K-Theory **7**: 55–100, 1993.

Descente galoisienne et K_2 des corps de nombres

BRUNO KAHN
CNRS – URA 212, Mathématiques – Université de Paris 7, CP7012, 75251 Paris Cedex 05, France.
adresse électronique: kahn@mathp7.jussieu.fr

(Received: July 1992)

Résumé. Soient F un corps commutatif et E/F une extension galoisienne de groupe G. Le but de cet article est d'établir et d'exploiter dans diverses situations des isomorphismes canoniques:

$$\mathrm{Ker}(K_2(F) \to K_2(E)^G) \cong H^1(G, K_3(E_0)_{\mathrm{ind}});$$
$$\mathrm{Coker}(K_2(F) \to K_2(E)^G) \cong H^2(G, K_3(E_0)_{\mathrm{ind}}),$$

où E_0 est le corps des constantes de E et $K_3(E_0)_{\mathrm{ind}}$ est le quotient indécomposable de $K_3(E_0)$.

Abstract. Let F be a field and E/F be a Galois extension with group G. In this paper, we establish canonical isomorphisms:

$$\mathrm{Ker}(K_2(F) \to K_2(E)^G) \cong H^1(G, K_3(E_0)_{\mathrm{ind}});$$
$$\mathrm{Coker}(K_2(F) \to K_2(E)^G) \cong H^2(G, K_3(E_0)_{\mathrm{ind}}),$$

where E_0 is the field of constants of E and $K_3(E_0)_{\mathrm{ind}}$ is the indecomposable quotient of $K_3(E_0)$. We exploit these isomorphisms in various situations: general fields, function fields of varieties, number fields.

Key words and phrases. K_2, Galois cohomology, descent, number fields.

0. Introduction

Soient F un corps commutatif et E une extension finie de F, galoisienne de groupe G. Le but principal de cet article est d'étudier le noyau et le conoyau de l'application naturelle $f = f_{E/F}\colon K_2(F) \to K_2(E)^G$.

Ce problème a déjà été étudié par de nombreux auteurs, notamment dans le cas des corps de nombres [4, 5, 14, 12, 21, 44]. Les résultats récents de Bloch–Kato [7], Levine [22], Lichtenbaum [23, 24], Merkurjev–Suslin [30, 31] et Suslin [44, 45] permettent de simplifier la démonstration de résultats déjà obtenus, et de les compléter. C'est ce que fait le présent article.

Soit, pour tout corps k, $K_3(k)_{\mathrm{ind}}$ le conoyau du produit $K_1(k)^{\otimes 3} \to K_3(k)$. Le premier résultat de cet article est une description cohomologique de $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Coker}\, f$ en termes de $K_{3,\mathrm{ind}}$ (th. 2.1):

$$\mathrm{Ker}\, f \cong H^1(G, K_3(E_0)_{\mathrm{ind}}); \qquad \mathrm{Coker}\, f \cong H^2(G, K_3(E_0)_{\mathrm{ind}}), \tag{0.1}$$

où E_0 désigne le corps des constantes de E. Dans le cas des corps de nombres, cet énoncé a été obtenu auparavant par Brinkhuis [5, cor. 3.2] pour une extension de corps de nombres totalement réels, et par Kolster [21, th. 3.1] pour une $\mathbf{Z}_p$-extension cyclotomique. (Dans ce dernier travail, on trouve comme coefficients $(K_3(E)_{\mathrm{ind}})$/torsion à la place de $K_3(E_0)_{\mathrm{ind}}$.) On pourra aussi le comparer à [23, th. 10.1] et à [24, th. 1.2].

La démonstration la plus simple et la plus naturelle de (0.1) utilise l'hypercohomologie du complexe $\Gamma(2)$ de Lichtenbaum [23, 24]: c'est celle que nous donnons au §2. Sans aucun doute, on pourrait également se passer de $\Gamma(2)$, mais cela compliquerait notablement la démonstration. Pour la commodité du lecteur, nous donnons cependant au §4 une autre démonstration plus élémentaire de (0.1), dans le cas particulier des corps de nombres.

Une conséquence de (0.1) est que la détermination de $\operatorname{Ker} f_{E/F}$ et de $\operatorname{Coker} f_{E/F}$ se ramène essentiellement à celle de $\operatorname{Ker} f_{E_0/F_0}$ et de $\operatorname{Coker} f_{E_0/F_0}$, où E_0 et F_0 sont respectivement les corps des constantes de E et F. En particulier, si E/F est finie, $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Coker} f$ sont *finis*, au moins lorsque F est un corps de type fini ou de caractéristique >0 (th. 2.2).

Le cas crucial est donc celui des corps de nombres (celui des corps finis étant trivial): il est abordé au §4. Comme dans ce cas la structure galoisienne de $K_3(E)_{\mathrm{ind}}$ est en grande partie connue grâce aux travaux de Quillen et Borel [36, 2], on obtient des renseignements supplémentaires sur $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Coker} f$. Un exemple de tels renseignements est le suivant:

THÉORÈME. *Soit E/F une extension de corps de nombres, cyclique de groupe G et non ramifiée à l'infini. Alors* $\operatorname{Ker} f$ *et* $\operatorname{Coker} f$ *sont des groupes finis de même ordre, d'exposant divisant $|G|$ et respectivement engendrés par au plus $r_2(E) - r_2(F) + 1$ $(r_2(F) + 1)$ éléments.*

Pour un énoncé plus précis, cf. cor. au th. 4.4. Lorsque E est totalement réel, l'égalité des ordres de $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Coker} f$ avait déjà été démontrée par Brinkhuis, essentiellement de la même manière [5].

La structure de cet article est la suivante. Après un rappel de résultats fondamentaux (§1), on établit au §2 les isomorphismes (0.1), dont on tire un certain nombre de renseignements de finitude pour $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Coker} f$. Plus généralement, on étudie la cohomologie de G à valeurs dans $K_2(E)$. Au §3, on étudie une situation relative, considérée auparavant par Bloch [4], Colliot-Thélène et Sansuc [14], Colliot-Thélène [12] et Suslin [44].

Au §4, on aborde le cas des corps de nombres: on y obtient des majorations de l'ordre et du nombre de générateurs de $\operatorname{Ker} f$, en utilisant les théorèmes de Quillen [36], Borel [2] et Levine/Merkurjev–Suslin [22, 31]. Une question intéressante est de savoir si on peut retrouver ces majorations sans utiliser les résultats de Levine et Merkurjev–Suslin sur la torsion de $K_{3,\mathrm{ind}}$. Au §5, on étudie la cohomologie de Tate des G-modules $K_2(E)$ et $K_3(E)_{\mathrm{ind}}$; entre autres on retrouve, et précise, un résultat de Colliot-Thélène [12, lemme 2(c)] et Bak–Rehmann [8] (principe des normes pour K_2).

Dans le cas cyclique, les résultats du §4 sur $\operatorname{Ker} f$ s'étendent facilement à $\operatorname{Coker} f$ par l'usage des quotients de Herbrand. Ceci est exploité au §6, où l'on étudie le cas des $\mathbf{Z}_p$-extensions, et aussi des $\mathbf{Z}_p$-extensions multiples. On étend le résultat classique de Coates ([11, th. 7]) à toute $\mathbf{Z}_p$-extension (simple) d'un corps de nombres: pour une telle extension E/F, $\operatorname{Ker} f$ est fini et $\operatorname{Coker} f = 0$; de plus, si F_n/F est la sous-extension de E/F de degré p^n et $f_n: K_2(F_n) \to K_2(E)^{G^{p^n}}$, le système projectif (pour les normes) des $\operatorname{Ker} f_n$ est surjectif et stationnaire en un groupe fini (la généralisation de cette dernière partie du théorème de Coates est due à T. Nguyen Quang Do).

Au §7 on applique la connaissance de K_2 d'un corps local (Moore, Carroll, Merkurjev) à l'étude de son $K_{3,\mathrm{ind}}$, et on formule une conjecture à son sujet. Au §8, on applique les résultats du §4 à un cas d'espèce: celui des corps quadratiques. On obtient un démarquage amusant de la théorie classique du genre pour le groupe des classes (mais ici, les corps réels et imaginaires échangent leurs rôles). Enfin, au §9, on descend un certain nombre de calculs de cohomologie galoisienne à la cohomologie étale d'un anneau de S-entiers d'un corps de nombres. Cela donne un exemple de calcul de tel groupe avec des coefficients qui ne sont pas de torsion inversible sur le schéma de base ($K_{3,\mathrm{ind}}$).

Il y a deux appendices. Le premier démontre un résultat dont on a besoin au §5; il contient en particulier une démonstration du fait que $\operatorname{scd}_p(F) = 2$ pour tout corps de nombres F et tout nombre premier p impair (ceci n'est pas nouveau, mais ne semble pas apparaître explicitement dans la littérature). Le deuxième complète la démonstration d'un lemme de [42].

L'origine de cet article a été l'envie de démarquer les résultats de [18] et [34] au cas de K_2. Ce projet, dont un vestige subsiste au §8, n'a pas été exécuté, mais il est certainement faisable. Un certain nombre d'autres problèmes restent en suspens:

(1) Utiliser les résultats du §3 pour démontrer la finitude du groupe A_0 d'une surface rationnelle sur un corps de type fini, dans l'esprit de [4, 14, 12]. Cela doit être possible, mais je n'y suis pas parvenu.

(2) Obtenir une *minoration* de $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Coker} f$. Les résultats de cet article ne fournissent que des majorations. Ce problème est sans doute de nature plus profonde.

(3) Etude de la capitulation des éléments de K_2 d'un anneau d'entiers dans une extension convenable. Etant donné un corps de nombres F, on voit facilement qu'un élément d'ordre p-primaire de $K_2(O_F)$ (pour un nombre premier p donné) capitule dans une extension p-ramifiée convenable de F. La démonstration cohomologique de ce fait, ainsi que les résultats du §9 (principalement le th. 9.1), suggèrent la question suivante: est-il même vrai que tout élément du 'noyau sauvage' de F capitule dans une extension *non ramifiée* de F convenable (de même que toute classe d'idéaux de O_F)? Comme me l'a fait remarquer J. Tate (correspondance électronique), il est facile de voir que la réponse est *non* en général, en utilisant la conjecture de Birch–Tate (prouvée par Mazur–Wiles pour la partie impaire de $|K_2(O_F)|$) et les bornes d'Odlyzko liant de degré des extensions non ramifiées de F à la taille de son discriminant. Etant donné un élément x du noyau sauvage, quelle est la nature des

extensions de F dans lesquelles il capitule? Si x est d'ordre p-primaire, est-il vrai que x capitule dans une extension non ramifiée d'une extension p-cyclotomique de F? Cet affaiblissement de la question originelle a été de nouveau suggéré par Tate. (M. Kolster et T. Nguyen Quang Do m'ont fait indépendamment savoir qu'ils étaient capables de répondre à cette question par l'affirmative).

I. CAS DE CORPS QUELCONQUES

1. Rappels sur la K-théorie des corps commutatifs

Pour tout anneau A, on note $K_n(A)$ les groupes de K-théorie de A définis par Quillen: ce sont des foncteurs en A; si A est commutatif, ces groupes sont munis d'un produit qui fait de $K_*(A)$ un foncteur à valeurs dans la catégorie des anneaux anticommutatifs gradués [25]. Si A est un corps commutatif k, on a:

$$K_0(k) = \mathbf{Z}, \qquad K_1(k) = k^*, \qquad K_2(k) = k^* \otimes k^*/J,$$

où J est le sous-groupe de $k^* \otimes k^*$ engendré par les $x \otimes (1-x)$ pour $x \in k - \{0, 1\}$. (On note $\{x, y\}$ l'image dans $K_2(k)$ d'un tenseur $x \otimes y \in k^* \otimes k^*$.)

Le groupe $K_3(k)$ n'a pas de description simple par générateurs et relations; on note $K_3(k)_{\text{ind}}$ son quotient par l'image du produit $K_1(k)^{\otimes 3} \to K_3(k)$. Ce qui suit est un condensé des résultats des auteurs cités dans l'introduction, que nous utilisons dans cet article.

(1.1) $K_3(k)_{\text{ind}} \xrightarrow{\cong} (K_3(k_s)_{\text{ind}})^{G_k}$, où k_s désigne une clôture séparable de k et $G_k = \text{Gal}(k_s/k)$ [22, 31].

(1.2) Pour tout n inversible dans k, on a une suite exacte naturelle:

$$0 \to H^0(k, \mu_n^{\otimes 2}) \to K_3(k)_{\text{ind}} \xrightarrow{n} K_3(k)_{\text{ind}} \to H^1(k, \mu_n^{\otimes 2}) \to$$
$$\to K_2(k) \xrightarrow{n} K_2(k) \to H^2(k, \mu_n^{\otimes 2}) \to 0$$

La partie droite de cette suite exacte (à partir de $H^1(k, \mu_n^{\otimes 2})$) est due à Merkurjev–Suslin [30] et Suslin [44], et sa partie gauche (jusqu'au premier $K_2(k)$) à Levine [22] et Merkurjev–Suslin [31]. De plus,

(1.3) Si $p = \text{car}\, k$, $K_2(k)$ n'a pas de p-torsion [44], $K_3(k)_{\text{ind}}$ est uniquement p-divisible [31] et $K_2(k)/p^r \xrightarrow{\cong} \nu_r(2)_k$, où $\nu_r(\cdot)_k$ est la partie logarithmique du complexe de De Rham–Witt $W_r\Omega^\cdot$ sur k ([7]).

(1.4) Soit k_0 le corps des constantes de k, c'est-à-dire la fermeture algébrique dans k de son sous-corps premier. Alors $K_3(k_0)_{\text{ind}} \to K_3(k)_{\text{ind}}$ est injective, de conoyau uniquement divisible [31].

En fait, il est conjecturé que $K_3(k_0)_{\text{ind}} \to K_3(k)_{\text{ind}}$ est *bijective* ([31, conj. 11.7], [37, conj. 7.1.8]). Dans [20], nous montrons que cette conjecture est une conséquence de se trouve que l'on peut partout utiliser $K_3(k_0)_{\text{ind}}$ à la place de $K_3(k)_{\text{ind}}$ sans avoir recours à cette conjecture, parce que les phénomènes considérés sont de torsion.

(1.5) Lichtenbaum [23, 24] a défini un complexe de G_k-modules $\Gamma(2, k_s) = \Gamma(2)$, concentré en degrés 1 et 2, ayant les propriétés suivantes*:

$$H^1(\Gamma(2)) = K_3(k_s)_{\text{ind}}, \qquad H^2(\Gamma(2)) = K_2(k_s); \tag{1.5a}$$

$$\mathbb{H}^2(k, \Gamma(2)) = K_2(k), \qquad \mathbb{H}^3(k, \Gamma(2)) = 0. \tag{1.5b}$$

Dans (1.5a), $H^*(\Gamma(2))$ désigne la cohomologie du complexe $\Gamma(2)$, tandis que dans (1.5b) $\mathbb{H}^*(k, \Gamma(2))$ désigne son hypercohomologie (par rapport à G_k).

De (1.1) et (1.5a) on déduit un propriété supplémentaire, qui étrangement ne figure pas dans [24] (cf. [22, p. 258]):

$$\mathbb{H}^1(k, \Gamma(2)) = K_3(k)_{\text{ind}}. \tag{1.5c}$$

(Cela résulte immédiatement de la suite spectrale de Hochschild–Serre en hypercohomologie $H^p(k, H^q(\Gamma(2))) \Rightarrow \mathbb{H}^{p+q}(k, \Gamma(2))$.)

(1.5d) Pour tout entier n inversible dans k, on a un triangle (dans la catégorie dérivée):

$$\begin{tikzcd} \Gamma(2) \arrow[rr, "n"] & & \Gamma(2) \arrow[dl] \\ & \mu_n^{\otimes 2} \arrow[ul] & \end{tikzcd}$$

d'où une suite exacte

$$\cdots \to \mathbb{H}^i(k, \Gamma(2)) \xrightarrow{n} \mathbb{H}^i(k, \Gamma(2)) \to H^i(k, \mu_n^{\otimes 2}) \to \mathbb{H}^{i+1}(k, \Gamma(2)) \xrightarrow{n} \cdots$$

qui redonne en bas degrés la suite exacte de (1.2) (cf. (1.5a), (1.5b), (1.5c); cette remarque est trompeuse puisque en pratique les résultats de [23] et [24] sont obtenus à partir de (1.1), (1.2) et (1.3)!). En particulier on a des homomorphismes canoniques:

$$H^i(k, (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})'(2)) \to \mathbb{H}^{i+1}(k, \Gamma(2)) \tag{1.5e}$$

où

$$(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})'(2) = \varinjlim_{(m, \operatorname{car} F) = 1} \mu_m^{\otimes 2}.$$

(1.5f) Si k est de caractéristique $p > 0$, on a un triangle (dans la catégorie dérivée), pour tout $r \geqslant 1$ [24, th. 1.1.c)]:

$$\begin{tikzcd} \Gamma(2) \arrow[rr, "p^r"] & & \Gamma(2) \arrow[dl] \\ & \nu_r(2)_{k_s}[-2] \arrow[ul] & \end{tikzcd}$$

*En fait, Lichtenbaum définit un complexe $\Gamma(2, k)$ pour tout corps k, mais nous n'en aurons pas besoin.

d'où une suite exacte

$$\cdots \to \mathbb{H}^i(k, \Gamma(2)) \xrightarrow{p^r} \mathbb{H}^i(k, \Gamma(2)) \to H^{i-2}(k, \nu(2)_{k_s}) \to \mathbb{H}^{i+1}(k, \Gamma(2)) \xrightarrow{p^r} \cdots$$

Comme $(\nu_r(2)_{k_s})^{G_k} = \nu_r(2)_k$, ce triangle redonne les résultats de (1.3) (même remarque qu'en (1.5d)).

Posons

$$\nu_\infty(2)_{k_s} = \varinjlim \nu_r(2)_{k_s} \quad \text{et} \quad H^i(k, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(2)) = H^{i-2}(k, \nu_\infty(2)_{k_s}):$$

ce groupe est nul pour $i \neq 2, 3$ puisque $\mathrm{cd}_p(G_k) \leqslant 1$ [41, prop. II-3]. Posons

$$H^i(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) = H^i(k, (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})'(2)) \oplus H^i(k, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(2)).$$

De (1.5e) et de la suite exacte de (1.5f), on déduit des homomorphismes:

$$H^i(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to \mathbb{H}^{i+1}(k, \Gamma(2)). \tag{1.5g}$$

LEMME 1.1. *Pour $i \geqslant 4$, les homomorphismes de* (1.5g) *sont des isomorphismes.*

En effet, comme $\Gamma(2)$ est un complexe acyclique en degrés $\geqslant 2$, le groupe $\mathbb{H}^i(k, \Gamma(2))$ est de torsion pour $i \geqslant 3$. Le lemme résulte donc des suites exactes de (1.5d) et (1.5f) et d'un passage à la limite.

Notations 1.1. On note $\mu^2(k) = H^0(k, (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})'(2))$ le sous-groupe de torsion de $K_3(k)_{\mathrm{ind}}$.

1.2. On note $\mathrm{cd}(k) \leqslant 2$ si les deux conditions suivantes sont vérifiées:

(i) $\mathrm{cd}(G_k) \leqslant 2$;
(ii) si car $k = p > 0$, $[k:k^p] \leqslant p$.

La condition (ii) entraîne que $\Omega^2{}_{k/\mathbf{F}_p} = 0$, donc que $\nu_r(2)_{k_s} = 0$ pour tout $r \geqslant 1$.

2. Résultats généraux

Si F est un corps commutatif, on note F_0 son *corps des constantes*: c'est l'ensemble des éléments de F qui sont algébriques sur son sous-corps premier.

THÉORÈME 2.1. *Pour toute extension E/F, galoisienne de groupe G, on a des isomorphismes canoniques*

$$\operatorname{Ker} f \cong H^1(G, K_3(E_0)_{\mathrm{ind}}),$$
$$\operatorname{Coker} f \cong H^2(G, K_3(E_0)_{\mathrm{ind}}),$$

et une suite exacte

$$0 \to H^1(G, K_2(E)) \to H^3(G, K_3(E_0)_{\mathrm{ind}}) \to \operatorname{Ker}(H^3(F, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3(E, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)))$$
$$\to H^2(G, K_2(E)) \to H^4(G, K_3(E_0)_{\mathrm{ind}}).$$

Supposons $\mathrm{cd}(F) \leqslant 2$ *et G fini. Alors on a des isomorphismes*

$$\hat{H}^i(G, K_2(E)) \xrightarrow{\cong} \hat{H}^{i+2}(G, K_3(E_0)_{\mathrm{ind}}), \quad i \in \mathbf{Z},$$

où cd(F) *a été défini au paragraphe précédent* (*not.* 1.2) *et* $\hat{H}^*$ *désigne la cohomologie de Tate.*

Remarque 2.1. Ces résultats seront redémontrés – et étendus – dans le cas des corps de nombres, de manière plus élémentaire (th. 4.2 et 5.1).

Démonstration. On démontre d'abord l'énoncé avec $K_3(E)_{\text{ind}}$ à la place de $K_3(E_0)_{\text{ind}}$. Les deux premiers isomorphismes et la suite exacte à cinq termes résultent de la suite spectrale 'de Hochschild–Serre':

$$H^p(G, \mathbb{H}^q(E, \Gamma(2))) \Rightarrow \mathbb{H}^{p+q}(F, \Gamma(2)),$$

et de l'application de (1.5b), (1.5c) et du lemme 1.1. Supposons maintenant $\mathrm{cd}(F) \leqslant 2$. D'après (1.5b) et le lemme 1.1, on a $\mathbb{H}^i(F, \Gamma(2)) = 0$ pour tout $i > 2$. Les isomorphismes de l'énoncé résultent alors de (1.5b), (1.5c) et du résultat général suivant:

PROPOSITION 2.1. *Soient* Γ *un groupe profini,* $C^\cdot$ *un complexe de* Γ*-modules concentré en degrés* 1 *et* 2 *et* H *un sous-groups ouvert distingué de* Γ. *Si* $\mathrm{cd}(\Gamma, C^\cdot) \leqslant 2$, *on a des isomorphismes*

$$\hat{H}^i(\Gamma/H, \mathbb{H}^2(H, C^\cdot)) \xrightarrow{\cong} \hat{H}^{i+2}(\Gamma/H, \mathbb{H}^1(H, C^\cdot)), \quad i \in \mathbf{Z}.$$

Dans cet énoncé, on note $\mathrm{cd}(\Gamma, C^\cdot)$ le plus petit entier n tel que $\mathbb{H}^i(H, C^\cdot) = 0$ pour tout $i > n$ et tout sous-groupe fermé H de Γ.

