Un accouplement de hauteurs raffiné

Bruno Kahn

Séminaire de géométrie arithmétique et motivique (Paris Nord)

LAGA, 4 décembre 2020

https://arxiv.org/abs/2009.00533

1. Historique et motivation

K corps de nombres :

— *Weil* : démontre le théorème de Mordell-Weil à l'aide d'une hauteur sur une K-v.a. A.

— *Néron et Tate* : prouvent que cette hauteur peut être remplacée par une forme quadratique définie positive.

— *Néron* : exprime la hauteur de Néron-Tate comme somme de termes locaux.

— Il en déduit que ça donne une somme d'accouplements locaux entre diviseurs num. triviaux et 0-cycles sur une K-variété projective lisse quelconque.

Accouplement de hauteurs

1983/84 : Bloch et Beilinson définissent conjecturalement (et indépendamment) des accouplements de hauteurs

$$CH^i_{\mathrm{hom}}(X) \times CH^{d+1-i}_{\mathrm{hom}}(X) \to \mathbb{R}$$

($d = \dim X$, $_{\mathrm{hom}}$ = cycles homologiquement équivalents à 0) comme sommes de termes locaux. But : raffiner les conj. de Tate sur les ordres des zéros et pôles de $\zeta(X,s)$ en décrivant ses valeurs spéciales à la BSD.

Dans l'article de Beilinson : construction globale sur $K = k(C)$, $k = \bar{k}$, C courbe projective lisse, à valeurs dans $\mathbb{Q}_l$ ($l \neq \mathrm{char}\, k$), via la coh. l-adique (méthode de cohomologie d'intersection).

2. Accouplement de hauteurs raffiné

Szamuely, exposé à Oberwolfach (2019) : explique un travail commun avec Rössler ; comme Beilinson, mais

— C est remplacé par B, variété lisse de dimension quelconque (question de Beilinson) ;

— $\mathbb{Q}_l$ est remplacé par $H^2(B, \mathbb{Q}_l(1))$.

B courbe projective lisse : en composant avec le degré, on retrouve l'accouplement de Beilinson.

Méthodes similaires à celles de Beilinson : `https://arxiv.org/abs/2009.01191`.

Moi : pourquoi pas à valeurs dans $\mathrm{Pic}(B)$?

Réponse : oui, mais en changeant (?) de sous-groupe de $CH^i(X)$.

3. Accouplement de hauteurs à valeurs dans $\mathrm{Pic}(B)$

k corps quelconque, B k-variété lisse, $K = k(B)$, X K-variété projective lisse, $d = \dim X$.

Pour tout $i \geq 0$:

— sous-groupe $CH^i(X)^{(0)} \subset CH^i(X)$;

— accouplement

$$CH^i(X)^{(0)} \times CH^{d+1-i}(X)^{(0)} \to CH^1(B) \tag{1}$$

dans $\mathbf{Ab} \otimes \mathbb{Q}$.

La catégorie $\mathbf{Ab} \otimes \mathbb{Q}$:

Objets: groupes abéliens

Morphismes: $(\mathbf{Ab} \otimes \mathbb{Q})(A, B) = \mathbf{Ab}(A, B) \otimes \mathbb{Q}$.

Autre description : localisation de $\mathbf{Ab}$ par la sous-catégorie de Serre des groupes d'exposant fini ($\Rightarrow \mathbf{Ab} \otimes \mathbb{Q}$ est abélienne et $\mathbf{Ab} \to \mathbf{Ab} \otimes \mathbb{Q}$ est exact).

— A groupe abélien d'exposant fini : $A \mapsto 0$ dans $\mathbf{Ab} \otimes \mathbb{Q}$.
— $\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l \not\mapsto 0$; en fait, $(\mathbf{Ab} \otimes \mathbb{Q})(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l) = \mathbb{Z}_l \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q}_l$.

B courbe projective lisse : en composant avec $\deg : CH^1(B) \to \mathbb{Z}$, on obtient un accouplement (dans $\mathbf{Ab}$) à valeurs dans $\frac{1}{N}\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ pour $N > 0$ convenable.

