Table des matières

Auteurs et rédacteurs

Benoît Perthame (École Normale Supérieure de Paris)
Quelques équations de transport apparaissant en biologie
Leçon donnée le jeudi 3 avril 2003
Rédigée par Éric Charpentier

Jeffrey Rauch (Université du Michigan)
À travers un prisme
Leçon donnée le jeudi 30 janvier 2003
Rédigée par Benjamin Teixier

Nicole El Karoui (École Polytechnique, Palaiseau)
Gestion dynamique des risques dans les marchés financiers
Leçon donnée le jeudi 13 mars 2003
Rédigée par François Dufour et Arnaud Gloter

Marc Yor (Université Paris 6 et Académie des Sciences)
Le mouvement brownien : une martingale exceptionnelle et néanmoins générique
Leçon donnée le jeudi 4 mars 2004
Rédigée par Éric Charpentier

Wendelin Werner (Université Paris-Sud, Orsay)
Lacets et invariance conforme
Leçon donnée le jeudi 3 novembre 2005
Rédigée par Jean-Francois Marckert

Xavier Viennot (LaBRI, Bordeaux)
Énumérons ! De la combinatoire énumérative classique aux nouvelles combinatoires : bijective, algébrique, expérimentale, quantique et... magique !
Leçon donnée le jeudi 5 décembre 1996
Rédigée par Éric Charpentier et Meriem Zemmari

Bernard Teissier (Institut de Mathématiques de Jussieu)
Volumes des corps convexes, géométrie et algèbre
Leçon donnée le jeudi 7 octobre 1999
Rédigée par Carine Reydy

Dominique Cerveau (Université de Rennes 1)
Champs d'hyperplans
Leçon donnée le jeudi 7 novembre 2002
Rédigée par Olivier Ripoll

Fabien Morel (Université LMU de Munich)
Groupes d'homotopie de sphères algébriques et formes quadratiques
Leçon donnée le jeudi 9 novembre 2000
Rédigée par Bertrand Asseray

Pierre Berthelot (Université de Rennes 1)
Points rationnels des variétés algébriques sur les corps finis : l'approche p-adique
Leçon donnée le jeudi 8 janvier 2004
Rédigée par Floric Tavares

Bruno Kahn (Université Paris 7)
Motifs
Leçon donnée le 6 novembre 2003
Rédigée par Rémy Eupherte

Laurent Lafforgue (IHÉS et Académie des Sciences)
Formules de traces et programme de Langlands
Leçon donnée le jeudi 2 octobre 2003
Rédigée par Francis Brown

[page blanche]

Bruno Kahn

Motifs

Introduction

Je vais vous parler de motifs. C'est de la géométrie algébrique. C'est *a priori* un sujet assez abstrait. Pour moi, c'est un peu un défi (mais c'est tout de même moi qui ai choisi le sujet), d'autant plus que je n'ai pas une expérience énorme de vulgarisateur. J'espère arriver à vous montrer que finalement, il n'est pas si difficile de se faire une idée de ce qu'est un motif.

Ce qui m'a convaincu de raconter ce sujet, c'est une discussion que j'ai eue un jour où je revenais du Tata Institute de Bombay : dans la voiture qui me conduisait à l'aéroport, il y avait un autre passager ; c'était un physicien. On se demande mutuellement ce sur quoi on travaille :

MOI. — Moi, je fais de la théorie des motifs.

LUI. — Qu'est-ce que c'est ? Est-ce que vous pouvez m'expliquer ?

Première réaction : « Totalement impossible ! » Puis illumination : finalement je peux faire une analogie, surtout pour un physicien. En physique des particules, on considère la matière et on essaye de l'analyser en descendant jusqu'aux particules les plus élémentaires possibles : molécules, puis atomes, protons, neutrons, ensuite des particules encore plus petites, les quarks, qui pourraient vraiment s'appeler « atomes » au sens des Grecs. Et puis, quand on en est arrivé là, quand on a les particules les plus simples possibles qui forment la matière, il y a des règles pour les coller ensemble. Ensuite, on essaye de remonter jusqu'à la matière dont le monde est fait en exploitant ces règles de collage des particules élémentaires.

La théorie des motifs consiste, au fond, à faire une chose analogue pour les variétés algébriques. C'est une théorie qui est encore largement conjecturale à l'heure actuelle, mais dans laquelle on arrive quelquefois à se débrouiller pour contourner les conjectures, et démontrer des choses. À la fin, je vous donnerai des exemples où les motifs montrent leur utilité. Pour des raisons de temps, je ne parlerai pratiquement que de *motifs purs*. Les motifs purs concernent les variétés projectives lisses. Dans ce cas, si je reprends mon analogie avec la physique, les problèmes de collage de particules entre elles ne se posent pas : c'est pour cela qu'on dit que ce sont des motifs purs.

Construction des motifs

Quelle est l'idée ? Considérez une variété algébrique X sur un corps k. Pour l'étudier, on a d'abord les méthodes géométriques classiques : on choisit un point, on regarde de plus près, on prend un ouvert, on regarde le fermé complémentaire ; quand l'ouvert est tout simple, ou quand le fermé est tout simple, on arrive à dire des choses. Ou alors on projette. Ou bien, au contraire, on éclate. Tout cela conduit à des classifications par des invariants. Le plus évident de ces invariants est la dimension d'une variété. Ensuite, dans une dimension donnée, on a des invariants plus fins, par exemple le genre pour les courbes. Si on est avec les surfaces, toujours dans le cas des variétés projectives lisses pour simplifier, il y a la théorie des modèles minimaux. On a aussi la dimension de Kodaira…

Il y a un autre invariant très puissant, qui est de nature complètement différente, c'est la cohomologie. Par exemple, si l'on est sur $\mathbb{C}$, la variété algébrique X est une variété analytique. On peut considérer la cohomologie singulière

$$\mathrm{H}^i_{\mathrm{sing}}(\mathrm{X}(\mathbb{C}),\mathbb{Q}).$$

C'est la cohomologie de Betti de X. L'idée des motifs, c'est que l'on ait des objets $h^i(\mathrm{X})$ que l'on puisse « réaliser » en des espaces vectoriels, par exemple sur $\mathbb{Q}$, tels que la réalisation de $h^i(\mathrm{X})$ sur $\mathbb{Q}$ soit justement $\mathrm{H}^i_{\mathrm{sing}}(\mathrm{X}(\mathbb{C}),\mathbb{Q})$, espace qui d'ailleurs a beaucoup plus de structure (une structure de Hodge). Il y a beaucoup de théories de cohomologie : la cohomologie de Betti, la cohomologie de de Rham, la cohomologie ℓ-adique en caractéristique p, la cohomologie cristalline… Les deux dernières ont leur origine dans des questions arithmétiques, plus précisément les conjectures de Weil.

Conjectures de Weil

Tout commence dans les années 1960, quand Grothendieck et ses collaborateurs sont en train de démontrer les conjectures de Weil. Grothendieck est frappé par des phénomènes saisissants qui ne sont pas évidents à expliquer. Par exemple, on se place sur un corps fini $k = \mathbb{F}_q$, de caractéristique p. On considère une variété abélienne A. Pour un nombre premier ℓ différent de p, on peut considérer le module de Tate de A,

$$\mathrm{T}_\ell(\mathrm{A}) = \varprojlim_n {}_{\ell^n}\overline{\mathrm{A}},$$

où $\overline{\mathrm{A}} = \mathrm{A} \times_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q}$ et ${}_{\ell^n}\overline{\mathrm{A}}$ est le groupe des points de ℓ^n-torsion de $\overline{\mathrm{A}}$. Le (morphisme de) Frobenius F défini par $x \mapsto x^q$ opère sur

$$\mathrm{V}_\ell(\mathrm{A}) = \mathrm{T}_\ell(\mathrm{A}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}.$$

Classiquement, on s'intéresse au polynôme caractéristique de Frobenius

$$\mathrm{P}_\ell(t) = \det(t - \mathrm{F}|\mathrm{V}_\ell(\mathrm{A}))$$

On a alors le résultat suivant.

Théorème 1 (Weil, [W])**.** *Avec les notations précédentes :*
- *le polynôme* P_ℓ *est à coefficients entiers ;*
- *les racines de* P_ℓ *ont pour valeur absolue complexe* $\sqrt{q}$ *;*
- *le polynôme* P_ℓ *ne dépend pas de* ℓ*.*

C'est le point de départ des conjectures de Weil, qui généralisent ceci à une variété projective lisse X quelconque sur k. Ce qui généralise $\mathrm{V}_\ell(\mathrm{A})$ est l'espace de cohomologie ℓ-adique

$$\mathrm{H}^i_\ell(\mathrm{X}) := \mathrm{H}^i(\overline{\mathrm{X}}, \mathbb{Q}_\ell)$$

qui a été défini par Grothendieck, Artin, Verdier et Deligne. (Pour $\mathrm{X} = \mathrm{A}$, $\mathrm{V}_\ell(\mathrm{A})$ est le dual de $\mathrm{H}^1_\ell(\mathrm{A})$.) Frobenius opère dessus et on peut considérer cette fois-ci le polynôme caractéristique inverse

$$\mathrm{P}_{i,\ell}(t) = \det(1 - t\mathrm{F}|\mathrm{H}^i_\ell(\mathrm{X})).$$

On a alors le résultat suivant.

Théorème 2 (Deligne, [D1])**.** *Avec les notations précédentes :*
- *Le polynôme* $\mathrm{P}_{i,\ell}$ *est à coefficients entiers ;*
- *les racines de* $\mathrm{P}_{i,\ell}$ *ont pour valeur absolue* $q^{i/2}$ *;*
- *le polynôme* $\mathrm{P}_{i,\ell}$ *ne dépend pas de* ℓ*.*

Ce qui a sans doute frappé Grothendieck, c'est la troisième assertion qui dit notamment que les groupes H^i ont une dimension indépendante de ℓ. Bien sûr, à l'époque où Grothendieck commençait à formuler la théorie des motifs, ce théorème-là n'était pas démontré. L'article de Deligne [D1] est ce qu'on appelle Weil I, et il date de 1973, alors que les idées de Grothendieck remontent au milieu des années 1960 (voir [CS]). Pour comprendre quelle est la problématique, d'une manière générale, on a la notion de cohomologie de Weil, qui était implicite dans l'article de Weil [W] où il formulait ses conjectures sur les fonctions zêta des variétés algébriques sur $\mathbb{F}_q$. Il disait, en gros, que si l'on avait une théorie de cohomologie ayant des propriétés formelles analogues à celles de la cohomologie complexe $\mathrm{H}^i_{\text{sing}}$, alors, on pourrait démontrer ces conjectures — à l'exception de la plus profonde (hypothèse de Riemann) qui se déduit précisément du théorème 2. Je reviendrai là-dessus.