Démonstration. Comme $C^\cdot$ est borné et que $\mathrm{cd}(\Gamma, C^\cdot) < \infty$, il existe une résolution $\mathscr{I}^{\cdot\cdot}$ de $C^\cdot$ par des Γ-modules de dimension cohomologique 0 telle que le double complexe associé n'ait qu'un nombre fini de termes non nuls (cf. [41, p. I-83]). Le complexe total $\mathscr{I}^\cdot$ associé est le longueur finie, et est constitué de Γ-modules de dimension cohomologique 0. Soit $I^\cdot = H^0(H, \mathscr{I}^\cdot)$: c'est un complexe de longueur finie dont la cohomologie calcule $\mathbb{H}^*(H, C^\cdot)$; on a donc $H^q(I^\cdot) = 0$ si $q \neq 1, 2$. De plus, les Γ/H-modules I^q sont cohomologiquement triviaux. La proposition 2.1 résulte donc du

LEMME 2.1. *Soient* G *un groupe fini et* $I^\cdot$ *un complexe borné de* G*-modules cohomologiquement triviaux. Supposons* $I^\cdot$ *acyclique en degrés* $\neq 1, 2$. *Alors on a des isomorphismes*

$$\hat{H}^i(G, H^2(I^\cdot)) \xrightarrow{\cong} \hat{H}^{i+2}(G, H^1(I^\cdot)), \quad i \in \mathbf{Z}.$$

En effet, pour tout $q \in \mathbf{Z}$, on a une suite exacte courte:

$$0 \to Z^q \to I^q \to B^{q+1} \to 0,$$

où Z^q (resp. B^{q+1}) désigne les cycles (resp. les bords) du complexe $I^\cdot$. En prenant la cohomologie de Tate, on en déduit des isomorphismes:

$$\hat{H}^i(G, B^{q+1}) \xrightarrow{\cong} \hat{H}^{i+1}(G, Z^q), \quad i \in \mathbf{Z}.$$

Pour tout $q \in \mathbf{Z}$, on a une suite exacte courte:

$$0 \to B^q \to Z^q \to H^q(I^\cdot) \to 0.$$

Si $q \neq 1, 2$, on a donc $\hat{H}^i(G, B^q) \xrightarrow{\cong} \hat{H}^i(G, Z^q)$, et donc $\hat{H}^i(G, B^q) \cong \hat{H}^{i-1}(G, B^{q+1})$ pour tout $i \in \mathbf{Z}$. Comme $I^{\cdot}$ est borné, on a $B^q = 0$ dès que q est assez petit ou assez grand. On en déduit que, pour $q \neq 2$ (resp. $q \neq 1$), le G-module B^q (resp. Z^q) est cohomologiquement trivial. En appliquant ceci à B^1 et Z^2, on obtient donc des isomorphismes:

$$\hat{H}^i(G, Z^1) \xrightarrow{\cong} \hat{H}^i(G, H^1(I^{\cdot})) \quad (i \in \mathbf{Z}),$$

$$\hat{H}^i(G, H^2(I^{\cdot})) \xrightarrow{\cong} \hat{H}^{i+1}(G, B^2) \quad (i \in \mathbf{Z}).$$

On en conclut que $\hat{H}^i(G, H^2(I^{\cdot})) \xrightarrow{\cong} \hat{H}^{i+2}(G, H^1(I^{\cdot}))$, c'est-à-dire le lemme.

Pour obtenir l'énoncé avec $K_3(E_0)_{\mathrm{ind}}$, on considère la suite exacte

$$0 \to K_3(E_0)_{\mathrm{ind}} \to K_3(E)_{\mathrm{ind}} \to B \to 0,$$

où B est uniquement divisible (cf. (1.4)). En prenant sa cohomologie de Tate, on obtient des isomorphismes:

$$\hat{H}^i(G, K_3(E_0)_{\mathrm{ind}}) \xrightarrow{\cong} \hat{H}^i(G, K_3(E)_{\mathrm{ind}}), \quad i \in \mathbf{Z},$$

donc en particulier des isomorphismes

$$H^i(G, K_3(E_0)_{\mathrm{ind}}) \xrightarrow{\cong} H^i(G, K_3(E)_{\mathrm{ind}}), \quad i \geqslant 1 \qquad \square$$

COROLLAIRE (au th. 2.1). *Supposons que $E = E_0F$. Alors* $\operatorname{Ker} f_{E/F} = \operatorname{Ker} f_{E_0/F_0}$ *et* $\operatorname{Coker} f_{E/F} = \operatorname{Coker} f_{E_0/F_0}$. *Si de plus* $\operatorname{car} F > 0$, *$f_{E/F}$ est un isomorphisme, $H^1(G, K_2(E)) = 0$ et on a une suite exacte $0 \to H^2(G, K_2(E)) \to H^3(F, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3(E, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$. Si de plus* $\operatorname{cd}(F) \leqslant 2$ *et G est fini, on a $\hat{H}^i(G, K_2(E)) = 0$ pour tout $i \in \mathbf{Z}$.*

La première affirmation résulte immédiatement du théorème 2.1. Pour la deuxième et la troisième, on remarque que $K_3(E_0)_{\mathrm{ind}} = \mu^2(E_0)$ est un G-module cohomologiquement trivial. (Si on ne s'intéressait qu'à $\operatorname{Ker} f$ et à $\operatorname{Coker} f$, il suffirait de remarquer que K_2 d'un corps fini est nul.) $\square$

THÉORÈME 2.2. *Avec les notations du théorème* 2.1, *supposons G fini. Alors* $\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Coker} f$ *et $H^1(G, K_2(E))$ sont finis dans les cas suivants:*

(a) *F_0 est un corps de type fini;*
(b) $\operatorname{car} F > 0$;
(c) *F contient un corps algébriquement clos.*

Dans ces trois cas, $H^2(G, K_2(E))$ est fini si et seulement si

$$\operatorname{Ker}(H^3(F, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3(E, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)))$$

l'est. Si de plus $\operatorname{cd}(F) \leqslant 2$, *$\hat{H}^i(G, K_2(E))$ est fini pour tout $i \in \mathbf{Z}$.*

Supposons $\operatorname{car} F = p > 0$ *et soit* $H = \operatorname{Gal}(E/E_0F)$. *Si H est un p-groupe, f est un isomorphisme et $H^1(G, K_2(E)) = 0$. Si de plus* $\operatorname{cd}(F) \leqslant 2$, *on a $\hat{H}^i(G, K_2(E)) = 0$ pour tout $i \in \mathbf{Z}$.*

Démonstration. Supposons d'abord F_0 de type fini. Alors il en est de même de E_0, qui est soit un corps fini, soit un corps de nombres. Dans le premier cas, $K_3(E_0)_{\text{ind}}$ est fini [35], dans le deuxième c'est un groupe de type fini [36]; il en résulte que $\hat{H}^i(G, K_3(E_0)_{\text{ind}})$ est fini pour tout $i \in \mathbf{Z}$.

Supposons maintenant F de caractéristique $p > 0$. Alors $K_3(E_0) = K_3(E_0)_{\text{ind}}$, en tant que groupe abélien, est un sous groupe de $(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})' = \oplus_{l \neq \text{car}\, F}\, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l$ [35]; c'est donc un groupe de *cotype fini*★. Pour obtenir (b), il suffit donc de démontrer:

LEMME 2.2. *Soient G un groupe fini et A un G-module de cotype fini (en tant que groupe abélien). Alors, pour tout $i \in \mathbf{Z}$, $\hat{H}^i(G, A)$ est fini.*

En effet, considérons la 'résolution complète' $\hat{C}^*(G, A)$ de A, obtenue à partir des chaînes et des cochaînes singulières, donnant la cohomologie de Tate de G à valeurs dans A (cf. [6, ch VI, p. 132]). Pour tout $i \in \mathbf{Z}$, $\hat{C}^i(G, A)$ est un groupe de cotype fini, et $\hat{H}^i(G, A)$ est un sous-quotient de $\hat{C}^i(G, A)$. C'est donc un groupe de cotype fini. Mais, pour $i \in \mathbf{Z}$, $\hat{H}^i(G, A)$ est tué par $|G|$; il est donc fini. □

Supposons maintenant que F contienne $\bar{\mathbf{Q}}$. On a alors $F_0 = E_0 = \bar{\mathbf{Q}}$, et $K_3(E_0)_{\text{ind}}$ est un G-module trivial, divisible et de torsion isomorphe à $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$. Pour tout $i \in \mathbf{Z}$, $\hat{H}^i(G, K_3(E_0)_{\text{ind}})$ est donc isomorphe à $\hat{H}^i(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$; ces groupes sont tous finis d'après le lemme 2.2.

Finalement, si H est un p-groupe, avec $p = \text{car}\, F$, on a $\hat{H}^i(H, K_3(E_0)_{\text{ind}}) = 0$ pour tout $i \in \mathbf{Z}$ puisque $K_3(E_0)_{\text{ind}}$ est de torsion, sans composante p-primaire, donc aussi $H^i(G, K_3(E_0)_{\text{ind}}) = 0$ pour tout $i \geqslant 1$ par la suite spectrale de Hochschild–Serre (cf. dém. du cor. au th. 2.1). En appliquant ceci à tous les sous-groupes de G, on en déduit que le G-module $K_3(E_0)_{\text{ind}}$ est cohomologiquement trivial. Si $\text{cd}(F) \leqslant 2$, il en résulte *via* le th. 2.1 que le G-module $K_2(E)$ est cohomologiquement trivial. En général, le th. 2.1 montre que f_{E/E_0F} est un isomorphisme; d'autre part, d'après le cor. au th. 2.1, $f_{E_0F/F}$ est un isomorphisme. On obtient de même la nullité de $H^1(G, K_2(E))$ à partir de la suite exacte

$$0 \to H^1(G/H, K_2(E)^H) \to H^1(G, K_2(E)) \to H^1(H, K_2(E)),$$

de la bijectivité de f_{E/E_0F}, du cor. au th. 2.1 et de l'injection $H^1(H, K_2(E)) \hookrightarrow H^3(H, K_3(E)_{\text{ind}}) = 0$. □

EXEMPLE 2.1. En général, $H^2(G, K_2(E))$ n'est pas fini, même si F est un corps de type fini. D'après le th. 2.2, il suffit de trouver un exemple où $\text{Ker}(H^3(F, (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})'(2)) \to H^3(E, (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})'(2)))$ est infini. Prenons $F = k(T_1, T_2)$, où k est un corps possédant des extensions cycliques non triviales, et soit E une extension cyclique de F, déterminée

★Par convention, on dira ici qu'un groupe abélien A est de *cotype fini* s'il est de torsion et si, pour tout nombre premier l, sa composante l-primaire $A\{l\}$ est isomorphe à la somme directe d'un groupe fini et d'un nombre fini de copies de $\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l$.

par un caractère χ de G_k (supposé non trivial). Pour tout $\alpha \in K_2(F)$, le cup-produit $\alpha \cdot \chi$ définit un élément de

$$\mathrm{Ker}(H^3(F, (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})'(2)) \to H^3(E, (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})'(2))).$$

Pour tout polynôme irréductible $P \in k(T_1)[T_2]$, on a un 'bord'

$$\partial_P\colon H^3(F, (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})'(2)) \to H^2(K_P, (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})'(1)) \subset \mathrm{Br}(K_P),$$

où

$$K_P = k(T_1)[T_2]/(P),$$

tel que

$$\partial_P(\{P, u\} \cdot \chi) = (\bar{u}, \chi_{K_P})$$

si u est un élément de F^* premier à P, où $\bar{u}$ désigne l'image résiduelle de u, χ_{K_P} la restriction de χ à K_P et $(\bar{u}, \chi_{K_P})$ est la classe de l'algèbre cyclique associée à $\bar{u}$ et à χ_{K_P}, et $\partial_Q(\{P, u\} \cdot \chi) = 0$ si Q est un polynôme irréductible différent de P. De même, si ϕ est un polynôme irréductible de $k[T_1]$, on a un bord

$$\partial_\phi\colon \mathrm{Br}(k(T_1)) \to H^1(k[T_1]/(\phi), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}),$$

tel que

$$\partial_\phi((\phi, \chi)) = \chi_{k[T_1]/(\phi)} \quad \text{et} \quad \partial_\phi((\psi, \chi)) = 0$$

si ψ est un autre polynôme irréductible. En utilisant ceci, on se convainc facilement que les $\{T_2 - x, T_1 - y\} \cdot \chi$, où y décrit k et x décrit $k(T_1)$, sont indépendants dans $H^3(F, (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})'(2))$, donc que $\mathrm{Ker}(H^3(F, (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})'(2)) \to H^3(E, (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})'(2)))$ est bien infini.

On va déduire du théorème 2.1 des énoncés plus concrets dans des cas particuliers importants. On dit que E/F est *kummérienne d'exposant* n si elle est abélienne d'exposant n, où n est un entier premier à la caractéristique de F tel que F contienne les racines n-ièmes de l'unité. On a alors $E = F(X)$, où $X = X_{E/F} = \{x \in E^* \mid x^n \in F^*\}$ (théorie de Kummer). On pose $Y_{E/F} = (X_{E/F})^n \subset F^*$ (noyau kummérien).

THÉORÈME 2.3. *Avec les notations du théorème* 2.1, *supposons que* $E_0 = F_0$.★ *Soit* F' *la plus grande sous-extension abélienne de* E. *Alors:*

(i) $\mathrm{Ker}\, f_{E/F} = \mathrm{Ker}\, f_{F'/F}$; *si* G *est fini, ce groupe est fini.*
(ii) *Si* G *est parfait* (*i.e.* $F' = F$), $f_{E/F}$ *est injective et* $\mathrm{Coker}\, f_{E/F}$ *s'identifie à un sous-groupe de l'indicateur de Schur* $H^2(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ (*donc est fini si* G *l'est*).
(iii) *Supposons* F'/F *kummérienne d'exposant* n, *et soit* ζ *une racine primitive* n-*ième de l'unité de* F. *Alors* $\mathrm{Ker}\, f_{E/F} = \{Y_{F'/F}, \zeta\}$.

★Une telle extension est parfois appelée régulière; pour éviter les confusions, nous réservons ce terme aux extensions considérées au §3.

(iv) *Supposons E/F kummérienne d'exposant n, soit ζ une racine primitive n-ième de l'unité de F et soit $Z = \{x \in F_0^* \mid \{\zeta, x\} = 0$ dans $K_2(F_0)\}$. Alors* $\operatorname{Coker} f_{E/F}$ *est engendré par $\{Z, X_{E/F}\}$ et $n\{X_{E/F}, X_{E/F}\}$.*

Démonstration. (i) Comme $E_0 = F_0$, G opère trivialement sur $K_3(E_0)_{\text{ind}} = K_3(F_0)_{\text{ind}}$, ce qui donne la première affirmation grâce au théorème 2.1. D'après (1.2) et (1.3), $(K_3(F_0)_{\text{ind}})_{\text{tors}}$ s'identifie canoniquement à $\mu^2(F_0)$; en particulier il se plonge dans $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ (en tant que G-module trivial). Par conséquent, $\operatorname{Ker} f_{E/F}$ se plonge dans $\operatorname{Hom}(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$, qui est bien fini si G est fini.

(ii) L'injectivité de $f_{E/F}$ résulte de (i). Comme G est parfait, on a $H^2(G, A) = 0$ pour tout G-module trivial sans torsion A. En effet on peut supposer A de type fini et même $A = \mathbf{Z}$; mais

$$H^2(G, \mathbf{Z}) \cong H^1(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) = 0.$$

On en déduit que

$$H^2(G, (K_3(F_0)_{\text{ind}})_{\text{tors}}) \xrightarrow{\cong} H^2(G, K_3(F_0)_{\text{ind}}).$$

En utilisant de nouveau que G est parfait, on en déduit bien que $H^2(G, K_3(F_0)_{\text{ind}})$ se plonge dans $H^2(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$.

Pour démontrer (iii), on peut compte tenu de (i) supposer que E/F est elle-même kummérienne d'exposant n. On a alors

$$\operatorname{Ker} f_{E/F} = \operatorname{Hom}(G, K_3(F_0)_{\text{ind}}) = \operatorname{Hom}(G, \mu^2(F_0)).$$

Par hypothèse, $\mu_n \subset F$, donc $\mu_n^{\otimes 2} \subset \mu^2(F_0)$, et comme G est d'exposant n on a donc

$$\operatorname{Ker} f_{E/F} = \operatorname{Hom}(G, \mu_n^{\otimes 2}) = \operatorname{Hom}(G, \mu_n) \otimes \mu_n = Y_{E/F} \otimes \mu_n.$$

On vérifie que l'homomorphisme correspondant $Y_{E/F} \otimes \mu_n \to K_2(F)$ est l'homomorphisme induit par $x \otimes y \mapsto \{x, y\}$, ce qui démontre (iii).

Pour démontrer (iv), on vérifie d'abord qu'on a bien

$$\{Z, X_{E/F}\} \subset K_2(E)^G \quad \text{et} \quad n\{X_{E/F}, X_{E/F}\} \subset K_2(E)^G.$$

On définit ensuite deux homomorphismes

$$Z \otimes X_{E/F} \to H^2(G, K_3(F_0)_{\text{ind}}), \; X_{E/F} \otimes Y_{E/F} \to H^2(G, K_3(F_0)_{\text{ind}}),$$

induisant les homomorphismes

$$\{Z, X_{E/F}\} \subset K_2(E)^G \to H^2(G, K_3(F_0)_{\text{ind}})$$

et

$$n\{X_{E/F}, X_{E/F}\} = \{X_{E/F}, Y_{E/F}\} \subset K_2(E)^G \to H^2(G, K_3(F_0)_{\text{ind}}),$$

et dont les images engendrent $H^2(G, K_3(F_0)_{\text{ind}})$.

Pour le premier homomorphisme, on considère le cup-produit:

$$H^0(G, K_3(F_0)_{\text{ind}}) \times H^2(G, \mathbf{Z}) \to H^2(G, K_3(F_0)_{\text{ind}}).$$

Dans le premier membre, le premier facteur n'est autre que $K_3(F_0)_{\mathrm{ind}}$ et le deuxième s'identifie à $H^1(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$, ou encore à $H^1(G, \mathbf{Z}/n)$ puisque G est d'exposant n. D'après (1.2), on a un isomorphisme canonique $(K_3(F_0)_{\mathrm{ind}})/n \xrightarrow{\cong} Z \otimes \mu_n$. Puisque $H^1(G, \mu_n) \cong Y_{E/F}$, on a donc un isomorphisme canonique:

$$H^0(G, K_3(F_0)_{\mathrm{ind}}) \otimes H^2(G, \mathbf{Z}) \cong Z \otimes Y_{E/F}.$$

Le premier homomorphisme annoncé est alors le composé $Z \otimes X_{E/F} \to Z \otimes Y_{E/F} \to H^2(G, K_3(F_0)_{\mathrm{ind}})$, où la première flèche est $1 \otimes n$ et la deuxième est induite par le cup-produit ci-dessus.

Le deuxième homomorphisme est simplement le composé

$$\begin{aligned} X_{E/F} \otimes Y_{E/F} \to Y_{E/F} \otimes Y_{E/F} \to Y_{E/F} \otimes Y_{E/F} \otimes \mathbf{Z}/n \xrightarrow{\cong} H^1(G, \mu_n) \otimes H^1(G, \mu_n) \\ \to H^2(G, \mu_n^{\otimes 2}) \to H^2(G, K_3(F_0)_{\mathrm{ind}}) \end{aligned}$$

où la première flèche est $n \otimes 1$, la deuxième est la réduction modulo n, la troisième est l'isomorphisme de Kummer, la quatrième est le cup-produit et la cinquième est induite par (1.2).

La compatibilité indiquée ci-dessus se vérifie sans difficulté. Il reste à voir que $H^2(G, K_3(F_0)_{\mathrm{ind}})$ est engendré par les images des cup-produits

$$H^0(G, K_3(F_0)_{\mathrm{ind}}) \times H^2(G, \mathbf{Z}) \to H^2(G, K_3(F_0)_{\mathrm{ind}})$$

et

$$H^1(G, \mu_n) \times H^1(G, \mu_n) \to H^2(G, K_3(F_0)_{\mathrm{ind}}).$$

Mais la formule des coefficients universels donne une suite exacte

$$0 \to K_3(F_0)_{\mathrm{ind}} \otimes H^2(G, Z) \to H^2(G, K_3(F_0)_{\mathrm{ind}}) \to \mathbf{Tor}(K_3(F_0)_{\mathrm{ind}}, H^3(G, \mathbf{Z})) \to 0.$$

Il suffit donc de prouver que le composé

$$H^1(G, \mu_n) \times H^1(G, \mu_n) \to H^2(G, K_3(F_0)_{\mathrm{ind}}) \to \mathbf{Tor}(K_3(F_0)_{\mathrm{ind}}, H^3(G, \mathbf{Z}))$$

est surjectif. Or on a un diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd} & H^2(G, \mu_n^{\otimes 2}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{Tor}(\mu_n^{\otimes 2}, H^3(G, \mathbf{Z})) \arrow[d, "\cong"] \\ H^1(G, \mu_n) \times H^1(G, \mu_n) \arrow[ur] \arrow[r] & H^2(G, K_3(F_0)_{\mathrm{ind}}) \arrow[r] & \mathbf{Tor}(K_3(F_0)_{\mathrm{ind}}, H^3(G, \mathbf{Z})), \end{tikzcd}$$

et $H^2(G, \mu_n^{\otimes 2}) \to \mathbf{Tor}(\mu_n^{\otimes 2}, H^3(G, \mathbf{Z}))$ s'identifie canoniquement à l'homomorphisme naturel $H^2(G, \mu_n^{\otimes 2}) \to \mu_n^{\otimes 2} \otimes H^2(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ déduit par torsion de $H^2(G, \mathbf{Z}/n) \to H^2(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$. Mais le composé

$$H^1(G, \mathbf{Z}/n) \otimes H^1(G, \mathbf{Z}/n) \to H^2(G, \mathbf{Z}/n) \to H^2(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}))$$

est surjectif, d'où le résultat.

