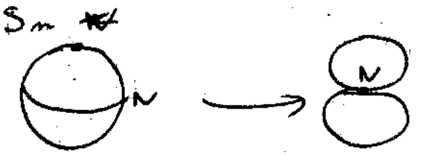
Introduction :

X cnx par arcs. $x_0 \in X$.

$$\pi_n(X, x_0) = [S^n_N \longrightarrow X_{x_0}] \qquad n \geq 1$$



$S^n \vee S^n$

on contracte "l'equateur" en 1 point.

$n=1$ gpe fondamental

$n \geq 2$ gpe commutatif

$$\pi_n(X \times Y) \simeq \pi_n(X) \times \pi_n(Y)$$

filtration : B espace topologique

F esp. topo.

1) La filtration triviale de fibre F. $\begin{array}{c} B \times F \\ \downarrow p_1 \\ B \end{array}$

2) filtration trivialisable

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & B \times F \arrow[dl] \\ B & \end{tikzcd}$$

diagramme commutatif.

3) filtration = filtration localement trivialisable

$$\begin{array}{c} X \\ \downarrow \\ B \end{array} \qquad \forall x \in B,\ \exists U \in \mathcal{V}(x) \text{ t.q } \begin{array}{c} p^{-1}(U) \\ \downarrow \\ U \end{array}$$ soit une fibration trivialisable de fibre F.

on peut ne pas imposer une fibre : on montre alors que sur chaque composante connexe la fibre est constante.

Fibration de Hopf :

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \longrightarrow & S^3 \\ & & \downarrow \\ & & S^2 \end{array}$$

$S^3 \simeq$ gpe des unités de $\mathbb{H}$

$\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{H}_0$.

S^3 opère sur $\mathbb{H}_0$. de manière orthogonale.

$$\begin{array}{c} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ \downarrow \\ S^3 \\ | \\ SO_3 \end{array}$$

$\alpha \in S^1 \subset \mathbb{C}^*$

S^1 opère sur S^3.

$\alpha.(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$

$F \longrightarrow X \longrightarrow B$.

$\to$ suite exacte d'homotopie

$$\to \pi_n(F) \to \pi_n(X) \to \pi_n(B) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F)$$

pas de suite exacte en homologie, d'où l'introduction des suites spectrales.

~~définition~~ définition généralisée d'une fibration

$$\begin{tikzcd} Y\times\{0\} \arrow[r] \arrow[d, hook] & X \arrow[d] \\ Y\times I \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & B \end{tikzcd}$$

$C=(C_n)$ complexe

filtration $F^p C$ $\qquad F^p C_n \subset C_n . \quad -\infty \leq p \leq +\infty .$

$d : F^p C_n \to F^p C_{n-1}$

$F^{-\infty} C = C \qquad F^{+\infty} C = \{0\} .$

filtration à 2 crans : $\quad F^{+\infty} C \subset F^0 C \subset F^{-\infty} C = C .$

c'est une suite exacte courte .

$0 \to F^0 C \to C \to gr\, C \to 0 .$

soit $gr^p C = F^p C / F^{p+1} C$

$p^{ième}$ gradué.

$H_*(C) = H_*(gr^p(C))$

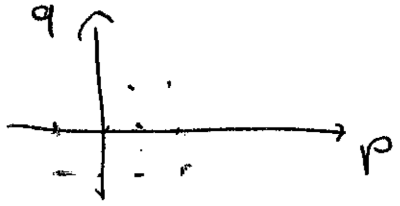
$F^p C \longrightarrow C .$

alors $\exists$ $H_*(F^p C) \longrightarrow H_*(C)$

$F^p(H_*(C))$ est l'image de ce morphisme suite spectrale : suite $(E_r)_{r\geq 2}$ de complexes bigradué.

donnée de $((E_r)_{r\geq 2}, \alpha_r)$.

$$E_r = \bigoplus_{p,q\in\mathbb{Z}} E_r^{pq}$$

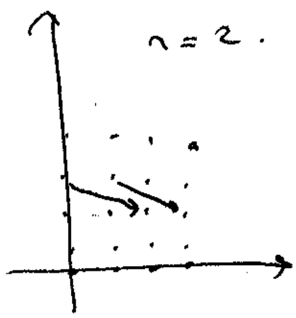


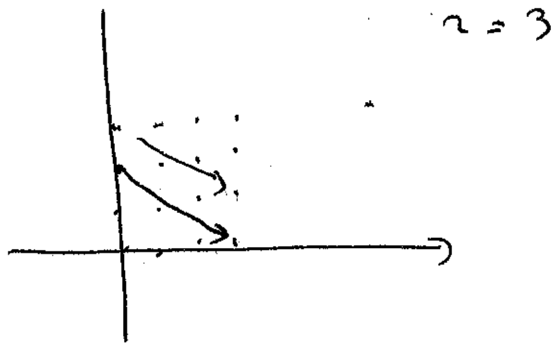
dérivation $\displaystyle\bigoplus_{p+q=n} E_r^{pq} \xrightarrow{d_r} \bigoplus_{p+q=n+1} E_r^{pq}$

$\cancel{d_r\circ} d_r^2=0$

$$E_r^{pq} \xrightarrow{d_r^{p,q}} E_r^{p+r,\, q-r+1}.$$

$d_r^{p+r,q-r+1}\circ d_r^{p,q}=0$.





on pose $Z_{r+1} = \mathrm{Ker}\, d_r$. $B_{r+1} = \mathrm{im}\, d_r$

$Z_{r+1}^{pq} = \mathrm{Ker}\, d_r^{pq}$ $B_{r+1}^{pq} = \mathrm{im}\, d_r^{p-r,q+r-1}$

on pose $H(E_r) = Z_{r+1}/B_{r+1}$

$$H(E_r^{pq}) = Z_{r+1}^{p,q}/B_{r+1}^{pq}$$

$\alpha_r : H(E_r) \xrightarrow{\sim} E_{r+1}$ gradué.

