J. Ramanujan Math. Soc. **25,** No.4 (2010) 355–358

Un invariant de degré 3 des algèbres centrales simples d'exposant 2

Bruno Kahn

Institut de Mathématiques de Jussieu, UPMC - UFR 929, Mathématiques, 4 Place Jussieu, 75005 Paris, France
e-mail: kahn@math.jussieu.fr

Communicated by: V. Balaji

Received: November 5, 2009

Abstract. We associate to any central simple algebra A of exponent 2 over a field of characteristic $\neq 2$ an invariant with values in the degree 3 unramified cohomology of its Severi-Brauer variety modulo the image of the cohomology of the ground field. The main theorem is that this invariant is nonzero if and only if the index of A is ≥ 8.

Ce texte se fonde sur des notes manuscrites non datées (remontant sans doute à 2000) que j'ai retrouvées récemment. Je remercie J.-P. Tignol, A. Vishik et V. Chernousov pour des conversations à ce sujet.

Soient F un corps de caractéristique différente de 2 et A une F-algèbre centrale simple d'exposant 2. Notons X sa variété de Severi-Brauer et $K = F(X)$. On dispose d'homomorphismes d'extension des scalaires:

$$\eta_2^3 : H^3(F, \mathbf{Z}/2) \to H^3_{\mathrm{nr}}(K/F, \mathbf{Z}/2)$$
$$\eta^3 : H^3(F, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3_{\mathrm{nr}}(K/F, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)).$$

Rappelons que la cohomologie non ramifiée est un invariant birationnel stable; par conséquent, Coker η_2^3 et Coker η^3 ne dépendent que de la classe de A dans $Br(F)$.

Soit F_s une clôture séparable de F et $X_s = X \otimes_F F_s$. Notons ξ l'homomorphisme $CH^2(X) \to CH^2(X_s)$. D'après [3, cor. 7.1] on a une injection

$$\operatorname{Coker} \eta^3 \hookrightarrow \operatorname{Coker} \xi \tag{1}$$

qu'on peut déduire du diagramme commutatif aux lignes exactes (cf. [3, th. 1.1]):

$$\begin{array}{ccccccccc}
0\to & 0 & \longrightarrow & H^4_{\text{ét}}(F,\Gamma(2)) & \xrightarrow{\sim} & H^3_{\text{ét}}(F,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) & \to 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \eta^3} & \\
0\to & CH^2(X) & \longrightarrow & H^4_{\text{ét}}(X,\Gamma(2)) & \longrightarrow & H^3_{\text{nr}}(K/F,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) & \to 0 \\
 & {\scriptstyle \xi}\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
0\to & CH^2(X_s) & \xrightarrow{\sim} & H^4_{\text{ét}}(X_s,\Gamma(2)) & \longrightarrow & 0 & \to 0
\end{array} \qquad (2)$$

dans lequel $\Gamma(2)$ est le complexe motivique de Lichtenbaum [9] et la colonne centrale, formée de groupes de cohomologie motivique étale, est exacte (on a $H^3_{\text{nr}}(KF_s/F_s,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))=0$ puisque X_s est une variété rationnelle).

(La meilleure manière de prouver l'exactitude de la colonne centrale est d'utiliser la suite spectrale des tranches et l'identification de $H^i_{\text{ét}}(X,\Gamma(2))$ avec $H^i_{\text{ét}}(X,\mathbf{Z}(2))$ pour $i\geq 1$: [1, th. 7.2], [4, 5.3] et [5, §2.B].)

Il résulte de [7] que $\operatorname{Coker}\xi$ ne dépend également que de la classe de A dans $Br(F)$. Rappelons que $CH^2(X_s)=\mathbf{Z}$ ou 0 puisque X_s est un espace projectif. On a:

- $\operatorname{ind}(A)\leq 2$: $\operatorname{Coker}\xi=0$ (se ramener à A à division; alors $\dim X\leq 1$).
- $\operatorname{ind}(A)=4$: $\operatorname{Coker}\xi=\mathbf{Z}/2$ [6].
- $\operatorname{ind}(A)\geq 8$: $\operatorname{Coker}\xi=\mathbf{Z}/4$ [2, lemma 9.4 b)].

Soit $q\in I^2F$ telle que $c(q)=[A]$: alors $q_K\in I^3K$ et son invariant d'Arason $e^3(q_K)\in H^3_{\text{ét}}(K,\mathbf{Z}/2)$ est défini. Il est non ramifié puisque les résidus de q_K sont nuls.

Soit q' un autre choix de q: alors $q'\perp -q\in I^3F$ et $e^3(q_K)-e^3(q'_K)=e^3(q-q')_K$. Ainsi:

Lemme 1. *La classe de $e^3(q_K)$ dans* $\operatorname{Coker}\eta^3_2$ *ne dépend pas du choix de q: on la note e_2.* □

Théorème 1. *Soit e l'image de e_2 dans* $\operatorname{Coker}\eta^3$. *Alors $e\neq 0 \iff$* $\operatorname{ind}(A)\geq 8$.

Démonstration. $\operatorname{ind}(A)\leq 2$: c'est clair.

$\operatorname{ind}(A)=4$: on peut choisir q d'Albert. Alors $q_K\sim 0$ par le Hauptsatz d'Arason-Pfister, donc $e=0$.