Remarque 2.2. On peut appliquer le th. 2.3 (iii) à certaines extensions kummériennes telles que $E_0 \neq F_0$: c'est le cas par exemple si E est un corps de nombres totalement réel et que E/F est multiquadratique, linéairement disjointe des extensions 2-cyclotomiques de F. Les résultats et la démonstration sont identiques. On en verra un exemple au §8.

Remarque 2.3. D'après le théorème 2.2, si G est fini, Coker f est fini lorsque F est de type fini ou de caractéristique >0. Il est facile de donner un exemple d'extension E/F finie telle que $E_0 = F_0$ et que Coker f soit infini: soit p un nombre premier et soit F_0 le sommet d'une $\mathbf{Z}_p$-extension d'un corps de nombres contenant les racines p-ièmes de l'unité. En utilisant le théorème de Borel [2], on se convainc aisément que $K_3(F_0)_{\text{ind}}/p$ est infini. Prenons $F = F_0(t)$ (fractions rationnelles) et $E = F(t^{1/p})$. L'extension E/F est cyclique d'ordre p, et on a une suite exacte:

$$H^2(G, \mu^2(F_0)) \to \operatorname{Coker} f \to H^2(G, A) \to H^3(G, \mu^2(F_0)),$$

où $A = K_3(F_0)/torsion$. Les groupes $H^2(G, \mu^2(F_0))$ et $H^3(G, \mu^2(F_0))$ sont d'ordre $\leqslant p$; d'autre part, $H^1(G, A/p) \xrightarrow{\simeq} H^2(G, A)$ est infini, donc Coker f est bien infini. On pourrait de même donner un exemple où G est fini mais $H^1(G, K_2(E))$ est infini.

PROBLÈME 2.1. Existe-t-il une extension finie E/F telle que Ker f soit infini? Cela semble très probable, mais je ne suis pas parvenu à en exhiber. D'après les théorèmes 2.2 et 2.3, Ker f est fini lorsque F est de type fini ou de caractéristique >0, et aussi lorsque $E_0 = F_0$. Par un dévissage immédiat, on voit que s'il existe une extension finie E/F telle que Ker f soit infini, il en existe une cyclique de degré premier p, telle que F soit une extension algébrique (nécessairement infinie) de $\mathbf{Q}$. Il se peut qu'on obtienne un tel exemple en prenant de nouveau pour F le sommet d'une $\mathbf{Z}_l$-extension d'un corps de nombres (avec $l = p$ ou $l \neq p$).

3. Cas relatif; application aux variétés rationnelles

Soit F/F_1 une extension *régulière*: cela signifie que F_1 est algébriquement fermé dans F. D'après Suslin ([44, th. 3.6]), l'homomorphisme $K_2(F_1) \to K_2(F)$ est injectif: on convient de noter $K_2(F/F_1)$ son conoyau. Soit E_1/F_1 une extension galoisienne, de groupe G, et posons $E = E_1F$. Le but de ce paragraphe est d'étudier le G-module $K_2(E/E_1)$. Ce module a déjà été étudié par Bloch [4], Colliot-Thélène et Sansuc [14], Colliot-Thélène [12] et Suslin [44, th. 5.8] dans le cas 'géométrique'.

THÉORÈME 3.1. (a) $K_2(F/F_1) \xrightarrow{\simeq} K_2(E/E_1)^G$.
(b) *On a une suite exacte*:

$$0 \to H^1(G, K_2(E/E_1)) \to H^3(F_1, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3(F, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \oplus H^3(E_1, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)).$$

Démonstration. On va de nouveau utiliser le complexe $\Gamma(2)$ de Lichtenbaum, cette fois-ci de façon un peu plus raffinée. Soit $C(F, \Gamma(2))$ le complexe total associé au double complexe $C^{ij} = C^i(G_F, \Gamma(2, F_s)^j)$, où $C^i(G_F, -)$ désigne les cochaînes singulières du groupe de Galois absolu de F: par définition, sa cohomologie est l'hypercohomologie de F à valeurs dans $\Gamma(2)$. On a de même des complexes $C(F_1, \Gamma(2))$, $C(E, \Gamma(2))$ et $C(E_1, \Gamma(2))$. Notons $C(F/F_1, \Gamma(2))$ le cône du morphisme naturel de complexes $C(F_1, \Gamma(2)) \to C(F, \Gamma(2))$. (De manière équivalente, on peut remarquer que $C(F_1, \Gamma(2)) \to C(F, \Gamma(2))$ est injectif en tous degrés et prendre pour $C(F/F_1, \Gamma(2))$ le conoyau de ce morphisme). On définit l'*hypercohomologie relative de* F/F_1 *á valeurs dans* $\Gamma(2)$ comme la cohomologie de $C(F/F_1, \Gamma(2))$. On a une longue suite exacte:

$$\cdots \to \mathbb{H}^i(F_1, \Gamma(2)) \to \mathbb{H}^i(F, \Gamma(2)) \to \mathbb{H}^{i+1}(F/F_1, \Gamma(2)) \to \mathbb{H}^{i+1}(F_1, \Gamma(2)) \to \cdots$$

d'où des isomorphismes:

$$\mathbb{H}^i(F/F_1, \Gamma(2)) = 0 \quad (i \leqslant 1),$$
$$\mathbb{H}^2(F/F_1, \Gamma(2)) = K_3(F)_{\mathrm{ind}}/K_3(F_1)_{\mathrm{ind}},$$
$$\mathbb{H}^3(F/F_1, \Gamma(2)) = K_2(F/F_1),$$

et une suite exacte:

$$0 \to \mathbb{H}^4(F/F_1, \Gamma(2)) \to H^3(F_1, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3(F, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)).$$

(On a utilisé l'injectivité de $K_2(F_1) \to K_2(F)$, les résultats (1.5) du §1 et le lemme 1.1.) Par ailleurs, on a une suite spectrale "de Hochschild–Serre":

$$H^p(G, \mathbb{H}^q(E/E_1, \Gamma(2))) \Rightarrow \mathbb{H}^{p+q}(F/F_1, \Gamma(2)),$$

qui se construit exactement comme dans le cas habituel.

Observons que le G-module $K_3(E)_{\mathrm{ind}}/K_3(E_1)_{\mathrm{ind}}$ est uniquement divisible: cela résulte de (1.4). Il est donc cohomologiquement trivial, et le théorème 3.1 résulte de cette observation et de la suite spectrale.

Remarque 3.1. Par fonctorialité, la flèche

$$H^1(G, K_2(E/E_1)) \to H^3(F_1, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$$

provient de

$$H^1(F_1, K_2(\bar{F}_1 F/\bar{F}_1)) \to H^3(F_1, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$$

(où $\bar{F}_1$ désigne une clôture séparable de F_1); par construction, le diagramme suivant commute:

$$\begin{tikzcd}
H^1(F_1, H^1(\bar{F}_1 F, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))) \arrow[d, "\text{Suslin}"] \arrow[ddr, "d_2^{1,1}"] & \\
H^1(F_1, K_2(\bar{F}_1 F)) \arrow[d] & \\
H^1(F_1, K_2(\bar{F}_1 F/\bar{F}_1)) \arrow[r] & H^3(F_1, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))
\end{tikzcd}$$

(Dans ce diagramme, $d_2^{1,1}$ est une différentielle de la suite spectrale de Hochschild–Serre correspondante.) Si F_1 est parfait, on peut y remplacer $K_2(\bar{F}_1F/\bar{F}_1)$ par $K_2(\bar{F}_1F)$, puisque $K_2(\bar{F}_1)$ est alors uniquement divisible.

COROLLAIRE 1. *Si $H^3(F_1, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3(F, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$ est injective, on a $H^1(G, K_2(E/E_1)) = 0$ pour toute extension galoisienne E_1/F_1. C'est en particulier le cas lorsque $F = F_1(X)$, où X est une variété géométriquement intègre ayant un zéro-cycle lisse de degré 1, et aussi lorsque $\mathrm{cd}(F_1) \leqslant 2$. Si F_1 est un corps de nombres, $H^1(G, K_2(E/E_1))$ est isomorphe à un sous-groupe de $(\mathbf{Z}/2)^{\Sigma_\infty(E_1/F_1)\cap\Sigma_\infty(F/F_1)}$, où pour une extension K de F_1, $\Sigma_\infty(K/F_1)$ désigne l'ensemble des structures de corps ordonné sur F_1 qui ne se prolongent pas à K.*

Seule la dernière affirmation nécessite d'être justifiée. Pour tout corps de nombres K, on a un isomorphisme

$$H^3(K, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{v\in\Sigma_\infty(K)} H^3(K_v, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \cong (\mathbf{Z}/2)^{\Sigma_\infty(K)},$$

où $\Sigma_\infty(K)$ désigne l'ensemble des places réelles de K et K_v désigne la clôture réelle de K dans $\bar{\mathbf{Q}}$ (Tate; cela résulte par exemple de la prop. 5.2 ci-dessous, appliquée avec $A = \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)$). En appliquant ceci à $K = F_1$, on obtient un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc}
H^3(F_1, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) & \longrightarrow & H^3(F, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \oplus H^3(E_1, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\bigoplus_{v\in\Sigma_\infty(F_1)} H^3(F_{1,v}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) & \longrightarrow & \bigoplus_{v\in\Sigma_\infty(F_1)} H^3(F_v, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \oplus \bigoplus_{v\in\Sigma_\infty(F_1)} H^3(E_{1,v}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))
\end{array}$$

où

$$F_v = F_{1,v} \otimes_{F_1} F \quad \text{et} \quad E_{1,v} = F_{1,v} \otimes_{F_1} E_1.$$

Pour chaque v, l'algèbre $E_{1,v}$ est isomorphe à un produit de copies de $\mathbf{R}_{\mathrm{alg}}$ et de $\bar{\mathbf{Q}}$, où le nombre de facteurs isomorphes à $\mathbf{R}_{\mathrm{alg}}$ est égal au nombre de places réelles de E_1 au-dessus de v ($\mathbf{R}_{\mathrm{alg}}$: corps des nombres algébriques réels); par ailleurs, F_v est un corps puisque l'extension F/F_1 est régulière. Si l'ordre de $F_{1,v}$ se prolonge à F_v, l'application $H^3(F_{1,v}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3(F_v, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$ est injective, puisqu'elle devient bijective en passant de F_v à une clôture réelle; cela démontre l'énoncé.

Remarque 3.2. Même si l'ordre de $F_{1,v}$ ne se prolonge pas à F_v, l'application $H^3(F_{1,v}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3(F_v, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$ peut être injective. C'est le cas par exemple si F est le corps des fonctions de la quadrique d'équation $T_1^2 + \cdots + T_{32}^2 = 0$ (dans ce cas, le cup-produit $(-1)^4$ n'est pas nul dans $H^4(F_v, \mathbf{Z}/2)$, or ce cup-produit vu dans $H^4(F_{1,v}, \mathbf{Z}/2)$ est le bord du générateur de $H^3(F_{1,v}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$). Par conséquent, l'inclusion du corollaire 1 est en général stricte. Je remercie le referee d'avoir attiré mon attention sur ce point.

Remarque 3.3. Curieusement, le cas '$\mathrm{cd}(F_1) \leqslant 2$' du corollaire ci-dessus ne figure pas dans [12]. Comme me l'a cependant fait remarquer l'auteur, il découle immédiatement des raisonnements de *loc. cit.*

COROLLAIRE 2. *Supposons $F = F_1(X)$, où X est une variété géométriquement intègre. Alors, pour toute extension E_1/F_1 galoisienne telle que X_{E_1} ait un zéro-cycle lisse de degré 1, on a des isomorphismes*:

$$\begin{aligned} H^1(G, K_2(E_1(X)/E_1)) &\cong H^1(F_1, K_2(\bar{F}_1(X)/\bar{F}_1)) \\ &\cong \mathrm{Ker}(H^3(F_1, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3(F, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))). \end{aligned}$$

Démonstration. Le deuxième isomorphisme a déjà été vu (remarque 3.1). Pour le reste, il suffit de remarquer que $H^3(E_1, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3(E, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$ est injective, donc que

$$\mathrm{Ker}(H^3(F_1, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3(F, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))) \subset \mathrm{Ker}(H^3(F_1, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3(E_1, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))).$$

EXEMPLE 3.1. Un travail récent de Suslin [46] fournit un exemple non trivial d'une variété rationnelle X telle que $H^1(F_1, K_2(\bar{F}_1(X)/\bar{F}_1))$ soit fini. Soit D une algèbre simple centrale de degré n sur F_1, où n est premier à car F_1, et soit $a \in F_1^*$: prenons pour X la variété affine d'équation $\mathrm{Nrd}(x) = a$, où Nrd désigne la norme réduite de l'algèbre D, et soit $F = F_1(X)$. D'après [46], $\mathrm{Ker}(H^3(F_1, \mu_n^{\otimes 2}) \to H^3(F, \mu_n^{\otimes 2}))$ est cyclique d'ordre divisant n, engendré par le cup-produit $[D]\cdot(a)$, où $[D]$ désigne la classe de D dans ${}_n\mathrm{Br}(F_1) = H^2(F_1, \mu_n)$ et (a) celle de a dans $H^1(F_1, \mu_n)$ par la théorie de Kummer. D'après le théorème de Merkurjev–Suslin ([30], cf. (1.2)), $H^3(F, \mu_n^{\otimes 2}) \to {}_nH^3(F, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$ est un isomorphisme; d'autre part, un argument de transfert facile montre que $\mathrm{Ker}(H^3(F_1, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3(F, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)))$ est tué par n. On en conclut que $\mathrm{Ker}(H^3(F_1, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3(F, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)))$ est lui aussi engendré par l'image de $[D]\cdot(a)$.

EXEMPLE 3.2. Il est facile de donner des exemples où F_1 est de type fini et X une variété rationnelle (par exemple une conique), mais où $H^1(F_1, K_2(\bar{F}_1(X)/\bar{F}_1))$ est *infini*. Soit toujours D une F_1-algèbre centrale simple de degré n, mais prenons cette fois-ci pour X la *variété de Severi-Brauer* associée à D. Pour tout $a \in F_1^*$, l'élément $[D]\cdot(a)$ est dans $\mathrm{Ker}(H^3(F_1, \mu_p^{\otimes 2}) \to H^3(F, \mu_p^{\otimes 2}))$, donc son image est dans $\mathrm{Ker}(H^3(F_1, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3(F, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)))$. Choisissons par exemple pour F_1 un corps de fonctions rationnelles $k(T)$, et pour D une algèbre centrale simple non triviale provenant de k. Un raisonnement analogue à celui de l'exemple 2.1 montre que les éléments $[D]\cdot(T - a)$, pour $a \in k$, sont indépendants dans $H^3(F_1, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$; cela montre bien que $H^1(F_1, K_2(\bar{F}_1(X)/\bar{F}_1))$ est infini (un corps dont le groupe de Brauer est non trivial est infini). On peut prendre par exemple pour k un corps de nombres totalement imaginaire ou un corps de fonctions d'une variable sur un corps fini et pour D un corps de quaternions, de façon à obtenir un exemple avec $\mathrm{cd}(F_1) = 3$ et X une conique, en caractéristique quelconque.

II. CORPS DE NOMBRES ET CORPS LOCAUX

4. Cas des corps de nombres

On va redémontrer le théorème 2.1 de manière plus élémentaire, dans le cas des corps de nombres. Pour cela, on va se servir du théorème suivant, intéressant en soi:

THÉORÈME 4.1. *Pour tout corps F, on a des isomorphismes canoniques*:

(i) $K_2(F)_{\text{tors}} \cong H^1(F, K_3(F_s)_{\text{ind}})$
(ii) $K_2(F) \otimes (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})' \cong H^2(F, K_3(F_s)_{\text{ind}})$ *et, pour* $i \geqslant 3$:
(iii) $H^i(F, (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})'(2)) \cong H^i(F, K_3(F_s)_{\text{ind}})$, *où l'on note* $(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})' = \oplus_{l \neq \text{car}\, F} \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l$.

Démonstration. En appliquant (1.2) à $F = F_s$, on obtient une suite exacte courte (analogue à la suite exacte de Kummer):

$$0 \to \mu_n^{\otimes 2} \to K_3(F_s)_{\text{ind}} \xrightarrow{n} K_3(F_s)_{\text{ind}} \to 0.$$

Passant à la limite sur n et tenant compte de (1.3), on obtient une nouvelle suite exacte:

$$0 \to (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})'(2) \to K_3(F_s)_{\text{ind}} \to K_3(F_s)_{\text{ind}} \otimes \mathbf{Q} \to 0. \tag{4.1}$$

Prenons la cohomologie de cette suite exacte; en tenant compte de (1.1), cela donne une suite exacte:

$$K_3(F)_{\text{ind}} \to K_3(F)_{\text{ind}} \otimes \mathbf{Q} \to H^1(F, (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})'(2)) \to H^1(F, K_3(F_s)_{\text{ind}}) \to 0.$$

D'autre part, en passant à la limite sur n dans (1.2), et en tenant de nouveau compte de (1.3), on obtient:

$$K_3(F)_{\text{ind}} \to K_3(F)_{\text{ind}} \otimes \mathbf{Q} \to H^1(F, (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})'(2)) \to K_2(F)_{\text{tors}} \to 0.$$

Cela démontre l'isomorphisme (i) du théorème 4.1. Pour obtenir les autres, on prend la cohomologie de (4.1) en plus hauts degrés. Cela donne:

$$H^i(F, (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})'(2)) \xrightarrow{\cong} H^i(F, K_3(F_s)_{\text{ind}}), \quad i \geqslant 2,$$

c'est-à-dire (iii) lorsque $i \geqslant 3$. Pour obtenir (ii), on remarque simplement que, d'après (1.2), on a un isomorphisme:

$$K_2(F) \otimes (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})' \xrightarrow{\cong} H^2(F, (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})'(2)) \qquad \square$$

THÉORÈME 4.2. *Soit E/F une extension galoisienne de groupe G. On a une suite exacte*:

$$\begin{aligned} 0 &\to H^1(G, K_3(E)_{\text{ind}}) \to K_2(F)_{\text{tors}} \to (K_2(E)_{\text{tors}})^G \\ &\to H^2(G, K_3(E)_{\text{ind}}) \to K_2(F) \otimes (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})'. \end{aligned}$$

Démonstration. Soit A un G_F-module topologique quelconque. On a la suite spectrale de Hochschild–Serre:

$$H^p(G, H^q(E, A)) \Rightarrow H^{p+q}(F, A),$$

d'où une suite exacte à cinq termes:

$$\begin{aligned}0 &\to H^1(G, H^0(E, A)) \to H^1(F, A) \to H^0(G, H^1(E, A))\\ &\to H^2(G, H^0(E, A)) \to H^2(F, A).\end{aligned}$$

En prenant $A = K_3(F_s)_{\mathrm{ind}}$ et en tenant compte de (1.1) et du th. 4.1, on obtient l'énoncé.

Si F est un corps de nombres, ou plus généralement une extension algébrique de $\mathbf{Q}$, $K_2(F)$ est de torsion et le théorème 4.2 redonne le théorème 2.1.

Supposons que F soit un corps de nombres. D'après Quillen [36], Borel [2] et Levine/Merkurjev–Suslin ([22], [31]), la structure de $K_3(F)_{\mathrm{ind}}$ comme groupe abélien est complètement connue: $K_3(F)_{\mathrm{ind}}$ est de type fini, de rang $r_2(F)$ (le nombre de places complexes de F) et de torsion canoniquement isomorphe à $H^0(F, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$, aisément calculable.

NOTATIONS 4.1. (a) Si A est un groupe abélien de type fini, on note $\rho(A)$ le nombre minimal de générateurs de A.

(b) Si G est un groupe fini, on note $\mathrm{Sr}(G) = \max \rho(N^{ab})$, où N décrit l'ensemble des sous-groupes de G contenant $[G, G]$.

On a $\rho(A) = \rho_\infty(A) + \max \rho_p(A)$, où $\rho_\infty(A)$ est le ($\mathbf{Z}$ –) rang de A et, pour tout nombre premier p, $\rho_p(A)$ est le rang du sous-groupe de p-torsion de A. La fonction ρ est croissante sur les sous-groupes et les quotients, et sous-additive sur les suites exactes courtes.

THÉORÈME 4.3. *Soit E/F une extension finie de corps de nombres, galoisienne de groupe G, et soit $f: K_2(F) \to K_2(E)^G$ l'application de fonctorialité. Alors* $\mathrm{Ker}\, f$ *et* $\mathrm{Coker}\, f$ *sont des groupes finis d'exposant divisant $|G|$, et d'ordre majorable en fonction de G, de $r_2(E)$ et de $|\mu^2(E)|$. Dans le cas de* $\mathrm{Ker}\, f$, *on a*

$$|\mathrm{Ker}\, f| \leqslant 2|G|^{r_2(E) - r_2(F)} |\mu^2(E)|^{\mathrm{Sr}(G)},$$

$$\rho(\mathrm{Ker}\, f) \leqslant r_2(E) + \mathrm{Sr}(G) + 1.$$

Si $G = [G, G]$, on a $|\mathrm{Ker}\, f| \leqslant |G|^{r_2(E) - r_2(F)}$ et $\rho(\mathrm{Ker}\, f) \leqslant r_2(E)$.

Démonstration. Posons $g = |G|$. Soit A un G-module de type fini.

LEMME 4.1. *Si A est fini cyclique, on a $\rho(H^1(G, A)) \leqslant \mathrm{Sr}(G) + 1$ et $|H^1(G, A)| \leqslant 2|A|^{\mathrm{Sr}(G)}$. Si A est d'ordre impair, on a $\rho(H^1(G, A)) \leqslant \mathrm{Sr}(G)$ et $|H^1(G, A)| \leqslant |A|^{\mathrm{Sr}(G)}$.*

Supposons d'abord que A soit d'ordre p^r pour un nombre premier p. Soit N le noyau de l'action de G sur A: comme $\mathrm{Aut}(A) \cong (\mathbf{Z}/p^r)^*$, N contient le sous-groupe des commutateurs $[G, G]$. On a une suite exacte:

$$0 \to H^1(G/N, A) \to H^1(G, A) \to H^1(N, A).$$

Comme G/N opère fidèlement sur A, on a $H^1(G/N, A) = 0$ si p est impair et $H^1(G/N, A) \subset \mathbf{Z}/2$ si $p = 2$ (classique); d'autre part, $H^1(N, A) = \mathrm{Hom}(N, A)$. On en déduit:

$$\rho(H^1(G, A)) \leqslant \rho(\mathrm{Hom}(N, A)) \leqslant \rho(N^{ab}) \leqslant \mathrm{Sr}(G),$$
$$|H^1(G, A)| \leqslant |\mathrm{Hom}(N, A)| \leqslant p^{r\rho(N^{ab})} \leqslant p^{r\mathrm{Sr}(G)} \quad (p > 2);$$

$$\rho(H^1(G, A)) \leqslant 1 + \rho(\mathrm{Hom}(N, A)) = 1 + \rho(N^{ab}) \leqslant 1 + \mathrm{Sr}(G),$$
$$|H^1(G, A)| \leqslant 2|\mathrm{Hom}(N, A)| \leqslant 2p^{r\rho(N^{ab})} \leqslant 2p^{r\mathrm{Sr}(G)} \quad (p = 2).$$

Le lemme s'obtient en général en écrivant A comme somme directe de ses composantes p-primaires.