Comparaison avec Rössler–Szamuely :

$$CH^i(X)^{(0)} \times CH^{d+1-i}(X)^{(0)} \to CH^1(B)$$
$$CH^i_{\mathrm{hom}}(X) \times CH^{d+1-i}_{\mathrm{hom}}(X) \to H^2(B_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_l(1))$$

Proposition 1. *$CH^i(X)^{(0)} \subset CH^i_{\mathrm{num}}(X)$ (cycles numériquement équivalents à 0) ; égalité pour $i = 1, d$.*

Conjecture 1. *$CH^i(X)^{(0)} = CH^i_{\mathrm{num}}(X)$ pour tout i.*

Conjecture plus faible : $CH^i_{\mathrm{hom}}(X) \subset CH^i(X)^{(0)}$ pour tout i. Vrai sous la conj. de Tate ou de Hodge, ou quand X “a partout bonne réduction” (rel. B).

Rössler-Szamuely : les deux accouplements sont compatibles dans ce cas.

4. Stratégie

(1) k parfait : X “semi-stable” rel. B. (Accouplement défini dans **Ab**, sur des sous-groupes un peu plus petits.)

(2) k parfait : X général.

(3) k quelconque.

Ici : k parfait. (Cas général : passer à la clôture radicielle.)

Techniques principales :

— morphismes de Gysin raffinés de Fulton

— théorèmes de de Jong sur les altérations

Supposons qu'il existe un modèle projectif $f : \mathcal{X} \to B$ de X avec $\mathcal{X}$ lisse sur k.
Idée simple :

$$CH^i(\mathcal{X}) \times CH^{d+1-i}(\mathcal{X}) \xrightarrow{\cup} CH^{d+1}(\mathcal{X}) \xrightarrow{f_*} CH^1(B).$$

Si $Z \subset B$ fermé de codimension ≥ 2, $CH^1(B) \xrightarrow{\sim} CH^1(B - Z)$, donc l'accouplement se factorise par

$$CH^i(\mathcal{X}) \twoheadrightarrow CH^i(\mathcal{X} - f^{-1}(Z)), CH^{d+1-i}(\mathcal{X}) \twoheadrightarrow CH^{d+1-i}(\mathcal{X} - f^{-1}(Z)).$$

Il faut ensuite essayer d'enlever les fermés de codimension 1, et là ce n'est plus automatique (il faut passer à des sous-groupes).

5. Réduction "semi-stable"

Définition 1. Soit $b \in B^{(1)}$ un point de codimension 1. On dit que f est *semi-stable en* b si la fibre $\mathcal{X}_b = f^{-1}(b)$ est un diviseur à croisements normaux stricts dans $f^{-1}(\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{B,b})$. On dit que f est *semi-stable* s'il est semi-stable en b pour tout $b \in B^{(1)}$.

Remarques 1. a) Semi-stabilité automatique, sauf pour un nombre fini de b (f est génériquement lisse).
b) Hypothèse plus faible suffisante : pour $b \in B^{(1)}$, toutes les composantes irréductibles de $\mathcal{X}_b$ sont lisses sur b et de codimension 1 dans $f^{-1}(\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{B,b})$.

$$j : X \hookrightarrow \mathcal{X} \text{ l'inclusion de la fibre générique.}$$

Définition 2. Supposons f semi-stable. Soit $b \in B^{(1)}$ et $Z = \overline{\{b\}}$. On pose

$$\begin{aligned} CH^i(\mathcal{X})^0_b = \{\alpha \in CH^i(\mathcal{X}) \mid j^*\alpha \in CH^i_{\mathrm{num}}(X) \text{ and } \kappa^*_\lambda \alpha \in CH^i_{\mathrm{num}}(D^b_\lambda) \\ \text{pour toutes les composantes irréducibles } D^b_\lambda \text{ de } \mathcal{X}_b = f^{-1}(b)\} \end{aligned}$$

où $\kappa_\lambda : D^b_\lambda \hookrightarrow \mathcal{X}$ est l'inclusion,

$$CH^i(\mathcal{X})^0 = \bigcap_{b \in B^{(1)}} CH^i(\mathcal{X})^0_b$$

et

$$CH^i(X)^0 = \mathrm{Im}(CH^i(\mathcal{X})^0 \to CH^i(X)).$$

Proposition 2. $CH^i(X)^0$ *ne dépend pas du choix de* $\mathcal{X}$ *; préservé par l'action des correspondances (pour deux* K*-variétés projectives lisses* X_1, X_2 *admettant chacune un modèle semi-stable).*

