, et que les morphismes u_i se factorisent par $\text{Spec}(\mathcal{O}_{S,s}) \rightarrow S$; on a ainsi un carré commutatif d'homomorphismes d'anneaux

$$\begin{array}{ccc} P & \longleftarrow & A_1 \\ \uparrow & & \uparrow \\ A_2 & \longleftarrow & \mathcal{O}_{S,s} \end{array}$$

Cette commutativité montre qu'il existe un unique homomorphisme d'anneaux

$$\mathcal{O}_{S,s} \longrightarrow A_1 \cap A_2,$$

d'où l'on tire le morphisme composé $u^0 : T^0 = \text{Spec}(A_1 \cap A_2) \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_{S,s}) \rightarrow S$, et on a $u = u^0 \circ i_T$.

Il reste donc à vérifier les propriétés *a*) et *b*). L'idéal maximal \mathfrak{m} de P est aussi un idéal maximal de chacun des anneaux A_i . Pour un élément non nul $s \in \mathfrak{m}$ on a $sP \subset \mathfrak{m} \subset A_i$, donc les anneaux de fractions $(A_i)_s$ et P_s sont égaux au corps des fractions K . Les homomorphismes $A_i/\mathfrak{m} \rightarrow P/\mathfrak{m}$ s'identifient aux l'homomorphismes fini $k_i \rightarrow k$; donc P est fini sur A_i ; comme P est intégralement clos, c'est la clôture intégrale de A_i .

Pour vérifier la propriété *b*), choisissons un élément $t \in A_2$ qui ne soit pas dans A_1 , c'est-à-dire tel que $\bar{t} \in k_2$ et $\bar{t} \notin k_1$. Puisque k est de degré 2 sur k_1 , on a $k = k_1[\bar{t}]$, donc aussi $P = A_1[\bar{t}]$; d'où sa surjectivité de l'homomorphisme $A_1 \otimes A_2 \rightarrow P$.

On n'a que l'embarras du choix pour exhiber des exemples d'anneaux de valuation discrète munis des données requises. Le plus simple est de prendre une extension galoisienne de corps, $k_0 \subset k$ de groupe de Galois le groupe symétrique \mathfrak{S}_3 , et de choisir deux transpositions distinctes σ et τ dans \mathfrak{S}_3 ; les sous-corps d'invariants $k_1 = k^\sigma$ et $k_2 = k^\tau$ conviennent; enfin, on peut prendre pour P l'anneau local à l'origine de $k[X]$. \square

Malgré sa propriété universelle, le morphisme $i_T : T \rightarrow T^0$ n'est pas un séparateur au sens donné au début du texte : ce n'est pas un isomorphisme local, et il n'est même pas plat.

8. SUR LES SCHÉMAS RÉUNION DE DEUX OUVERTS AFFINES

Dans ce paragraphe on examine l'existence d'un séparateur pour les schémas qui sont réunion de deux ouverts affines; comme il est indiqué en 5.3.2, c'est la situation décisive. Commençons par traduire le critère du théorème 5.1.1 pour ces schémas élémentaires.

Lorsqu'un schéma de base n'est pas mentionné c'est qu'il s'agit $\text{Spec}(\mathbf{Z})$. Lorsque le contexte le permettra on écrira encore $\Gamma(U)$ à la place de $\Gamma(U, \mathcal{O}_U)$.

8.1. Principe des constructions.

8.1.1. Scholie. *Soit $T = U \cup V$ un schéma réunion de deux ouverts affines, dont l'intersection est quasi-compacte, de sorte que T est un schéma quasi-compact et quasi-séparé; on suppose aussi que l'ensemble des composantes irréductibles de T est fini. Notons*

$$\varphi_{UV} : \Gamma(U) \otimes \Gamma(V) = \Gamma(U \times V) \longrightarrow \Gamma(U \cap V)$$

l'homomorphisme d'anneaux induit par les restrictions à l'ouvert $U \cap V$. Alors T admet un séparateur si et seulement si l'anneau $\text{Im}(\varphi_{UV})$ est plat et de type fini sur $\Gamma(U)$ et sur $\Gamma(V)$.

Démonstration. Notons, comme dans le théorème 5.1.1, $T \rightarrow T_1 \rightarrow T \times T$ la factorisation de la diagonale par adhérence schématique; il s'agit de traduire, en termes de $\text{Im}(\varphi_{UV})$, la propriété pour les deux projections de T_1 sur T d'être plates et de type fini. Puisque U et V sont séparés, les restrictions de T_1 aux ouverts $U \times U$ et $V \times V$ de $T \times T$ sont égales à U et V respectivement, et ne sont donc pas pertinentes; par contre, ce qui est significatif est la restriction de l'adhérence schématique à l'ouvert $U \times V$; on trouve

$$U \cap V \xrightarrow{v} W \longrightarrow U \times V$$

où W est un schéma affine puisque c'est un sous-schéma fermé de $U \times V$; par ailleurs, comme v est schématiquement dominant, l'homomorphisme $\Gamma(W) \rightarrow \Gamma(U \cap V)$ est injectif; cela montre que $\Gamma(W)$ n'est autre que l'anneau $\text{Im}(\varphi_{UV})$ de l'énoncé. Par suite, en utilisant [EGA G, 6.2.5 et 6.3.1], on voit que les morphismes de projection $U \leftarrow W \rightarrow V$ sont plats et de type fini si et seulement si les homomorphismes $\Gamma(U) \rightarrow \text{Im}(\varphi_{UV}) \leftarrow \Gamma(V)$ le sont. \square

8.1.2. Nous donnons ci-dessous deux exemples de schémas qui n'admettent pas de séparateur, à savoir :

- un schéma régulier intègre de dimension 2 (exemple 8.2.1) ;
- un schéma *étale* sur une base affine de dimension 1 (exemple 8.3.1).

Ces deux constructions utilisent le même procédé. Partant d'un schéma affine U , d'une immersion ouverte $i : U_0 \rightarrow U$ et d'un automorphisme $\tau : U_0 \simeq U_0$, le schéma annoncé sera la somme amalgamée

$$T = (U, i) \sqcup_{U_0} (U, i \circ \tau)$$

obtenue par réunion de deux copies de U , recollées le long de U_0 , l'une munie de l'injection canonique $i : U_0 \rightarrow U$, et l'autre munie de l'injection, *tordue* par τ , $i \circ \tau : U_0 \rightarrow U$. Autrement dit, la suite

$$U_0 \begin{array}{c} \xrightarrow{i} \\ \xrightarrow{i \circ \tau} \end{array} U \sqcup U \longrightarrow T$$

est exacte dans la catégorie des schémas.

On notera que dans chacun de ces exemples, le schéma affine U est noethérien réduit et que l'ouvert de recollement U_0 est lui aussi affine, et schématiquement dense dans U .

8.2. Un contre-exemple lisse.

8.2.1. *Exemple.* Il existe un morphisme $T \rightarrow S$ lisse, quasi-compact et qui n'admet pas de séparateur.

On peut choisir S affine régulier de dimension 1, T est alors régulier de dimension 2.

Soit $S = \text{Spec}(R)$ le spectre d'un anneau noethérien intègre, possédant une suite régulière (s, t) formée d'éléments non inversibles (par exemple $R = k[X]$, où k est un corps, avec la suite $(X, 1 - X)$). Posons $A = R[Z]$, $U = \text{Spec}(A)$ et $U_0 = \text{Spec}(A_{st})$; l'automorphisme τ de U_0 est ici associé à l'automorphisme σ de la R -algèbre $A_{st} = R_{st}[Z]$ défini par

$$Z \mapsto sZ/t$$

Finalement, soit T le schéma défini par recollement à partir des données $(U_0 \subset U, \tau)$; il est donc caractérisé par l'exactitude de la suite

$$U_0 \begin{array}{c} \xrightarrow{i} \\ \xrightarrow{i \circ \tau} \end{array} U \sqcup U \longrightarrow T$$

Pour appliquer le critère 8.1.1, il faut expliciter l'anneau $C \subset R_{st}[Z]$ image du morphisme de R -algèbres

$$\varphi : \Gamma(U) \otimes_R \Gamma(U) = A \otimes_R A \longrightarrow A_{st} = \Gamma(U_0), \quad a \otimes b \mapsto \sigma(a)b.$$

On utilisera le

8.2.2. Lemme. *Soit (s, t) une suite régulière dans un anneau A . Alors, le morphisme de A -algèbres*

$$A[T]/(sT - t) \longrightarrow A_s, \quad T \longmapsto t/s$$

est injectif. Son image $A[t/s]$ est plate sur A si et seulement si l'idéal $sA + tA$ est égal à A .

Démonstration. Soit $F(T) = a_n T^n + a_{n-1} T^{n-1} + \dots + a_0 \in A[T]$ un polynôme tel que, dans A_s , on ait $F(t/s) = 0$, c'est-à-dire $a_n t^n + s a_{n-1} t^{n-1} + \dots + s^n a_0 = 0$. Comme s est régulier, le morphisme $A \rightarrow A_s$ est injectif, donc l'égalité précédente est déjà vraie dans A . Comme la suite (s, t) est régulière, on voit que $a_n = sb$, avec $b \in A$, d'où l'on tire que $F(T) = bT^{n-1}(sT - t) + G(T)$ avec $\deg(G) < n$. Cela permet de raisonner par récurrence sur le degré de F pour conclure que ce polynôme est un multiple de $sT - t$.

Montrons la seconde assertion. Posons $I = sA + tA$ et $J = (sT - t)A[T]$, de sorte que $J \subset IA[T]$. Si le quotient $A[T]/J$ est plat sur A , l'application $J/IJ \rightarrow (A/I)[T]$ est injective, et nulle; on en déduit que $J = IJ$. En notant $P(T) = sT - t$, la relation $J = IJ$ s'écrit aussi dans $A[T]$, $P = PQ$, où Q est un polynôme à coefficients dans I . Le polynôme P est régulier dans $A[T]$ puisqu'il l'est dans $A_s[T]$, et que $A \rightarrow A_s$ est injectif. On en tire que $1 = Q$, soit $1 = Q(0) \in I$.

Réciproquement, s'il existe $a, b \in A$ tels que $1 = as + bt$, alors, dans A_s , on a $1/s = a + b(t/s)$, donc $A_s = A[t/s]$. \square

Pour expliciter l'anneau $C = \text{Im}(\varphi)$, on identifie $A \otimes_R A$ et $R[Z_0, Z_1]$, ce qui permet d'écrire l'homomorphisme φ sous la forme

$$R[Z_0, Z_1] \longrightarrow R_{st}[Z], \quad Z_0 \longmapsto sZ/t, \quad Z_1 \longmapsto Z$$

Il est alors clair qu'il se factorise par le quotient

$$R[Z_0, Z_1]/(tZ_0 - sZ_1) \longrightarrow R_{st}[Z]$$

Le lemme ci-dessus, appliqué en remplaçant (A, s, t) par $(R[Z_1], t, sZ_1)$, montre que cet homomorphisme est injectif, et qu'on peut donc identifier l'anneau C au quotient $R[Z_0, Z_1]/(tZ_0 - sZ_1)$. Les homomorphismes $\varphi_0 : A \rightarrow C$ et $\varphi_1 : A \rightarrow C$, dont il faut montrer qu'ils ne sont pas plats, s'identifient alors aux homomorphismes "naturels"

$$\varphi_0 : R[Z_0] \longrightarrow R[Z_0, Z_1]/(tZ_0 - sZ_1), \quad \varphi_1 : R[Z_1] \longrightarrow R[Z_0, Z_1]/(tZ_0 - sZ_1)$$

Ils ne sont pas plats d'après le lemme 8.2.2 appliqué en remplaçant (A, s, t) respectivement par $(R[Z_0], s, tZ_0)$ et $(R[Z_1], t, sZ_1)$.