LEMME 4.2. *Si A est sans torsion de rang r, on a $\rho(H^1(G, A)) \leqslant r$ et*

$$|H^1(G, A)| \leqslant \frac{(A : gA)}{(A^G : gA^G)}.$$

En effet, on considère la suite exacte courte de G-modules:

$$0 \to A \xrightarrow{g} A \to A/gA \to 0.$$

Comme $gH^1(G, A) = 0$, on en déduit une suite exacte de cohomologie:

$$0 \to A^G/gA^G \to H^0(G, A/gA) \to H^1(G, A) \to 0. \qquad \square$$

Démontrons le théorème 4.3. Les deux premières affirmations sont évidentes. Pour démontrer les majorations, il suffit d'écrire la suite exacte $0 \to A \to K_3(E)_{\mathrm{ind}} \to B \to 0$, où A est le sous-groupe de torsion de $K_3(E)_{\mathrm{ind}}$, et d'appliquer les lemmes 1 et 2. $\square$

Remarque 4.1. Pour prouver la finitude de $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Coker}\, f$ dans le cas des corps de nombres, on n'a pas besoin de la théorie ci-dessus qui fait intervenir $(K_3)_{\mathrm{ind}}$ (cf. prop. 6.1). Par contre, il semble difficile d'obtenir sans cette théorie une majoration effective de l'ordre de ces groupes.

Remarque 4.2. Des majorations analogues pour $\mathrm{Coker}\, f$ sont en principe possibles à obtenir, mais le calcul est plus compliqué.

On va préciser le th. 4.3 dans le cas d'une extension *cyclique*. Pour cela, on a besoin de renseignements sur la structure galoisienne de $K_3(E)_{\mathrm{ind}}$. Pour les obtenir, il est nécessaire de rappeler la formulation précise du théorème de Borel (réinterprété par Gross [16]):

Il existe un homomorphisme canonique $\gamma: K_3(\mathbf{C}) \to \mathbf{R}$ (régulateur de Borel), tel que $\gamma(\bar{x}) = -\gamma(x)$ pour tout $x \in K_3(\mathbf{C})$ (où $\bar{x}$ désigne l'image de x par l'automorphisme de $K_3(\mathbf{C})$ induit par la conjugaison complexe). On note encore γ l'homomorphisme $K_3(\mathbf{C}) \otimes \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ qui s'en déduit. Soit $\Sigma = \Sigma_{\mathbf{C}}(E)$ l'ensemble des places (valeurs absolues) complexes de E: alors le composé

$$K_3(E) \otimes \mathbf{R} \to \bigoplus_{v \in \Sigma} K_3(E_v) \otimes \mathbf{R} \xrightarrow{(\gamma_v)} \mathbf{R}^\Sigma$$

est un isomorphisme.

Ecrivons $\Sigma = \Sigma_1 \amalg \Sigma_2$, avec

$$\Sigma_1 = \{v \in \Sigma | v_{|F} \text{ est complexe}\} \quad \text{et} \quad \Sigma_2 = \{v \in \Sigma | v_{|F} \text{ est réelle}\}.$$

Pour $v \in \Sigma$, notons G_v le stabilisateur de v dans G (groupe de décomposition en v). Si $v \in \Sigma_1, G_v = \{1\}$; posons $\mathbf{Z}_v = \mathbf{Z}$. Si $v \in \Sigma_2, G_v$ est d'ordre 2 et agit sur E_v par la conjugaison complexe. Pour un tel v, soit $\mathbf{Z}_v$ le G_v-module de support $\mathbf{Z}$, l'action étant donnée par la multiplication par -1. Soit $A = \oplus_v \operatorname{Ind}_{G_v}^G \mathbf{Z}_v$, où v décrit un système de représentants des G-orbites de Σ: c'est un G-module canoniquement $\mathbf{Z}$-isomorphe à $\mathbf{Z}^\Sigma$, construit de façon que l'homomorphisme de Borel $K_3(E) \otimes \mathbf{R} \to A \otimes \mathbf{R}$ soit G-équivariant. On a donc:

PROPOSITION 4.1. *Le G-module $K_3(E) \otimes \mathbf{R}$ est canoniquement isomorphe à $A \otimes \mathbf{R}$, où A est le G-module décrit ci-dessus* □

COROLLAIRE. *Le G-module $K_3(E)$/torsion contient un sous-module d'indice fini isomorphe à A.*

En effet, la théorie des caractères montre que les G-modules $K_3(E) \otimes \mathbf{Q}$ et $A \otimes \mathbf{Q}$ sont isomorphes (non canoniquement *a priori*); cet énoncé est équivalent à celui du corollaire ci-dessus.

Pour un groupe cyclique G et un G-module A, notons $h(G, A)$ le quotient de Herbrand de A [40, ch. VIII] (lorsqu'il est défini).

THÉORÈME 4.4. *Dans le corollaire au théorème* 4.3, *supposons G cyclique. Alors $h(G, K_3(E)) = h(G, K_3(E)_{\mathrm{ind}}) = 2^{-r_\infty(E/F)}$, où $r_\infty(E/F)$ est le nombre des places réelles de F ramifiées dans E.*

Démonstration. Comme la torsion de $K_3(E)$ est finie, on a

$$h(G, K_3(E)) = h(G, K_3(E)_{\mathrm{ind}}) = h(G, K_3(E)/torsion).$$

D'après le cor. à la proposition 4.1, ce nombre est encore égal à $h(G, A)$, qui reste à calculer. Mais par définition de A, $h(G, A)$ est le produit des $h(G, \operatorname{Ind}_{G_v}^G \mathbf{Z}_v)$, où v décrit un système de représentants des G-orbites de Σ. Par le lemme de Shapiro, on a $h(G, \operatorname{Ind}_{G_v}^G \mathbf{Z}_v) = h(G_v, \mathbf{Z}_v)$. Si $v \in \Sigma_1$, ce nombre est égal à 1. Si $v \in \Sigma_2$, il vaut 1/2, CQFD.

Remarque 4.3. Le même raisonnement s'étend aux $K_{2i-1}(E)$ pour tout $i > 1$. Si i est pair on trouve encore $h(G, K_{2i-1}(E)) = 2^{-r_\infty(E/F)}$; par contre, si i est impair, on trouve $h(G, K_{2i-1}(E)) = 2^{r_\infty(E/F)}$. Le cas $i = 1$ correspond au théorème de Dirichlet et est bien connu ([13, p. 179], [47, p. 272, dém. du lemme 6.4]).

COROLLAIRE. *Sous les hypothèses du théorème* 4.4, *on a* $|\operatorname{Ker} f|/|\operatorname{Coker} f| = 2^{r_\infty(E/F)}$. *De plus, on a* $\rho(\operatorname{Ker} f) \leqslant r_2(E) - r_2(F) + 1$ *et* $\rho(\operatorname{Coker} f) \leqslant r_2(F) + 1$.

Démonstration. La première affirmation résulte des théorèmes 2.1 et 4.4. Pour montrer les suivantes, on écrit:

$$\operatorname{Coker} f \cong H^2(G, K_3(E)_{\mathrm{ind}}) \cong \hat{H}^0(G, K_3(E)_{\mathrm{ind}}) = K_3(F)_{\mathrm{ind}}/NK_3(E)_{\mathrm{ind}},$$

$$\operatorname{Ker} f \cong H^1(G, K_3(E)_{\mathrm{ind}}) \cong \hat{H}^{-1}(G, K_3(E)_{\mathrm{ind}}) = {}_N K_3(E)_{\mathrm{ind}}/I_G K_3(E)_{\mathrm{ind}}.$$

Comme la torsion de $K_3(F)_{\text{ind}}$ est cyclique, on a $\rho(K_3(F)_{\text{ind}}) \leqslant r_2(F)+1$; on a donc la même inégalité pour son quotient $\operatorname{Coker} f$. De même, on a $\rho({}_NK_3(E)_{\text{ind}}) \leqslant r_2(E)-r_2(F)+1$. En effet, la torsion de ${}_NK_3(E)_{\text{ind}}$ est cyclique et on a une suite exacte

$$0 \to {}_NK_3(E)_{\text{ind}} \to K_3(E)_{\text{ind}} \xrightarrow{N} K_3(F)_{\text{ind}}$$

à conoyau fini. □

5. Cohomologie de K_2 et $K_{3,\,\text{ind}}$

Notons $\hat{H}$ la cohomologie de Tate. Le résultat principal de ce paragraphe est:

THÉORÈME 5.1. *Soit F un corps de nombres, et soit E/F une extension galoisienne finie de groupe G. On a pour tout $i \in \mathbf{Z}$ une suite exacte naturelle*:

$$\begin{aligned}0 &\to \hat{H}^{2i-1}(G, K_2(E)) \to \hat{H}^{2i+1}(G, K_3(E)_{\text{ind}}) \to (\mathbf{Z}/2)^{r_\infty(E/F)}\\ &\to \hat{H}^{2i}(G, K_2(E)) \to \hat{H}^{2i+2}(G, K_3(E)_{\text{ind}}) \to 0.\end{aligned}$$

En particulier, pour tout $i \in \mathbf{Z}$, $\hat{H}^i(G, K_2(E))$ est fini, d'ordre explicitement majorable. De plus, on a une suite exacte

$$0 \to H_0(G, K_2(E)) \xrightarrow{N} K_2(F) \to (\mathbf{Z}/2)^{r_\infty(E/F)} \to 0.$$

Remarque 5.1. Dans la dernière suite exacte, on reconnaît une version plus précise du "théorème des normes pour K_2" ([12, lemme 2c)], [8]).

COROLLAIRE. *Supposons E/F finie et non ramifiée à l'infini. On a des isomorphismes*:

$$\hat{H}^i(G, K_2(E)) \xrightarrow{\cong} \hat{H}^{i+2}(G, K_3(E)_{\text{ind}}) \quad (i \in \mathbf{Z}),$$
$$H_0(G, K_2(E)) \xrightarrow{\cong} K_2(F) \ (\textit{induit par la norme}),$$

et une suite exacte

$$0 \to H_2(G, K_2(E)) \to H_0(G, K_3(E)_{\text{ind}}) \xrightarrow{N} K_3(F)_{\text{ind}} \to H_1(G, K_2(E)) \to 0.$$

Si E/F est galoisienne, non ramifiée à l'infini mais non nécessairement finie, on a des isomorphismes:

$$H^i(G, K_2(E)) \xrightarrow{\cong} H^{i+2}(G, K_3(E)_{\text{ind}}) \quad (i \geqslant 1).$$

Démonstration. Les isomorphismes ne sont qu'une reformulation du théorème 5.1 dans ce cas particulier; la suite exacte résulte de (1.1) et des cas $i=-3$ et $i=-2$ de l'isomorphisme de la première ligne. Enfin, le cas infini se déduit du cas fini par un passage à la limite.

Remarque 5.2. La suite exacte du corollaire peut être vue comme 'duale' ce delle du théorème 2.1.

Pour démontrer le théorème 5.1, on va utiliser un ingrédient inspiré par Milne [27, ch. 2, §2]: la *cohomologie galoisienne totalement positive.* (Milne introduit une cohomologie étale à supports compacts tenant compte des places archimédiennes; notre construction est une variante de la sienne. On trouvera une autre variante dans [17].)

Notons $\mathbf{Z}_+$ le conoyau de $\mathbf{Z} \to \mathrm{Ind}_{G_\infty}^{G_\mathbf{Q}} \mathbf{Z}$, où G_∞ est un sous-groupe d'inertie de $G_\mathbf{Q}$ correspondant à la place à l'infini de $\mathbf{Q}$: c'est un $G_\mathbf{Q}$-module topologique sans $\mathbf{Z}$-torsion. Pour tout G_F-module topologique A, soit $A_+ = A \otimes \mathbf{Z}_+$: c'est le conoyau de $A \to \bigoplus_{v \in \Sigma_\infty(F)} \mathrm{Ind}_{G_v}^{G_F} A$, où $\Sigma_\infty(F)$ est l'ensemble des places à l'infini de F et G_v désigne un sous-groupe de décomposition de G_F en v (on a donc $G_v = \{1\}$ si v est complexe et $G_v \cong \mathbf{Z}/2$ si v est réelle). Posons, pour $i \in \mathbf{Z}$, $H_+^i(F, A) = H^{i-1}(F, A_+)$: c'est la *cohomologie galoisienne totalement positive de A.* On a une longue suite exacte:

$$\cdots \to H_+^i(F, A) \to H^i(F, A) \to \bigoplus_v H^i(F_v, A) \to H_+^{i+1}(F, A) \to \cdots$$

où, pour tout v, F_v désigne la clôture réelle de F par rapport à v dans $\bar{\mathbf{Q}}$ si v est réelle, et $\bar{\mathbf{Q}}$ si v est complexe. En particulier, on a $H_+^i(F, A) = 0$ si $i < 1$ et, si F est totalement imaginaire, $H_+^i(F, A) = H^i(F, A)$ pour $i \geqslant 2$. Si $0 \to A \to B \to C \to 0$ est une suite exacte courte de G_F-modules topologiques, on a une longue suite exacte de cohomologie totalement positive:

$$\cdots \to H_+^i(F, A) \to H_+^i(F, B) \to H_+^i(F, C) \to H_+^{i+1}(F, A) \to \cdots \tag{5.1}$$

analogue à la suite exacte en cohomologie galoisienne classique.

PROPOSITION 5.1. *Si E est une extension de F, galoisienne de groupe G, on a une suite spectrale:*

$$H^p(G, H_+^q(E, A)) \Rightarrow H_+^{p+q}(F, A).$$

Démonstration. A l'indexation près, ce n'est autre que la suite spectrale de Hochschild–Serre appliquée au G_F-module A_+.

PROPOSITION 5.2. *Pour tout G_F-module topologique A, on a $H_+^i(F, A) = 0$ pour $i \leqslant 0$ et pour $i \geqslant 3$.*

Pour la démonstration, voir appendice 1.

On va appliquer les propositions 5.1 et 5.2 au cas particulier $A = K_3(\bar{\mathbf{Q}})_{\mathrm{ind}} = K_3(\bar{\mathbf{Q}})$. Dans ce cas:

LEMME 5.1. *Pour tout corps de nombres F, on a une suite exacte courte*

$$0 \to \mathrm{Coker}\Big(K_3(F)_{\mathrm{ind}} \to \bigoplus_v K_3(F_v)_{\mathrm{ind}}\Big) \to H_+^1(F, K_3(\bar{\mathbf{Q}}))$$
$$\to \mathrm{Ker}\Big(K_2(F) \to \bigoplus_v K_2(F_v)\Big) \to 0$$

où v décrit l'ensemble des places à l'infini de F. De plus, $H_+^2(F, K_3(\bar{\mathbf{Q}})) = 0$.

Cela résulte de la suite exacte (5.1) appliquée à $A = K_3(\bar{\mathbf{Q}})_{\text{ind}}$ et du th. 4.1 (i) et (ii), en notant que $K_2(F)$ est de torsion pour toute extension algébrique de $\mathbf{Q}$ et que l'homomorphisme $K_2(F) \to \oplus_v K_2(F_v)$ est surjectif.

COROLLAIRE. *Le G-module $H^1_+(E, K_3(\bar{\mathbf{Q}}))$ est cohomologiquement trivial, et on a un isomorphisme*

$$H^1_+(F, K_3(\bar{\mathbf{Q}})) \xrightarrow{\cong} H^0(G, H^1_+(E, K_3(\bar{\mathbf{Q}}))).$$

En effet, d'après le lemme 5.1 (appliqué à E) et la prop. 5.2, on a $H^i_+(E, K_3(\bar{\mathbf{Q}})) = 0$ pour tout $i \neq 1$. La suite spectrale de la proposition 5.1 donne donc l'isomorphisme ainsi (en appliquant à F le lemme 5.1) que des égalités $H^i(G, H^1_+(E, K_3(\bar{\mathbf{Q}}))) = 0$ pour tout $i > 0$. En appliquant ceci à tous les sous-groupes de G, on obtient bien la trivialité cohomologique de $H^1_+(E, K_3(\bar{\mathbf{Q}}))$ [40, th. IX.8].

Démontrons le théorème 5.1. Notons

$$A(E) = \operatorname{Coker}\left(K_3(E)_{\text{ind}} \to \bigoplus_{w \in \Sigma_\infty(E)} K_3(E_w)_{\text{ind}}\right)$$

et

$$B(E) = \operatorname{Ker}\left(K_2(E) \to \bigoplus_{w \in \Sigma_\infty(E)} K_2(E_w)\right).$$

D'après le lemme 5.1, on a donc une suite exacte:

$$0 \to A(E) \to H^1_+(E, K_3(\bar{\mathbf{Q}})) \to B(E) \to 0,$$

et, par l'injectivité de

$$K_3(E)_{\text{ind}} \to \bigoplus_{w \in \Sigma_\infty(E)} K_3(E_w)_{\text{ind}}$$

(resp. la surjectivité de $K_2(E) \to \oplus_{w \in \Sigma_\infty(E)} K_2(E_w)$), on a deux autres suites exactes:

$$0 \to K_3(E)_{\text{ind}} \to \bigoplus_{w \in \Sigma_\infty(E)} K_3(E_w)_{\text{ind}} \to A(E) \to 0,$$

$$0 \to B(E) \to K_2(E) \to \bigoplus_{w \in \Sigma_\infty(E)} K_2(E_w) \to 0.$$

Le corollaire au lemme 5.1 fournit des isomorphismes

$$\hat{H}^i(G, B(E)) \xrightarrow{\cong} \hat{H}^{i+1}(G, A(E))$$

pour tout $i \in \mathbf{Z}$. Par ailleurs, on remarque que les G-modules $\oplus_{w \in \Sigma_\infty(E)} K_3(E_w)_{\text{ind}}$ et $\oplus_{w \in \Sigma_\infty(E)} K_2(E_w)$ sont sommes directes de modules induits à partir des G_v (où v décrit l'ensemble des places à l'infini de F). On a donc, pour tout $i \in \mathbf{Z}$:

$$\begin{aligned}\hat{H}^i&\left(G, \bigoplus_{w \in \Sigma_\infty(E)} K_3(E_w)_{\text{ind}}\right)\\ &= \bigoplus_{v \in \Sigma_\infty(F)} \hat{H}^i(G_v, K_3(E_v)_{\text{ind}})\\ &= \bigoplus_{v \in \Sigma'_2(E/F)} \hat{H}^i(G_v, K_3(E_v)_{\text{ind}}),\end{aligned}$$

$$\hat{H}^i\Big(G, \bigoplus_{w \in \Sigma_\infty(E)} K_2(E_w)\Big) = \bigoplus_{v \in \Sigma_\infty(F)} \hat{H}^i(G_v, K_2(E_v))$$
$$= \bigoplus_{v \in \Sigma_2'(E/F)} \hat{H}^i(G_v, K_2(E_v)),$$

où $\Sigma_2'(E/F)$ est l'ensemble des places réelles de F ramifiées dans E et, pour $v \in \Sigma_2'(E/F)$, E_v désigne l'un des E_w pour w au-dessus de v. Si $v \in \Sigma_2'(E/F)$, on a $E_v \cong \bar{\mathbf{Q}}$, donc $K_2(E_v) = 0$, donc

$$\hat{H}^i\Big(G, \bigoplus_{w \in \Sigma_\infty(E)} K_2(E_w)\Big) = 0.$$

D'autre part, $K_3(E_v)_{\mathrm{ind}}$ est extension d'un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel par $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)$. On a donc:

$$\hat{H}^i(G_v, K_3(E_v)_{\mathrm{ind}}) \cong \hat{H}^i(G_v, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \text{ est pair,} \\ \mathbf{Z}/2 & \text{si } i \text{ est impair.} \end{cases}$$

On en déduit que

$$\hat{H}^i\Big(G, \bigoplus_{w \in \Sigma_\infty(E)} K_3(E_w)_{\mathrm{ind}}\Big) = (\mathbf{Z}/2)^{r_\infty(E/F)}$$

si i est impair et 0 sinon. On tire de ceci, pour tout $i \in \mathbf{Z}$, un isomorphisme

$$\hat{H}^i(G, B(E)) \xrightarrow{\cong} \hat{H}^i(G, K_2(E))$$

et une suite exacte

$$0 \to \hat{H}^{2i}(G, A(E)) \to \hat{H}^{2i+1}(G, K_3(E)_{\mathrm{ind}}) \to (\mathbf{Z}/2)^{r_\infty(E/F)}$$
$$\to \hat{H}^{2i+1}(G, A(E)) \to \hat{H}^{2i+1}(G, K_3(E)_{\mathrm{ind}}) \to 0.$$

En utilisant l'isomorphisme

$$\hat{H}^i(G, B(E)) \xrightarrow{\cong} \hat{H}^{i+1}(G, A(E)),$$

on obtient bien la première suite exacte du théorème 5.1. D'autre part, la trivialité cohomologique de $H^1_+(E, K_3(\bar{\mathbf{Q}}))$ et l'isomorphisme

$$H^1_+(F, K_3(\bar{\mathbf{Q}})) \xrightarrow{\cong} H^0(G, H^1_+(E, K_3(\bar{\mathbf{Q}})))$$

(cor. au lemme 5.1) donnent un autre isomorphisme:

$$H_0(G, H^1_+(E, K_3(\bar{\mathbf{Q}}))) \xrightarrow{\cong} H^1_+(F, K_3(\bar{\mathbf{Q}}))$$

induit par la corestriction. En appliquant le lemme du serpent au diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & H_0(G, A(E)) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Cor}"'] & H_0(G, H^1_+(E, K_3(\bar{\mathbf{Q}}))) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Cor}"', "\cong"] & H_0(G, B(E)) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Cor}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A(F) \arrow[r] & H^1_+(F, K_3(\bar{\mathbf{Q}})) \arrow[r] & B(F) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

on en déduit une suite exacte:

$$H_0(G, A(E)) \xrightarrow{\mathrm{Cor}} A(F) \to H_0(G, B(E)) \xrightarrow{\mathrm{Cor}} B(F) \to 0.$$

Mais Cor: $H_0(G, A(E)) \to A(F)$ est surjective: en effet, il suffit de voir que

$$\mathrm{Cor}\colon \bigoplus_{v\in\Sigma_\infty(F)} H_0(G_v, K_3(E_v)_{\mathrm{ind}}) \to \bigoplus_{v\in\Sigma_\infty(F)} K_3(F_v)_{\mathrm{ind}}$$

est surjective. Pour cela, il suffit de remarquer que, si F_v est une clôture réelle de F dans $\bar{\mathbf{Q}}$, Cor: $H_0(G_v, K_3(\bar{\mathbf{Q}})_{\mathrm{ind}}) \to K_3(F_v)_{\mathrm{ind}}$ est surjective. Cela résulte de (1.1) et de l'égalité $\hat{H}^0(G_v, K_3(\bar{\mathbf{Q}})_{\mathrm{ind}}) = 0$ (voir ci-dessus).