Le point-clé :

Proposition 3. *Supposons f semi-stable. Soit $\alpha \in CH^i(\mathcal{X})^0$. Si $\beta \in CH^{d+1-i}(\mathcal{X})$ et si $j^*\beta = 0$, alors $f_*(\alpha \cdot \beta) = 0$.*

D'où

$$CH^i(\mathcal{X})^0 \times CH^{d+1-i}(X) \xrightarrow{\langle,\rangle} CH^1(B)$$

puis

$$CH^i(X)^0 \times CH^{d+1-i}(X)^0 \xrightarrow{\langle,\rangle} CH^1(B). \tag{2}$$

C'est l'accouplement des hauteurs raffiné (dans le cas semi-stable).

Proposition 4. (2) *ne dépend pas du choix de f. Si $\gamma : X_1 \to X_2$ est une correspondance algébrique (où X_1 et X_2 ont chacune un modèle semi-stable), on a*

$$\langle \gamma^*\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, \gamma_*\beta \rangle \tag{3}$$

pour $(\alpha, \beta) \in CH^i(X_2)^0 \times CH_{i-1}(X_1)^0$.

6. Cas général

Définition de $CH^i(X)^{(0)}$. En deux temps :

6.1. X a un modèle semi-stable.

$$CH^i(X)^{(0)} = \{\alpha \in CH^i(X) \mid \exists\, m > 0 : m\alpha \in CH^i(X)^0.\}$$

Proposition 5. *$CH^i(X)^{(0)}/CH^i(X)^0$ est d'exposant fini (fini si $k \subset \mathbb{C}$).*

D'où

$$(4) \qquad <,>: CH^i(X)^{(0)} \times CH^{d+1-i}(X)^{(0)} \to CH^1(B)$$

(accouplement dans $\mathbf{Ab} \otimes \mathbb{Q}$).

6.2. Cas général. On choisit $f : \mathcal{X} \to B$ modèle projectif localement intègre de X, donc plat hors d'un fermé $F \subset B$ de codimension ≥ 2. Par une variante d'un théorème de de Jong, quitte à agrandir F on peut obtenir des diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}_1 & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{X} - \mathcal{X}_F \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ B_1 & \xrightarrow{\pi_B} & B - F \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{\pi_\eta} & X \\ {\scriptstyle g'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ \eta_1 & \longrightarrow & \eta = \operatorname{Spec} K \end{array} \tag{5}$$

avec π_B fini et plat, π une altération, $B_1, \mathcal{X}_1$ réguliers et g semi-stable. Le carré de droite = pull-back du carré de gauche par $\eta \hookrightarrow B - F$. Appelons ces altérations *admissibles*.

Proposition 6. *Le sous-groupe*

$$CH^i(X)^{(0)} = \{\alpha \in CH^i(X) \mid \pi_\eta^* \alpha \in CH^i(X_1)^{(0)}\}$$

ne dépend pas du choix de l'altération admissible π. Le groupe $CH^i(X)/CH^i(X)^{(0)}$ est libre de type fini, et $CH^i_{\mathrm{alg}}(X) \subset CH^i(X)^{(0)} \subset CH^i_{\mathrm{num}}(X)$.

L'inclusion $CH^i_{\mathrm{alg}}(X) \subset CH^i(X)^{(0)}$ utilise une proposition de Qing Liu.

$(X,i) \mapsto CH^i(X)^{(0)}$ définit une *relation d'équivalence adéquate* (dépendant a priori de B).

6.3. Construction de l'accouplement de hauteurs raffiné (cas général). π comme dans (5), $m = \deg(\pi_B)$. On considère l'accouplement

$$<,>: CH^i(X)^{(0)} \otimes CH^{d+1-i}(X)^{(0)} \to CH^1(B) \tag{6}$$

dans $\mathbf{Ab} \otimes \mathbb{Q}$ donné par la composition

$$\begin{tikzcd} CH^i(X_1)^{(0)} \otimes CH^{d+1-i}(X_1)^{(0)} \arrow[r, "<,>_1"] & CH^1(B_1) \arrow[d, "m^{-1}(\pi_B)_*"] \\ CH^i(X)^{(0)} \otimes CH^{d+1-i}(X)^{(0)} \arrow[u, "\pi_\eta^* \otimes \pi_\eta^*"] & CH^1(B) \end{tikzcd}$$

où $<,>_1$ est (4). (Note : la multiplication par m est inversible dans $\mathbf{Ab} \otimes \mathbb{Q}$.)