Ceci conclut la construction de l'exemple 8.2.1. \square

8.2.3. *Remarque.* Déterminons l'enveloppe affine $i_T : T \longrightarrow T^0 = \text{Spec}(\Gamma(T))$ de T [EGA G, 9.1.21], en introduisant les morphismes

$$\begin{array}{ccccc}
 U_0 & \xrightarrow{i} & U & & \\
 i\tau \downarrow & & \downarrow u & \searrow u^0 & \\
 U & \xrightarrow{v} & T & \xrightarrow{i_T} & T^0 \\
 & \searrow v^0 & & & \downarrow \\
 & & & & T^0
 \end{array}$$

On trouve que $T^0 = \text{Spec}(R[Z])$, les morphismes u^0 et v^0 étant associés respectivement aux homomorphismes $Z \mapsto tZ$ et $Z \mapsto sZ$. Introduisons les ouverts $S' \subset S'' \subset S = \text{Spec}(R)$ définis par $S' = D(s) \cap D(t)$ et $S'' = D(s) \cup D(t)$.

Le critère 8.1.1 montre qu'au dessus de l'ouvert S' , c'est-à-dire si s et t sont inversibles, la restriction

$$1 \times i_T : S' \times_S T \longrightarrow S' \times_S T^0$$

est un séparateur puisque les homomorphismes φ_0 et φ_1 sont alors des isomorphismes.

Au dessus de S'' , c'est-à-dire si s ou t est inversible, alors v^0 ou u^0 est un isomorphisme, et

$$1 \times i_T : S'' \times_S T \longrightarrow S'' \times_S T^0$$

est une enveloppe séparée (proposition 3.2.2).

8.3. Un contre-exemple étale.

8.3.1. *Exemple.* Il existe un schéma S local noethérien intègre de dimension 1, et un morphisme *étale* $f : T \longrightarrow S$, tels que T n'admette pas de séparateur.

Le schéma S introduit ici n'est pas normal. D'ailleurs on a vu (corollaire 5.3.1) que si T est étale sur un schéma affine intègre *et normal*, il admet un séparateur.

La construction étant un peu technique, en voici d'abord un résumé. On commence par définir un revêtement étale galoisien *connexe* de rang 3, $U \longrightarrow S$ dont la fibre générique U_η est constituée de 3 points isomorphes au point générique η de S ; cette fibre admet donc un S -automorphisme τ d'ordre 2. On définit T par recollement à partir des données $(U_\eta \subset U, \tau)$, c'est-à-dire le recollement de deux copies de U le long des immersions ouvertes $i : U_\eta \longrightarrow U$ et $i \circ \tau : U_\eta \longrightarrow U$; on a donc une suite exacte

$$U_\eta \begin{array}{c} \xrightarrow{i} \\ \xrightarrow{i \circ \tau} \end{array} U \sqcup U \longrightarrow T.$$

Notons A l'anneau (local) de S , K son corps des fractions, et \bar{A} le normalisé de A . On vérifiera que l'image du morphisme

$$\varphi : \Gamma(U) \otimes \Gamma(U) \longrightarrow \Gamma(U_\eta) = K \times K \times K$$

est égal au sous-anneau $\bar{A} \times \bar{A} \times \bar{A}$; il est donc entier sur A . Comme A n'est pas normal, \bar{A} n'est pas plat sur A , et *a fortiori* $\text{Im}(\varphi)$ n'est pas plat sur $\Gamma(U)$, qui est étale sur A .

On reconnaîtra en S (le localisé à l'origine de) la cubique à point double et en U le recollement de trois copies de sa normalisée (une droite) obtenu en identifiant de façon circulaire les deux points fermés au dessus de l'origine, soient $\{a_0, a_1\}$, $\{b_0, b_1\}$, $\{c_0, c_1\}$, identifiés via $a_0 = b_1$, $b_0 = c_1$, $c_0 = a_1$.

Voici les détails.

Soient k un corps, et \bar{A} l'anneau semi-local obtenu en localisant $k[X]$ en les points correspondants à $X = -1$ et $X = 1$. Soit $I \subset \bar{A}$ l'idéal engendré par $X^2 - 1$, c'est donc le noyau d'un morphisme surjectif

$$p : \bar{A} \longrightarrow k \times k.$$

Soit $A = k + I \subset \bar{A}$ le sous-anneau obtenu en *pinçant* les deux points²; un élément $a \in \bar{A}$ est donc dans A si son image $p(a) = (a_0, a_1) \in k \times k$ a ses deux composantes égales.

On définit une A -algèbre finie étale de rang 3, $B \subset \bar{A}^3$ par la condition suivante portant sur les triplets $(a, b, c) \in \bar{A}^3$:

$$(8.1) \quad (a, b, c) \in B \iff a_0 = b_1, b_0 = c_1, c_0 = a_1$$

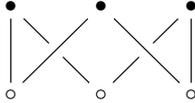
On peut voir B comme le produit cartésien dans le diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & \bar{A} \times \bar{A} \times \bar{A} \\ \downarrow q & & \downarrow p \times p \times p \\ & & k^2 \times k^2 \times k^2 \\ & & \downarrow \theta \\ k^3 & \xrightarrow{\delta \times \delta \times \delta} & k^2 \times k^2 \times k^2 \end{array}$$

Dans cette figure, $\delta : k \rightarrow k^2$ désigne l'injection diagonale, et θ désigne l'automorphisme d'anneaux défini par

$$\theta((a_0, a_1), (b_0, b_1), (c_0, c_1)) = ((a_0, b_1), (b_0, c_1), (c_0, a_1))$$

Le schéma $U = \text{Spec}(B)$ ressemble à ceci, où les symboles \bullet désignent les points fermés, tandis que \circ désignent les points génériques.



Chacune des trois composantes irréductibles est isomorphe à $\text{Spec}(\bar{A})$; le recollement est indiqué par l'isomorphisme θ , c'est-à-dire par les égalités (8.1).

Pour voir que le morphisme $A \rightarrow B$ est fini étale de rang 3, on peut éviter une vérification directe en utilisant [Fer03, 2.2 et 5.6].

Notons $K = k(X)$ le corps des fractions de A , de sorte que $\eta = \text{Spec}(K)$ et que $U_\eta = \text{Spec}(K^3)$. Soit τ l'automorphisme de U_η qui permute les deux premiers facteurs de

2. Si, pour mieux voir la cubique à point double, on préfère les équations, on définit A comme le localisé à l'origine de l'anneau $k[U, V]/(U^3 + U^2 - V^2)$, le morphisme de cet anneau vers $k[X]$ étant défini par $U \mapsto X^2 - 1$, $V \mapsto X^3 - X$

K^3 . Comme annoncé au début, on définit le schéma T comme la réunion de deux copies de U recollées par les immersions $i : U_\eta \rightarrow U$ et $i \circ \tau : U_\eta \rightarrow U$. Explicitons le morphisme

$$\varphi : \Gamma(U) \otimes \Gamma(U) = B \otimes B \longrightarrow \Gamma(U_\eta) = K^3.$$

Comme B est un sous-anneau de \bar{A}^3 , on peut représenter chacun de ses éléments par un triplet (a, b, c) d'éléments de \bar{A} (soumis à certaines conditions); avec cette convention, l'homomorphisme φ s'écrit

$$(8.2) \quad \varphi : B \otimes B \longrightarrow K^3, \quad (a, b, c) \otimes (a', b', c') \longmapsto (ab', ba', cc')$$

On va vérifier que le sous-anneau $C = \text{Im}(\varphi) \subset K^3$ est égal à \bar{A}^3 , ce qui montrera qu'il n'est pas plat sur $B = \Gamma(U)$, et que donc le schéma T n'admet pas de séparateur.

En effet, suivant l'argument déjà évoqué, si l'homomorphisme $B \rightarrow \bar{A}^3$ était plat, alors \bar{A} serait plat sur A puisque B est étale sur A , donc A serait normal, une contradiction.

Comme le carré ci-dessus qui définit B est cartésien, le noyau de q est égal au noyau de l'homomorphisme vertical de droite, soit l'idéal $I^{\times 3} = I \times I \times I$ de l'anneau \bar{A}^3 .

Puisque $B/I^{\times 3}$ est isomorphe à k^3 , un élément de B est déterminé, modulo $I^{\times 3}$, par son image dans k^3 , c'est-à-dire par un triplet $(\alpha, \beta, \gamma) \in k^3$; si cet élément de B , vu dans \bar{A}^3 , s'écrit (a, b, c) , compte-tenu de θ , on a, dans $k^2 \times k^2 \times k^2$, la relation

$$(8.3) \quad (p(a), p(b), p(c)) = ((\alpha, \gamma), (\beta, \alpha), (\gamma, \beta))$$

Notons, enfin, que l'automorphisme $\rho : \bar{A}^3 \rightarrow \bar{A}^3$ de permutation circulaire : $\rho(a, b, c) = (c, a, b)$, est compatible avec θ et induit donc un automorphisme de B qui, modulo $I^{\times 3}$, s'écrit

$$(\alpha, \beta, \gamma) \longmapsto (\gamma, \alpha, \beta).$$

Ceci étant précisé, montrons que C contient les idempotents $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$.

Soit x un élément de B tel que $q(x) = (1, 0, 1)$; écrit dans \bar{A}^3 sous la forme (a, b, c) on a $(p(a), p(b), p(c)) = ((1, 1), (0, 1), (1, 0))$; pour $\rho(x)$, on a $((1, 0), (1, 1), (0, 1))$; par suite (8.2)

$$\varphi(x \otimes \rho(x)) \equiv ((1, 1), (0, 0), (0, 0)) \pmod{I^{\times 3}}$$

cela montre que l'idempotent $(1, 0, 0)$ est bien dans C . De même, on trouve

$$\varphi(\rho(x) \otimes x) \equiv ((0, 0), (1, 1), (0, 0)) \pmod{I^{\times 3}}$$

$$\varphi(\rho^2(x) \otimes \rho^2(x)) \equiv ((0, 0), (0, 0), (1, 1)) \pmod{I^{\times 3}}.$$

Ainsi C est-il l'anneau produit de ses images dans chaque facteur de K^3 , ce qu'on note $C = C_a \times C_b \times C_c$.