$(H(E_r^{pq}) \longrightarrow E_{r+1}^{pq})$

tés:

$$0 \subset B_{r+1} \subset Z_{r+1} \subset E_r$$

$$0 \subset B_{r+2} \subset Z_{r+2} \subset E_{r+1} \qquad E_{r+1} \simeq B_{r+1}/Z_{r+1}$$

on emboîte B_{r+2} ds $\cancel{B_{r+1}}/\cancel{B_{r+1}}$ et ~~dans~~ $\cancel{B}$.
en identifiant ...

$$0 \subset B_{r+1} \subset B_{r+2} \subset \cdots \subset Z_{r+2} \subset Z_{r+1} \subset E_r$$

par récurrence on obtient une suite emboitée.
Z les identifications dépendent de E_r.

on pose $$B_\infty(E_r) = \bigcup_{k \geq 1} B_{r+k}(E_r)$$

$$Z_\infty(E_r) = \bigcap_{k \geq 1} Z_{r+k}(E_r)$$

$$E_\infty(E_r) = Z_\infty / B_\infty.$$

$$0 \subset B_{r+1} \subset \cdots \subset B_\infty \subset Z_\infty \subset \cdots \subset Z_{r+2} \subset Z_{r+1} \subset E_r$$

Def: (E_r, d_r) est régulière si $\forall p.q \quad \exists k(p.q)$
$\forall k \geq k(p,q)$

$$Z^{pq}_{r+k+1}(E_r) = Z^{pq}_{r+k}(E_r)$$

$$0 \subset B_{r+1}(E_r) \subset \cdots \subset B_\infty(E_r) \subset Z_\infty(E_r) \subset \cdots \subset Z_{r+1}(E_r) \subset$$

$$0 \subset B_{r+2}(E_{r+1}) \subset \cdots \subset \qquad \subset Z_{r+2}(E_{r+1}) \subset E_{r+1}$$

par construction $B_{r+2}(E_r)$ est l'image réciproque de $B_{r+2}(=B_{r+2}(E_{r+1}))$

α_r induit un isomorphisme

$$Z_{r+k}(E_r) / B_{r+k}(E_r) \xrightarrow[\sim]{\alpha_r} Z_{r+k}(E_{r+1}) / B_{r+k}(E_{r+1}).$$

$$\xrightarrow[\sim]{\alpha_{r+1}} \cdots$$

$$\cdots \simeq E_{r+k}.$$

induit $Z_\infty(E_r) / B_\infty(E_r) \longrightarrow Z_\infty(E_{r+1}) / B_\infty(E_{r+1})$

injectif ? $\cancel{x} \in Z_\infty(E_r) \longrightarrow B_\infty(E_{r+1}) = \bigcup_{k \geq 2} B_{r+k}$

$\in Z_{r+1}$

évident. $\in B_{r+1}(E_{r+1})$.

surjectif. $y \in Z_\infty(E_{r+1})$.

$y \in Z_{r+n}(E_{r+1})$ ~~$\forall k \geq 2$~~ $\forall n$.

$\forall n \; \exists x_n \in Z_n(E_r) / \alpha_r(x_n) = y$.

or α_r bijective $\Rightarrow$ $\forall n \; x_n = x \in \bigcap Z_n = Z_\infty$

CQFD.

d'où $E_\infty = Z_\infty(E_r) / B_\infty(E_r) \simeq Z_\infty(E_{r'}) / B_\infty(E_{r'})$..

$E_\infty^{p,n-p} = F^p G_{n+p} / F^{p+1} G_{n+p}$.

<u>morphismes de suites spectrales.</u>

$$(E_r, \alpha_r) \xrightarrow{u} ({}'E_r, {}'\alpha_r)$$

$$(u_r)_{r \geq 2} \quad E_r \to {}'E_r$$

avec les relations de compatibilité

$$H(u_r): \quad \begin{array}{ccc} H(E_r) & \xrightarrow{H(u_r)} & H({}'E_r) \\ \downarrow \alpha_r & & \downarrow {}'\alpha_r \\ E_{r+1} & \xrightarrow{u_{r+1}} & {}'E_{r+1} \end{array}$$

diagramme commutatif.

induit $Z_\infty(u_r) : Z_\infty(E_r) \to Z_\infty({}'u_r)$
$B_\infty(u_r) \quad B_\infty$

$$u_\infty : E_\infty \longrightarrow {}'E_\infty$$

<u>Proposition</u>: u_2 isomorphisme $\Rightarrow \forall r \geq 2$, u_r isom.
$B_\infty(u_2)$ isom.

2 si E_r, ${}'E_r$ reg. $\quad Z_\infty(u_2)$ iso.
u_∞ iso.

dem.

diagramme commutatif.

$$\underset{\text{iso}}{'\alpha_r} \circ H(u_r) = u_{r+1} \circ \underset{\text{iso}}{\alpha_r}.$$

recurrence : u_r iso $\Rightarrow H(u_r)$ isom.

$\Rightarrow u_{r+1}$ isom.

$B_\infty(u_r) : B_\infty(E_r) \to B_\infty('E_r)$

~~bij~~ectif. evident.

$Z_\infty(u_r)$ injectif : restriction d'une application injective. $Z_\infty(E_r) \to Z_\infty('E_r)$

surjectif?

pb.

$G = (G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ modules gradués

$$F^pG = \bigoplus_n F^pG \cap G_n$$

$$\bigcup F^p = G$$

$$\bigcap F^p = 0.$$

Def 2 : (E_r, α_r) approche G s'il existe $\beta = (\beta^{pq})$

$$\beta^{pq} : E_\infty^{pq} \xrightarrow{\sim} gr^p(G)_{p+q} = \frac{F^pG \cap G_{p+q}}{F^{p+q}G \cap G_{p+q}}$$

b) (E_r, α_r) converge vers G si :

- (E, α) régulière
- G régulier.
  $\forall n \ \exists p(n), \ \forall F^p G \cap G_n = \{0\}$

on note $E_2^{pq} \Rightarrow gr^p(G)_{p+q}$

On suppose donnés E, α E', α' u $E \to E'$

G G' on suppose u_2 isom.

$E \Rightarrow G$

$E' \Rightarrow G$.

$G \xrightarrow{v} G'$ respectant graduation et filtration

t q

$$\begin{tikzcd} E_\infty^{pq} \arrow[r, "\beta^{pq}", "\sim"'] \arrow[d, "\wr"] & gr^p(G)_{p+q} \arrow[d, "\overline{v}"] \\ E'^{pq}_\infty \arrow[r, "\beta'^{pq}", "\sim"'] & gr^p(G')_{p+q} \end{tikzcd}$$

commute.