$\operatorname{ind}(A)\geq 8$: on pourrait le déduire de [2, Th. 9.1], mais je vais donner un argument légèrement différent.

Notons E l'espace vectoriel sous-jacent à q. Alors $E\times_{\operatorname{Spec}F}X$ est un fibré vectoriel trivial sur X qui définit (avec q_K) un fibré de Clifford, à savoir un torseur sous le groupe de Clifford spécial Cliff(n, n), cf. [2, §9]. Lui sont associées deux classes caractéristiques [2, §6]:

$$\gamma_1 \in H^2_{\text{ét}}(X, \Gamma(1)) \ (\simeq CH^1(X)), \quad \gamma_2 \in H^4_{\text{ét}}(X, \Gamma(2))$$

où $\Gamma(1) = \mathbb{G}_m[-1]$ et $\Gamma(2)$ est le complexe motivique de Lichtenbaum déjà rappelé.

On a:

- $0 = c_2(E \times_{\operatorname{Spec} F} X) = 2\gamma_2 - \gamma_1^2$ [2, th. 6.9 (iii))].
- $\gamma_1 \mapsto c(q_X) \in H^2_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}/2)$ (ibid., th. 6.9 (iv)).
- $\gamma_2 \mapsto e^3(q_K)$ (ibid., th. 6.11).

Ici, c_2 désigne la seconde classe de Chern d'un fibré vectoriel, q_X est le fibré quadratique sous-jacent au fibré de Clifford et c l'invariant de Clifford d'un fibré quadratique [2, déf. 2.3].

Comme $H^2_{\text{ét}}(F, \mathbf{Z}/2) \hookrightarrow H^2_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}/2)$, $c(q_X) \neq 0$ et γ_1 engendre le groupe $CH^1(X)/2$, soit $\gamma_1 = 2mh$, m impair, h classe d'une section hyperplane lisse de X (cf. [2, lemme 9.4 a)]). On en déduit:

$$\gamma_2 \mapsto 2m^2h^2 \neq 0 \in \operatorname{Coker} \xi$$

ce qui conclut la démonstration, vu le diagramme (2). □

Applications.

1. Supposons A à division et isomorphe à un produit tensoriel de trois algèbres de quaternions. Dans ce cas on peut choisir q de dimension 8 et représentant 1; alors q_K est une 3-forme de Pfister. Ceci donne un exemple de 3-forme de Pfister non ramifiée sur un corps de fonctions, qui est définie sur le corps de base en tant que forme quadratique mais pas en tant que forme de Pfister. (Je remercie Chernousov pour une conversation ayant conduit à cette observation.)
2. (Tignol). Cet exemple a un rapport direct avec le précédent. Karpenko [8, Th. 5.3] a démontré qu'une involution anisotrope sur une algèbre à division D le reste après extension au corps des fonctions de la variété de Severi-Brauer de D. Par ailleurs, soit A une algèbre centrale simple de degré 8 et σ une involution orthogonale de A, décomposable en produit tensoriel de 3 involutions quaternioniennes: dans [10, Prop. 5.1], Queguiner et Tignol associent à σ une forme $q \in I^2F$ de dimension 8 telle que

   - $c(q) = [A]$
   - q isotrope $\iff$ σ isotrope.

   Supposons que A soit à division. Le théorème 1 implique que q_K n'est pas isotrope, donc que σ_K n'est pas isotrope. Cela donne une autre démonstration du théorème de Karpenko dans ce cas particulier.

Références

[1] S. Bloch and S. Lichtenbaum, A spectral sequence for motivic cohomology, prépublication, 1995, K-theory preprint archives, `http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0062/`.

[2] H. Esnault, B. Kahn, M. Levine and E. Viehweg, The Arason invariant and mod 2 algebraic cycles, *J. Amer. Math. Soc.*, **11** (1998) 73–118.

[3] B. Kahn, Applications of weight-two motivic cohomology, *Doc. Math.*, **1** (1996) 395–416.

[4] B. Kahn, Motivic cohomology of smooth geometrically cellular varieties, *Proc. Symp. Pure Math.*, **67** (1999) 149–174.

[5] B. Kahn, Cohomological approaches to SK_1 and SK_2 of central simple algebras, *à paraître à Doc. Math.*, Extra Volume: Andrei A. Suslin's Sixtieth Birthday (2010) 317–369.

[6] N. Karpenko, On topological filtration for Severi-Brauer varieties, *Proc. Symp. Pure Math.*, **58** (1995) no. 2, 275–277.

[7] N. Karpenko, Grothendieck Chow motives of Severi-Brauer varieties, *Algebra i Analiz*, **7** (1995) 196–213; traduction anglaise: *St. Petersburg Math. J.*, **7** (1996) 649–661.

[8] N. Karpenko, On anisotropy of orthogonal involutions, *J. Ramanujan Math. Soc.*, **15** (2000) 1–22.

[9] S. Lichtenbaum, The construction of weight-two arithmetic cohomology, *Invent. Math.*, **88** (1987) 183–215.

[10] A. Quéguiner and J.-P. Tignol, Algebras with involution that become hyperbolic over the function field of a conic, *à paraître dans l'Israel J. Math.*

[11] A. Suslin, L'homomorphisme quaternionien pour le corps des functions d'une conique, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **265** (1982) 292–296; traduction anglaise: *Soviet Math. Dokl.*, **26** (1982) 72–77 (1983).