Choisissons un élément $t \in \bar{A}$ tel que $p(t) = (1, 0)$, donc tel que $\bar{A} = A[t]$, puisque $(1, 0) \in k^2$ est un générateur de cette k -algèbre. Montrons que l'élément $(t, 0, 0) \in \bar{A}^3$ est dans C . Soit $y \in B$ un élément tel que $q(y) = (1, 0, 0) \in k^3$; écrit dans \bar{A}^3 sous la forme $y = (a, b, c)$, on a $(p(a), p(b), p(c)) = ((1, 0), (0, 1), (0, 0))$ (8.3), et on trouve

$$\varphi(y \otimes \rho(y)) = ((1, 0), (0, 0), (0, 0))$$

cela montre que $(t, 0, 0)$ est dans $C \pmod{I^{\times 3}}$, donc que $t \in C_a$, d'où l'égalité $\bar{A} = A[t] = C_a$. De même, le calcul de $\varphi(y \otimes \rho^2(y))$ montre que l'on a $t \in C_b$, et le calcul de $\varphi(\rho^2(y) \otimes \rho^2(y))$ permet de conclure que $t \in C_c$. Cela achève la vérification de l'égalité $C = \text{Im}(\varphi) = \bar{A}^3$, et ainsi la démonstration de ce que T n'admet pas de séparateur. \square

9. CAS DES ESPACES ALGÈBRIQUES

9.1. Séparation d'espaces algébriques.

9.1.1. **Lemme.** *Soient S un schéma, X un S -espace algébrique, et $U \rightarrow X$ une présentation étale par un S -schéma; enfin, notons $R = U \times_X U$ la relation d'équivalence qui définit X comme quotient U/R . On suppose que le morphisme canonique (de schémas) $\delta : R \rightarrow U \times_S U$ est une immersion quasi-compacte, i.e. que X est "localement séparé" avec les définitions de [Knu71, p. 97]. Considérons la factorisation de δ par adhérence schématique*

$$R \xrightarrow{v} \bar{R} \xrightarrow{\bar{\delta}} U \times_S U$$

de sorte que v est schématiquement dominant et que $\bar{\delta}$ est une immersion fermée.

i) Supposons que les morphismes composés $\bar{R} \rightrightarrows U$ soient étales. Alors \bar{R} est une relation d'équivalence étale sur U , l'espace algébrique quotient $Y = U/\bar{R}$ est séparé, et le morphisme canonique $h : X \rightarrow Y$ est étale surjectif.

ii) Supposons de plus que $U \rightarrow S$ soit plat quasi-compact et quasi-séparé, et qu'il existe un morphisme plat $S' \rightarrow S$ tel que l'espace algébrique $S' \times_S X$ soit séparé sur S' . Alors h induit un isomorphisme $S' \times_S X \xrightarrow{\sim} S' \times_S Y$.

Démonstration. L'énoncé *i)* est une conséquence immédiate de la proposition B.2.1 appliquée à la relation $T_\star = R$. Rappelons que la séparation sur S de U/\bar{R} est synonyme de ce que le morphisme $\bar{\delta} : \bar{R} \rightarrow U \times_S U$ soit une immersion fermée.

ii) La séparation du S' -espace algébrique $S' \times_S X$ signifie que le morphisme

$$S' \times_S R \rightarrow S' \times_S (U \times_S U)$$

est une immersion fermée; puisque $U \times_S U$ est plat quasi-compact et quasi-séparé sur S , la formation de l'adhérence schématique commute au changement de base plat $S' \rightarrow S$ (lemme A.5.1); donc $S' \times_S R \rightarrow S' \times_S \bar{R}$ est un isomorphisme; par suite, le morphisme $S' \times_S X \rightarrow S' \times_S Y$ est bien un isomorphisme. \square

9.1.2. **Proposition.** *Soit S un schéma normal intègre, de point générique η . Soit X un S -espace algébrique étale et quasi-compact. Alors il existe un S -schéma étale et séparé Y , et un morphisme $h : X \rightarrow Y$ qui est étale surjectif et qui induit un isomorphisme sur les fibres génériques : $X_\eta \xrightarrow{\sim} Y_\eta$. On notera $Y = X^{\text{sep}}$.*

Démonstration. Choisissons une présentation étale $U \rightarrow X$ par un schéma U , étale et quasi compact sur S . Le schéma $U \times_S U$, étant étale sur S , est normal. Puisque X est étale, le morphisme diagonal $X \rightarrow X \times_S X$, qui est représentable, est une immersion ouverte; par produit fibré on en déduit que le morphisme $R = U \times_X U \rightarrow U \times_S U$ est aussi une immersion ouverte; soit $R \rightarrow \bar{R} \rightarrow U \times_S U$ sa factorisation par adhérence schématique. Comme U

est étale et quasi-compact sur S l'ensemble des points maximaux de $U \times_S U$ s'identifie à $(U \times_S U)_\eta$, et est par suite fini. Le lemme A.5.5 permet alors de conclure que $\bar{R} \rightarrow U \times_S U$ est une immersion ouverte et fermée ; a fortiori, les morphismes $\bar{R} \rightrightarrows U$ sont étales, et on peut appliquer le lemme 9.1.1 ; il montre que le faisceau quotient U/\bar{R} est un espace algébrique qui est étale et séparé ; mais alors c'est un schéma, d'après [Knu71, II 6.17] ou [LMB00, Th. A2, p.198].

Enfin, la fibre $X_\eta \rightarrow \eta$ est un espace algébrique étale et quasi-compact sur un corps ; c'est donc un schéma affine discret donc séparé. La deuxième partie du lemme ci-dessus, appliquée au morphisme plat $\eta \rightarrow S$, montre que le morphisme $X_\eta \rightarrow Y_\eta$ est un isomorphisme. \square

10. UN ADJOINT À GAUCHE

La catégorie des S -schémas étales de présentation finie est une sous-catégorie pleine de la catégorie des S -schémas plats de présentation finie. Ce paragraphe aborde la question suivante : cette inclusion de catégories admet-elle un adjoint à gauche ? Autrement dit, peut-on associer fonctoriellement à tout tel S -schéma plat T un schéma E , étale et de présentation finie sur S , muni d'un S -morphisme $h : T \rightarrow E$ qui soit universel pour les morphismes de T vers un S -schéma étale du même type ?

Puisque nous suivons les conventions de [EGA G], le terme “de présentation finie” signifiera, comme dans cet ouvrage : *localement de présentation finie, quasi-compact et quasi-séparé* [EGA G, 6.3.7].

10.1. Une première propriété universelle. Commençons par rappeler deux résultats classiques d'existence de cet adjoint.

10.1.1. Proposition. *Soient S un schéma noethérien et $f : T \rightarrow S$ un morphisme propre et lisse. Dans la factorisation de Stein*

$$T \xrightarrow{h} \text{Spec}(f_*(\mathcal{O}_T)) \xrightarrow{g} S$$

le morphisme g est étale fini, et les fibres de h sont géométriquement connexes.

Pour une démonstration voir [EGA III, 4.3.4, 7.8.7 et 7.8.10], ou bien [SGA 1, X 1.2], ou enfin [FAG, 8.5.16]. La propriété universelle de h ne semble pas explicitée dans ces références, mais c'est en tout cas une conséquence de la proposition 10.1.3 ci-dessous.

10.1.2. Proposition. *Soient $S = \text{Spec}(k)$ le spectre d'un corps et $f : T \rightarrow S$ un morphisme localement de type fini. Alors, il existe un S -schéma étale, noté $\pi_0(T/S)$, et une factorisation de f en*

$$T \xrightarrow{h} \pi_0(T/S) \xrightarrow{g} S.$$

Le morphisme h est universel pour les S -morphisms de T vers un S -schéma étale, et il reste universel après toute extension de corps $k \rightarrow k'$; autrement

écrit, si $S' \rightarrow S$ désigne le morphisme de schémas associé à cette extension, on a un isomorphisme

$$S' \times_S \pi_0(T/S) \xrightarrow{\cong} \pi_0(S' \times_S T/S').$$

Si $T' \rightarrow S$ est un second S -schéma localement de type fini, on a un isomorphisme

$$\pi_0(T \times_S T') \rightarrow \pi_0(T/S) \times_S \pi_0(T'/S).$$

Enfin, les fibres de h sont géométriquement connexes.

Voir, par exemple, [DG70, I, §4, n° 6, p.122-126].

Dans ces deux cas, les fibres du morphisme h sont géométriquement connexes. En fait cette propriété est caractéristique de l'adjonction, en vertu du résultat suivant.

10.1.3. Proposition. *Soient $f : T \rightarrow S$ un morphisme plat de présentation finie et $T \xrightarrow{h} E \xrightarrow{g} S$ une factorisation de f , où g est étale de présentation finie. Considérons les propriétés suivantes :*

- (i) *Le morphisme h est surjectif et ses fibres sont géométriquement connexes.*
- (ii) *Le morphisme h est universel pour les S -morphisms de T vers un S -schéma étale et de présentation finie, et il reste universel après tout changement de base $S' \rightarrow S$.*
- (iii) *Comme (ii), mais en se restreignant aux changements de base étales de présentation finie.*

Alors on a les implications (i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii), et si S est un schéma noethérien ces trois propriétés sont équivalentes.

Démonstration. Rappelons [EGA G, 7.3.10] qu'un morphisme plat et de présentation finie est universellement ouvert.

(i) \Rightarrow (ii) Supposons que h soit surjectif à fibres géométriquement connexes. Ces hypothèses étant stables par changement de base, il suffit de montrer que h est universel au-dessus de S . Soit donc $h' : T \rightarrow E'$ un S -morphisme vers un étale de présentation finie ; il faut exhiber un S -morphisme $E \rightarrow E'$ compatible avec h et h' . Notons d'abord que le morphisme $(h, h') : T \rightarrow E \times_S E'$ est ouvert, puisque le morphisme $T \rightarrow S$ est universellement ouvert, et que $E \times_S E'$ est étale sur S , donc à diagonale ouverte (cf. A.1) ; notons $F \subset E \times_S E'$ l'ouvert image de (h, h') , et $h'' : T \rightarrow F$ le morphisme surjectif déduit de (h, h') . Le morphisme h se factorise donc en

$$T \xrightarrow{h''} F \xrightarrow{u} E,$$

où u désigne la restriction à F de la première projection. Il s'agit de vérifier que u est un isomorphisme. Comme le morphisme $h = uh''$ est surjectif par hypothèse, u est surjectif ; puisque F est un ouvert du schéma $E \times_S E'$ qui est étale sur E , le morphisme u est étale. Montrons que les fibres de u

sont des isomorphismes : les morphismes h'' et u induisent des morphismes (désignés par les mêmes lettres) sur les fibres en $x \in E$ (où les symboles $h^{-1}(x)$ et $u^{-1}(x)$ et x désignent les schémas obtenus par le changement de base $\text{Spec}(\kappa(x)) \rightarrow E$)

$$h^{-1}(x) \xrightarrow{h''} u^{-1}(x) \xrightarrow{u} x$$

Comme le morphisme $h^{-1}(x) \rightarrow x$ est géométriquement connexe par hypothèse, et que h'' est surjectif, on voit que $u^{-1}(x) \rightarrow x$ est géométriquement connexe ; mais, u étant étale de présentation finie, $u^{-1}(x)$ est le spectre d'un produit fini de corps extensions finies séparables de $\kappa(x)$; la connexité géométrique entraîne qu'il n'y a qu'un seul corps, et qu'il est isomorphe à $\kappa(x)$. On en déduit immédiatement que le morphisme $\Delta_u : F \rightarrow F \times_E F$ est bijectif ; comme c'est une immersion ouverte, Δ_u est un isomorphisme ; on voit donc que u est un monomorphisme fidèlement plat ; pour pouvoir conclure, par descente fpqc, il reste à vérifier que u est quasi-compact, ou que $h = uh''$ l'est, puisque h'' est surjectif. Or, le composé $T \xrightarrow{h} E \xrightarrow{g} S$ est quasi-compact par hypothèse, et Δ_g est quasi-compact puisque g est quasi-séparé ; il suffit donc, une fois de plus, d'utiliser le procédé de A.1.