Ensuite, le travail de Grothendieck, Artin, Verdier, Deligne et d'autres a été de construire une telle cohomologie et ils en ont même construit une pour chaque nombre premier différent de la caractéristique. Une cohomologie de Weil sur un corps de base k quelconque, de manière générale, est la donnée d'une loi qui associe à toute variété projective lisse sur k un espace vectoriel gradué sur un corps K de caractéristique 0. Cette loi doit être un foncteur contravariant, c'est-à-dire qu'à tout morphisme d'une variété X dans une variété Y est associé un morphisme de la cohomologie de Y dans la cohomologie de X. Ce foncteur, noté

$$\text{VarProjLisse}\,/\,k \xrightarrow{\mathrm{H}^*} \mathrm{Vec}^*_{\mathrm{K}},$$

doit avoir un certain nombre de propriétés :

– les espaces vectoriels doivent être de dimension finie, et nuls, sauf pour un nombre fini d'entre eux,
– une formule de Künneth : $\mathrm{H}^*(\mathrm{X}\times\mathrm{Y}) \simeq \mathrm{H}^*(\mathrm{X}) \otimes \mathrm{H}^*(\mathrm{Y})$,
– une dualité de Poincaré, comme en topologie,
– une application « classe de cycle », qui à un cycle algébrique associe sa classe de cohomologie : $\mathrm{Z}^p(\mathrm{X}) \xrightarrow{\mathrm{cl}^p} \mathrm{H}^{2p}(\mathrm{X})$. C'est un peu comme en topologie où à un fermé dans une variété, on associe sa classe de cohomologie.

Cohomologies de Weil classiques

De quelles « cohomologies de Weil » disposons-nous ?

En caractéristique 0, c'est-à-dire si le corps k est de caractéristique 0, il y a la **cohomologie de de Rham**

$$\mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(\mathrm{X}) = \mathbb{H}^*(\mathrm{X}, \Omega^*_{\mathrm{X}/k}),$$

à valeurs dans le complexe de de Rham algébrique $\Omega^*_{\mathrm{X}/k}$ et avec $\mathrm{K} = k$.

Si l'on s'est donné un plongement $k \overset{\sigma}{\hookrightarrow} \mathbb{C}$ du corps k dans $\mathbb{C}$, il y a la **cohomologie de Betti**

$$\mathrm{H}^*_{\mathrm{B},\sigma}(\mathrm{X}) = \mathrm{H}^*_{\mathrm{sing}}(\sigma\mathrm{X}(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$$

relative à ce plongement σ, et avec $\mathrm{K} = \mathbb{Q}$.

En toute caractéristique, on a la **cohomologie ℓ-adique**, pour un nombre premier ℓ différent de la caractéristique de k :

$$\mathrm{H}^*_{\ell}(\mathrm{X}) = \varprojlim_{n} \mathrm{H}^*_{\text{ét}}(\overline{\mathrm{X}}, \mathbb{Z}/l^n) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell,$$

et avec $\mathrm{K} = \mathbb{Q}_\ell$.

En caractéristique p, lorsque k est parfait, on en a une de plus, la **cohomologie cristalline** :

$$\mathrm{H}^*_{\mathrm{cris}}(\mathrm{X}),$$

avec pour coefficients $\mathrm{K} = \mathrm{Frac}(\mathrm{W}(k))$ le corps des fractions de l'anneau des vecteurs de Witt[1] de k.

Les cohomologies de Weil que je viens de décrire sont, par définition, les cohomologies de Weil classiques. Si l'on se place en caractéristique 0, il y a entre elles ce que l'on appelle des isomorphismes de comparaison. Par exemple, on a un tel isomorphisme entre la cohomologie de Betti et la cohomologie ℓ-adique, mais comme les coefficients de ces cohomologies ne sont pas les mêmes, l'isomorphisme n'est défini qu'après tensorisation par $\mathbb{Q}_\ell$:

$$\mathrm{H}^*_{\mathrm{B},\sigma}(\mathrm{X}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell \simeq \mathrm{H}^*_{\ell}(\mathrm{X}).$$

Cet isomorphisme canonique est dû à M. Artin : il se démontre par réduction au cas des coefficients finis. On a un autre isomorphisme entre la cohomologie de Betti et la cohomologie de de Rham, appelé isomorphisme des périodes ; de la même manière, les coefficients étant dans

[1] À ne pas confondre avec l'anneau de Witt des classes d'isométrie des formes quadratiques sur k, muni de la somme directe et du produit tensoriel, dont il est question dans la Leçon de Fabien Morel. (N.d.R.)

$\mathbb{Q}$ pour la première et dans k pour la seconde, l'isomorphisme n'est vrai qu'après tensorisation par $\mathbb{C}$:

$$\mathrm{H}^*_{\mathrm{B},\sigma}(\mathrm{X}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \simeq \mathrm{H}_{\mathrm{dR}}(\mathrm{X}) \otimes_k \mathbb{C}.$$

Cet isomorphisme est dû à Grothendieck. Il se démontre en plusieurs étapes : la première étape, c'est le théorème de de Rham qui dit que la cohomologie singulière peut se calculer avec le complexe de de Rham. La deuxième consiste à dire que la cohomologie de de Rham sur $\mathbb{C}$ pour une variété algébrique projective lisse peut se calculer en prenant des formes différentielles algébriques au lieu de prendre des formes $\mathscr{C}^\infty$. La troisième étape est une descente : c'est simplement que la cohomologie de de Rham algébrique se comporte bien par extension du corps de base.

On a alors un théorème frappant.

Théorème 3. *Pour une cohomologie de Weil classique* H *et un entier* i*, la dimension* $\dim \mathrm{H}^i(\mathrm{X})$ *ne dépend pas du choix de* H.

On ne s'y attendait pas vraiment : c'est un phénomène remarquable. En caractéristique 0, c'est vrai grâce aux théorèmes de comparaison. En caractéristique positive, c'est encore vrai, mais c'est beaucoup plus profond : pour les cohomologies ℓ-adiques cela résulte du théorème de Deligne 2, et pour la cohomologie cristalline, cela résulte encore de résultats de Deligne (Weil II, [D2]), comme l'ont démontré Katz et Messing (voir [KM]). En fait, en caractéristique p, on peut faire opérer Frobenius sur la cohomologie cristalline, et le polynôme caractéristique que l'on obtient est encore le même que celui issu de la cohomologie ℓ-adique.

C'est sans doute le point de départ des interrogations de Grothendieck, qui cherchait à comprendre ces phénomènes.

Cohomologie motivique

La première question que l'on peut se poser est la suivante. En caractéristique 0, on comprend bien la raison pour laquelle le théorème 3 est vrai. Est-ce pareil en caractéristique p ? Y aurait-il aussi des isomorphismes de comparaison ? Autrement dit, pourrait-on trouver une cohomologie de Weil H sur $k = \mathbb{F}_q$, avec $\mathrm{K} = \mathbb{Q}$, et un isomorphisme canonique

$$\mathrm{H} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell \simeq \mathrm{H}_\ell,$$

avec une action de Frobenius, etc. ? La réponse est que c'est impossible. Serre le montre avec un exemple.

Exemple 1. *Prenons pour* X *une courbe elliptique* E *sur k et supposons que la cohomologie de Weil* H *existe. Alors,* $\dim \mathrm{H}^1(\mathrm{E}) = 2$*, le* H^1 *d'une courbe étant de dimension deux fois le genre g de la courbe. Par fonctorialité,* $\mathrm{End}(\mathrm{E}) \otimes \mathbb{Q}$ *opère linéairement sur* $\mathrm{H}^1(\mathrm{E})$*. Mais si l'on prend* $k = \mathbb{F}_{p^2}$ *et que l'on suppose* E *supersingulière, alors d'après Deuring l'algèbre* $\mathrm{End}(\mathrm{E}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ *est un corps de quaternions sur* $\mathbb{Q}$*. Or un corps de quaternions sur* $\mathbb{Q}$ *ne peut pas opérer sur un espace vectoriel de dimension* 2 *sur* $\mathbb{Q}$*.*

Voilà pourquoi on ne peut pas expliquer les phénomènes des conjectures de Weil de manière aussi simple. En fait, l'algèbre $\mathrm{End}(\mathrm{E}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ est bien connue : d'après Deuring, elle est ramifiée exactement en $\mathbb{R}$ et en $\mathbb{Q}_p$ (c'est-à-dire que ce sont les seuls complétés sur lesquels elle ne devient pas triviale). Donc, ça vous dit qu'on ne peut pas trouver de cohomologie de Weil sur $\mathbb{F}_{p^2}$ qui ait des coefficients contenus dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{Q}_p$. Par contre, elle est non ramifiée en tout ℓ, pour $\ell \neq p$, et ça tombe bien puisqu'on a la cohomologie ℓ-adique pour tout $\ell \neq p$; et si je passe de $\mathbb{Q}_p$ à $\mathbb{Q}_{p^2}$, l'extension quadratique non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$, alors l'algèbre est déployée, et c'est justement le corps des coefficients de la cohomologie cristalline.

L'idée de Grothendieck, puisqu'on ne peut pas trouver de cohomologie de Weil à coefficients rationnels, est de chercher une catégorie abélienne et une cohomologie de Weil à valeurs dans cette catégorie abélienne. Cette catégorie s'appellerait la catégorie des motifs, et la cohomologie considérée, qui serait une cohomologie universelle et s'enverrait vers toutes les cohomologies de Weil, s'appellerait la « cohomologie motivique ». Attention : on parle beaucoup de *cohomologie motivique* en ce moment, mais c'est dans un sens différent. C'est lié à ce que font Voevodsky et d'autres, ce n'est pas la même terminologie.