On a donc un isomorphisme Cor: $H_0(G, B(E)) \xrightarrow{\cong} B(F)$. Par ailleurs, il est clair que

$$\mathrm{Cor}\colon \bigoplus_{v\in\Sigma_\infty(F)} H_0(G_v, K_2(E_v)) \to \bigoplus_{v\in\Sigma_\infty(F)} K_2(F_v)$$

est injective, de conoyau $(\mathbf{Z}/2)^{r_\infty(E/F)}$. La deuxième suite exacte du théorème 5.1 résulte donc du lemme du serpent appliqué au diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & H_0(G, B(E)) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Cor}"', "\cong"] & H_0(G, K_2(E)) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Cor}"'] & \bigoplus_{v\in\Sigma_\infty(F)} H_0(G_v, K_2(E_v)) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Cor}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & B(F) \arrow[r] & K_2(F) \arrow[r] & \bigoplus_{v\in\Sigma_\infty(F)} K_2(F_v) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

6. $\mathbf{Z}_p$-extensions

PROPOSITION 6.1. *Soit E une extension d'un corps de nombres F, galoisienne de groupe G. Pour un ensemble S de places finies de F, notons f_S l'homomorphisme naturel $K_2(O_S) \to K_2(\tilde{O}_S)^G$, où $\tilde{O}_S$ est la clôture intégrale de O_S dans E. Si S contient l'ensemble des places ramifiées dans E/F, on a* $\operatorname{Ker} f_S = \operatorname{Ker} f$ *et* $\operatorname{Coker} f_S = \operatorname{Coker} f$. *Si de plus toute place de F ramifiée dans E divise l'ordre de G, on a* $\operatorname{Ker} f_\emptyset = \operatorname{Ker} f$ *et* $\operatorname{Coker} f_\emptyset = \operatorname{Coker} f$.

Démonstration. On peut supposer G fini (le cas général s'en déduit par passage à la $\varinjlim$). On écrit les suites exactes de localisation:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_2(O_S) \arrow[r] \arrow[d, "f_S"'] & K_2(F) \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & \bigoplus_{v\notin S} k_{v*} \arrow[r] \arrow[d, "\bar{f}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_2(\tilde{O}_S)^G \arrow[r] & K_2(E)^G \arrow[r] & \left(\bigoplus_{w\notin\tilde{S}} k_{w*}\right)^G &
\end{tikzcd}$$

Si S contient les places de F ramifiées dans E, l'application $\bar{f}$ est un isomorphisme, puisque pour $v \notin S$ le G-module $\oplus_{w|v} k_{w*}$ s'identifie à $\mathrm{Ind}_{H_w}^G k_{w*}$ pour un $w|v$, où H_w est le groupe de décomposition en w, d'où la première affirmation. D'autre part, si

$v \in S$ divise un nombre premier rationnel p, le groupe multiplicatif du corps résiduel k_{v*} est d'ordre premier à p. Si toute place de S divise l'ordre de G, dans le diagramme de localisation

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_2(O_F) \arrow[r] \arrow[d, "f_\emptyset"'] & K_2(O_S) \arrow[r] \arrow[d, "f_S"'] & \bigoplus_{v \in S} k_{v*} \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_2(O_E)^G \arrow[r] & K_2(\tilde{O}_S)^G \arrow[r] & \left(\bigoplus_{w \in \tilde{S}} k_{w*}\right)^G &
\end{tikzcd}$$

$\operatorname{Ker} g$ et $\operatorname{Coker} g$ sont d'ordre premier à $|G|$. Comme d'autre part ils sont tués par $|G|$ (argument de transfert), ils sont nuls, ce qui prouve la deuxième affirmation de la prop. 6.1.

Rappelons qu'une extension galoisienne est appelée une $\mathbf{Z}_p$*-extension multiple* (de rang r) si son groupe de Galois est isomorphe à $\mathbf{Z}_p^r$; si $r = 1$, on parle simplement de $\mathbf{Z}_p$*-extension*. Le lemme suivant est bien connu ([51, prop. 13.2] dans le cas d'une $\mathbf{Z}_p$-extension; la démonstration est la même en général).

LEMME 6.1 *Une $\mathbf{Z}_p$-extension multiple est non ramifiée hors des places divisant p, y compris à l'infini.* □

THÉORÈME 6.1. *Soit E/F une $\mathbf{Z}_p$-extension multiple de corps de nombres, de rang r, de groupe de Galois G. Alors*:

(a) $\operatorname{Ker} f$ *est fini, contenu dans* $K_2(O_F)$.
(b) $H^i(G, K_2(E)) = 0$ *pour* $i \geqslant r - 1$, *sauf (peut-être) si* $r = 1$, $i = 0$.
(c) *Si* $r = 1$, f *est surjective.*
(d) *Supposons que F soit totalement réel et que E soit la $\mathbf{Z}_p$-extension cyclotomique de F. Alors $f: K_2(F) \to K_2(E)^G$ est* bijective.
(e) *Si* $r = 2$, $\operatorname{Coker} f$ *est fini, d'ordre divisant* $|K_2(O_F)|$.

Le cas (c) généralise une partie d'un résultat de Coates [11, th. 7]; pour l'autre partie, voir th. 6.2. Cette généralisation a été obtenue auparavant par Kolster [21, th. 3.7] pour une $\mathbf{Z}_p$-extension cyclotomique (mais sa démonstration utilise seulement une variante du théorème 4.3, donc est valable en général).

Démonstration. En appliquant la prop. 6.1, on trouve bien que $\operatorname{Ker} f \subset K_2(O_F)$, donc est fini. Cela démontre (a). Supposons que E/F soit une $\mathbf{Z}_p$-extension (de rang 1). Comme $\mathrm{cd}_p(G) = 1$ et $\mathrm{cd}_l(G) = 0$ pour $l \neq p$, $\operatorname{Coker} f = H^2(G, K_3(E)_{\mathrm{ind}})$ est divisible de p-torsion. Soient F_n/F l'extension intermédiaire de degré p^n et $G_n = \mathrm{Gal}(E/F_n)$. On a $H^2(G, K_3(E)_{\mathrm{ind}}) = \varinjlim H^2(G/G_n, K_3(F_n)_{\mathrm{ind}})$, i.e. $\operatorname{Coker} f = \varinjlim \operatorname{Coker} f_n$, où f_n correspond à l'extension F_n/F. D'après le lemme 6.1, F_n/F est non ramifiée à l'infini; on a donc d'après le cor. au th. 4.4

$$|\operatorname{Coker} f_n| = |\operatorname{Ker} f_n| \leqslant |K_2(O_F)|.$$

En passant à la limite, on trouve:

$$|\operatorname{Coker} f| \leqslant |K_2(O_F)|.$$

Le groupe Coker f, fini et divisible, est nul, ce qui démontre (c).

Supposons que F soit totalement réel et que E soit la $\mathbf{Z}_p$-extension cyclotomique de F. Pour prouver l'injectivité de f, on distingue trois cas:

(i) $p > 2$ et $[F(\mu_p): F] > 2$. Alors on a aussi $[E(\mu_p): E] > 2$ (puisque E/F et $F(\mu_p)/F$ sont linéairement disjointes). Par conséquent, $K_3(E)_{\text{ind}}\{p\} = 0$ et $H^1(G, K_3(E)_{\text{ind}}) = 0$.

(ii) $p > 2$ et $[F(\mu_p): F] = 2$. Alors $[E(\mu_p): E] = 2$; comme E est la $\mathbf{Z}_p$-extension cyclotomique de F, on a

$$K_3(E)_{\text{ind}}\{p\} = H^0(E, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(2)) = \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(2).$$

Par conséquent,

$$H^1(G, K_3(E)_{\text{ind}}) = H^1(G, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(2)) = 0$$

d'après [48, proposition].

(iii) $p = 2$. On a encore $K_3(E)_{\text{ind}}\{2\} = \mathbf{Q}_2/\mathbf{Z}_2(2)$. La démonstration est la même que dans le cas (ii). Ceci démontre (d).

Supposons maintenant $r \geqslant 2$. D'après le cor. au th. 5.1 et le lemme 6.1, on a des isomorphismes:

$$H^i(G, K_2(E)) \xrightarrow{\cong} H^{i+2}(G, K_3(E)_{\text{ind}}) \quad (i \geqslant 1).$$

Comme $\operatorname{cd}(G) = r$, on a $\operatorname{scd}(G) \leqslant r + 1$, d'où $H^i(G, K_3(E)_{\text{ind}}) = 0$ pour $i \geqslant r + 2$ et donc $H^i(G, K_2(E)) = 0$ pour $i \geqslant r$. Pour voir que $H^{r-1}(G, K_2(E)) = 0$, il rest à montrer que $H^{r+1}(G, K_3(E)_{\text{ind}}) = 0$, ce qui est déjà vrai lorsque $r = 1$ (voir ci-dessus). A partir de ce cas, on raisonne par récurrence sur r. Ecrivons $G = \Gamma \times \Delta$, avec $\Gamma \cong \mathbf{Z}_p$ et $\Delta \cong \mathbf{Z}_p^{r-1}$. On a une suite spectrale de Hochschild–Serre:

$$E_2^{ij} = H^i(\Gamma, H^j(\Delta, K_3(E)_{\text{ind}})) \Rightarrow H^{i+j}(G, K_3(E)_{\text{ind}}).$$

Il suffit de voir que $E_2^{ij} = 0$ pour $i + j = r + 1$. Pour $i = 0$ et $i \geqslant 3$, c'est clair puisque $\operatorname{scd}(\Delta) \leqslant r$ et $\operatorname{scd}(\Gamma) \leqslant 2$. Pour $i = 2$, c'est encore clair puisque $\operatorname{cd}(\Gamma) = 1$ et que $H^{r-1}(\Delta, K_3(E)_{\text{ind}})$ est de torsion ($r \geqslant 2$). Supposons maintenant $i = 1$. Soient $F_\infty = E^\Delta$, F_n/F la sous-extension de F_∞/F de degré p^n, $E_0 = E^\Gamma$ et $E_n = E_0 F_n$. On a:

$$H^r(\Delta, K_3(E)_{\text{ind}}) = \varinjlim H^r(\Delta, K_3(E_n)_{\text{ind}}).$$

Par récurrence (appliquée à l'extension E_n/F_n), $H^r(\Delta, K_3(E_n)_{\text{ind}}) = 0$, donc

$$H^r(\Delta, K_3(E)_{\text{ind}}) = 0 \quad \text{et} \quad H^1(\Gamma, H^r(\Delta, K_3(E)_{\text{ind}})) = 0;$$

cela termine de démontrer (b).

Supposons enfin $r = 2$. Pour voir que $\operatorname{Coker} f = H^2(G, K_3(E)_{\text{ind}})$ est fini, il suffit, en utilisant la même suite spectrale, de montrer que E_2^{ij} est fini pour $i + j = 2$. Pour $i = 2$, on a $H^2(\Gamma, H^0(\Delta, K_3(E)_{\text{ind}})) = H^2(\Gamma, K_3(F_\infty)_{\text{ind}}) = 0$ (th. 6.1 c)). Pour $i = 0$, on a $H^2(\Delta, K_3(E)_{\text{ind}}) = \varinjlim H^2(\Delta, K_3(E_n)_{\text{ind}}) = 0$ (*loc. cit.*), donc $H^0(\Gamma, H^2(\Delta, K_3(E)_{\text{ind}})) = 0$. Pour $i = 1$, on a besoin du lemme suivant:

LEMME 6.2. *Soient $\Gamma \cong \mathbf{Z}_p$ et A un Γ-module topologique. Posons, pour tout $n \geqslant 0$, $\Gamma_n = \Gamma^{p^n}$. Supposons que, pour tout $n \geqslant 0$, A^{Γ_n} soit fini. Alors $H^1(\Gamma, A)$ est fini, d'ordre $\leqslant |A^\Gamma|$.*

En effet, par les quotients de Herbrand, on a

$$|H^1(\Gamma/\Gamma_n, A^{\Gamma_n})| = |\hat{H}^0(\Gamma/\Gamma_n, A^{\Gamma_n})| \leqslant |H^0(\Gamma/\Gamma_n, A^{\Gamma_n})| = |A^\Gamma|.$$

Comme

$$H^1(\Gamma, A) = \varinjlim H^1(\Gamma/\Gamma_n, A^{\Gamma_n}),$$

on a $|H^1(\Gamma, A)| \leqslant |A^\Gamma|$.

Le lemme 6.2 montre que pour prouver que $H^1(\Gamma, H^1(\Delta, K_3(E)_{\text{ind}}))$ est fini, il suffit de voir que $H^0(\Gamma_n, H^1(\Delta, K_3(E)_{\text{ind}}))$ est fini pour tout $n \geqslant 0$. On peut se borner au cas $n = 0$. On a alors (comme ci-dessus):

$$H^1(\Delta, K_3(E)_{\text{ind}}) = \varinjlim H^1(\Delta, K_3(E_n)_{\text{ind}}),$$

et donc:

$$H^0(\Gamma, H^1(\Delta, K_3(E)_{\text{ind}})) = \varinjlim H^0(\Gamma/\Gamma_n, H^1(\Delta, K_3(E_n)_{\text{ind}})).$$

On a $H^1(\Delta, K_3(E_n)_{\text{ind}}) \subset K_2(O_n)$, où O_n est l'anneau des entiers de F_n (th. 6.1 (a)), donc $H^0(\Gamma/\Gamma_n, H^1(\Delta, K_3(E_n)_{\text{ind}})) \subset K_2(O_n)^{\Gamma/\Gamma_n}$. Mais le noyau et le conoyau de $K_2(O_F) \to K_2(O_n)^{\Gamma/\Gamma_n}$ ont même ordre (prop 6.1, lemme 6.1 et cor. au th. 4.4), donc $|K_2(O_n)^{\Gamma/\Gamma_n}| = |K_2(O_F)|$. En passant à la limite, on en conclut que $|H^0(\Gamma, H^1(\Delta, K_3(E)_{\text{ind}}))| \leqslant |K_2(O_F)|$. D'après le lemme 6.2, on a donc aussi $|H^1(\Gamma, H^1(\Delta, K_3(E)_{\text{ind}}))| \leqslant |K_2(O_F)|$. Cela achève la démonstration de (e), et donc du th. 6.1. □

Question 6.1. Est-il vrai que, pour G de rang r quelconque, Coker f est fini et que $H^i(G, K_2(E))$ est fini pour tout $i > 0$? Si oui, peut-on borner leurs ordres en fonction de $|K_2(O_F)|$?

THÉORÈME 6.2. *Soient F un corps de nombres et E/F une $\mathbf{Z}_p$-extension. Pour tout n, soient F_n/F la sous extension de E/F de degré p^n, $H_n = \operatorname{Ker}(K_2(F_n) \to K_2(E))$ et $v_n\colon H_{n+1} \to H_n$ l'homomorphisme induit par la norme. Alors, pour tout n, v_n est surjectif et $\varprojlim H_n$ est fini.*

Au langage près, ce résultat est dû à Coates [11, th. 7] et Greenberg [15] dans le cas d'une $\mathbf{Z}_p$-extension cyclotomique dont la base contient une racine primitive p-ième de l'unité. T. Nguyen Quang Do a remarqué qu'on peut l'étendre au cas général. La démonstration ci-dessous est une variante de celle qu'il m'a indiquée; je le remercie de m'avoir permis de la reproduire ici.

Démonstration. Soient $\Gamma = \operatorname{Gal}(E/F)$ et, pour $n \geqslant 1$, $\Gamma_n = \operatorname{Gal}(E/F_n)$. La surjectivité des v_n résulte du théorème 2.1 et du fait que $\operatorname{cd}(\Gamma) = 1$ (cf. [41, p. I-20, lemme 4]). Pour tout corps k, notons $\bar{K}_3(k)$ le groupe $K_3(k)_{\text{ind}}/torsion$.

LEMME 6.3. *Soit $A = \bar{K}_3(E)$. Alors, pour tout $n \geqslant 0$, on a une suite exacte:*

$$0 \to \bar{K}_3(F_n) \to H^0(\Gamma_n, A) \to H^1(\Gamma_n, \mu^2(E)) \to H_n \to H^1(\Gamma_n, A) \to 0,$$

et $H^2(\Gamma_n, A) = 0$. En particulier, $H^0(\Gamma_n, A)$ est de type fini et $H^1(\Gamma_n, A)$ est fini.

Cela résulte de la suite exacte de cohomologie associée à la suite exacte courte $0 \to \mu^2(E) \to K_3(E)_{\text{ind}} \to \bar{K}_3(E) \to 0$, du th. 6.1 (b) et du fait que $\text{cd}(\Gamma_n) = 1$.

PROPOSITION 6.2. *Soit A un Γ-module topologique discret sans torsion. Supposons que, pour tout $n \geqslant 0$:*

(i) *$A_n = H^0(\Gamma_n, A)$ soit de type fini;*
(ii) *$H^1(\Gamma_n, A)$ soit fini;*
(iii) *$H^2(\Gamma_n, A) = 0$.*

Alors il existe un Γ-module fini p-primaire H et, pour tout $n \geqslant 1$, un isomorphisme naturel $H^1(\Gamma_n, A) \cong H^1(\Gamma_n, H^*)$. En particulier le système projectif $(H^1(\Gamma_n, A))_{n \geqslant 0}$ (pour les morphismes de corestriction) est stationnaire, de limite H^*.

COROLLAIRE. *Soit H le Γ-module associé à $A = \bar{K}_3(E)$ par la prop. 6.2. Alors:*

(a) *Si E/F est cyclotomique, on a un isomorphisme $H_n \cong H^1(\Gamma_n, H^*)$ pour tout $n \geqslant 0$, et $\varprojlim H_n \cong H^*$.*

(b) *Si E/F n'est pas cyclotomique, on a pour tout $n \geqslant 0$ une suite exacte de groupes finis*

$$0 \to \bar{K}_3(E)^{\Gamma_n}/\bar{K}_3(F_n) \to H^1(\Gamma_n, \mu^2(E)) \to H_n \to H^1(\Gamma_n, H^*) \to 0,$$

et une suite exacte:

$$\mu^2(E) \to \varprojlim H_n \to H^* \to 0.$$

En effet, via le lemme 6.3, la prop. 6.2 donne dans tous les cas une suite exacte comme dans (b). Si E/F est cyclotomique, on a $H^1(\Gamma_n, \mu^2(E)) = 0$ (lemme de Tate) d'où (a). Si E/F n'est pas cyclotomique, $\mu^2(E)$ est fini, donc aussi $H^1(\Gamma_n, \mu^2(E))$. On en déduit le 2ème énoncé de (b) par passage à la $\varprojlim$.

Le théorème 6.2 est conséquence immédiate du corollaire ci-dessus, qui le précise.

Démonstration de la prop. 6.2. Si M est un groupe abélien, on note $M^{\#} = \mathbf{Hom}(M, \mathbf{Z}_p)$ et $M^* = \mathbf{Hom}(M, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p)$: le premier (resp. le deuxième) est compact si l'on munit M de la topologie discrète (resp. si de plus M est de torsion). Notons Λ l'algèbre d'Iwasawa $\mathbf{Z}_p[[\Gamma]]$.

LEMME 6.4. *$A^{\#}$ est un Λ-module (compact) de type fini. Pour tout $n \geqslant 0$, on a:*

(a) $(A^{\#})^{\Gamma_n} = 0$;
(b) $((A^{\#})_{\Gamma_n})_{\text{tors}} \cong H^1(\Gamma_n, A)^*$.

Les isomorphismes de (b) *sont compatibles avec les projections $(A^{\#})_{\Gamma_{n+1}} \to (A^{\#})_{\Gamma_n}$ et avec les duaux des restrictions $H^1(\Gamma_{n+1}, A)^* \to H^1(\Gamma_n, A)^*$.*

En effet, on a $A^{\#} = (A \otimes \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p)^*$. De la suite exacte $0 \to A \to A \otimes \mathbf{Q} \to A \otimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \to 0$, on déduit, pour tout $n \geqslant 0$, une suite exacte:

$$H^0(\Gamma_n, A) \to H^0\Gamma_n, A \otimes \mathbf{Q}) \to H^0(\Gamma_n, A \otimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to H^1(\Gamma_n, A) \to H^1(\Gamma_n, A \otimes \mathbf{Q}) \to H^1(\Gamma_n, A \otimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to H^2(\Gamma_n, A).$$

On a

$$H^0(\Gamma_n, A \otimes \mathbf{Q}) = H^0(\Gamma_n, A) \otimes \mathbf{Q} = A_n \otimes \mathbf{Q} \quad \text{et} \quad H^1(\Gamma_n, A \otimes \mathbf{Q}) = 0;$$

de plus, $H^2(\Gamma_n, A) = 0$ d'après l'hypothèse (iii) de la prop. 6.2. On en déduit

$$H^1(\Gamma_n, A \otimes \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p) = 0$$

et une suite exacte

$$0 \to A_n \otimes \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p \to H^0(\Gamma_n, A \otimes \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p) \to H^1(\Gamma_n, A) \to 0.$$

En dualisant, cela donne

$$(A^{\#})^{\Gamma_n} = 0$$

et une suite exacte

$$0 \to H^1(\Gamma_n, A)^* \to (A^{\#})_{\Gamma_n} \to (A_n)^{\#} \to 0.$$

Par hypothèse, A_n est de type fini, donc $(A_n)^{\#}$ est un $\mathbf{Z}_p$-module de type fini sans torsion; de plus, $H^1(\Gamma_n, A)$ est fini. Par conséquent, $(A^{\#})_{\Gamma_n}$ est un $\mathbf{Z}_p$-module de type fini. Il en résulte que $A^{\#}$ est un Λ-module de type fini et de plus que $H^1(\Gamma_n, A)^* \xrightarrow{\cong} ((A^{\#})_{\Gamma_n})_{\text{tors}}$.