L'implication (ii) \Rightarrow (iii) est claire.

(iii) \Rightarrow (i) Puisque le composé $T \xrightarrow{h} E \xrightarrow{g} S$ est universellement ouvert, ainsi que le morphisme diagonal Δ_g (car g est étale), on déduit de A.1 que le morphisme h est ouvert. Le schéma induit par E sur l'ouvert $h(T)$ est donc étale et de présentation finie sur S . La propriété universelle de h entraîne donc que $h(T) = E$.

Soit $T_x = h^{-1}(x) \rightarrow x$ une fibre de h ; il s'agit de montrer que pour toute extension finie séparable k de $\kappa(x)$, le schéma $k \times_{\kappa(x)} T_x$ est connexe. Or, il existe un morphisme étale de présentation finie $S' \rightarrow S$ et un point $x' \in S' \times_S E$ qui se projette sur x et dont le corps résiduel $\kappa(x')$ est isomorphe à k , et il s'agit de montrer que la fibre $T_{x'} \rightarrow x'$ est connexe ; comme les hypothèses sur h sont préservées par le changement de base étale $S' \rightarrow S$, il suffit de montrer que les fibres sont connexes.

On va procéder par étapes, en montrant d'abord que pour tout fermé connexe $F \subset E$, $h^{-1}(F)$ est connexe. Considérons deux fermés T_1 et T_2 de $h^{-1}(F)$, donc de T , tels que

$$h^{-1}(F) = T_1 \cup T_2, \quad T_1 \cap T_2 = \emptyset.$$

On va montrer que l'un des deux est vide. Les ouverts complémentaires $U_i = T - T_i$ ont les propriétés suivantes :

$$U_1 \cap U_2 = T - h^{-1}(F), \quad U_1 \cup U_2 = T.$$

Soit E' le schéma obtenu en recollant les schémas $h(U_i)$ (des ouverts de E) le long de l'ouvert $h(U_1 \cap U_2) = E - F$. Ce schéma E' est étale sur S , tout comme les ouverts $h(U_i)$; mais on a supposé que S est noethérien (c'est ici le seul

passage où cette hypothèse est utilisée) ; comme E est de présentation finie sur S ses ouverts $h(U_i)$ sont noethériens, et, en particulier, quasi-compacts et quasi-séparés ; ainsi, E' est lui aussi étale et de présentation finie sur S . Comme h se factorise en $T \rightarrow E' \rightarrow E$, où $T \rightarrow E'$ est surjectif, la propriété universelle de h implique que $E' \rightarrow E$ est un isomorphisme, i.e. que l'ouvert de recollement est le même pour E' et pour E , soit

$$h(U_1 \cap U_2) = h(U_1) \cap h(U_2).$$

On vérifie que $F \cap h(U_1) = h(T_2)$ et $F \cap h(U_2) = h(T_1)$; ce sont donc des ouverts de F ; comme $h(U_1 \cap U_2) = E - F$, l'égalité ci-dessus montre que $\{h(T_1), h(T_2)\}$ forme une partition ouverte de F ; mais on a supposé que F est connexe ; donc l'un de ces ouverts est vide, ce qui entraîne que T_1 ou T_2 est vide ; bref, $h^{-1}(F)$ est connexe.

Revenons à la connexité des fibres. Soit x un point de E , et soit s son image dans S . Si s est un point fermé de S , alors x est un point fermé de E , et l'argument précédent permet de conclure ; sinon on doit utiliser le "passage à la limite" suivant. Soit S_0 un ouvert affine de S contenant s , et soit $S_\lambda \subset S_0$ la famille des ouverts affines de S_0 contenant s , de sorte que l'on a $\bigcap_\lambda S_\lambda = \text{Spec}(\mathcal{O}_{S,s})$. Enfin, notons

$$T_\lambda \xrightarrow{h_\lambda} E_\lambda \xrightarrow{g_\lambda} S_\lambda$$

les morphismes obtenus par image réciproque. On a $\bigcap_\lambda E_\lambda = g^{-1}(\text{Spec}(\mathcal{O}_{S,s}))$; par suite, $g^{-1}(s)$ est fermé dans $\bigcap_\lambda E_\lambda$; mais, g étant étale, x est fermé dans $g^{-1}(s)$; il est donc aussi fermé dans $\bigcap_\lambda E_\lambda$; on en tire qu'en posant $F_\lambda = E_\lambda \cap \overline{\{x\}}$, on a

$$\bigcap_\lambda F_\lambda = \{x\}, \quad \text{et} \quad h^{-1}(x) = \bigcap_\lambda h^{-1}(F_\lambda).$$

Comme $S_\lambda \rightarrow S_0$ est étale de présentation finie, l'hypothèse (iii) implique que le morphisme $h_\lambda : T_\lambda \rightarrow E_\lambda$ est universel pour les S_λ -morphisms de T_λ vers un schéma étale de présentation finie sur S_λ ; d'après le début de la démonstration, les fermés irréductibles $F_\lambda \subset E_\lambda$ ont donc une image réciproque connexe dans T_λ , et il faut en déduire que leur intersection $h^{-1}(x)$ est connexe. Or, les morphismes de transition $h^{-1}(F_\mu) \rightarrow h^{-1}(F_\lambda)$ sont affines, et, h étant quasi-compact, le schéma $h^{-1}(F_0)$ est quasi-compact ; on peut donc utiliser [EGA IV₃, 8.4.1, ii)], en remplaçant, dans cet énoncé, S_α et les S_λ par notre $h^{-1}(F_0)$ et nos $h^{-1}(F_\lambda)$; cela permet de conclure que la fibre $h^{-1}(x)$ est connexe. \square

10.2. Un théorème de Romagny (et de Laumon–Moret-Bailly).

L'équivalence établie dans la proposition 10.1.3 conduit à un changement de point de vue, et elle explique l'importance pour notre propos du travail de ROMAGNY, qui porte sur la représentabilité du foncteur des ouverts qui sont réunion de composantes connexes des fibres.

10.2.1. Proposition (M. ROMAGNY). *Soit $f : T \rightarrow S$ un morphisme lisse et de présentation finie. Alors il existe un espace algébrique $\pi_0(T/S)$ qui est étale et quasi-compact sur S et un morphisme $h : T \rightarrow \pi_0(T/S)$ à fibres géométriquement connexes. La formation de $\pi_0(T/S)$ commute à tout changement de base sur S .*

Démonstration. [Rom11, th. 2.5.2], [LMB00, 6.8]. □

Le résultat de ROMAGNY reste vrai si $T \rightarrow S$ est un espace algébrique lisse de présentation finie. C'est donc un résultat d'adjonction, mais relative à l'inclusion de la catégorie des espaces algébriques étales quasi-compacts, dans celle des espaces algébriques lisses quasi-compacts. Notre question initiale est plus spécifique en ce qu'elle vise une adjonction réalisée *par un schéma* ; le travail de ROMAGNY indique que cela est en général sans espoir. Mais il indique aussi une issue : puisqu'un espace algébrique étale est un schéma dès qu'il est *séparé*, il faut reformuler la question initiale en se restreignant aux étales *séparés*. C'est l'objet de ce qui suit.

Cette restriction ne permet plus d'utiliser l'équivalence établie dans 10.1.3 car la démonstration de cette proposition repose sur la construction de schémas étales éminemment non séparés ; aussi, l'adjoint considéré plus bas, puisqu'il est essentiellement indépendant de la connexité des fibres, ne peut plus être noté $\pi_0(T/S)$, et nous avons dû introduire la notation $\pi^s(T/S)$, l'exposant "s" étant là pour évoquer la séparation.

À un schéma T sur S (pour le moins plat de présentation finie) on cherche donc dans la suite à associer un schéma $\pi^s(T/S)$, étale quasi-compact *et séparé* sur S muni d'un morphisme de S -schémas

$$T \rightarrow \pi^s(T/S)$$

qui soit universel pour les S -morphisms de T vers un étale séparé.

Nous allons montrer l'existence de cet adjoint sous des hypothèses générales sur T/S , mais à condition de supposer S intègre. Pour obtenir les propriétés raisonnables attendues (compatibilité au produit, à certains changements de base, etc.) il faudra supposer de plus que S est normal.

10.3. Sorites. Commençons par quelques remarques qui montrent que l'hypothèse de séparation simplifie beaucoup les choses.

Soit $f : T \rightarrow S$ un morphisme plat et de présentation finie de schémas. On considère d'abord la catégorie $\mathbf{E}(T/S)$ dont les objets sont les factorisations de f en $T \xrightarrow{h} E \xrightarrow{g} S$, où g est étale et *séparé* et où h est surjectif, une flèche de (g, h) vers (g', h') étant un morphisme de S -schémas $u : E \rightarrow E'$ tel que $h' = uh$ et $g'u = g$. Notons que h étant supposé surjectif et gh quasi-compact, le morphisme g est quasi-compact.

10.3.1. Lemme. *Entre deux factorisations il existe au plus un morphisme.*

Démonstration. Soit $f = gh$ une factorisation de $\mathbf{E}(T/S)$. Le morphisme diagonal Δ_g étant une immersion ouverte et fermée le morphisme h est plat

et de présentation finie, tout comme $gh = f$ (cf. A.1); il est donc ouvert; comme il est supposé surjectif, h est un épimorphisme [SGA 1, VIII 5.3]. \square

10.3.2. **Lemme.** *La catégorie $\mathbf{E}(T/S)$ est filtrante.*

Démonstration. Soient, en effet, $f = g'h' = g''h''$ deux factorisations; elles donnent lieu au diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & E' & \\
 & & & \nearrow g' & \\
 & & & & S \\
 & & & \nwarrow g'' & \\
 & & & E'' & \\
 T & \xrightarrow{h} & E' \times_S E'' & & \\
 & \nearrow h' & \searrow & & \\
 & & & &
 \end{array}$$

dans lequel h est ouvert; par suite, $E = h(T)$ est un ouvert du produit fibré, et il est muni des projections $u' : E \rightarrow E'$ et $u'' : E \rightarrow E''$ qui sont étales et séparées, et le morphisme composé $g'u' = g''u'' : E \rightarrow S$ est donc lui aussi étale et séparé. \square

10.3.3. **Lemme.** *Soit S un schéma intègre, de point générique η . Soient $g : E \rightarrow S$ et $g' : E' \rightarrow S$ deux morphismes. On suppose que*

- a) *g est fidèlement plat et quasi-compact (fpqc), et séparé;*
- b) *g' est étale et quasi-séparé.*

Si un morphisme de S -schémas $u : E \rightarrow E'$ est surjectif et s'il induit un isomorphisme $E_\eta \xrightarrow{\sim} E'_\eta$ sur les fibres génériques, alors u est un isomorphisme.