$\overline{v}$ est un isom.

~~on veut en déduire un iso entre G et G'~~ :

Alors v est un isomorphisme.

lem : $gr^p(G)_n \xrightarrow[\sim]{\overline{u}} gr^p(G')_n$.

$G \xrightarrow{u} G'$

injectivité.

$x \in G \quad u(x) = 0$

$x = \sum x_n$. $\quad \sum u_n(x_n) = 0$.

$\forall n \quad u_n(x_n) = 0$.

on se ramène au cas $x \in G_n$. $\quad x \in F^p G_n$.

$u(x) = 0 \Rightarrow$

$p \gg -\infty$. $\quad u(x) = 0 \in F^{p-1} G'_n / F^p G'_n$.

d'où $x \in$ ~~ds~~ $F^{p-1} G_n / F^p G_n$.
car iso. entre les gradués. ~~on descend~~ $x \in \bigcap \ldots$

~~hyp de régularité~~ $\Rightarrow x = 0$.

surjectivité,

$y \in G'_n$.

$$x \in F^p G_n / F^{p+1} G_n \longrightarrow y \in F^p G'_n / F^{p+1} G'_n.$$

$x \in F^p G_n \quad \underbrace{u(x) - y}_{\substack{\parallel \\ y_1}} \in F^{p+1} G'_n$.

on recommence avec y_1

régularité $\Rightarrow$ ça tombe sur 0.

Comment construire une suite spectrale

$C = (C_n)$ complexes. $C_n \xrightarrow{d_n} C_{n+1}$

$F^p C_n$ $\quad (gr^p C_n = F^p / F^{p+1}$

$H_*(C) \qquad H_*(gr\, C)$.

$F^p H_*(C) \qquad gr\, H_*(C)$

idée: approcher l'homologie de C par l'homologie du gradué.

$$M_r^{pq} = \{ x \in F^p C \cap C_{p+q} \mid dx \in F^{p+r} C \}$$

$$E_r^{pq} = M_r^{pq} / d(M_{r-1}^{p-r+1,\, q+r-2}) + M_r^{p+1,\, q-1}$$

La différentielle induit $E_r^{pq} \longrightarrow E_r^{p+r,\, q-r+1}$

on définit une suite spectrale. E_r, d_r vérifier qu'elle se définit toute seule.

Thm. a) (E_r, d_r) approche $gr\, H_*(C)$

b) si la filtration est convergente

$$E_2^{pq} \Rightarrow gr^p H_{p+q}(C)$$

$$E_\infty^{pq} = gr^p (H^{p+q}(C))$$

19 janvier

$$E_0^{pq} = F^p C_{p+q} / F^{p+1} C_{p+q} = (gr^p C)_{p+q}.$$

$$E_1^{pq} = H^{p+q}(gr^p C).$$

suite exacte

$$0 \to F^{p+1}/F^{p+2} \longrightarrow F^p/F^{p+2} \longrightarrow F^p/F^{p+1} \longrightarrow 0.$$

$$\Rightarrow. \quad H^{p+q}(F^p/F^{p+1}) \xrightarrow{\partial} H^{p+q+1}(F^{p+1}/F^{p+2})$$

coïncide avec la différentielle

$$E_1^{pq} \longrightarrow E_1^{p+1,q}$$

On note $E_1^{pq} = H^{p+q}(gr^p C) \Longrightarrow H^n(C)$

où E_∞^{pq} = gradué de l'homologie de C

terme E_2 : homologie associée au complexe E_1

Rq : la construction est fonctorielle en C_n

foncteur : (complexes filtrés) $\longrightarrow$ (suites spectrales).

$C_n \longrightarrow C'_n$ induit homo. entre suites spectrales.

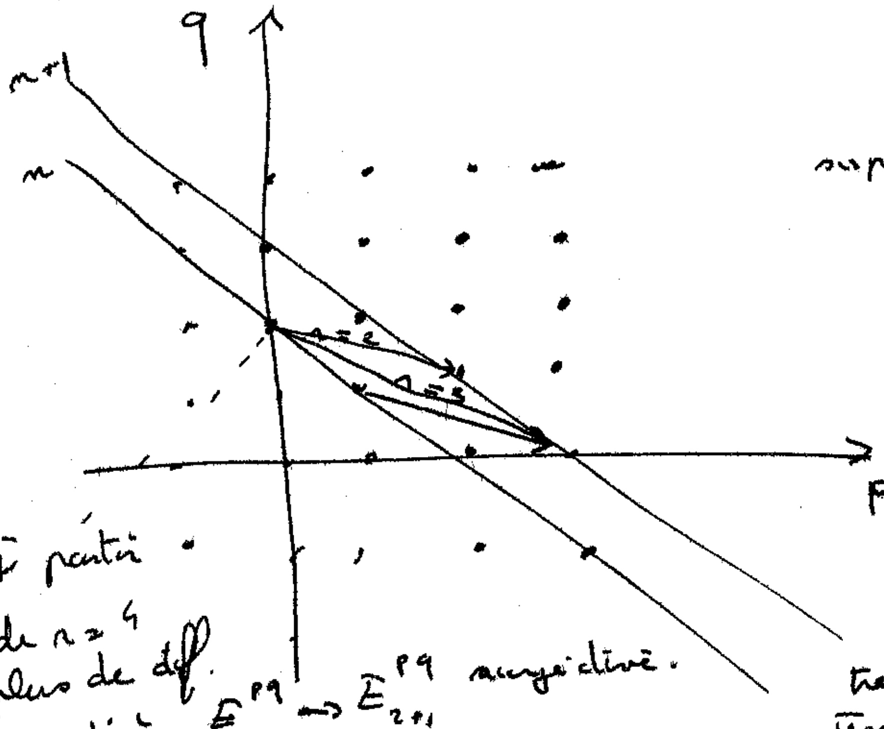
2) si u et u' homotopes

ie $\exists\, s^{pq} : E_2^{p,q} \longrightarrow {}'E_2^{p-2,\,q+1}$

$u - u' = sd + ds$.

alors $H(u) \neq H(u')$ en général.

mais isom. au niveau 2 $\Rightarrow$ isom en colom.



supposons $q > 0$.