Comment construire cette catégorie des motifs ? Il y a une chose qui relie ces cohomologies de Weil entre elles, c'est la classe de cycle, c'est-à-dire que vers toute cohomologie de Weil s'envoient les cycles algébriques. C'est l'idée de départ de Grothendieck. D'ailleurs, si on regarde le théorème de Weil, qui au départ concerne la fonction zêta d'une courbe ou d'une variété abélienne sur un corps fini, il y a deux démonstrations de ce théorème. Il y a une démonstration qui utilise les modules de Tate, et une démonstration qui utilise les correspondances algébriques. Et cette deuxième démonstration explique, en quelque sorte, l'indépendance de ℓ dans le théorème 1. L'idée de Grothendieck, c'est que cela doit être vrai aussi en toute généralité pour une variété algébrique quelconque : au lieu d'utiliser de la cohomologie, on doit pouvoir utiliser des cycles algébriques, et copier la démonstration de Weil du cas des courbes. Cela permettra d'obtenir le théorème 2, pour lequel les propriétés alors établies de la cohomologie l-adiques n'étaient pas suffisantes.

Pour cela, comme vous allez le voir quand j'aurai construit la catégorie, il faut des conjectures supplémentaires : Grothendieck les appelait les « conjectures standard ». Finalement, l'histoire ne s'est pas déroulée comme il l'avait prévu : la démonstration de Deligne s'est faite par voie ℓ-adique et les conjectures standard sont toujours ouvertes à l'heure actuelle.

Je vais maintenant définir la catégorie des motifs purs (ou plutôt les catégories de motifs purs, parce qu'il y en a plusieurs), et vous allez voir que ce n'est pas si difficile.

Relations d'équivalence adéquates

Je me place sur un corps k. Soit X une variété projective lisse sur k. Pour définir la catégorie des motifs purs, il faut un « couple adéquat ». Il s'agit d'un couple $(\mathrm{A},\sim)$ où A est un anneau commutatif et où $\sim$ est une relation d'équivalence, dite *adéquate*, sur les cycles algébriques de X à coefficients dans A. Les cycles algébriques de X à coefficients dans A sont les éléments de $\mathrm{Z}^*(\mathrm{X})\otimes_{\mathbb{Z}}\mathrm{A}$, où

$$\mathrm{Z}^p(\mathrm{X})=\bigoplus_{\mathrm{X}^{(p)}}\mathbb{Z},$$

la somme portant sur les points de X de codimension p. À un point d'un schéma, on peut associer l'adhérence de ce point, qui est une sous-variété fermée intègre. Si le point est de codimension p, la sous-variété est de codimension p. Réciproquement, si j'ai une sous-variété intègre de codimension p, son point générique est un point de codimension p de X. On a ainsi une bijection, qui fait un pont entre ma description agréable et la description géométrique classique qui est de dire que $\mathrm{Z}^p(\mathrm{X})$ est le groupe abélien libre engendré par les sous-variétés intègres fermées de X de codimension p.

Précisons la notion de relation d'équivalence adéquate. La relation $\sim$ doit être définie pour toutes les variétés. Sans entrer dans les détails, on peut dire *grosso modo* que $\sim$ est *adéquate* (la notion est due à Samuel [Sam]) si elle est stable par image réciproque plate, par image directe, et si, modulo $\sim$, on peut définir des produits d'intersection. On pose alors :

$$\mathrm{Z}^*_{\sim}(\mathrm{X}, \mathrm{A}) := \mathrm{Z}^*(\mathrm{X}) \otimes \mathrm{A}/\sim .$$

L'idée d'une théorie de l'intersection est la suivante. Supposez que vous ayez une surface X, et deux courbes sur cette surface. Quand elles sont en position générale, elles s'intersectent en un nombre fini de points et on n'a pas de point double, donc on peut définir leur intersection comme l'intersection au sens naïf. Cela donne une application qui va de $\mathrm{Z}^1(\mathrm{X}) \times \mathrm{Z}^1(\mathrm{X})$ vers $\mathrm{Z}^2(\mathrm{X})$ et qui n'est pas définie partout. On aimerait bien qu'elle soit définie partout. Par exemple, si je prends deux fois la même courbe, on aimerait bien définir le produit d'intersection de cette courbe avec elle-même. Que faire ? Géométriquement, ce n'est pas clair. L'idée, qui remonte à Chow, est que si on déplace la courbe, dans une famille paramétrée par la droite affine par exemple, ou par la droite projective, alors la courbe originelle et la courbe déplacée vont être en position générale. Je vais pouvoir prendre leur intersection, et cette intersection va être intéressante parce qu'elle ne va pas dépendre, de manière essentielle, de ce déplacement.

Voilà l'idée des relations d'équivalence adéquates. Il y en a beaucoup. Voyons celles qui sont les plus intéressantes pour nous. Il y a l'équivalence rationnelle $\sim_{\mathrm{rat}}$, celle dont je viens de parler : on fait bouger les cycles dans des familles paramétrées par la droite affine, par exemple. Il y a l'équivalence algébrique $\sim_{\mathrm{alg}}$. Là on autorise, non seulement la droite affine, mais aussi des courbes quelconques, ou même des variétés quelconques (cela revient au même), comme espaces de paramètres. Il y a l'équivalence homologique $\sim_{\mathrm{H}}$ et l'équivalence numérique $\sim_{\mathrm{num}}$. L'équivalence homologique $\sim_{\mathrm{H}}$ est relative à une cohomologie de Weil et c'est simplement ce que je vous ait dit tout à l'heure. Il y a une application « classe de cycle », qui va de $\mathrm{Z}^p(\mathrm{X})$ vers $\mathrm{H}^{2p}(\mathrm{X})$, et le noyau de la classe de cycle, pour une cohomologie de Weil donnée, définit l'équivalence homologique relative à H. L'équivalence numérique correspond au produit d'intersection pour des cycles de dimension complémentaire. Je peux calculer le degré d'un cycle de codimension $d = \dim(\mathrm{X})$, c'est-à-dire un 0-cycle. Un cycle est numériquement équivalent à zéro si, quand je l'intersecte avec un cycle de dimension complémentaire, le degré est toujours zéro. Les relations d'équivalence adéquates sont ainsi ordonnées :

$$\sim_{\text{rat}} \geqslant \sim_{\text{alg}} \geqslant \sim_{\text{H}} \geqslant \sim_{\text{num}} .$$

L'équivalence rationnelle est la relation d'équivalence adéquate la plus fine, celle qui a le plus gros quotient, et l'équivalence numérique est la relation d'équivalence adéquate la moins fine (celle qui a le groupe quotient le plus petit), au moins si les coefficients contiennent $\mathbb{Q}$.

Voilà, maintenant, vous savez ce qu'est une relation d'équivalence adéquate et je peux vous parler de correspondances.

Correspondances

Bien sûr, cette théorie de l'intersection, sous des formes diverses, est très ancienne, ainsi que la théorie des correspondances. Sous la forme moderne que je vais exposer ici, on peut dire qu'elle est largement due à Grothendieck. Mais, essentiellement, Weil l'utilisait déjà.

Définition 1. Soient X et Y deux variétés projectives lisses. Une correspondance de X vers Y, relative à un couple adéquat $(A, \sim)$, est un élément du groupe $Z^{\dim Y}_{\sim}(X \times Y, A)$.

On peut composer les correspondances. La composition des correspondances est donnée par une très jolie formule. Je vais faire un petit dessin. Je me donne trois variétés X, Y et Z, une correspondance α de X vers Y, et une correspondance β de Y vers Z :

$$X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z.$$

Voici comment est définie leur composition. On considère le produit triple $X \times Y \times Z$ avec les trois projections :

$$\begin{tikzcd}
 & X \times Y \times Z \arrow[dl, "p_{XY}"'] \arrow[d, "p_{XZ}"] \arrow[dr, "p_{YZ}"] & \\
X \times Y & X \times Z & Y \times Z
\end{tikzcd}$$

Je peux faire le *pullback* $p_{XY}^*\alpha$ de α sur $X \times Y \times Z$ et le *pullback* $p_{YZ}^*\beta$ de β sur $X \times Y \times Z$, ce qui donne deux cycles sur $X \times Y \times Z$. Je peux les intersecter, ça fait un nouveau cycle sur $X \times Y \times Z$, mais ce que je cherche, c'est un cycle sur $X \times Z$, une correspondance de X vers Z. Il suffit de prendre l'image directe de ce cycle par la projection p_{XZ}. C'est la composition de β et α :

$$\beta \circ \alpha := (p_{XZ})_* (p_{XY}^* \alpha \cdot p_{YZ}^* \beta).$$

Je vous ai défini les correspondances, mais je ne vous en ai pas donné d'exemple. En voici un.

Exemple 2. *Si je me donne un morphisme* $f : X \to Y$*, je peux lui associer une correspondance : le graphe* Γ_f *de* f *est un fermé de* $X \times Y$*, isomorphe à* X*, donc certainement intègre, et sa codimension est bien la dimension de* Y*, puisque sa dimension est la dimension de* X*. C'est une correspondance notée* $[\Gamma_f]$.

En fait un calcul simple montre que lorsque f et g sont composables,

$$[\Gamma_{g\circ f}] = [\Gamma_g] \circ [\Gamma_f].$$

Une autre chose que l'on vérifie, toujours par un calcul élémentaire, c'est que la composition est associative :

$$(\gamma \circ \beta) \circ \alpha = \gamma \circ (\beta \circ \alpha).$$

C'est fait très soigneusement et très agréablement dans le livre de Fulton [Fu], où il y a un chapitre sur les correspondances.