Démonstration. Montrons d'abord que u est un morphisme séparé, plat et quasi-compact. Le morphisme $g = g'u$ possède ces propriétés; grâce au procédé de A.1, il suffit de vérifier que $\Delta_{g'}$ les possède aussi; or ce morphisme diagonal est une immersion (donc un morphisme séparé), qui est ouverte (car g' est étale), c'est donc un morphisme plat, et $\Delta_{g'}$ est quasi-compact (car g' est quasi-séparé).

Pour montrer que u est un isomorphisme, il suffit donc, par descente fpqc [SGA 1, VIII 5.4], de montrer que l'un des morphismes de projection $E \times_{E'} E \rightarrow E$ est un isomorphisme, ou, encore, que le morphisme diagonal $\Delta_u : E \rightarrow E \times_{E'} E$ est un isomorphisme. Comme Δ_u est une immersion fermée, il suffit de voir qu'elle est schématiquement dominante. Considérons le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{\Delta_u} & E \times_{E'} E \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 E_\eta & \xrightarrow{(\Delta_u)_\eta} & (E \times_{E'} E)_\eta
 \end{array}$$

Les morphismes verticaux sont schématiquement dominants puisqu'ils proviennent par changements de base plats du monomorphisme quasi-compact

$\eta \rightarrow S$ qui est schématiquement dominant, et le morphisme horizontal du bas est un isomorphisme puisque u_η est un isomorphisme ; Δ_u est donc bien schématiquement dominant. \square

On notera que la conclusion est fautive si on ne suppose pas g séparé : par exemple, le schéma S' obtenu par recollement de deux copies du schéma intègre S le long d'un ouvert non vide et $\neq S$ fournit un morphisme étale surjectif $S' \rightarrow S$ qui est génériquement un isomorphisme, et qui n'est pas lui-même un isomorphisme.

10.4. Construction de π^s .

10.4.1. Proposition. *Soit $f : T \rightarrow S$ un morphisme fidèlement plat de présentation finie. On suppose que S est intègre. On considère la catégorie $\mathbf{E}(T/S)$ dont les objets sont les factorisations de f de la forme*

$$T \xrightarrow{h} E \xrightarrow{g} S,$$

où h est surjectif et g est étale et séparé. Alors cette catégorie possède un objet initial, dont le S -schéma étale séparé sera noté $\pi^s(T/S)$. Ce schéma $\pi^s(T/S)$ dépend fonctoriellement de T , et ce foncteur est un adjoint à gauche de l'inclusion de la catégorie des S -schémas étales et séparés dans celle des schémas fidèlement plats de présentation finie sur S .

Démonstration. Remarquons d'abord que, le morphisme f étant quasi-compact et h surjectif, les schémas E qui interviennent, et en particulier $\pi^s(T/S)$, sont quasi-compacts sur S . Soit $\eta = \text{Spec}(k)$ le point générique de S . Puisque T_η est de type fini sur un corps, ses composantes connexes sont en nombre fini, et chacune d'elles possède des points fermés, lesquels ont un corps résiduel fini sur k [EGA G, 6.5.2]. Choisissons un point fermé dans chacune des composantes connexes de T_η , et soit $Z \subset T_\eta$ le schéma réduit constitué par la réunion de ces points. C'est un schéma fini sur η qui a la propriété suivante : pour toute factorisation $T_\eta \rightarrow F \rightarrow \eta$ où F est un schéma réduit et fini sur η , le morphisme composé $\varphi : Z \rightarrow F$ est surjectif ; en effet, puisque chaque point de F est ouvert et fermé, chaque fibre de $T_\eta \rightarrow F$ est une partie ouverte et fermée de T_η ; par suite elle est une réunion de composantes connexes, et elle rencontre donc Z .

On en déduit l'inégalité

$$\text{rang}_k(F) \leq \text{rang}_k(Z).$$

En particulier si E provient de la catégorie $\mathbf{E}(T/S)$, le rang de E_η sur k est borné. (On aura reconnu ici l'argument usuel pour démontrer 10.1.2.)

Considérons une factorisation dans $\mathbf{E}(T/S)$, $T \xrightarrow{h} E \xrightarrow{g} S$ pour laquelle le rang de $E_\eta \rightarrow \eta$ est maximum, et montrons qu'elle est un élément initial de la catégorie $\mathbf{E}(T/S)$. Comme cette catégorie est filtrante, tout revient à voir que pour toute autre factorisation $f = g'h'$, tout morphisme $u : E' \rightarrow E$

est un isomorphisme. La commutativité du triangle de gauche dans

$$\begin{array}{ccc}
 & E' & \\
 h' \nearrow & & \searrow g' \\
 T & & S \\
 h \searrow & & \nearrow g \\
 & E &
 \end{array}$$

montre que u est surjectif puisque h l'est ; par suite le morphisme $u_\eta : E'_\eta \rightarrow E_\eta$ est surjectif, d'où l'on tire l'inégalité $\text{rang}_k(E_\eta) \leq \text{rang}_k(E'_\eta)$; mais le choix de E implique que $\text{rang}_k(E_\eta)$ est maximum, donc u_η est un isomorphisme et le lemme 10.3.3 permet de conclure.

Vérifions la functorialité en T . Soit $\theta : T' \rightarrow T$ un morphisme (quelconque) de S -schémas plats de présentation finie. Le morphisme plat de présentation finie $T' \rightarrow S$ se factorise en

$$T' \xrightarrow{\theta} T \xrightarrow{h} \pi^s(T/S) \xrightarrow{g} S$$

Comme Δ_g est une immersion ouverte et fermée, c'est aussi un morphisme plat de présentation finie ; donc $h\theta$ est plat de présentation finie (cf. A.1), et en particulier c'est un morphisme ouvert ; soit $F \subset \pi^s(T/S)$ son image ; c'est un S -schéma étale et séparé, et quasi-compact puisque T' est quasi-compact sur S ; la propriété universelle de $\pi^s(T'/S)$ fournit le morphisme $\pi^s(T'/S) \rightarrow F \subset \pi^s(T/S)$ cherché. \square

10.5. Variation de la base : pathologies. Sous les hypothèses de la proposition 10.4.1, le schéma étale $\pi^s(T/S)$ est caractérisé par le fait que le rang sur k de sa fibre $\pi^s(T/S)_\eta$ est maximum, *parmi les rangs génériques des étales séparés de $E(T/S)$.*

En utilisant de k -schéma étale $\pi_0(T_\eta/\eta)$ de la proposition 10.1.2, on a donc l'inégalité

$$(10.1) \quad \text{rang}_k(\pi^s(T/S)_\eta) \leq \text{rang}_k(\pi_0(T_\eta/\eta)).$$

Cette inégalité peut être stricte, comme le montrent les deux exemples suivants ; dans le premier, la base est normale, le morphisme est fini libre mais il n'est pas étale, dans le second le morphisme est étale mais la base n'est pas normale.

10.5.1. Exemple. Considérons l'anneau $A = \mathbf{R}[X]$ comme un sous-anneau de $B = \mathbf{R}[X, Y]/(X^2 + Y^2)$; l'homomorphisme de $\mathbf{R}[X]$ -algèbres $\mathbf{R}[X, Y]/(X^2 + Y^2) \rightarrow \mathbf{C}[X]$, défini par $Y \mapsto iX$, permet d'identifier B à l'ensemble des polynômes complexes dont le terme constant est réel. Le morphisme $A \rightarrow B$ est fini libre de rang 2, et il n'est pas étale, comme on le voit en faisant $X = 0$; mais l'homomorphisme localisé $A_X \rightarrow B_X$ est étale.

Désignons par $f : T = \text{Spec}(B) \rightarrow S = \text{Spec}(A) = \mathbf{A}_{\mathbf{R}}^1$ le morphisme associé à l'inclusion $A \subset B$; on peut voir T comme le schéma obtenu à partir

de $\mathbf{A}_{\mathbf{C}}^1$ en “pinçant” l’origine par remplacement du corps résiduel \mathbf{C} par \mathbf{R} . Au dessus du complémentaire de l’origine, le morphisme f est étale fini, de sorte que $\pi_0(T_\eta/\eta) \simeq T_\eta$ est de rang 2. Montrons que $\pi^s(T/S) = S$. Soit $f = gh$ une factorisation avec $h : T \rightarrow E$ un S -morphisme surjectif et $g : E \rightarrow S$ un morphisme étale et séparé ; il faut voir que g est un isomorphisme. Si ce n’est pas le cas, alors h induit un isomorphisme $T_\eta \rightarrow E_\eta$ puisque T_η est de rang 2 sur η , et on applique le lemme 10.3.3, en remplaçant dans l’énoncé (g, g', u) par (f, g, h) , pour voir que h serait un isomorphisme, ce qui est absurde puisque f n’est pas étale.

10.5.2. *Exemple.* On a construit en 8.3.1 un morphisme *étale*, donc lisse, $f : T \rightarrow S$, où S est le spectre d’un anneau local noethérien intègre de dimension 1 (non normal!), et qui n’admet pas de séparateur. Notant η le point générique de S , on a dans cet exemple, $T_\eta = \eta \sqcup \eta \sqcup \eta = \pi_0(T_\eta/\eta)$; pour toute factorisation $T \xrightarrow{h} E \xrightarrow{g} S$ avec g étale séparé, le rang de E_η est donc ≤ 3 ; s’il était égal à 3, le lemme 10.3.3 impliquerait que h serait un isomorphisme, ce qui est impossible puisque f n’est pas séparé et que g l’est. Le rang de E_η est donc < 3 , et $\pi^s(T/S)$ ne prolonge pas $\pi_0(T_\eta/\eta) = T_\eta$.

On va montrer plus bas que si S est normal et si T est lisse sur S , l’inégalité (10.1) est une égalité, i.e. que le morphisme étale “générique” $\pi_0(T_\eta/\eta) \rightarrow \eta$ se prolonge en un étale séparé sur S ; de plus, dans ce cas, la formation de π^s commute aux changements de base lisses.

Voir ces considérations comme une tentative de prolongement à S d’un étale “générique” peut évoquer la problématique des modèles de Néron [BLR90, p. 12] ; mais l’analogie tourne court, d’abord parce que la construction de Néron repose de façon cruciale sur une loi de groupe (générique), alors qu’ici on impose au prolongement à S d’être un quotient de T , et ensuite parce que le modèle de Néron est objet final de la catégorie des prolongements, alors que $\pi^s(T/S)$ est un objet initial.