$E_r^{pq} = B_r^{pq}$

$E_2^{pq} \twoheadrightarrow E_{r+1}^{pq} \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow E_\infty^{pq}$

très précieuse car relie les termes r aux termes $r+1$

à partir de $r \geq 4$ plus de diff.

d'où $E_r^{pq} \to E_{r+1}^{pq}$ surjective.

si $E_r^{pq} = 0$ alors $E_{r+n}^{pq} = 0$.

$E_\infty^{pq} = 0$.

si $Z \subset Z \subset \cdots \qquad \subset B \subset B \subset \cdots$

à partir d'un certain rg, les E^{pq} sont stationnaires.

$$G = (G^p).$$

par hyp. $F^p/F^{p+1} = F^p \hookrightarrow G^p$
$(F^{p+1}G^p = 0)$.

si $q=0$ $\quad 0 \to E_\infty^{p0} \to G^p$

$E_2^{p0} \longrightarrow G^p$ ni inj, ni surjective.

edge homomorphisme

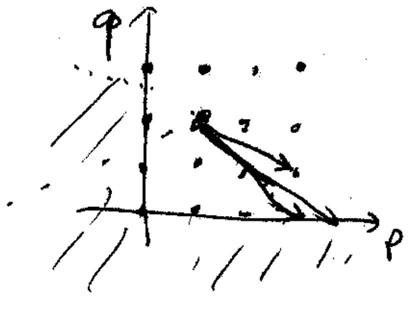
de façon duale.

supposons $q>0$.

on obtient $G^q \to E_2^{0q}$

edge homo.

les 2 à la fois: suite spectrale cohomologique



$$E_r^{pq} = E_{r+1}^{pq} = E_\infty^{pq}$$ dès que $r \geq q+2$ et $r \geq p+1$.

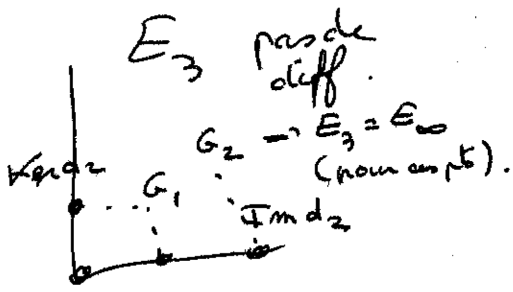
$$E_2^{00} = Z_\infty^{00} = G^0$$

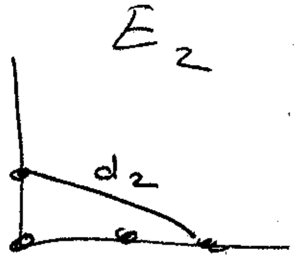
$$0 \to E_\infty^{10} \to G^1 \to E_\infty^{01} \to 0 .$$

$$0 \to E_2^{10} \to G^1 \to E_2^{01} \xrightarrow{\delta} E_2^{20} \to G^2$$

suite exacte

dem.
regardons les 1ers pts.





seule diff^{elle}:

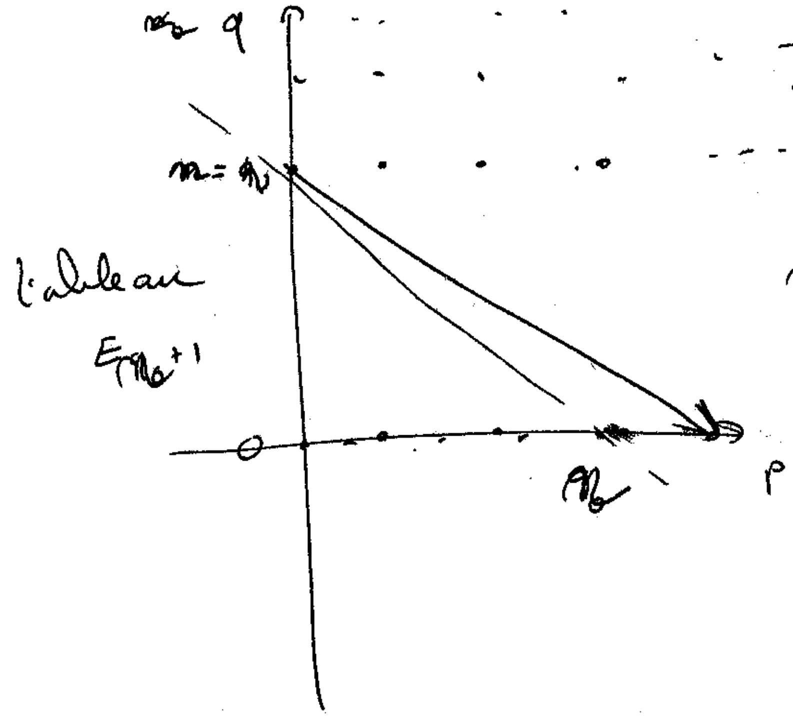
$$0 \to E_\infty^{10} \to G_1 \to E_\infty^{01} \to 0$$

$E_\infty^{10} = E_2^{10}$, $\quad E_\infty^{01} = \ker d^2$

$$0 \to E_\infty^{2,0} \to G_2$$

$\Longrightarrow$ suite exacte.

2 ds les autres quadts du tableau on n'a pas de resultats semblables car les dif. ne sont pas ds le bon sens -



rien ailleurs.

m̂ raisonnement.

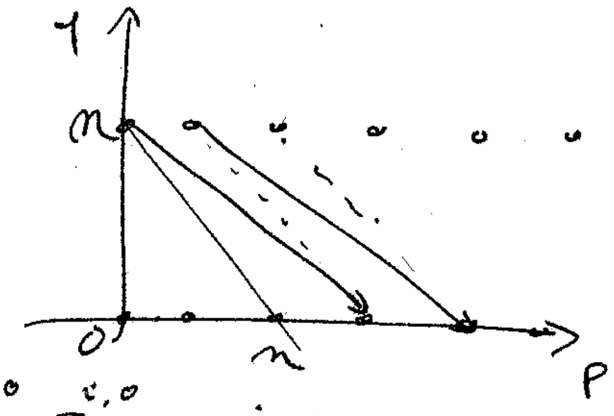
on construit la suite exacte sur les termes E_{n_0+1}

m̂ cela donne des résultats au niveau E_2.

les termes $E_2^{i,0} = E_\infty^{i,0} = G^i \quad i \leq n-1$

$$0 \to E_2^{n,0} \to G^n \to E_2^{0,n} \to E_2^{n-1,0} \to G^{n+1}$$

cas encore plus particulier (fibre sphérique).