Cet isomorphisme est clairement compatible avec les flèches du lemme.

LEMME 6.5. *Soit X un Λ-module de type fini, de rang r, et soit T son sous-module de torsion. Il existe un homomorphisme $X \to \Lambda^r$ de conoyau fini H. Si de plus $X^\Gamma = 0$, on a une suite exacte*:

$$0 \to T_\Gamma \to (X_\Gamma)_{\text{tors}} \to H^\Gamma \to 0.$$

L'existence de l'homomorphisme est conséquence de la classification des Λ-modules à pseudo-isomorphisme près. On a une suite exacte:

$$0 \to T \to X \to \Lambda^r \to H \to 0.$$

Soit $Y = \operatorname{Im}(X \to \Lambda^r)$. On a deux suites exactes courtes:

$$0 \to T \to X \to Y \to 0,$$
$$0 \to Y \to \Lambda^r \to H \to 0.$$

En prenant les invariants et les coïnvariants, on en déduit deux nouvelles suites exactes:

$$0 \to T^\Gamma \to X^\Gamma \to Y^\Gamma \to T_\Gamma \to X_\Gamma \to Y_\Gamma \to 0,$$
$$0 \to Y^\Gamma \to (\Lambda^r)^\Gamma \to H^\Gamma \to Y_\Gamma \to (\Lambda^r)_\Gamma \to H_\Gamma \to 0.$$

On a $(\Lambda^r)^\Gamma = 0$, et $(\Lambda^r)_\Gamma$ est sans torsion. On en déduit un isomorphisme

$$H^\Gamma \xrightarrow{\cong} (Y_\Gamma)_{\text{tors}}$$

et une autre suite exacte:

$$0 \to T_\Gamma \to X_\Gamma \to Y_\Gamma \to 0.$$

Par hypothèse, $X^\Gamma = 0$, donc $T^\Gamma = 0$. Comme T est de Λ-torsion, il en résulte que T_Γ est fini. On en déduit une suite exacte:

$$0 \to T_\Gamma \to (X_\Gamma)_{\text{tors}} \to (Y_\Gamma)_{\text{tors}} \to 0.$$

Le lemme 6.5 en résulte.

LEMME 6.6. *Le Λ-module $A^\#$ est sans (Λ-)torsion, et pour tout $n \geqslant 0$ on a un isomorphisme* $((A^\#)_{\Gamma_n})_{\text{tors}} \xrightarrow{\cong} H^{\Gamma_n}$.

Démonstration. D'après le lemme 6.4 (a), on a $(A^\#)^{\Gamma_n} = 0$ pour tout $n \geqslant 1$. En appliquant le lemme 6.5 avec $X = A^\#$ et Γ_n à la place de Γ, on obtient des suites exactes:

$$0 = T_{\Gamma_n} \to (X_{\Gamma_n})_{\text{tors}} \to H^{\Gamma_n} \to 0.$$

On a une injection $T = \varprojlim T_{\Gamma_n} \hookrightarrow \varprojlim (X_{\Gamma_n})_{\text{tors}}$. Mais d'après le lemme 6.4 (b), $\varprojlim (X_{\Gamma_n})_{\text{tors}} \cong (\varinjlim H^1(\Gamma_n, A))^* = 0$. Le lemme 6.6 en résulte.

La prop. 6.2 résulte du lemme 6.6 par dualité, en appliquant le lemme 6.4 (b) (on vérifie que les isomorphismes de la prop. 6.2 commutent aux corestrictions).

Remarque. 6.1. Il est facile de voir que le module H qui intervient ci-dessus coïncide avec le module utilisé par Coates, Greenberg, etc. (dans le cas cyclotomique). En effet, soient $O \subset E$ la réunion des $O_n[1/p]$, où O_n est l'anneau des entiers de F_n et $Z = \operatorname{Spec} O$. En considérant $K_{3,\text{ind}}$ comme un faisceau pour la topologie étale, on obtient une suite exacte:

$$0 \to \bar{K}_3(E) \otimes \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p \to H^1(Z_{\text{ét}}, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(2)) \to K_2(O)\{p\} \to 0$$

(cf. §9). Comme $K_2(O)^\Gamma$ est fini (prop. 6.1 et th. 6.1 (c)), $K_2(O)\{p\}^*$ est un Λ-module de torsion, donc le module H associé à $(\bar{K}_3(E) \otimes \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p)^*$ est le même que celui associé à $H^1(Z_{\text{ét}}, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(2))^*$. Mais on a

$$H^1(Z_{\text{ét}}, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(2)) \cong H^1(\mathscr{G}, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(2)),$$

où $\mathscr{G}$ est le groupe de Galois de la pro-p-extension p-ramifiée maximale de E. Si E/F est cyclotomique, $H^1(\mathscr{G}, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(2)) = \operatorname{Hom}(\mathscr{G}, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p)(2)$, donc $H^1(Z_{\text{ét}}, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(2))^* = \mathscr{G}^{ab}(-2)$: c'est bien le module d'Iwasawa considéré par ces auteurs.

Remarque 6.2. Dans le cas non cyclotomique, j'ignore si en général $\mu^2(E) \to \varprojlim H_n$ est injective (ou, ce qui revient au même, si $\bar{K}_3(F_n) = \bar{K}_3(E)^{\Gamma_n}$ pour n assez grand).

THÉORÈME 6.3. *Les th.* 6.1 *et* 6.2 *s'étendent au cas où F est un corps de type fini. Si F est quelconque de caractéristique >0 et si E/F est une $\mathbf{Z}_p$-extension (de rang* 1), *$f_{E/F}$ est surjective.*

En effet, supposons d'abord F de type fini; son corps des constantes F_0 est donc un corps fini ou un corps de nombres. Suslin [44, cor. 2.7] a démontré que, pour tout $i \neq 1$, $H^1(F_0, \mathbf{Z}_p(i)) \xrightarrow{\cong} H^1(F, \mathbf{Z}_p(i))$. (Au *loc. cit.* l'énoncé est donné pour $i = 2$, mais l'argument s'applique dans le cas général sans aucun changement.) En appliquant ceci avec $i = 0$, on voit que $E = E_0F$, où E_0/F_0 est une $\mathbf{Z}_p$-extension multiple (uniquement déterminée). D'après le corollaire au théorème 2.1, on a $\operatorname{Ker} f_{E_0/F_0} = \operatorname{Ker} f_{E/F}$ et $\operatorname{Coker} f_{E_0/F_0} = \operatorname{Coker} f_{E/F}$. Si car $F = 0$, l'énoncé résulte des th. 6.1 et 6.2; si car $F > 0$, E/F est nécessairement de rang 1 et cyclotomique, et l'énoncé est un cas particulier du cor. au th. 2.1. Enfin, si F est quelconque de car. >0, $K_3(E_0)_{\text{ind}}$ est de torsion donc $\operatorname{Coker} f_{E/F} = H^2(G, K_3(E_0)_{\text{ind}}) = 0$ puisque $\operatorname{cd}(G) \leqslant 1$.

7. Cas d'un corps local: une conjecture

Soient p un nombre premier et F une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, de degré d. Notons O_F l'anneau des entiers de F, k son corps résiduel et m le nombre de racines de l'unité de F. D'après Moore (cf. [28, appendice]), Carroll [10] et Merkurjev [26], $K_2(F)_{\text{tors}}$ est cyclique d'ordre m. On en déduit le résultat suivant sur la structure de $\bar{K}_3(F) := K_3(F)_{\text{ind}}/torsion$:

THÉORÈME 7.1. (a) *Si l est un nombre premier différent de p, $\bar{K}_3(F)$ est (uniquement) l-divisible.*

(b) $\bar{K}_3(F)/p \cong (\mathbf{Z}/p)^d$.

Notons, pour tout groupe abélien A et tout nombre premier l, $A_l^\wedge = \varprojlim A/l^n$: c'est le *complété l-adique* de A. Le théorème 7.1 résulte de la proposition suivante:

PROPOSITION 7.1. (a) *Pour tout nombre premier l, $(K_3(F)_{\text{ind}})_l^\wedge \xrightarrow{\cong} H^1(F, \mathbf{Z}_l(2))$.*

(b) *Pour $l \neq p$, $H^1(F, \mathbf{Z}_l(2))$ est fini; pour $l = p$, c'est un $\mathbf{Z}_l$-module de type fini, de rang d.*

Démonstration. (a) résulte des suites exactes

$$0 \to (K_3(F)_{\text{ind}})/l^n \to H^1(F, \mathbf{Z}/l^n(2)) \to {}_{l^n}K_2(F) \to 0$$

(cf. (1.2)) et de la finitude de $K_2(F)_{\text{tors}}$; (b) est classique (cf. [39, prop. 2.4 et 3.4]).

Notons $K_i^{\text{top}}(F)$ et $K_i^{\text{top}}(O_F)$ les groupes définis par Wagoner dans [49]: on a $K_i^{\text{top}}(O_F) = \varprojlim K_i(O_F/\mathcal{M}^r)$ (où $\mathcal{M}$ désigne l'idéal maximal de O_F) et un diagramme commutatif aux lignes exactes:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K_i(O_F) & \longrightarrow & K_i(F) & \longrightarrow & K_{i-1}(k) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle\psi_i} & & \downarrow{\scriptstyle\phi_i} & & \downarrow{\scriptstyle=} & & \\ 0 & \longrightarrow & K_i^{\text{top}}(O_F) & \longrightarrow & K_i^{\text{top}}(F) & \longrightarrow & K_{i-1}(k) & \longrightarrow & 0. \end{array} \tag{7.1}$$

Les résultats de Suslin [45, cor. 3.9] et Panin [33] donnent les renseignements suivants sur $\operatorname{Ker} \phi_i$ et $\operatorname{Coker} \phi_i$:

THÉORÈME 7.2. *Pour tout* $i \geqslant 1$, Ker ϕ_i *est divisible et* Coker ϕ_i *est sans torsion. De plus, on a un isomorphisme canonique*:

$$\operatorname{Coker} \phi_i \otimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \xrightarrow{\cong} (\operatorname{Ker} \phi_{i-1})_{\text{tors}}.$$

Démonstration. Soit n un entier $\geqslant 1$: on va utiliser la K-théorie á coefficients $\mathbf{Z}/n$ [3]. Comme les $K_i(O_F/\mathscr{M}^r)$ sont tous finis, on a pour chaque $n \geqslant 1$ une suite exacte

$$0 \to \varprojlim K_i(O_F/\mathscr{M}^r)/n \to \varprojlim K_i(O_F/\mathscr{M}^r, \mathbf{Z}/n) \to \varprojlim {}_nK_i(O_F/\mathscr{M}^r) \to 0,$$

où les $\varprojlim$ sont relatives aux systèmes projectifs associés aux $O_F/\mathscr{M}^r$, et des isomorphismes

$${}_nK_i^{\text{top}}(O_F) \xrightarrow{\cong} \varprojlim {}_nK_i(O_F/\mathscr{M}^r),$$

$$K_i^{\text{top}}(O_F)/n \xrightarrow{\cong} \varprojlim {}_nK_i(O_F/\mathscr{M}^r)/n.$$

D'où un diagramme commutatif aux lignes exactes:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K_i(O_F)/n & \longrightarrow & K_i(O_F, \mathbf{Z}/n) & \longrightarrow & {}_nK_{i-1}(O_F) & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & K_i^{\text{top}}(O_F)/n & \longrightarrow & \varprojlim K_i(O_F/\mathscr{M}^r, \mathbf{Z}/n) & \longrightarrow & {}_nK_{i-1}^{\text{top}}(O_F) & \to & 0. \end{array}$$

D'après Suslin et Panin (*op. cit.*), la flèche verticale du centre est un isomorphisme. En appliquant le lemme du serpent, on obtient donc une suite exacte:

$$0 \to K_i(O_F)/n \to K_i^{\text{top}}(O_F)/n \to {}_nK_{i-1}(O_F) \to {}_nK_{i-1}^{\text{top}}(O_F) \to 0. \tag{7.2}$$

Considérons le complexe (de chaînes)

$$C.(i): K_i(O_F) \xrightarrow{\psi_i} K_i^{\text{top}}(O_F),$$

où $K_i(O_F)$ est en degré 1 et $K_i^{\text{top}}(O_F)$ en degré 0. On a deux suites spectrales d'hyperhomologie:

$$E_{pq}^2 = \operatorname{Tor}_p^{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/n, H_q(C.(i))) \Rightarrow ? \Leftarrow \operatorname{Tor}_q^{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/n, C_p(i))) = {}'E_{pq}^1.$$

La suite exacte (7.2) donne ${}'E_{10}^2 = {}'E_{01}^2 = 0$. On en déduit que $E_{10}^2 = E_{01}^2 = 0$, c'est-à-dire ${}_n\operatorname{Coker} \psi_i = (\operatorname{Ker} \psi_i)/n = 0$, c'est-à-dire que Coker ψ_i est sans torsion et Ker ψ_i divisible. De plus, (7.2) donne un isomorphisme $(\operatorname{Coker} \psi_i)/n \xrightarrow{\cong} {}_n\operatorname{Ker} \psi_{i-1}$ pour tout n, d'où un isomorphisme $\operatorname{Coker} \psi_i \otimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \xrightarrow{\cong} (\operatorname{Ker} \psi_{i-1})_{\text{tors}}$. Le théorème 7.2 s'en déduit, à l'aide du diagramme (7.1).

Supposons maintenant $i = 3$. Le diagramme (7.1) donne alors des isomorphismes

$$K_3(O_F) \xrightarrow{\cong} K_3(F) \quad \text{et} \quad K_3^{\text{top}}(O_F) \xrightarrow{\cong} K_3^{\text{top}}(F).$$

LEMME 7.1. *L'homomorphisme* $K_3(F) \to K_3^{\text{top}}(F)$ *se factorise en* $\bar{\phi}_3 : K_3(F)_{\text{ind}} \to K_3^{\text{top}}(F)$.

Démonstration. Le composé $K_1(F)^{\otimes 3} \to K_3(F) \to K_3^{\text{top}}(F)$ se factorise en $K_1(F)^{\otimes 3} \to K_1(F) \otimes K_2(F) \to K_1(F) \otimes K_2^{\text{top}}(F) \to K_3^{\text{top}}(F)$, ainsi qu'en $K_1(F)^{\otimes 3} \to K_3^M(F) \to$

$K_3(F) \to K_3^{\mathrm{top}}(F)$, où $K_3^M(F)$ est la K-théorie de Milnor de F. D'après Moore (cf. [28, appendice]), $K_2^{\mathrm{top}}(F)$ est fini, et d'après [29, ex. 1.7], $K_3^M(F)$ est divisible. L'image du composé $K_1(F)^{\otimes 3} \to K_3(F) \to K_3^{\mathrm{top}}(F)$ est divisible et d'exposant fini, donc nulle.

THÉORÈME 7.3. Ker $\bar{\phi}_3$ *et* Coker $\bar{\phi}_3$ *sont uniquement divisibles, où* $\bar{\phi}_3$ *est comme dans le lemme* 7.1.

Démonstration. Vu le th. 7.2, il suffit de montrer que Ker $\bar{\phi}_3$ et Ker ϕ_2 sont sans torsion. On a $(\operatorname{Ker} \bar{\phi}_3)_{\mathrm{tors}} \subset (K_3(F)_{\mathrm{ind}})_{\mathrm{tors}} = \mu^2(F)$, qui est fini; comme Ker ϕ_3 est divisible, on a donc $(\operatorname{Ker} \bar{\phi}_3)_{\mathrm{tors}} = 0$. Pour voir que ϕ_2 est injectif sur la torsion de $K_2(F)$, on remarque que d'après Moore, Carroll et Merkurjev (*op. cit.*), $K_2(F)_{\mathrm{tors}} \xrightarrow{\cong} K_2(F)/m \xrightarrow{\cong} K_2^{\mathrm{top}}(F)$.

Remarque 7.1. En particlier, le th. 7.3 implique que $K_3^{\mathrm{top}}(O_F)_{\mathrm{tors}} \cong H^0(F, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$ (cf. (1.2)). Par exemple, pour $O_F = \mathbf{Z}_p$, on obtient $K_3^{\mathrm{top}}(\mathbf{Z}_p)_{\mathrm{tors}} \cong \mathbf{Z}/24$ si $p = 2$ ou 3 et $K_3^{\mathrm{top}}(\mathbf{Z}_p)_{\mathrm{tors}} \cong \mathbf{Z}/(p^2 - 1)$ si $p > 3$. Cela semble contredire [1, p. 1, th.], qui donne $K_3^{\mathrm{top}}(\mathbf{Z}_2)_{\mathrm{tors}} \cong \mathbf{Z}/12$ et $K_3^{\mathrm{top}}(\mathbf{Z}_3)_{\mathrm{tors}} \cong \mathbf{Z}/8$.

Soit F_0 le corps des constantes de F: c'est le hensélisé d'un corps de nombres par rapport à une place au-dessus de p convenable. Rappelons (1.4) qu'on conjecture que $K_3(F_0)_{\mathrm{ind}} \to K_3(F)_{\mathrm{ind}}$ est un isomorphisme.

Dans la fin de ce paragraphe, je vais donner une conjecture sur la structure de $K_3(F)_{\mathrm{ind}}$. Pour cela, j'ai besoin d'en définir un sous-groupe $K_3(O_F, \mathscr{M})_{\mathrm{ind}}$. De manière générale, soit A un anneau de valuation discrète, de corps des fractions F et de corps résiduel k. Soit π une uniformisante de A: le composé

$$K_3(F) \xrightarrow{\cdot\{\pi\}} K_4(F) \xrightarrow{\partial} K_3(k)$$

envoie $K_3(F)_{\mathrm{déc}}$ dans $K_3(k)_{\mathrm{déc}}$, et on voit tout de suite que l'homomorphisme induit $K_3(F)_{\mathrm{ind}} \to K_3(k)_{\mathrm{ind}}$ ne dépend pas du choix de π. Il est clair que le diagramme

$$\begin{tikzcd} K_3(A) \arrow[r] \arrow[d] & K_3(k) \arrow[d] \\ K_3(F)_{\mathrm{ind}} \arrow[r] & K_3(k)_{\mathrm{ind}} \end{tikzcd}$$

où la flèche verticale du haut est l'application naturelle, est commutatif. Notons $\mathscr{M}$ l'idéal maximal de A.

DÉFINITION 7.1. $K_3(A, \mathscr{M})_{\mathrm{ind}} = \operatorname{Ker}(K_3(F)_{\mathrm{ind}} \to K_3(k)_{\mathrm{ind}})$.

Revenons au cas où F est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$. Notons $\mathbf{Z}_{(p)}$ le localisé de $\mathbf{Z}$ en p. Le théorème 7.1 implique que $(K_3(F)_{\mathrm{ind}})$/torsion est un $\mathbf{Z}_{(p)}$-module; d'autre part, notons $\mu'^2(F)$ le sous-groupe de $\mu^2(F)$ formé des éléments d'ordre premier à p: c'est aussi le sous-groupe de torsion première à p de $K_3(F)_{\mathrm{ind}}$. On voit tout de suite que le composé $\mu'^2(F) \to K_3(F)_{\mathrm{ind}} \to K_3(k)_{\mathrm{ind}}$ est un isomorphisme, donc que la torsion de $K_3(O_F, \mathscr{M})_{\mathrm{ind}}$ est p-primaire. On en conclut que $K_3(O_F, \mathscr{M})_{\mathrm{ind}}$ est de manière naturelle un $\mathbf{Z}_{(p)}$-module.

Notons maintenant $\mathbf{Z}_{(p)}^h$ le hensélisé de $\mathbf{Z}$ en p: l'anneau de valuation de F_0 est un $\mathbf{Z}_{(p)}^h$-module libre de rang d. Soit $K_3^{\mathrm{top}}(O_F, \mathscr{M}) = \mathrm{Ker}(K_3^{\mathrm{top}}(O_F) \to K_3(k))$: c'est un $\mathbf{Z}_p$-module libre de type fini, et on a un homomorphisme naturel $K_3(O_F, \mathscr{M})_{\mathrm{ind}} \to K_3^{\mathrm{top}}(O_F, \mathscr{M})$, de noyau et conoyau uniquement divisibles d'après le théorème 7.3. L'énoncé de la conjecture est le suivant:

CONJECTURE 7.1. *Il existe sur* $K_3(O_F, \mathscr{M})_{\mathrm{ind}}$ *une structure naturelle de* $\mathbf{Z}_{(p)}^h$-*module telle que de* $K_3(O_F, \mathscr{M})_{\mathrm{ind}}$ *soit un* $\mathbf{Z}_{(p)}^b$-*module de type fini, de rang d, et que l'homomorphisme ci-dessus induise un isomorphisme*:

$$K_3(O_F, \mathscr{M})_{\mathrm{ind}} \otimes_{\mathbf{Z}_{(p)}^h} \mathbf{Z}_p \xrightarrow{\cong} K_3^{\mathrm{top}}(O_F, \mathscr{M}).$$

Dans un futur article, j'espère étudier le lien entre cette conjecture et l'homologie cyclique des $O_F/\mathscr{M}^r$.

8. Exemple: K_2 des corps quadratiques

Soit $E = \mathbf{Q}(\sqrt{d})$ un corps quadratique de discriminant d: on va appliquer les résultats précédents à l'étude de $K_2(E)$ et de $K_2(O_E)$. On note toujours f l'homomorphisme naturel $K_2(\mathbf{Q}) \to K_2(E)^G$ (où $G = \mathrm{Gal}(E/\mathbf{Q})$, et f l'homomorphisme $K_2(\mathbf{Z}) \to K_2(O_E)^G$.

Il est pratique de donner une définition:

DÉFINITION. Un entier d sans facteur carré impair est 2-*normal* si tout facteur premier impair de d est $\equiv \pm 1 \pmod 8$.