10.6. Cas d’une base normale.

10.6.1. **Théorème.** *Soient S un schéma intègre et normal, et $f : T \rightarrow S$ un morphisme lisse et de présentation finie. Désignons par $\pi_0(T/S)^{\text{sep}}$ le S -schéma étale quasi-compact et séparé qui est associé par la proposition 10.4.1 au S -espace algébrique $\pi_0(T/S)$ de ROMAGNY (proposition 10.2.1). Alors la factorisation*

$$T \longrightarrow \pi_0(T/S)^{\text{sep}} \longrightarrow S$$

est la factorisation initiale de $\mathbf{E}(T/S)$. Autrement dit, on a, si S est normal et intègre, un isomorphisme de foncteurs (en T) :

$$\pi^s(T/S) \simeq \pi_0(T/S)^{\text{sep}}.$$

Démonstration. Soit η le point générique de S ; puisque la formation de π_0 commute aux changements de base, on a un isomorphisme

$$\pi_0(T/S)_\eta \xrightarrow{\sim} \pi_0(T_\eta/\eta),$$

où le schéma de droite représente les composantes connexes de T_η , i.e. c'est exactement celui de la proposition 10.1.2. D'après la proposition 9.1.2, le morphisme générique $\pi_0(T/S)_\eta \rightarrow \pi_0(T/S)_\eta^{\text{sep}}$ est un isomorphisme ; par suite, le schéma étale $\pi_0(T/S)^{\text{sep}}$ a le rang générique maximum, celui de $\pi_0(T_\eta/\eta)$; il réalise donc la factorisation initiale cherchée. \square

Noter qu'en général le morphisme $\pi_0(T/S) \rightarrow \pi_0(T/S)^{\text{sep}}$ n'est pas un isomorphisme et que, par suite, les fibres de $T \rightarrow \pi^s(T/S)$ ne sont pas connexes, comme le montre un exemple explicite, et bien classique, celui d'une conique qui se spécialise en deux droites parallèles.

10.6.2. *Exemple.* Soit $S = \text{Spec}(R)$ le spectre d'un anneau de valuation discrète, d'uniformisante t , et tel que $2 \in R^\times$. Posons $F(X, Y) = X(X - 1) + tY^2$. Comme on a $1 = F'_X{}^2 - 4F + 2YF'_Y$, le morphisme

$$f : T = \text{Spec}(R[X, Y]/(F)) \rightarrow S$$

est lisse. La fibre spéciale ($t = 0$) est la réunion de deux droites disjointes, et la fibre générique est géométriquement intègre : pour le voir, notons K le corps des fractions de R , et L celui de l'anneau de T , et vérifions que L est une extension transcendante pure de K ; en effet, si x et y désignent les images de X et de Y dans L , on a $x = x^2 + ty^2$, soit $1/x = 1 + t(y/x)^2$; d'où $L = K(y/x)$.

L'espace algébrique $\pi_0(T/S)$ est ici le schéma obtenu par recollement de deux copies de S le long du point générique, et $\pi^s(T/S) = \pi_0(T/S)^{\text{sep}} = S$.

10.6.3. **Proposition.** *Soit S un schéma normal intègre de point générique η . Soient $f : T \rightarrow S$ et $f' : T' \rightarrow S$ deux morphismes lisses et de présentation finie. Alors*

- (i) (Changement de base lisse) *Le morphisme $\pi^s(T \times_S T'/T') \rightarrow \pi^s(T/S) \times_S T'$ est un isomorphisme.*
- (ii) (Compatibilité au produit) *Le morphisme $\pi^s(T \times_S T'/S) \rightarrow \pi^s(T/S) \times_S \pi^s(T'/S)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. L'hypothèse de lissité du morphisme $T' \rightarrow S$ et la normalité de S impliquent que le schéma T' est normal [EGA IV₃, 11.3.13] ; il est donc somme de ses composantes irréductibles, ce qui permet de le supposer intègre ; soit ξ son point générique.

Pour démontrer i), il suffit, d'après le lemme 10.3.3), de vérifier que le morphisme générique

$$\pi^s(T \times_S T'/T')_\xi \rightarrow \pi^s(T/S) \times_S \xi = \pi^s(T/S)_\eta \times_\eta \xi$$

est un isomorphisme. Or, la formation de l'espace algébrique π_0 commute à tout changement de base ; donc le morphisme de T' -espaces algébriques $\pi_0(T \times_S T'/T') \rightarrow \pi_0(T/S) \times_S T'$ est un isomorphisme, et il en est de même de $\pi_0(T \times_S T'/T')_\xi \rightarrow \pi_0(T/S) \times_S \xi = \pi_0(T/S)_\eta \times_\eta \xi$

Or, T' étant normal, la proposition 10.6.1 permet les identifications

$$\pi_0(T \times_S T'/T')_\xi = \pi^s(T \times_S T'/T')_\xi, \quad \text{et} \quad \pi_0(T/S)_\eta = \pi^s(T/S)_\eta.$$

La vérification de *ii*) est analogue : on se ramène à la situation générique grâce au lemme 10.3.3, puis à l'énoncé correspondant pour les $\pi_0(T_\eta/\eta)$ parce que S est normal, et, sur un corps cet énoncé est démontré dans [DG70, I, §4, 6.10, p.126]. \square

ANNEXE A. ISOMORPHISMES LOCAUX ET MORPHISMES SÉPARÉS

A.1. **Le morphisme diagonal** [EGA G, §4.4 et §5]. Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme de schémas et $\Delta_f : X \rightarrow X \times_S X$ son morphisme diagonal. C'est une immersion, i.e. il existe un ouvert U de $X \times_S X$ contenant $\Delta_f(X)$ et tel que Δ_f induise une immersion fermée $X \rightarrow U$.

Rappelons comment interviennent en pratique les propriétés du morphisme diagonal : pour des morphismes $Z \xrightarrow{h} Y \xrightarrow{g} X$, des hypothèses sur gh et sur Δ_g , entraînent souvent des propriétés de h ; en effet, le morphisme h est le composé $Z \rightarrow Z \times_X Y \rightarrow Y$, et les carrés représentés ci-dessous sont cartésiens

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Z & \xrightarrow{gh} & X \\
 & & \uparrow & & \uparrow g \\
 Z & \xrightarrow{(1,h)} & Z \times_X Y & \longrightarrow & Y \\
 \downarrow h & & \downarrow h \times 1 & & \\
 Y & \xrightarrow{\Delta_g} & Y \times_X Y & &
 \end{array}$$

Par suite, soit **P** une propriété de morphismes qui est stable par changement de base et par composition. Si gh et Δ_g vérifient **P**, alors h vérifie **P**.

A.1.1. Voici un cas particulier utile. Supposons que g soit un monomorphisme (i.e. Δ_g est un isomorphisme), par exemple une immersion, alors le carré

$$\begin{array}{ccc}
 Z & \xrightarrow{gh} & X \\
 \parallel & & \uparrow g \\
 Z & \xrightarrow{h} & Y
 \end{array}$$

est cartésien.

A.2. **Morphismes séparés.** On dit qu'un morphisme de schémas $f : X \rightarrow S$ est *séparé* si son morphisme diagonal Δ_f est une immersion fermée ; il revient au même de dire que l'ensemble $\Delta_f(X)$ est fermé dans $X \times_S X$. Un schéma X est dit séparé si le morphisme $X \rightarrow \text{Spec}(\mathbf{Z})$ est séparé.

Un schéma affine est séparé [EGA G, 5.2.2], et tout ouvert d'un schéma séparé est lui-même séparé.

On dit que f est *quasi-séparé* si le morphisme diagonal Δ_f est quasi-compact ; de même un schéma X est dit quasi-séparé si le morphisme $X \rightarrow \text{Spec}(\mathbf{Z})$ est quasi-séparé.

A.2.1. Lemme. *Si X est un schéma séparé (resp. quasi-séparé), tout morphisme $f : X \rightarrow S$ est séparé (resp. quasi-séparé). Réciproquement, si le schéma S est séparé (resp. quasi-séparé) et si le morphisme f est séparé (resp. quasi-séparé), alors X est séparé (resp. quasi-séparé).*

Démonstration. Considérons le diagramme suivant, où le carré est cartésien

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\Delta_f} & X \times_S X & \xrightarrow{\delta} & X \times X \\ & & \downarrow & & \downarrow f \times f \\ & & S & \xrightarrow{\Delta_S} & S \times S. \end{array}$$

Pour l'énoncé direct, il suffit d'appliquer [A.1.1](#) à la première ligne du diagramme, puisque δ est une immersion, tout comme Δ_S . Dans l'énoncé réciproque, on suppose que Δ_S , donc aussi δ , sont des immersions fermées (resp. sont quasi-compacts), ainsi que Δ_f ; le composé $\delta \circ \Delta_f = \Delta_X$ a donc la même propriété. \square

Rappelons que si U et V sont deux ouverts de X le carré suivant est cartésien :

$$\begin{array}{ccc} U \times_S V & \longrightarrow & X \times_S X \\ \uparrow & & \uparrow \Delta_f \\ U \cap V & \longrightarrow & X \end{array}$$

Cette remarque est à la base du critère suivant [[EGA G](#), 5.3.6] :

A.2.2. Lemme. *Soient S un schéma affine d'anneau R , et $f : X \rightarrow S$ un morphisme de schémas. Pour que f soit séparé il faut et il suffit que pour tout couple d'ouverts affines U et V de X , $U \cap V$ soit un ouvert affine et que le morphisme de R -algèbres provenant des restrictions*

$$\varphi_{UV} : \Gamma(U) \otimes_R \Gamma(V) \rightarrow \Gamma(U \cap V)$$

soit surjectif.

A.3. Isomorphismes locaux [[EGA G](#), 4.4]. Un morphisme de schémas $f : X \rightarrow Y$ est dit un *isomorphisme local* si tout point de X est contenu dans un ouvert U de X sur lequel f induit une immersion ouverte $U \rightarrow Y$.

Comme il est signalé dans l'introduction, cette notion traduit et précise l'intuition géométrique du *recoller davantage*. En effet si U et V sont des ouverts de X sur lesquels f induit une immersion ouverte, alors l'image $f(U \cup V)$ est le schéma obtenu en recollant les ouverts $f(U)$ et $f(V)$ - qui sont respectivement isomorphes à U et à V - le long de l'ouvert $f(U) \cap f(V)$, lequel contient $f(U \cap V)$.

La notion d'isomorphisme local sera donc constamment utilisée dans notre article, et cela nous a conduit à approfondir les indications de *loc. cit.*. Voir le §2.3.

Un tel morphisme est ouvert, plat et localement de présentation finie [EGA G, 6.2.1]. Pour tout point x de X , le morphisme $\theta_x : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ est alors un isomorphisme. Réciproquement, si un morphisme f est localement de présentation finie, et si les θ_x sont des isomorphismes, alors f est un isomorphisme local [EGA G, 6.6.4].

Noter que la propriété pour un morphisme d'être un isomorphisme local n'est évidemment pas locale pour la topologie fpqc : par exemple, une extension finie séparable de corps $K \rightarrow L$ de degré $n > 1$ n'est pas un isomorphisme local, mais le devient par produit tensoriel : $\overline{K} \otimes_K L \simeq \overline{K}^n$.

Un isomorphisme local injectif est une immersion ouverte.