Catégorie des correspondances

Voilà, je me suis donné tout ce qu'il fallait pour définir la catégorie $\mathrm{Cor}_\sim(k, A)$ des correspondances, dont les objets sont les variétés projectives lisses et dont les morphismes sont les correspondances. J'ai fait un peu plus que ça puisque j'ai défini un foncteur vers cette catégorie partant des variétés projectives lisses :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{VarProjLisse}/k & \to & \mathrm{Cor}_\sim(k, A) \\ X & \mapsto & [X] \\ f & \mapsto & [\Gamma_f] \end{array}$$

Ce foncteur associe à une variété projective lisse la même variété, notée entre crochets pour la distinguer, et à un morphisme f la classe de son graphe.

Là, on a le point de départ de la théorie des motifs. Je vous ai expliqué la partie géométrique de la construction. Le reste de la construction n'a (presque) plus rien à voir avec la géométrie, c'est purement catégorique.

Catégorie des motifs effectifs

On va passer de la catégorie des correspondances à la catégorie des motifs en deux temps. On définit d'abord la catégorie $\mathrm{Mot}^{\mathrm{eff}}_{\sim}(k,\mathrm{A})$ des motifs effectifs et ensuite la catégorie $\mathrm{Mot}_{\sim}(k,\mathrm{A})$ des motifs. Dans les deux cas, on estime que l'on n'a pas assez d'objets, on va donc en ajouter sans rien changer aux morphismes, c'est-à-dire que les deux foncteurs

$$\mathrm{Cor}_{\sim}(k,\mathrm{A}) \longrightarrow \mathrm{Mot}^{\mathrm{eff}}_{\sim}(k,\mathrm{A}) \longrightarrow \mathrm{Mot}_{\sim}(k,\mathrm{A})$$

que l'on va définir sont pleinement fidèles. Je vous rappelle que pleinement fidèle signifie que c'est bijectif sur les ensembles de morphismes. La catégorie $\mathrm{Mot}^{\mathrm{eff}}_{\sim}(k,\mathrm{A})$ est l'enveloppe pseudo-abélienne, ou karoubienne, de $\mathrm{Cor}_{\sim}(k,\mathrm{A})$. Qu'est-ce qu'une catégorie pseudo-abélienne ? C'est une notion qui est loin d'être aussi puissante que celle de catégorie abélienne mais qui malgré tout est étonnamment pertinente.

Définition 2. Une catégorie additive $\mathscr{A}$ est pseudo-abélienne si tout endomorphisme idempotent a un noyau.

Ceci signifie que si l'on considère un objet de $\mathscr{A}$, et un endomorphisme p de cet objet qui est idempotent (qui est égal à son carré p^2), on demande que cet endomorphisme ait un noyau, au sens des noyaux dans les catégories additives[(2)]. Si p a un noyau, alors $1-p$ est aussi un idempotent, donc il a aussi un noyau, et le noyau de $1-p$ est l'image de p. Autrement dit, dire que tout idempotent a un noyau revient à dire que tout idempotent a une image.

Ce que Karoubi avait remarqué, c'est qu'il y a une propriété universelle et que si une catégorie n'est pas pseudo-abélienne, alors on peut ajouter formellement des noyaux à tous les idempotents. On a toujours un foncteur de $\mathscr{A}$ vers $\mathscr{A}^\natural$, où $\mathscr{A}^\natural$ est pseudo-abélienne et universelle. Ceci signifie que si on se donne un autre foncteur de $\mathscr{A}$ vers une catégorie pseudo-abélienne, il se factorise canoniquement à travers $\mathscr{A}^\natural$. Cette catégorie $\mathscr{A}^\natural$ est appelée enveloppe pseudo-abélienne et il est très facile de la décrire.

Définition 3. Pour toute catégorie $\mathscr{A}$ additive, on définit l'enveloppe pseudo-abélienne $\mathscr{A}^\natural$ ainsi :

– les objets sont les couples (M,p) avec $\mathrm{M}\in\mathscr{A}$ et $p^2=p\in\mathrm{End}\,\mathrm{M}$;

---

[2]Dans une catégorie additive, on appelle noyau d'un morphisme $f:\mathrm{B}\to\mathrm{C}$ tout morphisme $i:\mathrm{A}\to\mathrm{B}$ tel que $f\circ i=0$ et qui est universel pour cette propriété. (N.d.R.)

– l'ensemble des morphismes de (M, p) dans (N, q) est

$$\mathrm{Hom}((\mathrm{M}, p), (\mathrm{N}, q)) := q\,\mathrm{Hom}(\mathrm{M}, \mathrm{N})\,p \subset \mathrm{Hom}(\mathrm{M}, \mathrm{N}).$$

Le foncteur de $\mathscr{A}$ vers $\mathscr{A}^{\natural}$ est simplement donné par

$$\mathrm{M} \mapsto (\mathrm{M}, 1_{\mathrm{M}}).$$

Là, je viens de vous expliquer comment on obtient la catégorie $\mathrm{Mot}^{\mathrm{eff}}_{\sim}(k, \mathrm{A})$, qui est par définition $\mathrm{Cor}_{\sim}(k, \mathrm{A})^{\natural}$. On note $h(\mathrm{X})$ l'objet de $\mathrm{Mot}^{\mathrm{eff}}_{\sim}(k, \mathrm{A})$ associé à une variété projective lisse X :

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{VarProjLisse}\,/\,k & \to & \mathrm{Cor}_{\sim}(k, \mathrm{A}) & \to & \mathrm{Mot}^{\mathrm{eff}}_{\sim}(k, \mathrm{A}) \\ \mathrm{X} & \mapsto & [\mathrm{X}] & \mapsto & h(\mathrm{X}) \\ \mathrm{Spec}(k) & \mapsto & [\mathrm{Spec}(k)] & \mapsto & \mathbf{1} \end{array}$$

On note $\mathbf{1}$ l'image du point $\mathrm{Spec}(k)$ dans $\mathrm{Mot}^{\mathrm{eff}}_{\sim}(k, \mathrm{A})$. C'est le motif unité. Que se passe-t-il si je pars de $\mathbb{P}^1$? La droite projective $\mathbb{P}^1$ a un point rationnel, et même beaucoup de points rationnels, on peut choisir 0, 1, ∞, ou d'autres... On a la projection de $\mathbb{P}^1$ sur $\mathrm{Spec}(k)$ et ce point rationnel donne quelque chose qui va dans l'autre sens :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}^1 \arrow[d, shift left] \\ \mathrm{Spec}(k) \arrow[u, bend left] \end{tikzcd}$$

Si je compose les deux, j'obtiens un endomorphisme de $\mathbb{P}^1$, ou de $h(\mathbb{P}^1)$, et cet endomorphisme est idempotent. Donc, par la propriété universelle, ça découpe $\mathbf{1}$ dans le motif de $\mathbb{P}^1$. On note $\mathbf{L}$ l'autre facteur :

$$h(\mathbb{P}^1) = \mathbf{1} \oplus \mathbf{L}.$$

En fait, cet autre facteur ne dépend pas du choix du point rationnel, c'est assez facile à voir. C'est le motif de Lefschetz. Nous avons là notre premier exemple non trivial de motif. Un motif pur effectif est essentiellement un facteur direct d'une variété projective lisse.

Question (A. Dimca) :

— Vous avez parlé des catégories additives. En quel sens la catégorie des correspondances est-elle additive ?

— Le groupe $\mathrm{Z}^{\dim \mathrm{Y}}_{\sim}(\mathrm{X} \times \mathrm{Y}, \mathrm{A})$ des correspondances de X vers Y est un groupe abélien, c'est même un A-module, et la composition des correspondances est A-bilinéaire. La catégorie des correspondances est donc même une catégorie A-linéaire. Il y a des sommes directes finies parce qu'on peut prendre des réunions disjointes de variétés projectives lisses.

Catégorie des motifs

Il faut que je définisse $\mathrm{Mot}_\sim(k, \mathrm{A})$. Ce que je ne vous ai pas encore dit, c'est que sur les catégories que je vous ai définies, il y a une structure supplémentaire très importante, c'est la structure tensorielle. Sur les variétés projectives lisses, il y a le produit de variétés. Au niveau des correspondances, on définit la structure tensorielle ainsi :

$$[\mathrm{X}] \otimes [\mathrm{Y}] := [\mathrm{X} \times_k \mathrm{Y}]$$

et pour les morphismes, cela se passe bien, on peut faire un produit tensoriel des correspondances, c'est simplement le produit extérieur des cycles. Et puis quand on a une catégorie additive ou A-linéaire, munie d'une structure monoïdale symétrique et qu'on prend son enveloppe pseudo-abélienne, la structure monoïdale symétrique passe à l'enveloppe pseudo-abélienne, c'est automatique. Pour nous,

$$h(\mathrm{X}) \otimes h(\mathrm{Y}) := h(\mathrm{X} \times_k \mathrm{Y}).$$

Ce ne sont pas des théorèmes mais des définitions. Le théorème, c'est que ces définitions passent au niveau des morphismes. Mais ce n'est pas un théorème difficile.

Maintenant, je m'intéresse à $\mathbf{L}$, le motif de Lefschetz déjà défini. On constate que le foncteur $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{M} \otimes \mathbf{L}$ de $\mathrm{Mot}^{\mathrm{eff}}$ dans $\mathrm{Mot}^{\mathrm{eff}}$ est pleinement fidèle, c'est-à-dire qu'il est bijectif sur les groupes de morphismes. Ce n'est pas très difficile, ça résulte simplement du calcul des groupes de classes de cycles de $\mathrm{X} \times_k \mathbb{P}^1$. Quand on a un objet $\mathbf{L}$ d'une catégorie tensorielle qui a cette propriété-là, on dit que $\mathbf{L}$ est quasi-inversible. Et alors le passage des motifs effectifs $\mathrm{Mot}^{\mathrm{eff}}$ aux motifs Mot consiste simplement à rendre inversible ce motif quasi-inversible : on inverse le motif de Lefschetz $\mathbf{L}$. De nouveau, c'est une construction qui n'a rien à voir avec la géométrie, qui est complètement catégorique. De manière générale, on peut poser la définition suivante.