Un entier d (sans facteur carré impair) est 2-normal si et seulement si on a $(2, d) = 0$ dans ${}_2\mathrm{Br}(\mathbf{Q})$.

THÉORÈME 8.1. (a) *Supposons* $d > 0$. *Alors*

(i) *Si* $d = 8$, f *est bijective.*
(ii) *Si* $d \neq 8$, $\mathrm{Ker}\, f = \langle\{-1, d\}\rangle$ *et* $\mathrm{Coker}\, f = \langle\{2, \sqrt{d}\}\rangle$ *sont cycliques d'ordre* 2.

(b) *Supposons* $d < 0$. *Alors*

(i) *Si la norme* $N\colon K_3(E)_{\mathrm{ind}} \to K_3(\mathbf{Q})_{\mathrm{ind}}$ *est surjective,* f *est surjective et* $\mathrm{Ker}\, f = \langle\{-1, d\}\rangle$ *est cyclique d'ordre* 2. *Ceci se produit en particulier si* $d = -4$ *ou* -8.
(ii) *Si* $N\colon K_3(E)_{\mathrm{ind}} \to K_3(\mathbf{Q})_{\mathrm{ind}}$ *n'est pas surjective,* $\mathrm{Coker}\, f$ *est d'ordre* 2, *engendré par* $\{2, \sqrt{d}\}$, *et* $\mathrm{Ker}\, f$ *est de type* (2, 2), *engendré par* $\{-1, d\}$ *et* $\{-1, a\}$, *où* a *est un certain diviseur impair propre de* d (*positif ou négatif*). *Si* $d \equiv 1 \pmod 8$, *on a* $a \neq -1$.
(iii) *Pour que* $N\colon K_3(E)_{\mathrm{ind}} \to K_3(\mathbf{Q})_{\mathrm{ind}}$ *soit surjective, il faut que d soit* 2-*normal.*
(iv) *Si* $d = -p$, *où* p *est un nombre premier* $\equiv -1 \pmod 8$, $N\colon K_3(E)_{\mathrm{ind}} \to K_3(\mathbf{Q})_{\mathrm{ind}}$ *est surjective.*

Remarque 8.1 La condition "$N\colon K_3(E)_{\mathrm{ind}} \to K_3(\mathbf{Q})_{\mathrm{ind}}$ est surjective" est un analogue tordu de la condition "l'unité fondamentale est de norme -1". Elle est équivalente (pour E imaginaire) à la surjectivité de $N\colon K_3(E) \to K_3(\mathbf{Q})$: en effet, $K_3(E) = K_3(E)_{\mathrm{ind}}$ et $K_3(\mathbf{Q})$ est cyclique.

Démonstration. (a) Supposons $d > 0$. Alors $\mathrm{rg}\, K_3(E) = 0$, donc $K_3(E)_{\mathrm{ind}} = \mu^2(E) := H^0(E, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$. Si $d \neq 8$, $\mu^2(E) = \mu^2(\mathbf{Q}) = \mu_{24}^{\otimes 2}$, donc $H^1(G, K_3(E)_{\mathrm{ind}})$ et $H^2(G, K_3(E)_{\mathrm{ind}})$ sont cycliques d'ordre 2. De plus, on est dans la situation "kummérienne" du th. 2.3 (iii), que l'on peut appliquer (cf. remarque 2.2). Cela donne (ii). Si $d = 8$, $\mu^2(E) = \mu_{48}^{\otimes 2}$ et G opère sur la partie 2-primaire de $\mu^2(E)$ par multiplication par 9. On en déduit que $\mu^2(E)$ est cohomologiquement trivial, d'où (i).

(b) Supposons $d < 0$. D'après le corollaire au th. 4.4, on a $|\mathrm{Ker}\, f| = 2|\mathrm{Coker}\, f|$. Par ailleurs, puisque $K_3(\mathbf{Q})_{\mathrm{ind}} = (K_3(E)_{\mathrm{ind}})^G$, on a un isomorphisme:

$$\mathrm{Coker}(N\colon K_3(E)_{\mathrm{ind}} \to K_3(\mathbf{Q})_{\mathrm{ind}}) = \hat{H}^0(G, K_3(E)_{\mathrm{ind}}) \cong H^2(G, K_3(E)_{\mathrm{ind}}) \cong \mathrm{Coker}\, f$$

puisque G est cyclique. Comme $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Coker}\, f$ sont d'exposant 2, cela démontre les affirmations de (i) et (ii) relatives à leur structure. Supposons $d \in \{-4, -8\}$. Alors $\mu^2(E) = \mu_{48}^{\otimes 2}$, donc la norme $\mu^2(E) \to K_3(\mathbf{Q})_{\mathrm{ind}}$ est déjà surjective, d'où la dernière affirmation de (i).

Il reste à démontrer (dans (i) et (ii)) les affirmations concernant les générateurs. On a une suite exacte de G-modules:

$$0 \to \mu^2(E) \to K_3(E)_{\mathrm{ind}} \to \tilde{\mathbf{Z}} \to 0,$$

où G opère sur $\tilde{\mathbf{Z}}$ par multiplication par -1. On en déduit une suite exacte:

$$0 \to H^1(G, \mu^2(E)) \to \mathrm{Ker}\, f \to \mathbf{Z}/2 \to H^2(G, \mu^2(E)) \to \mathrm{Coker}\, f \to 0.$$

Si $\mathrm{Coker}\, f = 0$, $H^1(G, \mu^2(E)) \to \mathrm{Ker}\, f$ est un isomorphisme, ce qui donne l'affirmation de (i). Si $\mathrm{Coker}\, f \neq 0$, $H^2(G, \mu^2(E)) \to \mathrm{Coker}\, f$ est un isomorphisme; par les raisonnements de la démonstration du théorème 2.3 (iii), cela implique que $\mathrm{Coker}\, f$ est engendré par $\{2, \sqrt{d}\}$. Par ailleurs, $\mathrm{Ker}\, f$ est isomorphe à $\mathbf{Z}/2 \times \mathbf{Z}/2$; d'après [47, th. 6.1] un élément de $\mathrm{Ker}\, f$ est donc de la forme $\{-1, a\}$ pour un $a \in \mathbf{Q}^*$, que l'on peut évidemment choisir entier, et même au besoin sans facteurs carrés. Le choix $a = d$ donne évidemment un générateur non nul (provenant de l'homomorphisme $H^1(G, \mu^2(E)) \to \mathrm{Ker}\, f$). Soit $\alpha = \{-1, a\}$ un autre générateur, avec a entier sans facteurs carrés, et soit p un nombre premier non ramifié dans $E/\mathbf{Q}$, c'est-à-dire ne divisant pas d. Si k est le corps résiduel de O_E en une place v au-dessus de p, on a un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} K_2(E) & \xrightarrow{\partial_v} & k^* \\ \uparrow & & \uparrow \\ K_2(\mathbf{Q}) & \xrightarrow{\partial_p} & \mathbf{F}_{p^*}, \end{array}$$

où ∂_p et ∂_v sont les bords (symboles modérés) correspondant à p et à v et $\mathbf{F}_{p^*} \to k^*$ est l'injection naturelle. On a:

$$\partial_p(\alpha) = (-1)^{v_p(a)}.$$

Comme $\mathbf{F}_{p^*} \to k^*$ est injective, on doit avoir $\partial_p(\alpha) = 0$, donc $v_p(a) = 0$ puisque a est sans facteurs carrés. Cela revient à dire que a divise d, ce que l'on voulait. Si $d \equiv 1 \pmod 8$, 2 est décomposé dans $E/\mathbf{Q}$. Comme $(-1, -1) \neq 0$ dans $\mathrm{Br}(\mathbf{Q}_2)$, on a donc $(-1, -1) \neq 0$ dans $\mathrm{Br}(E)$. En particulier, $\{-1, -1\} \notin \operatorname{Ker} f$, donc $a \neq -1$.

Démontrons (b) (iii). Supposons que $N: K_3(E)_{\mathrm{ind}} \to K_3(\mathbf{Q})_{\mathrm{ind}}$ soit surjective. On observe que l'image de $K_3(\mathbf{Q})_{\mathrm{ind}}/2 \to H^1(\mathbf{Q}, \mathbf{Z}/2)$ (cf. (1.2)) est engendrée par la classe de 2 *via* la théorie de Kummer: en effet, $K_3(\mathbf{Q})_{\mathrm{ind}}$ est cyclique, 2 n'est pas un carré dans $\mathbf{Q}^*$ et on a $\{-1, 2\} = 0$ dans $K_2(\mathbf{Q})$. Pour que $N: K_3(E)_{\mathrm{ind}} \to K_3(\mathbf{Q})_{\mathrm{ind}}$ soit surjective, il faut donc par fonctorialité que 2 soit norme dans l'extension $E/\mathbf{Q}$ d'un élément x provenant de $K_3(E)_{\mathrm{ind}}$, c'est-à-dire vérifiant $\{-1, x\} = 0$ dans $K_2(E)$. L'équation $N(x) = 2$ entraîne la nullité de $(2, d) \in {}_2\mathrm{Br}(\mathbf{Q})$, c'est-à-dire que d est 2-normal.

Enfin, (b) (iv) résulte de (b) (ii), puisque par hypothèse on a $d \equiv 1 \pmod 8$.

Notons r le nombre de facteurs premiers impairs de d: c'est le nombre de places finies impaires ramifiées dans $E/\mathbf{Q}$.

COROLLAIRE. (o) $\operatorname{Coker} f$ *est engendré par les classes de* $\{2, \sqrt{d}\}$ *des* $\{-1, p\}$, *où* p *décrit les facteurs premiers impairs de* d *(avec des relations éventuelles).*

(a) *Supposons* $d > 0$. *Alors* f *est injective et*:

(i) *Si* $d = 8$, f *est bijective.*

(ii) *Si* d *est* 2-*normal et* $\neq 8$, $\operatorname{Coker} f$ *est de rang* r, *avec la relation* $\Sigma_{p|d}\{-1, p\} = 0$.

(iii) *Si* d *n'est pas* 2-*normal*, $\operatorname{Coker} f$ *est de rang* $r-1$, *avec les relations* $\{2, \sqrt{d}\} = \Sigma_{p|d}\{-1, p\} = 0$.

(b) *Supposons* $d < 0$. *Alors*

(i) *Si la norme* $N: K_3(E)_{\mathrm{ind}} \to K_3(\mathbf{Q})_{\mathrm{ind}}$ *est surjective et si* $d \neq -4, -8$, f *est injective et* $\operatorname{Coker} f$ *est de rang* $r-1$, *avec la relation* $\Sigma_{p|d}\{-1, p\} = 0$. *Si* $d = -4$ *ou* -8, $\operatorname{Ker} f = \langle\{-1, -1\}\rangle$ *et* f *est surjective.*

(ii) *Si* $d \equiv 1 \pmod 8$, f *est injective.*

(iii) *Si* $N: K_3(E)_{\mathrm{ind}} \to K_3(\mathbf{Q})_{\mathrm{ind}}$ *n'est pas surjective, alors*:

(iii_1) *Si* f *est injective et* d *est* 2-*normal*, $\operatorname{Coker} f$ est de rang $r-2$, *avec les relations*

$$\{2, \sqrt{d}\} = \sum_{p|d}\{-1, p\} = \sum_{p|a}\{-1, p\} = 0.$$

(iii_2) *Si* f *est injective et* d *n'est pas* 2-*normal*, $\operatorname{Coker} f$ *est de rang* $r-1$, *avec les relations*

$$\sum_{p|d}\{-1, p\} = \sum_{p|a}\{-1, p\} = 0.$$

(iii_3) *Si* f *n'est pas injective et* d *est* 2-*normal*, $\operatorname{Coker} f$ *est de rang* $r-1$, *avec les relations*

$$\{2, \sqrt{d}\} = \sum_{p|d}\{-1, p\} = 0.$$

(iii$_4$) *Si f n'est pas injective et d n'est pas 2-normal,* Coker f *est de rang r, avec la relation* $\Sigma_{p|d}\{-1, p\} = 0$.

Dans (iii$_1$) *et* (iii$_2$), *l'entier a est celui du th.* 8.1(b) (ii).

Démonstration. Le lemme du serpent, appliqué au diagramme commutatif aux lignes exactes:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_2(O_E)^G \arrow[r] & K_2(E)^G \arrow[r] & \left(\bigoplus_v k(v)^*\right)^G \\
0 \arrow[r] & K_2(\mathbf{Z}) \arrow[r] \arrow[u, "f"] & K_2(\mathbf{Q}) \arrow[r] \arrow[u, "f"] & \bigoplus_p \mathbf{F}_{p^*} \arrow[u, "\bar{f}"]
\end{tikzcd}$$

donne une suite exacte:

$$0 \to \operatorname{Ker} f \to \operatorname{Ker} f \to \operatorname{Ker} \bar{f} \to \operatorname{Coker} f \to \operatorname{Coker} f \to \operatorname{Coker} \bar{f}.$$

On remarque que $K_2(\mathbf{Z}) = \langle\{-1, -1\}\rangle$ et que $\bar{f}$ a un noyau et un conoyau abéliens élémentaires de rang r. Plus précisément, $\bar{f}$ est bijectif au-dessus des nombres premiers de $\mathbf{Q}$ non ramifiés dans E, et induit l'élévation au carré sur les corps résiduels en les diviseurs premiers de d.

Si $\{-1, -1\} \notin \operatorname{Ker} f$, alors $\operatorname{Ker} f = 0$; cela se produit en particulier dans les cas (a) et (b) (i) de la prop. 8.1, sauf lorsque $d = -4$ ou -8 (en effet, on a $\{-1, 2\} = 0$ dans $K_2(\mathbf{Q})$). De manière générale, un calcul de résidu montre que, si p est un diviseur impair de d, l'élément $\{-1, p\}$ vu dans $K_2(E)$ y est 'entier'; plus précisément, cet élément est l'image de $-1 \in \mathbf{F}_{p^*}$ par l'homomorphisme connectant $\operatorname{Ker} \bar{f} \to \operatorname{Coker} f$. On a évidemment la relation $\Sigma\{-1, p\} = \{-1, d\} = \{-1, \operatorname{sgn}(d)\}$ dans $K_2(E)$. Finalement, on a, pour un idéal premier *impair* $\wp$ de O_E:

$$\partial_\wp\{2, \sqrt{d}\} = \begin{cases} 1 \text{ si } \wp \nmid d; \\ 2 \text{ si } \wp \mid d. \end{cases}$$

On en déduit que $\partial\{2, \sqrt{d}\} \in \operatorname{Im} \bar{f}$, c'est-à-dire $\{2, \sqrt{d}\} \in \operatorname{Coker} f$, si et seulement si d est 2-normal.

Le cor. au th. 8.1 résulte du th. 8.1 et de ces remarques, en tenant compte du fait que $K_2(O_E) = 0$ lorsque $d = -4$ ou -8 ([9, appendice]).

Remarque 8.2. La ressemblance entre ces résultats et la théorie du genre n'aura pas échappé au lecteur. En particulier, l'apparition d'une relation exceptionnelle dans le corollaire, (b) (iii$_1$) et (iii$_2$) rappelle la relation exceptionnelle apparaissant dans le groupe des classes de O_E lorsque $d > 0$ et que l'unité fondamentale est de norme -1. Comme me l'a fait remarquer G. Gras, dans le cas de la théorie du genre, on peut calculer cette relation au moyen du développement de d en fraction continue. En est-il de même pour K_2, en utilisant le développement en fraction continue d'un multiple ou d'un diviseur simple de $-d$? Peut-on établir un lien entre la relation exceptionnelle apparaissant en théorie du genre et celle de ce paragraphe?

9. Descente étale

Soit X un schéma intègre régulier de dimension 1 (par exemple une courbe algébrique lisse connexe, ou $\operatorname{Spec} R$ pour un anneau de Dedekind R), de corps des fonctions F, et soit A un G_F-module topologique. Considérant A comme un faisceau sur $(\operatorname{Spec} F)_{\text{ét}}$, on a une suite spectrale 'de Leray':

$$E_2^{pq} = H^p(X_{\text{ét}}, R^q i_* A) \Rightarrow H^{p+q}(F, A),$$

où i est l'immersion $\operatorname{Spec} F \hookrightarrow X$. Suivant [50, IX.4], on a encore, pour $q > 0$:

$$E_2^{pq} = \bigoplus_{v \in X_0} H^p(k(v), H^q(F_v^{nr}, A)),$$

où v décrit les points fermés de X, $k(v)$ est le corps résiduel en v et F_v^{nr} désigne le corps des fonctions du hensélisé strict du localisé de X en v.

Le corps F_v^{nr} est hensélien pour une valuation de rang 1, de corps résiduel une clôture séparable de $k(v)$. Sous l'une des hypothèses suivantes:

(a) $k(v)$ est parfait et A est divisible ou de torsion
(b) A est de torsion première à la caractéristique de $k(v)$

on a donc $H^q(F_v^{nr}, A) = 0$ pour $q \geqslant 2$. On en déduit:

PROPOSITION 9.1. *Avec les notations ci-dessus, supposons*

(a) *soit que tous les corps $k(v)$ soient parfaits et A divisible ou de torsion;*
(b) *soit que A soit de torsion première aux caractéristiques résiduelles de X.*

Alors on a une suite exacte:

$$0 \to H^1(X_{\text{ét}}, i_* A) \to H^1(F, A) \to \bigoplus_{v \in X_0} H^0(k(v), H^1(F_v^{nr}, A)) \to \cdots$$
$$\to H^n(X_{\text{ét}}, i_* A) \to H^n(F, A) \to \bigoplus_{v \in X_0} H^{n-1}(k(v), H^1(F_v^{nr}, A)) \to \cdots \qquad \square$$

En prenant $A = K_3(F_s)_{\text{ind}}$ et en tenant compte du th. 4.1, on en déduit:

COROLLAIRE. *Supposons que tous les corps résiduels de X correspondant à ses points fermés soient parfaits. Alors on a une suite exacte:*

$$0 \to H^1(X_{\text{ét}}, i_* K_3(F_s)_{\text{ind}}) \to K_2(F)_{\text{tors}} \to \bigoplus_{v \in X_0} H^0(k(v), K_2(F_v^{nr})_{\text{tors}})$$
$$\to H^2(X_{\text{ét}}, i_* K_3(F_s)_{\text{ind}}) \to K_2(F) \otimes (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})' \to \cdots \qquad \square$$

Supposons maintenant que F soit un corps de nombres et que $X = \operatorname{Spec} O_S$, où S est un ensemble de places de F contenant les places à l'infini. On se permettra de noter $H^*(O_S, -)$ pour $H^*(X_{\text{ét}}, -)$. Si $v \notin S$, le corps F_v^{nr} n'est autre que la fermeture algébrique de $\mathbf{Q}$ dans l'extension non ramifiée maximale du complété de F en v. Pour tout corps K, notons $\mu(K)$ le groupe des racines de l'unité de K.

PROPOSITION 9.2. *Le "symbole de résidu normique" induit un isomorphisme*

$$K_2(F_v^{nr})_{\text{tors}} = K_2(F_v^{nr}) \xrightarrow{\cong} \mu(F_v^{nr}).$$

Démonstration. Soit K une extension finie de $\mathbf{Q}_p$. D'après Carroll [10] et Merkurjev [26], le symbole de résidu normique $h: K_2(K) \to \mu(K)$ induit un isomorphisme $K_2(K)_{\text{tors}} \xrightarrow{\cong} \mu(K)$. D'après Suslin [44, cor. 3.12], si K_0 désigne la fermeture algébrique de $\mathbf{Q}$ dans K, $K_2(K_0) \to K_2(K)_{\text{tors}}$ est un isomorphisme. La proposition en résulte par passage à la limite.

Pour tout anneau local A, notons $K_3(A)_{\text{déc}}$ l'image du produit $K_1(A)^{\otimes 3} \to K_3(A)$, et $K_3(A)_{\text{ind}} = K_3(A)/K_3(A)_{\text{déc}}$. Le lemme suivant résulte de [9, prop. 4.5 (b) et cor. 5.12].