Théorème 1. (6) *ne dépend pas du choix de* π *; il a la fonctorialité de la Proposition 4.*

7. Le cas de codimension 1

X géométriquement irréductible ; $\delta = \operatorname{degtr}(K/k) = \dim B$.

Notation 1.

— Alb_X variété d'Albanese de X ; $a_X : CH^d_{\mathrm{num}}(X) = CH^d(X)_0 \to \operatorname{Alb}_X(K)$ le morphisme d'Albanese.

— $T(X) = \operatorname{Ker} a_X$.

— B projective : $N^1(B)$ groupe des cycles de codimension 1 modulo l'équivalence numérique)

— A K-variété abélienne : $\operatorname{Tr}_{K/k} A$ sa K/k-trace et

$$\operatorname{LN}(A, K/k) = A(K)/(\operatorname{Tr}_{K/k} A)(k)$$

son *groupe de Lang-Néron* : de type fini par le théorème de Lang-Néron.

Théorème 2. *a) L'accouplement* $<,>$ *s'annule sur* $CH^1_{\mathrm{num}}(X) \times T(X)$.
b) Ceci induit un accouplement (dans $\mathbf{Ab} \otimes \mathbb{Q}$*)*

$$<,>: \operatorname{Pic}^0(X) \times \operatorname{Alb}_X(K) \to CH^1(B).$$

c) Supposons B *projective. En composant cet accouplement avec la projection* $CH^1(B) \to N^1(B)$*, on obtient un accouplement*

$$<,>_{\mathrm{num}}: \operatorname{LN}(\operatorname{Pic}^0_X, K/k) \times \operatorname{LN}(\operatorname{Alb}_X, K/k) \to N^1(B). \tag{7}$$

Maintenant, on suppose B projective.

Théorème 3. *Soient $L \in \mathrm{Pic}(X)$ et $\ell \in \mathrm{Pic}(B)$. Considérons la forme quadratique*

$$q = q(X, B, L, \ell) : \mathrm{LN}(\mathrm{Pic}^0_X, K/k) \ni \alpha \mapsto \deg\left(< \alpha, L^{d-1}\alpha >_{\mathrm{num}} \cdot \ell^{\delta-1}\right)$$

obtenue à partir de (7). Si L est ample et $\delta = 1$, $q(X, B, L, \ell)$ est définie négative. Ceci s'étend à $\delta > 1$ pour ℓ ample, sous une certaine conjecture.

$d = 2, \delta = 1$: théorème de Shioda.

7.1. Un autre accouplement. On suppose B projective et $d = 1$. Th. 2 b) :

$$<,>: \operatorname{Pic}^0(X) \times \operatorname{Pic}^0(X) \to CH^1(B). \tag{8}$$

$$A := \operatorname{Tr}_{K/k} \operatorname{Pic}^0_X, \; P := \operatorname{Pic}^0_B.$$

Proposition 7. *Dans (8), on a* $< A(k), A(k) > \subseteq \operatorname{Pic}^0(B)\{p\}$ *dans* $\mathbf{Ab} \otimes \mathbb{Q}$*, où* p = *exposant caractéristique de* k*. D'où accouplement dans* $\mathbf{Ab} \otimes \mathbb{Q}$

$$\operatorname{LN}(\operatorname{Pic}^0_X, K/k) \times A(k) \to P(k)/P(k)\{p\}. \tag{9}$$

Argument à la Yoneda : on remplace k par $k(A)$, et on obtient *in fine* un morphisme

$$\operatorname{LN}(\operatorname{Pic}^0_X, K/k) \to \operatorname{Hom}(A, P) \tag{10}$$

qui redonne (9) (raffiné) en prenant les k-points.

Question 1. Est-ce que (10) est surjectif (dans $\mathbf{Ab} \otimes \mathbb{Q}$) ?

Merci !