Définition 4. Soient $\mathscr{A}$ une catégorie tensorielle, c'est-à-dire ici une catégorie monoïdale symétrique, et $\mathbf{L}$ un objet de $\mathscr{A}$. On définit $\mathscr{A}[\mathbf{L}^{-1}]$ ainsi :

– les objets sont les couples (M, m) où M est un objet de $\mathscr{A}$ et $m \in \mathbb{Z}$ (alors secrètement, (M, m) est identifié à $M \otimes \mathbf{L}^m$, mais on ne le sait pas encore),

– les morphismes sont définis par :

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}[\mathbf{L}^{-1}]}((M, m), (N, n)) := \varinjlim_{k \geqslant -m, -n} \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(M \otimes \mathbf{L}^{k+m}, N \otimes \mathbf{L}^{k+n})$$

où les morphismes de transition découlent de la fonctorialité de l'endofoncteur $- \otimes \mathbf{L}$ de $\mathscr{A}$. Munie du foncteur

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{A} & \to & \mathscr{A}[\mathbf{L}^{-1}] \\ M & \mapsto & (M, 0) \end{array} \quad ,$$

cette catégorie est caractérisée par une propriété universelle que nous ne précisons pas.

Dans le cas particulier où $\mathbf{L}$ est quasi-inversible, tous les morphismes de transition sont des isomorphismes, et cela ne sert à rien de prendre la limite inductive (mais c'est plus joli de présenter les choses ainsi et cela donne une fonctorialité). Nous pouvons maintenant écrire :

Définition 5.

$$\mathrm{Mot} := \mathrm{Mot}^{\mathrm{eff}}[\mathbf{L}^{-1}].$$

Le foncteur de $\mathrm{Mot}^{\mathrm{eff}}$ vers Mot est pleinement fidèle, d'après ce qui vient d'être vu. Le motif $(\mathbf{1}, -1)$ est aussi noté $\mathbf{L}^{-1}$, ou encore $\mathbf{T}$, et s'appelle le *motif de Tate*.

Ce qui n'est pas tout à fait évident, c'est que la structure tensorielle de $\mathrm{Mot}^{\mathrm{eff}}$ passe à Mot. Si vous y réfléchissez un peu, vous verrez qu'il s'agit d'une espèce de problème de calcul de fractions. En fait, il semble que c'est Voevodsky qui le premier a dégagé la condition précise qui intervient. Dans le cadre de la définition 4, on a une action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathbf{L}^{\otimes n}$ pour tout $n \geqslant 1$ (puisque $\mathscr{A}$ est monoïdale symétrique). La condition de Voevodsky est que l'action du groupe *alterné* $\mathfrak{A}_n$ sur $\mathbf{L}^{\otimes n}$ doit devenir triviale dans $\mathscr{A}[\mathbf{L}^{-1}]$. Il suffit bien sûr que cela soit vrai pour $n = 3$. Dans le cas des motifs, c'est déjà l'action de $\mathfrak{S}_2$ sur $\mathbf{L}^{\otimes 2}$ qui est triviale dans $\mathrm{Mot}^{\mathrm{eff}}$: cela se voit très facilement.

Conjectures standard

Motivation

Voilà, maintenant, vous savez ce que sont les motifs. Pourquoi a-t-on fait tout ça ? Pourquoi n'est-on pas resté par exemple au niveau des correspondances ? Il y a pour cela une raison qui a l'air très technique (pour le moment), c'est que l'on a le résultat suivant.

Théorème 4. *La catégorie* Mot *est rigide.*

Que signifie rigide pour une catégorie monoïdale symétrique, ou même A-linéaire ? Cela signifie essentiellement que tout objet a un dual et que tout objet est canoniquement isomorphe à son bidual. C'est un peu comme les espaces de dimension finie sur un corps. En fait, on verra que c'est plutôt comme les espaces gradués de dimension finie sur un corps.

J'ai appelé ce résultat théorème, cela a l'air impressionnant, mais en fait c'est très facile à démontrer. Il n'y a pratiquement rien dans ce théorème. Par exemple, quel est le dual du motif de X ? C'est $h(\mathrm{X})^\vee = h(\mathrm{X})(-d)$, où $h(\mathrm{X})(-d)$ désigne $h(\mathrm{X}) \otimes \mathbf{L}^{-d}$ (d étant la dimension de X).

Je devrais tout de même vous avertir d'une chose : il y a plusieurs conventions dans la littérature pour les notations. Si vous regardez dans la lignée des travaux de Grothendieck, on préfère y définir le foncteur qui va des variétés projectives lisses vers les correspondances comme un foncteur contravariant, parce que la philosophie des motifs ici, c'est que cette catégorie des motifs est une catégorie qui reçoit une théorie cohomologique universelle. Donc $h(\mathrm{X})$, c'est de la cohomologie, et la cohomologie, c'est contravariant. Moi, j'adopte le point de vue covariant (je vous ai bien écrit que $[\Gamma_{g\circ f}] = [\Gamma_g] \circ [\Gamma_f]$) parce que je me suis habitué à ce point de vue, c'est celui que prend Voevodsky. Philosophiquement c'est une autre perspective : c'est dire qu'un motif est, non pas de la cohomologie, mais une généralisation d'une variété, c'est quelque chose qui élargit la notion de variété. C'est un peu différent. Dans son livre, Fulton adopte aussi cette convention covariante pour les correspondances.

Donc ça, c'est la première différence de conventions. La deuxième, c'est le signe devant d dans $h(\mathrm{X})(-d)$. Dans la littérature, ce que je note $h(\mathrm{X})(-d)$, vous le trouverez plus souvent écrit $h(\mathrm{X})(d)$, pour des raisons de compatibilité avec la cohomologie. Alors que dans ce que je vous raconte, et aussi dans la pratique, je préfère mettre comme signe du twist le signe de la puissance de **L** qui intervient, plutôt que l'opposé de ce signe, parce que cela allège la notation et la rend compatible avec celle de Voevodsky dans ses catégories triangulées de motifs. Quoi qu'il en soit, le dual du motif de X, c'est simplement un twist à la Tate ou à la Lefschetz du motif de X.

Nous allons arriver à un premier résultat non trivial. Qu'est-ce qui est non trivial dans ce que je vous ai raconté jusqu'à maintenant ? C'est la théorie de l'intersection. C'est-à-dire le fait que quand on passe à l'équivalence rationnelle, on peut définir un produit d'intersection correctement, on peut faire des *pullbacks* pour des morphismes quelconques, etc. Ça, c'est de la géométrie pas très facile. Il y a, derrière cela, soit le lemme de déplacement de Chow, soit les méthodes de Fulton et MacPherson (déformation au cône normal, etc.). Il y a aussi le calcul des groupes de cycles des espaces projectifs. Le reste est entièrement formel, c'est élémentaire. Voilà un théorème important, qui en fait n'est pas très difficile, mais qui n'est pas élémentaire.

Théorème 5 (Jannsen, [J]). *Si l'on prend comme relation d'équivalence l'équivalence numérique, alors la catégorie* $\mathrm{Mot}_{num}(k,\mathbb{Q})$ *est abélienne semi-simple.*

Au lieu de $\mathbb{Q}$, on pourrait prendre n'importe quel corps de caractéristique zéro. Ce théorème est remarquable d'abord parce qu'il est très utile. Mais surtout, ça a été la surprise totale lorsque Jannsen l'a démontré en 1991 parce que, jusque-là, on pensait que l'on obtiendrait ce théorème grâce aux conjectures standard de Grothendieck. Et Jannsen l'a démontré directement.

Alors que sont ces fameuses conjectures standard ? Nous allons revenir sur ce dont j'ai parlé au début, les conjectures de Weil, etc. Je vous avais expliqué que Weil avait deux méthodes pour démontrer ces conjectures dans le cas des courbes ou des variétés abéliennes. Il y avait une méthode ℓ-adique et une méthode avec des correspondances. Après la formulation de ces conjectures, un article de Serre [Se], qui est à l'origine une lettre à Weil, a eu beaucoup d'influence sur le sujet : il montre que la méthode de Weil « passe » aux variétés kählériennes sur $\mathbb{C}$, à condition d'utiliser des correspondances données par des classes de cohomologie respectant les structures de Hodge. Grothendieck, et aussi Bombieri, ont pris cet « analogue kählérien » au sérieux et l'ont transposé aux correspondances algébriques. Simplement, là, on ne sait pas démontrer les résultats de Serre. Et cela a donné les conjectures standard.

Le point de vue de Grothendieck était que, pour démontrer la dernière conjecture de Weil, celle que l'on n'arrivait pas à démontrer uniquement avec la cohomologie ℓ-adique (c'est-à-dire ce que l'on appelle l'hypothèse de Riemann en caractéristique p, qui énonce que les valeurs absolues des valeurs propres du Frobenius sont égales à $q^{i/2}$ en dimension i), il fallait d'abord démontrer les conjectures standard ; ensuite, tout est formel, par les arguments de Serre. Aujourd'hui les conjectures standard ne sont toujours pas démontrées. En fait, elles bloquent la théorie des motifs, même purs. C'est pour cela que les gens sont toujours gênés quand on parle de motifs. En revanche, la dernière conjecture de Weil a été démontrée par Deligne, à l'aide de la cohomologie ℓ-adique. Il y a une différence de point de vue entre Grothendieck et Deligne : on sent que le premier pense qu'il faut se passer de la cohomologie, tandis que le second pense qu'on ne peut pas s'en passer, que la cohomologie est là. En fait, pour démontrer un énoncé parfaitement simple, mais important, qui est que les groupes de cycles modulo l'équivalence numérique $\mathrm{Z}^p_{\mathrm{num}}(\mathrm{X},\mathbb{Z})$ sont des groupes abéliens de type fini, on ne connaît pas de démonstration qui n'utilise pas l'existence d'une cohomologie de Weil. C'est un énoncé qui n'a rien à voir avec la cohomologie, c'est un énoncé purement de théorie des cycles algébriques. Et c'est pareil pour le théorème de Jannsen, sa démonstration n'est pas très difficile, mais elle utilise de manière essentielle l'existence d'une cohomologie de Weil. Donc, si on a envie de prendre parti dans ce débat philosophique, cela donnerait un argument dans un sens.