LEMME 9.1. *Pour tout anneau local A de X et tout $n \geqslant 3$, l'application naturelle $K_n(A)_{\text{déc}} \to K_n(F)_{\text{déc}}$ est surjective.* □

COROLLAIRE (cf. [20]). *Avec les notations du lemme 9.1, l'application naturelle $K_n(A)_{\text{ind}} \to K_n(F)_{\text{ind}}$ est un isomorphisme.*

En effet, d'après Soulé [43, th. 1], on a $K_3(O_S) \xrightarrow{\cong} K_3(F)$; pour A comme dans le lemme 9.1 on a donc de même $K_3(A) \xrightarrow{\cong} K_3(F)$. Le corollaire résulte de ceci et du lemme 9.1. □

Le corollaire au lemme 9.1 montre que $A \mapsto K_3(A)_{\text{ind}}$ définit un faisceau constant pour la topologie de Zariski de X, de valeur $K_3(F)_{\text{ind}}$, donc un faisceau $\mathbf{K}_{3,\text{ind}}$ pour la topologie étale de X tel que $\mathbf{K}_{3,\text{ind}} = i_* K_3(\bar{\mathbf{Q}})_{\text{ind}}$. Des prop. 9.1 et 9.2, on déduit alors:

THÉORÈME 9.1. *Soient F un corps de nombres et S un ensemble de places de F, contenant les places à l'infini. On a un isomorphisme naturel:*

$$H^1(O_S, \mathbf{K}_{3,\text{ind}}) \xrightarrow{\cong} \tilde{K}_2(O_S) := \operatorname{Ker}\left(K_2(O_S) \xrightarrow{(h_v)} \bigoplus_{v \notin S} \mu_v(F_v)\right),$$

où F_v est le complété de F en v, $\mu_v(F_v)$ désigne la partie de v-torsion de $\mu(F_v)$ et h_v désigne la partie 'sauvage' du symbole de rèsidu normique en v. De plus, on a:

$$H^2(O_S, \mathbf{K}_{3,\text{ind}}) = \begin{cases} \mu(F) & \text{si } S = \Sigma_\infty \text{ et } F \text{ est totalement imaginaire} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

une suite exacte

$$0 \to \bigoplus_{v \notin S} \mu_v(F_v) \to H^3(O_S, \mathbf{K}_{3,\text{ind}}) \to (\mathbf{Z}/2)^{r_1(F)} \to 0$$

et, pour $i \geqslant 2$, des isomorphismes

$$H^{2i}(O_S, \mathbf{K}_{3,\text{ind}}) = 0,$$
$$H^{2i+1}(O_S, \mathbf{K}_{3,\text{ind}}) \cong (\mathbf{Z}/2)^{r_1(F)}.$$

Démonstration. L'assertion pour H^1 est claire; celle pour H^2 résulte de la suite exacte de Moore ([28, th. 6.1]). Si $n \geqslant 4$, on a $H^{n-2}(k(v), K_2(F_v^{nr})) = 0$, d'où les isomorphismes pour H^{2i} et H^{2i+1}. Finalement, traitons le cas de H^3. On a une suite exacte:

$$0 \to \bigoplus_{v \in S} H^1(k(v), K_2(F_v^{nr})) \to H^3(O_S, \mathbf{K}_{3,\mathrm{ind}}) \to H^3(F, K_3(\bar{\mathbf{Q}})_{\mathrm{ind}}) \to 0.$$

Le terme $H^3(F, K_3(\bar{\mathbf{Q}})_{\mathrm{ind}})$ s'identifie à $(\mathbf{Z}/2)^{r_1(F)}$. Par ailleurs, vu la prop. 9.2,

$$H^1(k(v), K_2(F_v^{nr})) \xrightarrow{\cong} H^1(k(v), \mu(F_v^{nr})).$$

Ecrivons $\mu(F_v^{nr}) = \mu_v \oplus \mu'$, où μ_v désigne la v-torsion et μ' la torsion première à v. Le module galoisien μ' s'identifie à $\mu(\bar{k})$, où $\bar{k}$ est une clôture algébrique de $k(v)$, donc $H^1(k(v), \mu') = 0$. Finalement, μ_v étant fini, $H^1(k(v), \mu_v)$ s'identifie par dualité à $H^0(k(v), \mu_v) = \mu_v(F_v)$. □

COROLLAIRE. *Soit n un entier inversible dans O_S. Alors*:

(a) *On a un isomorphisme $H^1(O_S, \mathbf{K}_{3,\mathrm{ind}})\{n\} \cong K_2(O_S)\{n\}$.*
(b) *Si S contient les places finies de F ramifiées sur $\mathbf{Q}$ (il suffit que S contienne les places v telles que $\mu_v(F_v) \neq \{1\}$), on a $H^1(O_S, \mathbf{K}_{3,\mathrm{ind}}) \cong K_2(O_S)$.*
(c) *On a une suite exacte*

$$\begin{aligned} 0 &\to H^0(O_S, \mu_n^{\otimes 2}) \to K_3(O_S)_{\mathrm{ind}} \xrightarrow{n} K_3(O_S)_{\mathrm{ind}} \to H^1(O_S, \mu_n^{\otimes 2}) \\ &\to K_2(O_S) \xrightarrow{n} K_2(O_S) \to H^2(O_S, \mu_n^{\otimes 2}) \to 0. \end{aligned}$$

(Si A est un groupe abélien, on note $A\{n\} = \{a \in A \mid \exists k \geqslant 1 : n^k a = 0\}$ la partie n-primaire de A.)

Démonstration. (a) résulte immédiatement du th. 9.1, en remarquant que par hypothèse $\mathrm{Coker}(\tilde{K}_2(O_S) \to K_2(O_S))$ est de torsion première à n. (b) est évident. Pour démontrer (c), on observe que la suite de $(\mathrm{Spec}\, O_S)_{\text{ét}}$-faisceaux

$$0 \to \mu_n^{\otimes 2} \to \mathbf{K}_{3,\mathrm{ind}} \xrightarrow{n} \mathbf{K}_{3,\mathrm{ind}} \to 0$$

est exacte (cf. [19, prop. 1.1]); (c) en résulte en prenant sa cohomologie et en appliquant (a) et le th. 9.1. □

Remarque 9.1. Dans le corollaire ci-dessus, la partie droite de la suite exacte de (c) est due à Soulé lorsque n est impair ([42, lemme 10]). En fait, la démonstration de [42] est incomplète, main peut être aisément complétée, et s'applique de plus sans restriction sur n: ceci est fait dans l'appendice 2 (voir aussi Nguyen Quang Do [32] lorsque n est une puissance de 2 et F totalement réel).

Remarque 9.2. On peut retrouver ces résultats en utilisant le complexe $\Gamma(2)$ de Lichtenbaum – cette fois-ci sur $X = \mathrm{Spec}\, O_S$. En effet, en suivant (et raffinant un peu) les calculs de [24, §2 ou th. 4.4], il n'est pas difficile de démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME 9.2. *Soit* $X = \operatorname{Spec} O_S$. *On a* $\mathbb{H}^i(X_{\text{ét}}, \Gamma(2)) = 0$ *pour* $i < 1$, *et des isomorphismes*:

(a) $\mathbb{H}^1(X_{\text{ét}}, \Gamma(2)) \cong K_3(F)_{\text{ind}}$;
(b) $\mathbb{H}^2(X_{\text{ét}}, \Gamma(2)) \cong K_2(O_S)$;
(c) $\mathbb{H}^3(X_{\text{ét}}, \Gamma(2)) = 0$;
(d) $\mathbb{H}^i(X_{\text{ét}}, \Gamma(2)) \cong (\mathbf{Z}/2)^{r_1(F)}$ ou 0 *pour* $i \geqslant 4$, *selon que i est pair ou impair.*

Le th. 9.1 résulte alors du théorème 9.2, de la longue suite exacte

$$\cdots \to H^{i-1}(X_{\text{ét}}, \mathbf{K}_{3,\text{ind}}) \to \mathbb{H}^i(X_{\text{ét}}, \Gamma(2)) \to H^{i-2}(X_{\text{ét}}, \mathbf{K}_2) \to \cdots$$

associée au triangle $\mathbf{K}_{3,\text{ind}}[-1] \to \Gamma(2) \to \mathbf{K}_2[-2] \to \mathbf{K}_{3,\text{ind}}$, et du calcul du faisceau $\mathbf{K}_2$ effectué dans la prop. 9.2. J'omets la démonstration du th. 9.2, car elle est assez longue et ce théorème n'a pas d'application dans cet article.

Appendice 1. Cohomologie totalement positive

Le but de cet appendice est de démontrer la proposition 5.2.

LEMME A1.1. *On a* $H^3_+(F, \mathbf{Z}/2) = 0$.

Démonstration. Si F est totalement imaginaire, cela résulte du fait que $\operatorname{cd}(F) = 2$ [41, p. II-16, prop. 13]. En général, on a une suite exacte:

$${}_2\mathrm{Br}(F) \to \bigoplus_v {}_2\mathrm{Br}(F_v) \to H^3_+(F, \mathbf{Z}/2) \to H^3(F, \mathbf{Z}/2) \to \bigoplus_v H^3(F_v, \mathbf{Z}/2),$$

où v décrit les places réelles de F et Br est le groupe de Brauer. Par la théorie du corps de classes, l'homomorphisme ${}_2\mathrm{Br}(F) \to \oplus_v {}_2\mathrm{Br}(F_v)$ est surjectif; il suffit donc de voir que $H^3(F, \mathbf{Z}/2) \to \oplus_v H^3(F_v, \mathbf{Z}/2)$ est injectif. Soit $E = F(\sqrt{-1})$: on a la suite exacte d'une extension quadratique:

$$\cdots \to H^i(E, \mathbf{Z}/2) \xrightarrow{\mathrm{Cor}} H^i(F, \mathbf{Z}/2) \xrightarrow{\cdot\varepsilon} H^{i+1}(F, \mathbf{Z}/2) \xrightarrow{\mathrm{Res}} H^{i+1}(E, \mathbf{Z}/2) \to \cdots$$

où ε est la classe de -1 dans $H^1(F, \mathbf{Z}/2)$ par la théorie de Kummer. Pour $i = 3$, compte tenu de $H^3(E, \mathbf{Z}/2) = 0$, elle montre que le cup-produit par ε donne une surjection $H^2(F, \mathbf{Z}/2) \xrightarrow{\cdot\varepsilon} H^3(F, \mathbf{Z}/2)$. De même, on obtient un *isomorphisme* $H^2(F_v, \mathbf{Z}/2) \xrightarrow{\cdot\varepsilon} H^3(F_v, \mathbf{Z}/2)$ pour tout v. On a donc un diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd}
{}_2\mathrm{Br}(F) \arrow[r, two heads] \arrow[d] & H^3(F, \mathbf{Z}/2) \arrow[d] \\
\bigoplus_v {}_2\mathrm{Br}(F_v) \arrow[r, hook] & \bigoplus_v H^3(F_v, \mathbf{Z}/2)
\end{tikzcd}$$

où les flèches horizontales sont données par le cup-produit par ε. Soit α un élément du noyau de ${}_2\mathrm{Br}(F) \to \oplus_v {}_2\mathrm{Br}(F_v)$: on peut représenter α par une algèbre de quaternions (a, b) [38, th. 32.19]. Le théorème de Hasse–Minkowski entraîne que -1

est norme réduite dans (a, b); on en déduit que le cup-produit $\varepsilon \cdot (a, b)$ est nul. On en conclut que la flèche verticale de droite du diagramme ci-dessus est injective. □

On sait que pour tout nombre premier impair p, on a $\mathrm{cd}_p(F) = 2$ ([41, *loc. cit.*]); la proposition 5.2 est donc vraie pour tout G_F-module de torsion impaire. En raisonnant comme dans [41, p. II-7, dém. de la prop. 4], on déduit de plus du lemme A1.1:

LEMME A1.2. *La proposition 5.2 est vraie pour tout G_F-module de torsion.* □

LEMME A1.3. *On a* $H^2_+(F, \mathbf{Q}_2/\mathbf{Z}_2) = 0$.

Démonstration. Si $\sqrt{-1} \in F$, cela résulte de [48, prop.]. En général, le lemme A1.2 implique que $H^2_+(F, \mathbf{Q}_2/\mathbf{Z}_2)$ est divisible. Mais l'argument de transfert habituel montre que ce groupe est tué par 2; il est donc nul. □

La proposition 5.2 résulte du lemme A1.2 et du lemme A1.3 de manière analogue à [41, p. I-21, cor. 4].

Appendice 2. K_2 d'un anneau d'entiers de corps de nombres

Le but de cet appendice est de compléter la démonstration de [42, lemme 10], dans l'esprit de *op. cit.* Cette démonstration complétée résulte d'un échange de lettres entre Soulé et l'auteur. L'énoncé en question est le suivant:

PROPOSITION A2.1. *Soit F un corps de nombres, et soit S un ensemble de places de F, contenant les places à l'infini. Notons O_S l'anneau des S-entiers de F. Alors, pour tout entier n inversible dans O_S, la classe de Chern*

$$c_{2,2}\colon K_2(O_S)/n \to H^2(O_S, \mu_n^{\otimes 2})$$

est un isomorphisme.

Démonstration. On peut supposer S fini; il suffit de démontrer la prop. lorsque n est une puissance d'un nombre premier p. L'argument de *loc. cit.*, donné pour p impair, est correct lorsque $n = p$; de plus il est valable même pour $p = 2$, car le produit en K-théorie qui est utilisé est l'accouplement $K_*(O_S) \otimes K_*(O_S, \mathbf{Z}/n) \to K_*(O_S, \mathbf{Z}/n)$, qui est défini sans restriction sur n.

Pour passer du cas $n = p$ au cas où n est une puissance de p, l'argument de dévissage utilisé dans *loc. cit.* donne la surjectivité de $c_{2,2}$ en général, mais ne donne l'injectivité que lorsque $\mathbf{Pic}(O_S)$ n'a pas de p-torsion. On va se ramener à ce cas par un argument "p-adique":

Soit T un ensemble fini de places de F, contenant S et tel que $\mathbf{Pic}(O_T) = 0$. D'après la remarque ci-dessus, on a pour tout $r \geqslant 1$ une surjection:

$$K_2(O_S)/p^r \twoheadrightarrow H^2(O_S, \mu_{p^r}^{\otimes 2})$$

et un isomorphisme:

$$K_2(O_T)/p^r \xrightarrow{\cong} H^2(O_T, \mu_{p^r}^{\otimes 2}).$$

Ces flèches sont compatibles et donnent à la limite une surjection:

$$\varprojlim K_2(O_S)/p^r \twoheadrightarrow \varprojlim H^2(O_S, \mu_{p^r}^{\otimes 2})$$

et un isomorphisme:

$$\varprojlim K_2(O_T)/p^r \xrightarrow{\cong} \varprojlim H^2(O_T, \mu_{p^r}^{\otimes 2}).$$

(Dans le premier cas, on a utilisé la finitude des $K_2(O_S)/p^r$.)

Comme $K_2(O_S)$ et $K_2(O_T)$ sont des groupes finis, $\varprojlim K_2(O_S)/p^r$ (resp. $\varprojlim K_2(O_T)/p^r$) n'est autre que $K_2(O_S)\{p\}$ (resp. $K_2(O_T)\{p\}$). La suite exacte de localisation montre que $K_2(O_S)\{p\} \to K_2(O_T)\{p\}$ est injective. On en conclut que $\varprojlim K_2(O_S)/p^r \to \varprojlim H^2(O_S, \mu_{p^r}^{\otimes 2})$ est *bijective*. Finalement, fixons $r \geqslant 1$: on a des suites exactes, pour $s \geqslant 0$:

$$K_2(O_S)/p^s \to K_2(O_S)/p^{r+s} \to K_2(O_S)/p^r \to 0,$$
$$H^2(O_S, \mu_{p^s}^{\otimes 2}) \to H^2(O_S, \mu_{p^{r+s}}^{\otimes 2}) \to H^2(O_S, \mu_{p^r}^{\otimes 2}) \to 0$$

(la première est triviale, la deuxième résulte de la surjectivité de $c_{2,2}$). En utilisant de nouveau la finitude de $K_2(O_S)/p^s$ et de $H^2(O_S, \mu_{p^s}^{\otimes 2})$, on en déduit à la limite des suites exactes:

$$\varprojlim K_2(O_S)/p^s \xrightarrow{p^r} \varprojlim K_2(O_S)/p^s \to K_2(O_S)/p^r \to 0,$$

$$\varprojlim H^2(O_S, \mu_{p^s}^{\otimes 2}) \xrightarrow{p^r} \varprojlim H^2(O_S, \mu_{p^s}^{\otimes 2}) \to H^2(O_S, \mu_{p^r}^{\otimes 2}) \to 0.$$

La proposition en résulte en appliquant le lemme des cinq.

Remerciements

Je remercie Thong Nguyen Quang Do pour de nombreuses conversations pendant l'élaboration de cet article, en particulier sur le contenu du § 6. Je remercie également Jean-Louis Colliot-Thélène, Georges Gras, Jürgen Hurrelbrink, Manfred Kolster, Emmanuel Peyre et le referee pour divers commentaires qui m'ont permis d'améliorer ou de clarifier la rédaction.

Références

1. Aisbett, J.: On $K_3(\mathbf{Z}/p^n)$ and $K_4(\mathbf{Z}/p^n)$, *Mem. Amer. Math. Soc.* **329** (1985), 1–90.
2. Borel, A.: Stable real cohomology of arithmetic groups, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **7** (1974), 235–272.
3. Browder, W.: Algebraic K-theory with coefficients $\mathbf{Z}/p$, *Lecture Notes in Math.* 657, Springer, New York, 1978, pp. 40–84.
4. Bloch, S.: On the Chow groups of certain rational surfaces, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **14** (1981), 41–59.
5. Brinkhuis, J.: K_2 and Galois extensions of fields, *Lecture Notes in Math.* 1046, Springer, Heidelberg, 1984, pp. 13–28.
6. Brown, K. S.: *Cohomology of groups*, Grad. Texts in Math. 87, Springer, New York, 1982.
7. Bloch, S., Kato, K.: p-adic étale cohomology, *Publ. Math. IHES* **63** (1986), 107–152.
8. Bak, A. and Rehmann, U.: K_2-analogs of Hasse's norm theorems, *Comm. Math. Helv.* **59** (1984), 1–11.

9. Bass, H. and Tate, J.: The Milnor ring of a global field, *Lecture Notes in Math.* 342, Springer, New York, 1973, pp. 349–446.
10. Carroll, J. E.: On the torsion in K_2 of local fields, *Lecture Notes in Math.* 342, Springer, New York, 1973, pp. 464–473.
11. Coates, J.: On K_2 and some classical conjectures in algebraic number theory, *Ann. Math.* **95** (1972), 99–116.
12. Colliot-Thélène, J.-L.: Hilbert's theorem 90 for K_2, with application to the Chow group of rational surfaces, *Invent. Math.* **71** (1983), 1–20.
13. Cassels, J. W. S. and Fröhlich, A.: (éds), *Algebraic Number Theory*, Academic Press, Londres, 1967.
14. Colliot-Thélène, J.-L. and Sansuc, J.-J.: On the Chow groups of certain rational surfaces: a sequel to a paper of S. Bloch, *Duke Math. J.* **48** (1981), 421–447.
15. Greenberg, R.: A note on K_2 and the theory of $\mathbf{Z}_p$-extensions, *Amer. J. Math.* **100** (1978), 1235–1345.
16. Gross, B.: On the values of Artin L-functions, 1979 (non publié).
17. Haran, D.: Cohomology theory of Artin-Schreier structures, *J. Pure Appl. Algebra* **69** (1990), 141–160.
18. Hurrelbrink, J.: On the norm of the fundamental unit, préprint, 1990.
19 Kahn, B.: Some conjectures on the algebraic K-theory of fields, I: K-theory with coefficients and étale K-theory, in J. F. Jardine and V. P. Snaith (eds), *Algebraic K-Theory: Connections with Geometry and Topology*, NATO ASI Series, Ser. C, 279, Kluwer Acad. Pubs., Dordrecht, 1989, pp. 117–176.
20. Kahn, B.: K_3 d'un schéma régulier, *C. R. Acad. Sci. Paris* **315** (1992), 433–436.
21. Kolster, M.: On torsion in K_2 of fields, *J. Pure Appl. Algebra* **71** (1991), 257–273.
22. Levine, M.: The indecomposable K_3 of a field, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **22** (1989), 255–344.
23. Lichtenbaum, S.: The construction of weight-two arithmetic cohomology, *Invent. Math.* **88** (1987), 183–215.
24. Lichtenbaum, S.: New results on weight-two motivic cohomology, *Grothendieck Festschrift*, vol. 3, Progress in Math. 88, Birkhäuser, Boston, 1990, pp. 35–55.
25. Loday, J.-L.: K-théorie algébrique et représentations de groupes, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **9** (1976), 309–377.
26. Merkurjev, A. S.: On the torsion in K_2 of local fields, *Ann. Math.* **118** (1983), 375–381.
27. Milne, J. S.: *Arithmetic Duality Theorems*, Perspectives in Math. 1, Academic Press, New York, 1986.
28. Milnor, J. W.: *Introduction to Algebraic K-theory*, Ann. Math. Studies 72, Princeton University Press, Princeton, 1971.
29. Milnor, J. W.: Algebraic K-theory and quadratic forms, *Invent. Math.* **9** (1969/70), 318–344.
30. Merkurjev, A. S. and Suslin, A. A.: K-cohomologie des variétés de Severi-Brauer et l'homomorphisme de norme résiduelle (en russe), *Izv. Akad. Nauk SSSR* **46** (1982), 1011–1046 (trad. anglaise: *Math. USSR Izv.* **21** (1983), 307–340).
31. Merkurjev, A. S. and Suslin, A. A.: Le groupe K_3 d'un corps (en russe), *Izv. Akad. Nauk SSSR* **54** (1990), 339–356 (trad. anglaise: *Math. USSR Izv.* **36** (1990), 541–565).
32. Nguyen Quang Do, T.: Une étude cohomologique de la partie 2-primaire de K_2O, *K-Theory* **3** (1990), 523–542.
33. Panin, I. A.: Sur un théorème de Hurewicz et la K-théorie des anneaux de valuation discrète complets (en russe), *Izv. Akad. Nauk SSSR* **50** (1986), 763–775 (trad. anglaise: *Math. USSR Izv.* **29** (1987), 119–131).
34. Perlis, R.: On the density of Fields with $N(\varepsilon) = -1$, préprint, 1990.
35. Quillen, D.: On the cohomology and K-theory of the general linear group over a finite field, *Ann. of Math.* **96** (1972), 552–586.
36. Quillen, D.: Finite generation of the groups K_i of rings of algebraic integers, *Lecture Notes in Math.* 341, Springer, New York, 1972, pp. 179–198.
37. Ramakrishnan, D.: Regulators, algebraic cycles, values of L-functions, *Contemp. Math.* 83, AMS, Providence, 1989, pp. 183–310.
38. Reiner, I.: *Maximal Orders*, Academic Press, London, 1975.
39. Schneider, P.: Über gewisse Galoiscohomologiegruppen, *Math. Z.* **168** (1979), 181–205.
40. Serre, J.-P.: *Corps locaux*, Hermann, Paris, 1968.
41. Serre, J.-P.: *Cohomologie galoisienne*, Lect. Notes in Math. 5, Springer, Berlin, 1965.
42. Soulé, C.: K-théorie des anneaux d'entiers de corps de nombres et cohomologie étale, *Invent. Math.* **55** (1979), 251–295.

43. Soulé, C.: Groupes de Chow et K-théorie des variétés sur un corps fini, *Math. Ann.* **268** (1984), 317–345.
44. Suslin, A. A.: Torsion in K_2 of fields, *K-theory* **1** (1987), 5–29.
45. Suslin, A. A.: On the K-theory of local fields, *J. Pure Appl. Algebra* **34** (1984), 301–318.
46. Suslin, A. A.: K-theory and K-cohomology of certain group varieties, Adv. in Soviet Math. **4**, AMS, Providence, 1991, 53–74.
47. Tate, J.: Relations between K_2 and Galois cohomology, *Invent. Math.* **36** (1976), 257–274.
48. Tate, J.: Lettre à Iwasawa, *Lecture Notes in Math.* 342, Springer, New York 1972, pp. 524–529.
49. Wagoner, J.: Continuous cohomology and p-adic K-theory, *Lectures Notes in Math.* 551, Springer, New York, 1976, pp. 241–248.
50. Artin, N., Grothendieck, A. and Verdier, J.-L.: Théorie des topos et cohomologie étale des schémas, *Lecture Notes in Math.*, Springer, Berlin, 269 (1972) (exp. I–IV); 270 (1972) (exp. V–VIII); 305 (1973) (exp. IX–XIX).
51. Washington, L. C.: *Introduction to Cyclotomic Fields*, Grad. Texts in Math. 83, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1982.