$E_2 \simeq E_{n+1}$

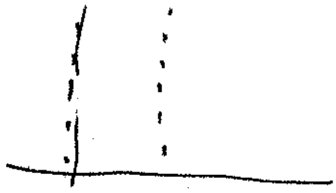
$E_2^{i,0} = E_\infty^{i,0} \quad i < n.$

suite exacte

$$0 \to E_2^{n\,0} \to G^n \to E_2^{0\,n} \xrightarrow{\partial} E_2^{n+1,0} \to E_2^{1,n} \to$$

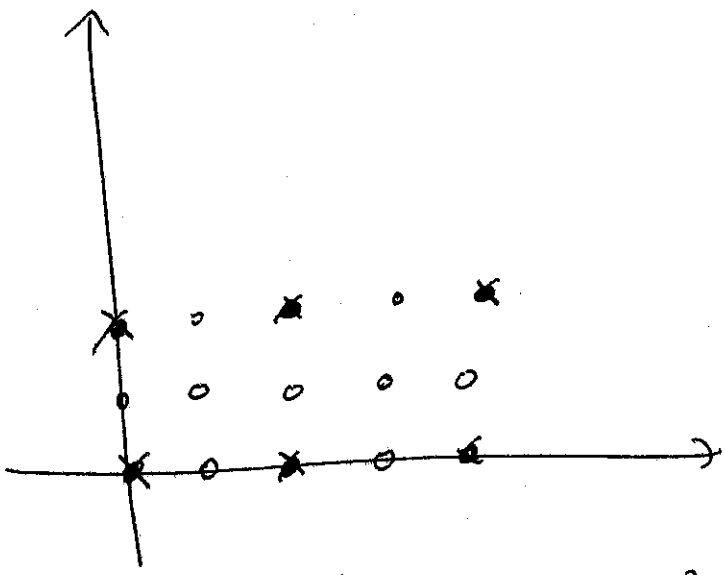
(suite exacte de Gysin-Wang)

$$\xrightarrow{\partial} E_2^{n+2,0}$$

base sphérique  duale de la précédente

Pair ou impair :

$E_2^{pq} = 0$ si p ou q impair.

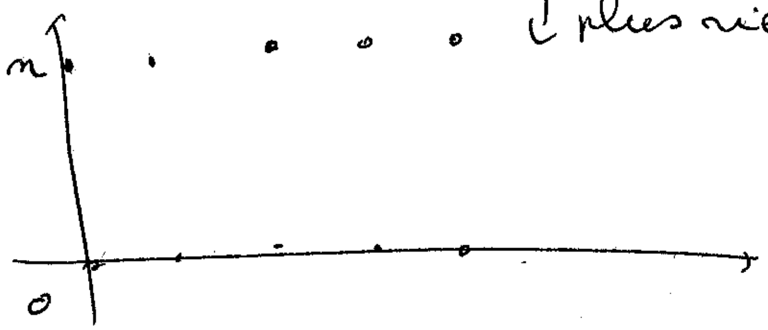


il ne se passe rien au terme E_2.

on remplace par la condition une diagonale sur 2 est zéro.

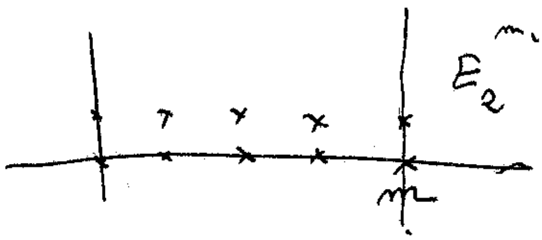
il ne se passe rien .

plus rien.



Pb. savoir terminer une suite exacte.

on suppose $n = 1$.

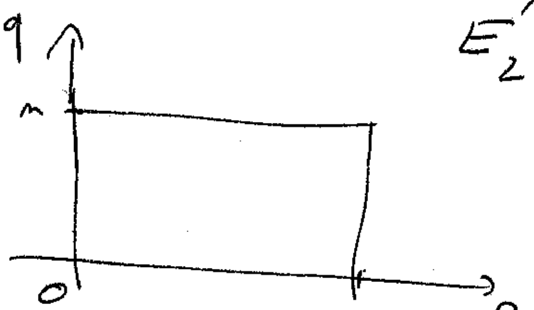


$$E_2^{m,1} = G^{m+1}$$

$$0 \to E_2^{1,0} \to G^1 \to E_2^{0,1} \xrightarrow{d} E_2^{2,0} \to G^2 \to E_2^{1,1} \xrightarrow{d} E_2^{3,0} \to \cdots$$

$$\cdots \to E_2^{m,0} \to G^m \to E_2^{m-1,1} \to 0$$

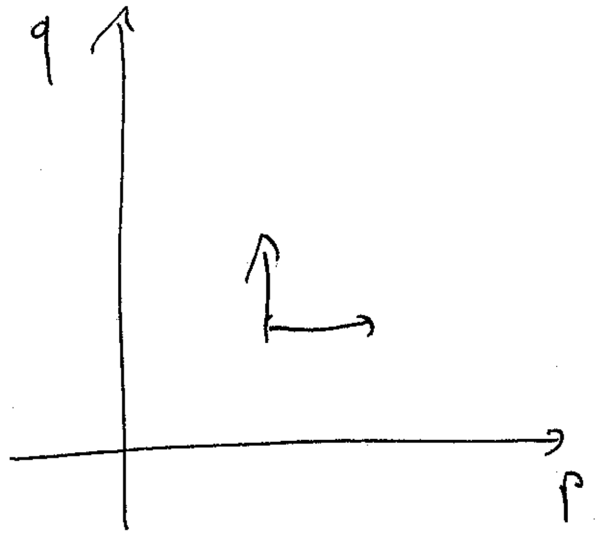
rectangle.



$$E_2^{m,n} \simeq G^{m+n}$$

Application :

doubles complexes -



2 différentielles.

$C^{p,q}$ d^1, d^2 complexe totale.