Alors maintenant, que sont les conjectures standard ? Pourquoi sont-elles importantes ? Vous pourriez dire que maintenant que la dernière conjecture de Weil est démontrée, c'est de l'histoire. Non, ce n'est pas de l'histoire parce que Grothendieck allait beaucoup plus loin que les conjectures de Weil. Il avait une philosophie des motifs et il voulait faire ce qu'il appelait une théorie de Galois motivique.

Théorie de Galois motivique

De quoi s'agit-il ? Il faut que je vous parle de catégories tannakiennes.

Définition 6. Une catégorie $\mathscr{A}$ est dite tannakienne si elle est abélienne, K-linéaire (K étant un corps de caractéristique 0), tensorielle, rigide et s'il existe un foncteur

$$\omega : \mathscr{A} \to \mathrm{Vec}_{\mathrm{L}},$$

appelé foncteur fibre, de $\mathscr{A}$ vers les espaces vectoriels de dimension finie sur un corps $\mathrm{L} \supset \mathrm{K}$, ce foncteur étant tensoriel, fidèle (i.e. injectif sur les morphismes) et exact (i.e. exact au sens des catégories abéliennes).

Si on peut choisir $\mathrm{L} = \mathrm{K}$, on dit que $\mathscr{A}$ est neutre, et qu'elle est neutralisée par ω. Dans ce cas, on considère le groupe $\mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega)$ des automorphismes du foncteur ω qui respectent les structures tensorielles. Il est représentable par un K-schéma en groupes affine G. On peut alors enrichir le foncteur ω en un foncteur qui va de $\mathscr{A}$ vers les représentations de dimension finie de G sur K :

$$\mathscr{A} \xrightarrow{\tilde{\omega}} \mathrm{Rep}_{\mathrm{K}}(\mathrm{G}) \hookrightarrow \mathrm{Vec}_{\mathrm{K}}.$$

Théorème 6 (Saavedra, [Sa])**.** $\tilde{\omega}$ *est une équivalence de catégories.*

Ainsi la définition 6, qui a l'air *a priori* un peu farfelue, devient frappante : si on impose la condition de neutralité de $\mathscr{A}$, apparemment innocente, alors $\mathscr{A}$ est simplement la catégorie des représentations de dimension finie d'un K-schéma en groupes affine. C'est tout l'intérêt des catégories tannakiennes.

On n'a pas toujours la chance d'avoir un foncteur fibre à coefficients dans K. Si $\mathrm{L} = \mathrm{K}$ n'est pas possible, on peut aussi faire une théorie, mais c'est plus difficile, il faut classifier $\mathscr{A}$ par une gerbe (à la Giraud). Ceci est dû à Saavedra et Deligne. Saavedra avait fait une faute dans sa thèse (l'erreur est citée dans [DM], pages 102 et 160–161) et la faute a finalement été corrigée par Deligne, 20 ans plus tard [D4]. Je ne vais évidemment pas vous parler ici de gerbes, de H^2 non abélien (c'est le monde dans lequel cette chose-là vit), etc.

Le début de la théorie des motifs dont je vous ai parlé était élémentaire. Mais la théorie tannakienne n'est absolument pas élémentaire. Dans le cas neutre, il est très difficile de démontrer le théorème 6. Et dans le cas non neutre, c'est beaucoup plus difficile encore, ainsi que la théorie qu'il y a derrière, la cohomologie non abélienne.

Deux conjectures standard

Revenons aux motifs. Idéalement, la catégorie abélienne semi-simple rigide $\mathrm{Mot}_{\mathrm{num}}(k, \mathbb{Q})$ est tannakienne, de foncteurs fibres donnés par les cohomologies de Weil (M, H). Ça, c'est la vision de Grothendieck. À ce moment-là, il peut faire de la théorie de Galois motivique. Commençons par le cas, simple à comprendre, où on peut choisir L = K, donc ici L = $\mathbb{Q}$. Cela se produit en caractéristique 0, puisqu'on a la cohomologie de Betti, qui est à coefficients rationnels. Alors on a un groupe de Galois motivique clair et net, et comme la catégorie se trouve être la catégorie des représentations du groupe de Galois motivique, cela permet de comprendre les variétés algébriques simplement par la théorie des représentations, donc de faire un peu ce qu'on fait avec la théorie de Galois pour les extensions de corps. Ce n'est pas tout à fait pareil, mais enfin cela y ressemble beaucoup. Et maintenant vous avez l'explication de mon analogie de l'introduction : les particules élémentaires pour les variétés projectives lisses sont les objets simples de cette catégorie $\mathrm{Mot}_{\mathrm{num}}(k,\mathbb{Q})$. Toute variété projective lisse a un motif là-dedans et ce motif se décompose canoniquement en somme directe de motifs simples, et comme la catégorie est semi-simple, il n'y a pas de problèmes d'extensions.

Un exemple où L = K n'est pas possible, c'est en caractéristique p, puisqu'en caractéristique p on n'a pas de cohomologie de Weil à coefficients rationnels (rappelez-vous l'objection de Serre). Donc, la catégorie des motifs purs sur un corps fini, le jour où les conjectures standard seront démontrées, sera une catégorie tannakienne non neutre. Il y aura des gerbes, mais ce n'est pas trop méchant, parce que le groupe de Galois est essentiellement abélien.

Tout ceci est bien beau mais il y a un problème. Il y en a même deux. Pour l'instant, on ne sait pas démontrer que la catégorie $\mathrm{Mot}_{\mathrm{num}}(k,\mathbb{Q})$ est tannakienne. Et en fait, vous allez voir qu'on ne *peut* pas le démontrer. Quels sont ces problèmes ?

J'ai la catégorie des motifs modulo l'équivalence numérique, et puis j'ai une cohomologie de Weil H. Le foncteur qui va vers les espaces vectoriels sur K, corps des coefficients de ma cohomologie de Weil, part, *a priori*, des motifs modulo l'équivalence homologique :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Mot}_{\mathrm{H}} \arrow[r, "\mathrm{H}"] \arrow[d] & \mathrm{Vec}_{\mathrm{K}} \\ \mathrm{Mot}_{\mathrm{num}} & \end{tikzcd}$$

où H est, par définition, fidèle. Or les groupes de correspondances modulo l'équivalence homologique sont plus gros que les groupes modulo l'équivalence numérique. On voulait un foncteur qui part de $\mathrm{Mot}_{\mathrm{num}}$, et on en a un qui part d'un peu au-dessus, de $\mathrm{Mot}_{\mathrm{H}}$. Donc, le premier problème s'énonce :

$$\text{(C1)} : \boxed{\text{Équivalence homologique = équivalence numérique.}}$$

C'est la première conjecture standard de cet exposé. C'est une condition nécessaire et suffisante pour pouvoir factoriser H par $\mathrm{Mot}_{\mathrm{num}}$, et cela revient à demander que le foncteur $\mathrm{Mot}_{\mathrm{H}} \to \mathrm{Mot}_{\mathrm{num}}$ soit une équivalence de catégories.

Il y a un deuxième problème, qui est un peu plus subtil. Le foncteur $\mathrm{Mot}_{\mathrm{H}} \xrightarrow{\mathrm{H}} \mathrm{Vec}_{\mathrm{K}}$ prend ses valeurs en fait dans les espaces vectoriels gradués : $\mathrm{Mot}_{\mathrm{H}} \xrightarrow{\mathrm{H}^*} \mathrm{Vec}_{\mathrm{K}}^*$. C'est une théorie graduée. Qu'est-ce qu'un $\otimes$-foncteur (ou foncteur tensoriel) ? J'ai caché pas mal de choses. Un $\otimes$-foncteur, d'une catégorie monoïdale symétrique dans une autre, est un foncteur qui doit vérifier un certain nombre de conditions. Il doit commuter aux produits tensoriels, dans les deux catégories. Mais d'autre part, « monoïdale symétrique » contient aussi une condition d'associativité, qui s'appelle contrainte d'associativité, et une contrainte de commutativité. Ce foncteur doit commuter aux deux contraintes. La contrainte de commutativité naturelle sur $\mathrm{Mot}_{\mathrm{H}}$ est donné simplement par $\mathrm{X} \times \mathrm{Y} \simeq \mathrm{Y} \times \mathrm{X}$. Mais sur les espaces vectoriels gradués, la contrainte de commutativité est donnée par la règle de Kozsul : c'est-à-dire que si vous considérez deux classes de cohomologie α et β, on a

$$\alpha \cdot \beta = (-1)^{|\alpha||\beta|} \beta \cdot \alpha,$$

où $|\cdot|$ désigne le degré de la classe considérée. C'est par cette règle que le $\otimes$-foncteur respecte les contraintes de commutativité. Ceci empêche que H^* soit un foncteur fibre. En effet, sans trop entrer dans les détails, on peut définir pour tout objet A d'une catégorie rigide $\mathscr{A}$, une dimension $\dim(\mathrm{A})$ qui appartient à $\mathrm{End}(\mathbf{1})$. Cette dimension peut se calculer à travers tout foncteur fibre $\mathscr{A} \xrightarrow{\omega} \mathrm{Vec}_{\mathrm{L}}$:

$$\dim \mathrm{A} = \dim \omega(\mathrm{A}) \in \mathbb{N};$$

c'est un entier positif ou nul car $\omega(\mathrm{A})$ est un espace vectoriel de dimension finie sur un corps. Donc, dans une catégorie tannakienne, la dimension de tout objet est un entier positif ou nul. Mais ce que l'on obtient pour un objet $h(X)$ de Mot_H avec le foncteur H^*, c'est la caractéristique d'Euler-Poincaré de X, calculée par rapport à ma théorie de Weil :

$$\dim\ h(X) = \chi(X) \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Or la caractéristique d'Euler-Poincaré n'est pas un entier positif, en général. Par exemple, pour une courbe X de genre g, on a $\chi(X) = 2-2g$. C'est bien un entier, mais il peut être négatif. Donc, les catégories Mot_H et $\mathrm{Mot}_{\mathrm{num}}$ ne *peuvent pas* être tannakiennes. Pour résoudre ce problème, il faut modifier la contrainte de commutativité, de façon à ce que ce foncteur commute aux deux contraintes, mais en remplaçant la règle de Kozsul par la règle où il n'y a pas de signe. Et ceci conduit à la deuxième conjecture standard que je vais exposer qui est l'algébricité des projecteurs de Künneth.