Depuis Čech, un isomorphisme local est devenu familier, celui associé à une famille d'immersions ouvertes $f_i : U_i \longrightarrow Y$, soit le morphisme

$$f : X = \coprod_i U_i \longrightarrow Y.$$

Notons que ce morphisme est séparé. Cela le caractérise :

A.3.1. Proposition. *Soit $f : X \longrightarrow Y$ un isomorphisme local séparé. Alors*

i) Le morphisme f est associé à une famille d'immersions ouvertes $f_i : U_i \longrightarrow Y$, au sens où f est isomorphe au morphisme $\coprod_i U_i \longrightarrow Y$ construit avec les f_i .

ii) Si, de plus, f induit une injection sur l'ensemble des points maximaux de X , alors f est une immersion ouverte.

iii) Si Y est connexe et si f est entier, alors f est isomorphe au morphisme $\coprod_n Y \longrightarrow Y$, où le premier symbole désigne le schéma somme d'un nombre fini de copies du schéma Y .

Démonstration. *i)* Désignons par \mathcal{U} l'ensemble des ouverts U de X au dessus desquels la restriction de f est injective, c'est-à-dire une immersion ouverte $U \longrightarrow Y$; pour un tel ouvert U , $f(U)$ est donc un ouvert de Y , et f induit un isomorphisme $U \xrightarrow{\sim} f(U)$. Cet ensemble \mathcal{U} est une base de la topologie de X .

L'injectivité étant une propriété de caractère fini, l'ensemble \mathcal{U} est inductif. Soit U un élément maximal de \mathcal{U} . On va montrer que U est fermé dans X . Puisque les ouverts de \mathcal{U} forment un recouvrement de X , cela montrera qu'il existe une *partition* de X formée de tels ouverts; c'est une autre façon d'énoncer *i)*.

Soit donc U un élément maximal de \mathcal{U} . L'isomorphisme $U \simeq f(U)$ induit par f se factorise en

$$U \xrightarrow{u} f^{-1}f(U) \xrightarrow{v} f(U)$$

Puisque v est séparé, tout comme f , u est une immersion (ouverte et) fermée ; il existe donc un ouvert V de X et une partition

$$f^{-1}f(U) = U \sqcup V.$$

Montrons que l'on a $X = U \cup \overline{V}$. L'ouvert $X - \overline{V}$ est recouvert par les ouverts $W \in \mathcal{U}$ qui sont disjoints de \overline{V} ; un tel ouvert W , étant en particulier disjoint de V , on a l'inclusion $W \cap f^{-1}f(U) \subset U$, d'où l'on déduit que f est injective sur l'ouvert $W \cup U$; mais comme U a été choisi maximal dans \mathcal{U} , on voit que $W \subset U$.

Montrons ensuite que $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$, ce qui, compte tenu de ce qui précède, entraînera l'égalité cherchée $U = \overline{U}$. On raisonne par l'absurde en considérant un élément x de cette intersection. Soit W un ouvert de \mathcal{U} contenant x ; les ouverts $W \cap U$ et $W \cap V$ sont donc non vides ; mais la restriction de f à l'ouvert $(W \cap U) \cup (W \cap V) \subset W$ est injective puisque $W \in \mathcal{U}$, ce qui est absurde en vertu de l'inclusion $f(V) \subset f(U)$.

ii) (Pour X irréductible, cet énoncé figure aussi dans [EGA G, 4.4.8].) L'hypothèse implique que les ouverts $f_i(U_i)$ de Y sont deux à deux disjoints.

iii) Chaque U_i s'identifie à un (ouvert et) fermé du schéma somme $X = \coprod_{i \in I} U_i$; le morphisme f étant fermé, $f(U_i)$ est ouvert et fermé dans le schéma Y qui est supposé connexe ; donc chaque f_i est un isomorphisme. Enfin, un morphisme entier étant quasi-compact, l'ensemble I est fini. \square

A.4. Morphismes schématiquement dominants [EGA G, 5.4].

A.4.1. Définition. On dit qu'un morphisme $t : Y \rightarrow X$ est *schématiquement dominant* si l'application $\mathcal{O}_X \rightarrow t_*(\mathcal{O}_Y)$ est injective.

Un tel morphisme est dominant, i.e. l'ensemble $t(Y)$ est dense dans X . Une immersion schématiquement dominante est ouverte. Une immersion fermée qui est schématiquement dominante est un isomorphisme.

Pour un schéma intègre X , de point générique η , le morphisme $\eta \rightarrow X$ est schématiquement dominant. Plus généralement, si X est réduit et si l'ensemble de ses points maximaux est fini, en notant X_0 le schéma somme de ces points, le morphisme $X_0 \rightarrow X$ est quasi-compact, quasi-séparé et schématiquement dominant.

Soit U un ouvert d'un schéma X . Si l'immersion $U \rightarrow X$ est schématiquement dominante, alors U contient les points maximaux de X . Si X est localement noethérien, $U \rightarrow X$ est schématiquement dominant si et seulement si U contient l'ensemble $\text{Ass}(X)$ des points associés [EGA IV₂, 3.1.8].

A.4.2. Lemme. Soit $t : Y \rightarrow X$ un morphisme quasi-compact, quasi-séparé et schématiquement dominant. Pour tout \mathcal{O}_X -module P , quasi-cohérent et plat, l'application

$$P \rightarrow t_*t^*(P)$$

est injective. En particulier, si $t^*(P) = 0$, alors $P = 0$.

Démonstration. La platitude de P entraîne que l'application $P \rightarrow P \otimes_{\mathcal{O}_X} t_*(\mathcal{O}_Y)$ est injective. Il suffit donc voir que l'application $P \otimes_{\mathcal{O}_X} t_*(\mathcal{O}_Y) \rightarrow t_*t^*(P)$ est un isomorphisme. C'est évident pour $P = \mathcal{O}_X$, puis pour P libre de type fini. Dans le cas général, on peut se restreindre au cas où X est affine, $X = \text{Spec}(A)$; puisque P est quasi cohérent il est associé à un A -module plat, lequel est donc limite inductive filtrante de A -modules libres de type fini. D'où le résultat. \square

La propriété suivante sera très utilisée.

A.4.3. Lemme ([EGA G, 9.3.3]). *Soit $t : Y \rightarrow X$ un morphisme quasi-compact, quasi-séparé et schématiquement dominant. Alors le morphisme $t' : X' \times_X Y \rightarrow X'$ obtenu par un changement de base plat $X' \rightarrow X$ est encore schématiquement dominant.*

A.5. Adhérence schématique [EGA G, 6.10]. Soit $t : Y \rightarrow X$ un morphisme quasi-compact et quasi-séparé. L'image directe $t_*(\mathcal{O}_Y)$ est une \mathcal{O}_X -algèbre quasi-cohérente; le noyau \mathcal{I} du morphisme canonique $\mathcal{O}_X \rightarrow t_*(\mathcal{O}_Y)$ est alors quasi-cohérent.

L'adhérence schématique de t , ou de Y dans X , est le fermé Z de X défini par l'idéal \mathcal{I} . Le morphisme $t : Y \rightarrow X$ se factorise donc en

$$Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{u} X$$

où u est une immersion fermée et où v est schématiquement dominant, i.e. l'application $\mathcal{O}_Z \rightarrow v_*(\mathcal{O}_Y)$ est injective [EGA G, 5.4.2].

A.5.1. Lemme ([EGA IV₂, 2.3.2]). *La formation de l'adhérence schématique d'un morphisme quasi-compact et quasi-séparé commute aux changements de base plats.*

Si Y est un sous-espace localement fermé d'un espace topologique X , on sait que Y est ouvert dans son adhérence dans X ([TG] I.20). Voici l'énoncé analogue pour les schémas.

A.5.2. Proposition. *Soient $t : Y \rightarrow X$ une immersion quasi-compacte, et $Y \xrightarrow{w} U \xrightarrow{j} X$ une factorisation de t , où w est une immersion fermée et j une immersion ouverte. Soit, d'autre part, $Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{u} X$ la factorisation de t par adhérence schématique. Alors, le carré*

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{v} & Z \\ w \downarrow & & \downarrow u \\ U & \xrightarrow{j} & X \end{array}$$

est cartésien; en particulier v est une immersion ouverte. De plus, v quasi-compacte, et l'espace sous-jacent à Z est l'adhérence de Y dans X .

Démonstration. L'existence de l'immersion fermée w et de l'immersion ouverte j provient de la définition d'une immersion; la factorisation de t par

adhérence schématique existe puisque t est supposée quasi-compacte ; on en déduit immédiatement que v est quasi-compact (A.1.1). Le produit cartésien $V = U \times_U Z$ s'insère dans le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & Z & \\
 & & & \nearrow & \\
 Y & \xrightarrow{\theta} & V & & X \\
 & \searrow & \nearrow & & \\
 & & U & \xrightarrow{j} & X \\
 & & & \nwarrow & \\
 & & & & Z
 \end{array}$$

dans lequel j , et donc aussi j' , sont des immersions ouvertes. Il s'agit de voir que le morphisme θ est bijectif. Or, θ est schématiquement dominant puisque c'est la restriction à l'ouvert $V \subset Z$ du morphisme schématiquement dominant $v = j'\theta$; de plus, u' est une immersion fermée, tout comme u , ainsi que $w = u'\theta$ par hypothèse ; donc θ est aussi une immersion fermée, et la conjonction de ces deux propriétés implique que θ est un isomorphisme. Enfin, comme $v : Y \rightarrow Z$ est schématiquement dominant, il est dominant i.e. $v(\overline{Y}) = Z$. \square

A.5.3. Lemme (Unicité de l'adhérence schématique). *Considérons un carré commutatif de morphismes de schémas*

$$\begin{array}{ccc}
 Y & \xrightarrow{v} & Z \\
 v' \downarrow & & \downarrow u \\
 Z' & \xrightarrow{u'} & X.
 \end{array}$$

On suppose que u et u' sont des immersions fermées définies respectivement par les idéaux \mathcal{I} et \mathcal{I}' de \mathcal{O}_X . Si le morphisme v est schématiquement dominant, i.e. si $\mathcal{O}_Z \rightarrow v_(\mathcal{O}_Y)$ est injectif, alors $\mathcal{I}' \subset \mathcal{I}$, et il existe un morphisme $w : Z \rightarrow Z'$ rendant les deux triangles commutatifs.*

Si, de plus, v' est aussi schématiquement dominant, alors w est un isomorphisme. \square

A.5.4. Lemme. *Soient $t : Y \rightarrow X$ et $t' : Y' \rightarrow X'$ des morphismes quasi-compacts et quasi-séparés, $Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{u} X$ et $Y' \xrightarrow{v'} Z' \xrightarrow{u'} X'$ leur factorisation par adhérence schématique. Pour tout couple $f : X \rightarrow X'$ et $g : Y \rightarrow Y'$ de morphismes de schémas tels que $t'g = ft$, il existe un unique*

morphisme $h : Z \rightarrow Z'$ rendant commutatif le diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccc}
 Y & \xrightarrow{g} & Y' \\
 v \downarrow & & \downarrow v' \\
 Z & \xrightarrow{h} & Z' \\
 u \downarrow & & \downarrow u' \\
 X & \xrightarrow{f} & X'
 \end{array}$$

Démonstration. L'unicité de h tel que $u'h = fu$ provient de ce que u' est une immersion fermée, donc un monomorphisme. Pour voir l'existence de h introduisons le produit fibré $Z'' = X \times_{X'} Z'$; on a donc le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Y & \longrightarrow & Y' \\
 & & \downarrow v'' & & \downarrow \\
 v \swarrow & & Z'' & \longrightarrow & Z' \\
 & & \downarrow u'' & & \downarrow \\
 Z \dashrightarrow & & X & \longrightarrow & X' \\
 u \searrow & & & & \\
 & & & &
 \end{array}$$

auquel on peut appliquer le lemme précédent, qui fournit un morphisme $Z \rightarrow Z''$; en le composant avec la projection $Z'' = X \times_{X'} Z' \rightarrow Z'$, on obtient le morphisme h cherché. \square

A.5.5. Lemme. *Soit X un schéma dont les anneaux locaux sont intègres, par ex. un schéma normal, et qui n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles. Soit $t : Y \rightarrow X$ un morphisme plat quasi-compact et quasi-séparé, et*

$$Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{u} X$$

sa factorisation par adhérence schématique. Alors u est une immersion ouverte (et fermée); en particulier, u est plat.