$\underline{C}^n = \bigoplus_{p+q=n} C^{p,q}$

$d^1 : C^{p,q} \longrightarrow C^{p+1,q}$

$d^2 : C^{p,q} \longrightarrow C^{p,q+1}$

$d = d^1 + d^2 : C^{p,q} \longrightarrow C^{p+1,q} \oplus C^{p,q+1}$.

on exige $d : C^n \to C^{n+1}$ soit une différentielle

ie $d^1 d^2 + d^2 d^1 = 0$.

on va filtrer le cplexe ~~total~~ ds 2 sens $\Rightarrow$ 2 suites spectrales.

$H_{II} H_I (C)$ $H_I H_{II} (C)$.

$H^*(C)$.

$$\mathrm{I}_2^{pq} = H^p_{\mathrm{I}} H^{p+q}_{\mathrm{II}}(C).$$

$$\mathrm{II}_2^{pq} = H^q_{\mathrm{II}} H^{p+q}_{\mathrm{I}}(C) \Longrightarrow H^{p+q}(\underline{C})$$

$$F : \underline{C} \longrightarrow \underline{C}'$$

$$\cdots \to A_n \to A_{n+1} \cdots$$ complexes.

a une cohom.

$$\to F(A_n) \to F(A_{n+1}) \to \cdots$$

a une cohom.

~~pour~~ pour comparer ces 2 cohom, on fabrique une "résolution" d'où un double complexe.

$$\begin{tikzcd}
 & \uparrow & \uparrow & \\
\arrow[r] & J^{n,0} \arrow[r] & J^{n+1,0} \arrow[r] & {} \\
\arrow[r] & A^n \arrow[u] \arrow[r] & A^{n+1} \arrow[u] \arrow[r] & {} \\
 & 0 \arrow[u] & &
\end{tikzcd}$$

on impose : verticales exactes.

horizontales : complexes

diagramme comm. (au signe près).

on applique le foncteur.

... d'où une suite spectrale (associée au double complexe $J^{p,q}$) convergeant vers ~~H~~ l'hypercohomologie de $F(\underline{\underline{A}})$ (hypercohom. du bicomplexe).

Exple :

Thm (Grothendieck) $\underline{\underline{C}}_1 \xrightarrow{F} \underline{\underline{C}}_2 \xrightarrow{G} \underline{\underline{C}}_3$ 3 catégories abéliennes avec assez d'injectifs ... F, G foncteurs additifs.

on suppose ⓐ F et G exacts à gauche ($\Rightarrow G \circ F$ exact à gche).

ⓑ $I \in C_1$ injectif $\Rightarrow F(I)$ est G-acyclique

$(R^q G(F(I)) = 0 \quad q > 0)$

Alors $\exists$ foncteur spectral $\underline{C} \longrightarrow E(\underline{C}_1) = \left(\begin{smallmatrix}\text{suites}\\ \text{spectrales}\end{smallmatrix}\right)$

$$A \longmapsto E(A)$$

$$E_2^{p,q}(A) = R^p G(R^q F(A)) \Longrightarrow R^{p+q}(G \circ F)(A)$$

cas particulier de bicomplexes.

$$A \longrightarrow I_0 \longrightarrow I_1 \longrightarrow - -$$

$$F(I_0) \longrightarrow F(I_1) \longrightarrow \cdot$$

moyen mnémotechnique pour retenir le thm.

"formule de Leibniz"

$$(f\circ g)^{(n)}(x) = \sum_{p+q=n} f^{(p)} * g^{(q)}(x)$$

Suite spectrale de Leray-Serre

Thm: h_* théorie de l'homologie (pour des CW cplexes). vérifiant * l'axiome du wedge $(X, x_0)\ (Y, y_0) \mapsto (X \vee Y, *)$. somme disjointe de X et Y avec x_0 identifié à y_0, leg: $h_*(X \vee Y) = h_*(X) \oplus h_*(Y)$

* équiv. d'homot. faible

si $X, x \xrightarrow{f} Y, y$

$f_* \pi_*(X, x) \xrightarrow{\sim} \pi_*(Y, y)$

alors $H(f) : h_*(X) \xrightarrow{\sim} h_*(Y)$.

(α produits).

$(F \to E \to B$ orientable$)$

B ~~connexe par arcs~~. simplement connexe

∃ suite spectrale

$$E^2_{pq} = H_p(B, h_q(F)) \Rightarrow h_{p+q}(E)$$

H_p homologie singulière.

cq:

Thm d'Atiyah-Hirzebruch-Whitehead).

h_* théorie d'homologie

∃ foncteur spectral (CW complexes) ⟶ (suites spectrales)

X CW cxe $\quad E_2^{pq}(X) = H_p(X, h_q(*)) \Rightarrow h_{p+q}(X)$.

d'où lien entre l'homologie singulière et une homologie qcq.

Rq 1) ce thm est un cas particulier du précédent.

2) Formules de Künneth

$C \quad C'$ 2 cplexes de $\mathbb{Z}$-modules.

$C'' = C \otimes C' \qquad (C'')^n = \bigoplus_{p+q=n} C^p \otimes C'^q$

Th (Künneth) ~~$H^n C C''$~~

$H^p(C) \otimes H^q(C') \xrightarrow{\text{cup-produit}} H^{p+q}(CC')$.

a) $0 \to \bigoplus_{p+q=n} H^p(C) \otimes H^q(C') \to H^n(C'') \to \bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H^p(C), H^q(C')) \to 0$

b) $C_*(X \times Y) \overset{\text{homotope}}{\simeq} C_*(X) \otimes C_*(Y)$ (Eilenberg ...

si $C' = C'^0$

$C''^n = C^n \otimes C'^0$

$0 \to H^n(C) \otimes C'^0 \to H^n(C \otimes C'^0) \to \mathrm{Tor}(H^{n-1}(C), C'^0) \to 0$

$0 \to H^n(X) \otimes G \to H^n(X, G) \to \mathrm{Tor}(H^{n-1}(X), G) \to 0.$

$G = \mathbb{Z}/\ell$

$0 \to H^n(X)/\ell \to H^n(X, \mathbb{Z}/\ell) \to {}_\ell H^{n-1}(X) \to 0.$

26 janvier

Cohomologie des groupes

Suite spectrale de Hochschild-Serre
(des extensions de groupes)

Thm. G fini, $H \triangleleft G$.