De quoi s'agit-il ? On a un isomorphisme canonique facile à démontrer, à coup de formule de Künneth et de dualité de Poincaré :

$$H^{2\dim(Y)}(X \times Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{gr}}(H^*(Y), H^*(X)),$$

où X et Y sont deux variétés et $\mathrm{Hom}_{\mathrm{gr}}(\cdot,\cdot)$ désigne le groupe gradué des homomorphismes entre deux objets gradués. Si l'on prend X = Y par exemple, le groupe de droite contient des homomorphismes gradués particuliers, les projecteurs $\pi_i : H^*(X) \twoheadrightarrow H^i(X) \hookrightarrow H^*(X)$. Ce sont des idempotents centraux. Et puis on a l'application cycle

$$Z_H^{\dim(Y)}(X \times Y) \longrightarrow H^{2\dim(Y)}(X \times Y)$$

qui définit l'action des correspondances sur la cohomologie, si vous voulez. La deuxième conjecture dont je parle est alors :

$$\text{(C2)} : \boxed{\text{Les } \pi_i \text{ sont algébriques (ils proviennent de } Z_H^{\dim(Y)}(X \times Y)).}$$

Si on a ces deux conjectures standard, on peut appliquer le programme des motifs.

Pour voir l'efficacité de cette théorie, vous vous souvenez que $\dim H^i(X)$ ne dépend pas de la cohomologie de Weil H lorsque celle-ci est classique. C'était une conséquence de résultats profonds et difficiles : théorèmes de comparaison, hypothèse de Riemann. Mais le raisonnement de rigidité (formule (1)) montre *a priori* que la caractéristique d'Euler-Poincaré ne dépend pas du choix de H, que H soit classique ou non. Et la conjecture C2 impliquerait, plus précisément, que $\dim H^i(X)$ ne dépend pas de H, que H soit classique ou non !

Conjecture B

Là j'ai énoncé les conjectures standard qui m'intéressent pour faire un exposé facile à comprendre. Il y en a deux autres qui sont importantes dans cette histoire. Je ne parlerai pas du tout de l'une des deux : la conjecture standard de type Hodge (à ne pas confondre avec la conjecture de Hodge !). Cette conjecture est vraie en caractéristique zéro. Quant à l'autre, je n'ai vraiment pas le temps de l'expliquer non plus, c'est la « conjecture B » (en abrégé : (CB)), encore appelée conjecture de type Lefschetz. C'est une conjecture qui est entre les deux précédentes :

$$(C1) \Rightarrow (CB) \Rightarrow (C2)$$

Cela montre au moins que la conjecture C1 implique la conjecture C2. Réciproquement, en caractéristique 0, la conjecture CB implique la conjecture C1. Donc, en caractéristique 0, il n'y a qu'une conjecture standard : l'équivalence homologique est égale à l'équivalence numérique. D'ailleurs, en caractéristique 0, vous voyez que c'est encore mieux puisque toutes les cohomologies de Weil classiques sont équivalentes par les isomorphismes de comparaison. Donc, si on a la conjecture C1 pour l'une d'entre elles, on l'a pour les autres. Alors qu'en caractéristique p, ce n'est pas évident, c'est *a priori* une conjecture pour chaque cohomologie de Weil.

Qu'est-ce qui est connu sur ces conjectures ? Pour commencer, la conjecture C2 est vraie sur $\mathbb{F}_q$. Ironie de l'histoire, c'est une conséquence de la démonstration par Deligne de la dernière conjecture de Weil. Ceci est encore dû à Katz-Messing [KM]. Grothendieck espérait démontrer les conjectures de Weil, enfin la dernière, grâce aux conjectures standard, mais en fait, on démontre une des conjectures standard sur un corps fini grâce aux conjectures de Weil ! Quant à l'autre, même sur $\mathbb{F}_q$ elle est entièrement ouverte. Tout de même, d'après Lieberman et Kleiman (voir [Li] et [Kl1]), la conjecture CB est vraie pour les variétés abéliennes, et donc la conjecture C1 est vraie pour les variétés abéliennes en caractéristique 0. Pour plus de détails sur les conjectures standard, voir [Kl2], dans les actes d'une conférence de Seattle en 1991, qui a été très importante dans le développement du sujet.

Contournement des conjectures standard

Ces conjectures sont liées d'assez près à des conjectures qui vous sont peut-être plus familières : la conjecture de Hodge (CH) sur $\mathbb{C}$, et la conjecture de Tate (CT) sur un corps de type fini quelconque *a priori*, mais je vais me limiter à un corps fini $\mathbb{F}_q$. Je ne vais pas les rappeler, ce serait trop long, mais disons qu'elles impliquent la conjecture C1, sur $\mathbb{C}$ et $\mathbb{F}_q$ respectivement.

Réciproquement, Yves André a montré (cf [A3]) :

$$\begin{gathered}\text{(CB) pour les variétés projectives lisses}^{(3)}\\ \Downarrow \\ \text{(CH) pour les variétés abéliennes sur } \mathbb{C}\\ \text{(CT) pour les variétés abéliennes sur } \mathbb{F}_q\end{gathered}$$

Cela fait partie de sa théorie des *cycles motivés*. Là, je fais un raccourci particulièrement radical de l'histoire, je suis injuste vis-à-vis de beaucoup de gens. Il faut que je rentre un peu plus dans les détails. Ce théorème est le point culminant du travail de nombreux mathématiciens dont le projet commun est de contourner les conjectures standard. Dans les années 1970, Grothendieck avait quitté les mathématiques, mais il avait fasciné et inspiré beaucoup de monde par sa philosophie des motifs ; les gens étaient alors coincés par les conjectures standard (on n'avait même pas le théorème de Jannsen), mais ils voulaient tout de même avancer. Il y avait une théorie des motifs, mais on n'arrivait pas à s'en sortir. Donc Deligne, en particulier, a décidé de faire une théorie des motifs qui soit *inconditionnelle* : c'est la théorie des cycles de Hodge absolus (voir [D3]). L'idée, en gros, est que si la conjecture de Hodge est vraie, alors tout marche bien. On travaille donc avec les cycles de Hodge, c'est-à-dire les classes de cohomologie, dans la cohomologie de Betti, qui sont de type (p,p) et à coefficients rationnels, donc qui, d'après la conjecture de Hodge, doivent être algébriques. On va utiliser ces cycles, mais on va le faire de manière assez subtile, parce qu'on considère des variétés sur des corps de nombres : il faut considérer toutes les cohomologies de Weil classiques ensemble, et prendre des cycles qui sont compatibles entre eux par les isomorphismes de comparaison, que Deligne nomme *cycles de Hodge absolus*. Et il démontre dans [DM] qu'en prenant pour objets les variétés projectives lisses et pour morphismes les correspondances données par les

[3] En fait, pour un type très particulier de variétés projectives lisses. (N.d.A.)

cycles de Hodge absolus, on obtient une catégorie dans laquelle l'analogue des conjectures standard est vrai ; en particulier on a un groupe de Galois motivique. Quand quelqu'un qui fait de l'arithmétique vous parle de motifs et ensuite parle de la fonction L d'un motif, il a en général en tête les motifs de Deligne en ce sens. Et Deligne a démontré le théorème remarquable suivant.

Théorème 7 (Deligne, [D3])**.** *Sur une variété abélienne* A *définie sur un corps de nombres, tout cycle de Hodge est un cycle de Hodge absolu.*

Ceci est vrai pour tout plongement complexe, et si je transporte ce cycle dans la cohomologie ℓ-adique par l'isomorphisme de comparaison, alors j'obtiens un cycle de Tate. En particulier, sur A, la conjecture de Tate implique la conjecture de Hodge.

L'idée suivante est d'Yves André : il s'agit des cycles motivés. L'idée est la même que celle de Deligne : ne pas considérer seulement les cycles algébriques, mais ajouter des cycles qu'on espère être algébriques et démontrer que cela fait une catégorie avec laquelle on peut travailler sans conjectures. André ajoute moins de cycles que Deligne. Il n'ajoute que des involutions de Lefschetz. Je ne vais pas vous dire ce que sont les involutions de Lefschetz : ce sont certaines classes de cohomologie transcendantes, les inverses des opérateurs de Lefschetz, et la conjecture CB de tout à l'heure prédit précisément que ces cycles sont algébriques. Il appelle les classes de cohomologie ainsi obtenues *cycles motivés.* Le théorème inconditionnel d'Yves André est un renforcement du théorème de Deligne :

Théorème 8 (André, [A1])**.** *Tout cycle de Hodge sur une variété abélienne* A *sur un corps de nombres est motivé.*

Ensuite, il y a un théorème de Milne.

Théorème 9 (Milne, [M])**.** *La conjecture de Hodge pour toute variété abélienne complexe de type CM implique la conjecture de Tate pour toute variété abélienne sur un corps fini.*

C'est un très joli théorème qui utilise à fond la théorie tannakienne, des raisonnements fins, et puis la théorie des variétés abéliennes de type CM, qui n'est pas très évidente (Shimura-Taniyama). A partir de là, en utilisant le théorème 8 et le travail de Milne, et en le raffinant, André arrive à démontrer le résultat suivant.

Théorème 10 (André, [A3]). *Sur $\mathbb{F}_q$, tout cycle de Tate sur une variété abélienne est motivé.*

Ces théorèmes disent que, au moins pour des variétés abéliennes (parce que c'est à peu près les seules variétés avec lesquelles on sache travailler), on n'est pas trop loin des conjectures.

Ceci dit, la conjecture de Hodge et la conjecture de Tate sont démontrées pour beaucoup de variétés abéliennes. Déjà, la conjecture de Hodge est vraie en codimension 1 pour toute variété, et la conjecture de Tate est vraie en codimension 1 sur des variétés abéliennes sur tout corps de type fini. Sur un corps fini, c'est dû à Tate (voir [T]), sur un corps de type fini de caractéristique $p > 0$, c'est dû à Zarhin (voir [Z1] et [Z2]), sur un corps de type fini de caractéristique 0, c'est dû à Faltings (voir [Fa1] et le chapitre VI dans [Fa2]) — ça lui a valu la médaille Fields. À partir de là, si vous avez par exemple une variété abélienne qui a la chance que l'algèbre des cycles de Hodge soit engendrée par des cycles de codimension 1, alors on en déduit immédiatement que la conjecture de Hodge est vraie pour cette variété. Idem pour la conjecture de Tate.