Démonstration. Comme les anneaux locaux de X sont intègres, les composantes irréductibles de X sont deux à deux disjointes; étant en nombre fini, elles sont donc aussi ouvertes. De plus, X est réduit.

L'image par le morphisme plat t d'un point maximal y de Y est un point maximal $t(y)$ de X ; soit Z la réunion des adhérences de ces points maximaux $t(y)$; c'est un ouvert et fermé de X , que l'on munit de la structure de schéma induite. Il est clair que t se factorise en $Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{u} X$. Il reste à voir que le morphisme $\mathcal{O}_Z \rightarrow v_*(\mathcal{O}_Y)$ est injectif; mais Z est réduit, tout comme X , et les points maximaux de Z sont dans $v(Y)$. \square

où on a noté $V = (T_1, d_0) \times_{T_0} (T_0^2, p_1)$, de sorte que tous les carrés sont cartésiens, et où $d' = vu$. Puisque u et v proviennent de d par changement de base, ce sont des immersions, et il en est de même de d' ; cela montre aussi que si d est une immersion fermée, alors d' est une immersion fermée.

Si on interprète, via d , T_1 comme l'ensemble des couples (x, y) d'éléments de T_0 "en relation", (notation : $x \sim y$), alors le morphisme $d' : T_2 \rightarrow T_0^3$ permet de voir (de concevoir) un élément de T_2 comme un triplet (x, y, z) tel que $x \sim y$ et $y \sim z$, les projections étant $d'_0(x, y, z) = (y, z)$ et $d'_2(x, y, z) = (x, y)$. La transitivité exige que l'on ait alors $x \sim z$; comme $(x, z) = p_1(x, y, z)$, on peut énoncer, plus correctement,

Pour qu'un couple de morphismes $d_0, d_1 : T_1 \rightrightarrows T_0$ définisse un relation transitive sur T_0 il faut que, en posant comme plus haut, $T_2 = (T_1, d_0) \times_{T_0} (T_1, d_1)$, il existe un morphisme $d'_1 : T_2 \rightarrow T_1$ tel que $dd'_1 = p_1 d'$ (un tel morphisme est alors unique puisque d est une immersion)

Autrement dit on doit avoir un morphisme de S -schémas semi-simpliciaux (tronqués)

$$(B.2) \quad \begin{array}{ccccc} T_2 & \xrightarrow{d'_0, d'_1, d'_2} & T_1 & \xrightarrow{d_0, d_1} & T_0 \\ \downarrow d' & & \downarrow d & & \parallel \\ T_0^3 & \xrightarrow{p_0, p_1, p_2} & T_0^2 & \xrightarrow{p_0, p_1} & T_0 \end{array}$$

B.2. Équivalence et platitude.

B.2.1. Proposition. *Soit S un schéma. Soit T_\star une relation d'équivalence, au sens décrit plus haut, telle que le morphisme $d : T_1 \rightarrow T_0^2$ soit une immersion quasi-compacte. Considérons la factorisation de d par adhérence schématique, soit*

$$T_1 \xrightarrow{i} \widetilde{T}_1 \xrightarrow{\widetilde{d}} T_0^2$$

Alors, si les morphismes $\widetilde{d}_1, \widetilde{d}_0 : \widetilde{T}_1 \rightrightarrows T_0$, composés de \widetilde{d} et des projections sur T_0 , sont plats, ils proviennent d'une relation d'équivalence sur T_0 .

Démonstration. Notons d'abord que l'hypothèse implique que les morphismes $d_0, d_1 : T_1 \rightrightarrows T_0$ sont plats puisque i est une immersion ouverte (lemme A.5.2), et que $d_j = \widetilde{d}_j \circ i$. Considérons le morphisme (B.2) de schémas semi-simpliciaux (tronqués) et les factorisations par adhérence schématique des morphismes verticaux d et d' . En appliquant le lemme A.5.4, on obtient un schéma semi-simplicial \widetilde{T}_\star et des morphismes

$$T_\star \rightarrow \widetilde{T}_\star \rightarrow T_0^{\star+1}$$

En particulier, le morphisme $d'_1 : T_2 \rightarrow T_1$ induit un morphisme analogue $\widetilde{d}'_1 : \widetilde{T}_2 \rightarrow \widetilde{T}_1$; le même lemme donne aussi immédiatement les morphismes de réflexivité et de symétrie pour \widetilde{T}_1 . Le seul point non formel est

que l'adhérence schématique \widetilde{T}_2 de T_2 dans T_0^3 soit le produit fibré attendu $(\widetilde{T}_1, \widetilde{d}_0) \times_{T_0} (\widetilde{T}_1, \widetilde{d}_1)$; c'est pour cela qu'il faut supposer que les morphismes \widetilde{d}_1 et \widetilde{d}_0 sont plats.

Pour le montrer, notons d'abord que, dans la factorisation de d par adhérence schématique $T_1 \xrightarrow{i} \widetilde{T}_1 \xrightarrow{\widetilde{d}} T_0^3$, le morphisme i est une immersion ouverte quasi-compacte (lemme A.5.2), et schématiquement dominante. Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 T_2 & \xrightarrow{d'_0} & T_1 & & \\
 \downarrow u & \searrow w & \downarrow i & & \downarrow d_1 \\
 V & \xrightarrow{v} & U & \xrightarrow{\widetilde{d}'_0} & \widetilde{T}_1 \\
 \downarrow & & \downarrow \widetilde{d}'_2 & & \downarrow \widetilde{d}_1 \\
 T_1 & \xrightarrow{i} & \widetilde{T}_1 & \xrightarrow{\widetilde{d}_0} & T_0 \\
 & & \downarrow d_0 & & \\
 & & & &
 \end{array}$$

où on a noté $U = (\widetilde{T}_1, \widetilde{d}_0) \times_{T_0} (\widetilde{T}_1, \widetilde{d}_1)$, et $V = (T_1, d_0) \times_{T_0} (\widetilde{T}_1, \widetilde{d}_1)$. On veut montrer que le produit fibré U est isomorphe à l'adhérence schématique \widetilde{T}_2 ; il est d'abord clair (surtout si on a le diagramme (B.1) présent à l'esprit) que le morphisme $U \rightarrow T_0^3$ est une immersion fermée; il reste donc à voir que $w = vu$ est schématiquement dominant. Or, tous les carrés du diagramme sont cartésiens; comme d_0 est plat, il en est de même du morphisme horizontal médian $\widetilde{d}'_0 v : V \rightarrow \widetilde{T}_1$, donc u est schématiquement dominant tout comme i (lemme A.5.1); d'autre part, dans le carré en bas à gauche, i est quasi-compact et schématiquement dominant, et \widetilde{d}'_2 est plat puisque \widetilde{d}_1 l'est par hypothèse, donc v est schématiquement dominant. \square

Le même raisonnement montrerait que si \widetilde{d}_0 et \widetilde{d}_1 sont universellement ouverts, alors ils proviennent d'une relation d'équivalence.

BIBLIOGRAPHIE

- [BLR90] S. BOSCH, W. LÜTKEBOMERT, M. RAYNAUD, *Néron Models*, Ergebnisse der Math. (3), vol. 21, Springer-Verlag, (1990).
- [AC] N. BOURBAKI, *Algèbre commutative*. Translated into English as *Commutative Algebra*, chap. 1–7. Springer, (1989).
- [TG] N. BOURBAKI, *Topologie générale*, chap. 1 à 4, Masson, (1990).
- [DG70] M. DEMAZURE, P. GABRIEL, *Groupes algébriques*, Masson (1970).
- [EGA G] A. GROTHENDIECK, J. DIEUDONNÉ, *Éléments de géométrie algébrique I*, Grundlehren Math. Wiss., vol. 166, Springer-Verlag (1971).
- [EGA III] A. GROTHENDIECK, J. DIEUDONNÉ *Éléments de Géométrie algébrique, III : Étude cohomologique des faisceaux cohérents*, Publ. Math. IHÉS no 11 (1961) et 17, (1963).

- [EGA IV₂] A. GROTHENDIECK, J. DIEUDONNÉ *Éléments de Géométrie algébrique* Publ. Math. IHÉS no. 24, (1965).
- [EGA IV₃] A. GROTHENDIECK, J. DIEUDONNÉ *Éléments de Géométrie algébrique* Publ. Math. IHÉS no. 28, (1966).
- [EGA IV₄] A. GROTHENDIECK, J. DIEUDONNÉ *Éléments de Géométrie algébrique* Publ. Math. IHÉS no. 32, (1967).
- [SGA 1] A. GROTHENDIECK, *Revêtements étales et groupe fondamental*, Documents mathématiques n° 3, Soc. Math. France (2003).
- [SGA 3] M. DEMAZURE, A. GROTHENDIECK, *Schémas en groupes*, Documents mathématiques n° 7, Soc. Math. France, (2011).
- [SGA 4] M. ARTIN, A. GROTHENDIECK, J.-L. VERDIER, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas* (vol. II), Lect. Notes in Math.
- [FAG] B. FANTECHI, L. GÖTTSCHE, L. ILLUSIE, S. L. KLEIMAN, N. NITSURE, A. VISTOLI, *Fundamental Algebraic Geometry*, Math. Surveys, vol.123, AMS, (2005).
- [Fer03] D. FERRAND, Conducteur, descente et pincement, *Bull. Soc. math. France*, **131** (4), 2003, 553–585.
- [God58] R. GODEMENT, *Théorie des faisceaux*, Actual. Scient. et Industr. no. 1252, Paris, Hermann,(1958).
- [Knu71] D. KNUTSON, *Algebraic Spaces*, LNM vol. 203, Springer-Verlag (1971).
- [LMB00] G. LAUMON, L. MORET-BAILLY, *Champs algébriques*, Springer-Verlag (2000).
- [Ray70] M. RAYNAUD, *Anneaux henséliens*, LNM 169, Springer, (1970).
- [Rom11] M. ROMAGNY, Composantes connexes et irréductibles en familles, *Manuscripta math.* **136**, 1-32, (2011).

IMJ-PRG, CASE 247, 4 PLACE JUSSIEU, 75252 PARIS CEDEX 05, FRANCE
E-mail address: daniel.ferrand@imj-prg.fr

IMJ-PRG, CASE 247, 4 PLACE JUSSIEU, 75252 PARIS CEDEX 05, FRANCE
E-mail address: bruno.kahn@imj-prg.fr