$\mathcal{A}$ catégorie des G-modules.

Il existe un foncteur spectral $E(A)$

$$1 \to H \to G \to G/H \to 1.$$

$$E_2^{p,q}(A) = H^p(G/H, H^q(H,A)) \Rightarrow H^{p+q}(G,A)$$

Rq. G opère

si $f : H^q \to A$ cochaîne

$$(g \cdot f)(h_1, \dots, h_q) = g \cdot f(g^{-1}h_1 g, g^{-1}h_2 g, \dots, g^{-1}h_q g)$$

l'action de H est triviale : cf Corps locaux chap VII.

~~H opère sur H.~~

on définit donc bien une action sur $H^p(\underline{G/H}, H^q(H,A))$

Au rang 1.

~~f cocycle $f(h_1, h_2) = f(h_1) + h_1 f(h_2)$~~

1ère dem :

$$\underset{G\text{-modules}}{*} \xrightarrow{\underline{F}} \underset{G/H\text{-modules}}{*} \xrightarrow{\underline{G}} \underset{G\text{-modules}}{*} \quad \text{foncteurs}$$

$$\underline{F}(A) = A^H = H_0(H,A) \qquad \underline{G}(B) = B^{G/H} = H^0(G/H, B).$$

on vérifie : F envoie les injectifs sur les

G-acycliques.

d'où suite spectrale.

2°) démonstration.

on applique suite spec. Leray. Serre.

$$1 \longrightarrow H \longrightarrow G \longrightarrow G/H \longrightarrow 1$$

$$BH \longrightarrow BG \longrightarrow B(G/H)$$ est une filtration.

$$H^q(BG, \tilde{A}) = H^q(G, A).$$

$\tilde{A}$ faisceau local! constant associé à A.

$$H^p(B(G/H), \widetilde{H^q(BH, \tilde{A})}) \Rightarrow H^{p+q}(BG, \tilde{A})$$

Suite spectrale de Leray

$$H^{*}\text{.mod} \xrightarrow{F} G^{*}\text{.mod} \xrightarrow{G} \overset{*}{G}\text{.mod}.$$

$H \subset G$

pas forcément distingué.

$$\underline{F}(A) = \mathrm{Ind}_G^{+1}(G, A) = \mathrm{Hom}_H(G, A).$$

$$\underline{G}(B) = B^G \qquad \underline{G} \circ \underline{F}(A) = A^H.$$

$$E_2^{pq} = H^p(G, R^q \underline{F} A) \Rightarrow H^{p+q}(H, A).$$

$\underline{F}(A)$ induit $\Rightarrow R^q \underline{F}(A) = 0$ si $q \neq 0$.

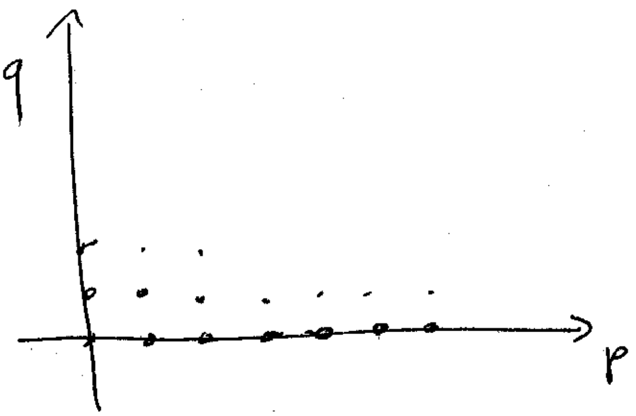
d'où $E_2^{pq} = \cancel{H^p(G} 0$ si $q \neq 0$.

suite complètement dégénérée.

$H^p($

on retrouve

retour à la suite de Hochschild-Serre.



$$E_2^{p0} = H^p(G/H, A^H)$$

$\downarrow$ on retrouve l'hom. d'inflation

$$H^p(G, A)$$

$$E_2^{0q} = H^0(GH, H^q(H, A)) = H^q(H, A)^{G/H}$$

$\uparrow$ restriction

$$H^q(G, A)$$

En écrivant la suite exacte à 5 termes.

$$0 \to H^1(G/H, A^H) \xrightarrow{\text{inf}} H^1(G,A) \xrightarrow{\text{Res}} H^0(G/H, H^1(H,A))$$

$$\begin{array}{c} \| \\ H^1(H,A)^{G/H} \\ \Big\downarrow \scriptstyle \cancel{\text{rest}}\ \delta \end{array}$$

$$H^2(G,A) \xleftarrow{\text{Inf}} H^2(G/H, A^H)$$

δ = transgression.

Si on suppose $H^i(H,A) = 0$ pour $i = 1, 2, \dots, q-1$

on a une suite exacte avec H^q. . .

. . .

$$H^1(H,A)^{G/H} \xrightarrow{\delta} H^2(G/H, A^H).$$

$$1 \to H \to G \to G/H \to 1$$

$$1 \to H/[H,H] \to G/[H,H] \to G/H \to 1$$

$\alpha \in H^2(G/H, H/[H,H])$ classe de l'extension.

$$H^1(H,A)^{G/H} \xleftarrow{\simeq} \text{Hom}(H/D(H), A^H)^{G/H}$$

? calcul sur les cochaînes

Soit $\varphi \in H^1(H,A)^{G/H}$.

$\varphi : H/D(H) \longrightarrow A^H$

induit $\varphi^* : H^2(G/H, H/D(H)) \to H^2(G/H, A^H)$

$$\varphi^*(\alpha) = -\delta(\varphi)$$

$\delta(id) =$ classe de l'extension.

<u>Groupes profinis :</u>

G compact, totalement discontinu.

alors $\exists$ base de voisinage de 1 formée de sous groupes ouverts distingués $\{H\}$. et nécessairement G/H fini (argument de compacité).

$G \xrightarrow{\sim} \varprojlim G/H$ ~~ ~~

réciproquement

la limite projective de gpes finis est profinie.

G profini. A gpe abelien discret

$$G \longrightarrow Aut(A).$$

$\forall a \in A$, $\{g \in G / ga = a\}$ ouvert dans G.

(signifie G opère continument sur A).

($G \times A \longrightarrow A$ continue, A top. discrete.

Rappel : tt sgpe ouvert est fermé.

tt sgpe fermé d'indice fini est ouvert

dans un gpe profini, sgpe ouvert = sgpe fermé.

$$H^q(G, A) \overset{\text{déf}}{=} \varinjlim H^q(G/H, A^H).$$ est tjs un gpe de torsion pour $q \geq 1$.

$\varinjlim$ limite inductive.

on définit bien un foncteur cohomologique.

on a encore la suite de Hochschild-Serre.

~~La suite~~.

Dans un gpe profini, il existe des équivalents des gpes de Sylow ds un gpe fini.

ordre d'un groupe profini :

entier surnaturel $\prod_{p} p^{\alpha_p}$ $\alpha_p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

G profini $|G| = \prod p^{\alpha_p}$

$$p^{\alpha_p} = \sup \left(|G/H|_p \right).$$

partie p-primaire

Prop. $\forall p$, $\exists S_p \overset{\text{fermé}}{\subset} G$

tq $|S_p| = p^{\alpha}$.

$((G : S_p), p) = 1$

et 2 p-sylow sont conjugués.

Def p premier $cd_p(G) \leq n$ si $\forall A$ / G-mod de la

$H^q(G, A)\{p\} = 0$ si $q \geq n$

codimension p-primaire

ie $\forall A$ p-groupe, G-module - - - - - -

Rq : si G, A finis $H^q(G/H, A^H)$ est annulé par l'ordre de G et par l'ordre de A.

Thm. G fini d'ordre n
alors $\forall A$, $\forall i \geq 1$.

$$nH^i(G, A) = 0.$$

dem pour $i = 2$

$f : G \times G \to A$ 2-cocycle.

$\cancel{f(g_1 g_2 g_3) + f(g_1, g_2) = g_1 f(g_2 g_3) + \dots}$

$$f(g_1 g_2, g_3) + f(g_1, g_2) = g_1 f(g_2, g_3) + f(g_1, g_2 g_3).$$

$$\varphi(g) = \sum_{h \in G} f(g, h)$$

$$\varphi(g_1 g_2) + \underbrace{n f(g_1, g_2) = g_1 \varphi(g_2) + \varphi(g_1)}_{\text{cobord}}.$$

$\Rightarrow$ cobord CQFD.

autre méthode. G qcq.
$G \supset H$ $(G : H) = n$.

A G-mod. $q \geq 0$

$$H^q(G,A) \underset{\text{Cor}}{\overset{\text{Res}}{\rightleftarrows}} H^q(H,A).$$

$\text{Cor}\cdot\text{Res} = n$. évident. dem en dim 0. vrai en tte dim. car on a des morphismes de Fonct-cohom.

on applique à.
G fini $H = \{1\}$.

Thm (cf Cartan-Eilenberg).

$S_p \subset G$ A $q \geq 1$

$$\text{Res} : H^q(G,A)\{p\} \hookrightarrow H^q(S_p, A)\{p\}.$$
$$\xleftarrow{\text{Cor}}$$

et $H^q(S_p, A) = \text{Im}\,\text{Ker} \oplus \text{Ker}\,\text{Cor}$.

$$H^q(G,A) = \bigoplus_{\substack{l \in P \\ l \neq p}} H^q(G, A\{l\}).$$

Prop (cf Cohom. Galoisienne).

Si G est fini, $\operatorname{cd}_p G = \begin{cases} 0 & \text{si } p \nmid |G| \\ \infty & \text{si } p \mid |G|. \end{cases}$

Exple. $\operatorname{cd} G = \sup_p \operatorname{cd}_p G$.

$\operatorname{cd} \hat{\mathbb{Z}} = 1$. $\hat{\mathbb{Z}} = \varprojlim \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$\simeq \prod_{p \in P} \mathbb{Z}_p$.

k corps de car $p > 0$.

G_k gpe de Galois $= \mathrm{Gal}(k_s / k)$.

$\operatorname{cd}_p G_k \leq 1$.

car. k_s. $H^q(G_k, k_s) = 0 \quad q \geq 1$

$\wp x = x^p - x \quad x \in k_s$.

$$0 \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to k_s \xrightarrow{\wp} k_s \to 0.$$

d'où $H^q(G_k, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = 0$ si $q \geq 2$.

en particulier

$H^q(S_p(G_k), \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = 0$ si $q \geq 2$.

$\Downarrow$

$\operatorname{cd}_p S_p \leq 1$.

Prop : G profini $\quad H \subset G$ fermé

$\forall p \quad cd_p H \leq cd_p G$.

Si $H = S_p$. $\quad cd_p H = cd_p G$.

dem cf cohom. galoisienne.

Th : $1 \longrightarrow H \longrightarrow G \longrightarrow G/H \longrightarrow 1$.

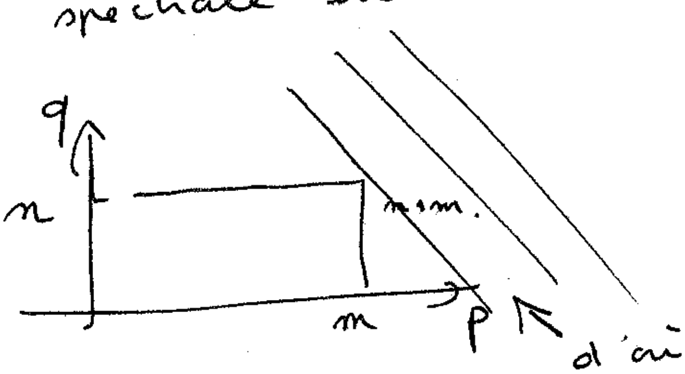
$$cd_p G \leq \underbrace{cd_p H}_{= n} + \underbrace{cd_p (G/H)}_{= m}.$$

Rq. H, G profinis, suite exacte $\Rightarrow$ H fermé ds G.

suite spectrale.

$$E_2^{pq}(A)_{\{p\}} = H^p(G/H, H^q(H,A))_{\{p\}} \Rightarrow H^{p+q}(G,A)_{\{p\}}$$

la suite spectrale est concentrée ds un rectangle.



d'où rien sur ces diagonales

on a donc $\quad H^m(G/H, H^n(H,A)) \simeq H^{m+n}(G,A)$

A p-groupe.