Exemple 3. *Si l'on considère un produit de courbes elliptiques, alors sur $\mathbb{C}$ la conjecture de Hodge est vraie (c'est classique), et sur $\mathbb{F}_q$ la conjecture de Tate est vraie (c'est dû à Spiess, voir [Sp]).*

Cela se fait par la méthode que j'ai indiquée : on démontre que tout cycle de Hodge est une somme de produits de cycles de Hodge de codimension 1, et on fait de même pour les cycles de Tate.

Il y a une autre manière de contourner les conjectures standard, opposée en quelque sorte aux méthodes de Deligne et d'André : elle consiste à construire une *section tensorielle* du foncteur de projection $\mathrm{Mot}_{\mathrm{H}} \to \mathrm{Mot}_{\mathrm{num}}$ [AK2]. Pour obtenir un énoncé inconditionnel, on se restreint en fait aux motifs pour lesquels la somme des projecteurs de Künneth de degré pair (ou impair, cela revient au même) est algébrique. Alors la section existe et est unique à conjugaison tensorielle près, par les résultats généraux de [AK]. Les deux approches, celle-ci et celle de Deligne/André, fournissent inconditionnellement un groupe de Galois motivique, l'un « plus petit » et l'autre « plus gros », qui sont bien sûr conjecturalement égaux...

Motifs mixtes

Je vous ai décrit la théorie pure pour les variétés projectives lisses : pour parler de la théorie mixte pour les autres variétés, il faudrait carrément une autre séance !

Juste deux mots. Les variétés quelconques ne peuvent pas être classifiées par une catégorie *semi-simple* à cause d'extensions non triviales qu'on observe déjà sur la cohomologie. On espère néanmoins une catégorie tannakienne de motifs mixtes contenant celle des motifs purs : en particulier elles auraient les mêmes objets simples. Grothendieck avait des idées sur la nature de cette catégorie, mais pas sur la manière de la construire. À l'heure actuelle il y a deux stratégies pour cela :

a) Construire une catégorie triangulée qui serait munie d'une t-structure « motivique » (voir [Ve] pour la notion de catégorie triangulée et [BBD] pour celle de t-structure) : la catégorie *abélienne* des motifs mixtes serait alors le cœur de cette t-structure. Cette approche est celle proposée par Beilinson-Deligne.

La catégorie triangulée existe, il y en a même plusieurs versions, dues à Hanamura, Levine et Voevodsky (on sait montrer que celles de Levine et de Voevodsky sont équivalentes quand le corps de base est de caractéristique 0). Quant à la t-structure, c'est une autre histoire : son existence impliquerait entre autres la conjecture d'annulation de Beilinson-Soulé...

b) La catégorie de Nori. Il s'agit d'une catégorie abélienne tannakienne, construite sur un corps de caractéristique 0. La différence avec a) est que les catégories de a) sont construites en termes de cycles algébriques, alors que celle de Nori se fonde sur la cohomologie singulière.

Sortant a priori du programme, il y a aussi la catégorie homotopique et la catégorie homotopique stable des schémas de Morel et Voevodsky, qui font l'objet de la Leçon de Fabien Morel. Très brièvement, on y « fait » de la topologie algébrique avec les variétés algébriques. C'est à l'aide de cette catégorie que Voevodsky a démontré la conjecture de Milnor, ce qui lui a valu (avec le reste de ses travaux) la médaille Fields...

Deux applications

Avant de m'arrêter, je vais vous donner deux applications qui montrent que la théorie des motifs, « ça sert ». Toutes les deux sont sur un corps fini.

Conjecture de Tate et conjecture de Beilinson

Si on est sur un corps fini $\mathbb{F}_q$, il y a deux conjectures. La conjecture de Tate, dont une forme énonce que, pour une variété projective lisse X et un entier $n \geqslant 0$, l'ordre du pôle en $s = n$ de la fonction zêta de X est égal au rang du groupe des cycles en codimension n pour l'équivalence numérique :

$$\mathrm{ordre}_{s=n}\ \zeta(X, s) = -\,\mathrm{rang}\ Z^n_{\mathrm{num}}(X).$$

La deuxième conjecture est la conjecture de Beilinson. Elle affirme que l'équivalence rationnelle est égale à l'équivalence numérique. C'est une conjecture extrêmement forte puisque je vous avais dit au début de l'exposé que l'équivalence rationnelle est la plus fine des relations d'équivalence adéquates alors que l'équivalence numérique est la plus grossière. Donc toutes les relations d'équivalence adéquates intermédiaires sont égales sur un corps fini, selon cette conjecture. J'ai démontré le résultat suivant :

Théorème 11 (Kahn, [K1])**.** *Si la conjecture de Tate est vraie pour une variété abélienne* A *sur* $\mathbb{F}_q$*, alors la conjecture de Beilinson est aussi vraie pour* A.

Cela n'a l'air de rien, mais si on met les deux conjectures ensemble, cela devient quelque chose de très puissant, qui donne par exemple des résultats du type suivant.

Corollaire 1 (Kahn, [K1])**.** *Soit* A *une variété abélienne pour laquelle les conjectures de Tate et Beilinson sont vraies. Alors :*

- *le deuxième groupe de Chow de* A*, défini par* $\mathrm{CH}^2(A) := Z^2_{rat}(A, \mathbb{Z})$*, est de type fini,*
- *les groupes* $K_i(A)$ *de* K*-théorie de* A *sont de torsion pour* $i > 0$ *(conjecture de Beilinson-Parshin),*
- *les conjectures de Lichtenbaum sont vraies pour* A.

Les conjectures de Lichtenbaum sont des conjectures beaucoup plus précises, portant non seulement sur l'ordre du zéro de la fonction zêta, mais aussi sur la partie principale. La fonction zêta est une fonction rationnelle de q^{-s}, donc la partie principale va être un nombre rationnel, et Lichtenbaum prédit ce qu'est ce nombre rationnel en termes de cohomologie motivique (je vous avais averti pendant la première partie de l'exposé qu'il ne s'agit pas de la cohomologie motivique dont je vous ai parlé ici, c'est une version de la cohomologie motivique « absolue » à la Lichtenbaum, Beilinson, Voevodsky, Bloch...).

Ceci est vrai, par exemple, pour un produit de courbes elliptiques sur un corps fini. Un ingrédient essentiel dans la démonstration de ce théorème est la théorie des motifs de dimension finie de Kimura et, indépendamment, de O'Sullivan (voir [Ki] ou [AK, §9]).

Nombre de points modulo q sur $\mathbb{F}_q$ [K2]

Cet exemple utilise la notion de *motif birationnel*, développée avec R. Sujatha [KS]. Pour l'instant le corps k est quelconque.

Définition 7. Pour un couple adéquat $(\mathrm{A},\sim)$,

$$\mathrm{Mot}^{\circ}_{\sim}(k,\mathrm{A}) = (\mathrm{Mot}^{\mathrm{eff}}_{\sim}(k,\mathrm{A})/\mathrm{L})^{\natural}.$$

La notation /L signifie qu'on quotiente la catégorie par l'idéal des morphismes qui se factorisent par un multiple tensoriel de L. C'est donc l'idée opposée à celle d'inverser le motif de Lefschetz ! Toute variété projective lisse X a un motif birationnel $\bar{h}(\mathrm{X}) \in \mathrm{Mot}^{\circ}_{\sim}(k,\mathrm{A})$, et deux variétés birationnellement équivalentes ont des motifs birationnels isomorphes (d'où la terminologie). Pour simplifier, je vais supposer que $\mathrm{A} = \mathbb{Q}$. Il y a trois points-clés :

a) Pour l'équivalence rationnelle, on a

$$\mathrm{Hom}(\bar{h}(\mathrm{X}),\bar{h}(\mathrm{Y})) = \mathrm{CH}_0(\mathrm{Y}_{k(\mathrm{X})})\otimes\mathbb{Q}.$$

En particulier, puisque $\mathbf{1}$ est facteur direct de $h(\mathrm{X})$ dans $\mathrm{Mot}^{\mathrm{eff}}_{\sim}(k,\mathbb{Q})$ pour tout X, on a $\bar{h}(\mathrm{X}) \simeq \mathbf{1}$ si et seulement si $\mathrm{CH}_0(\mathrm{X}_{k(\mathrm{X})})\otimes\mathbb{Q} = \mathbb{Q}$.

b) Pour l'équivalence numérique : tout est semi-simple grâce au théorème 5, d'où une suite exacte scindée

$$0 \to \mathrm{K}_0(\mathrm{Mot}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{num}}) \xrightarrow{\cdot[\mathrm{L}]} \mathrm{K}_0(\mathrm{Mot}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{num}}) \to \mathrm{K}_0(\mathrm{Mot}^{\circ}_{\mathrm{num}}) \to 0.$$

Ici, il s'agit de K_0 de catégories additives. C'est une notion très naïve : $\mathrm{K}_0(\mathscr{A})$ est défini par générateurs (les objets de $\mathscr{A}$) et relations (la somme directe). Ces K_0 sont assez proches de ceux considérés par les gens qui font de l'intégration motivique, *cf.* [A2, Ch. 13].

c) Pour $k = \mathbb{F}_q$, la fonction $\mathrm{X} \mapsto |\mathrm{X}(\mathbb{F}_q)|$ se prolonge en un homomorphisme d'anneaux

$$\begin{array}{rcl} \# : \mathrm{K}_0(\mathrm{Mot}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{num}}) & \to & \mathbb{Q} \\ (\mathrm{X},p) & \mapsto & \deg(p\cdot \mathrm{F}_{\mathrm{X}}). \end{array}$$

Il prend a priori ses valeurs dans $\mathbb{Q}$ parce qu'on a pris des coefficients rationnels, mais en fait *il prend ses valeurs dans* $\mathbb{Z}$: cela utilise des résultats profonds de Deligne (théorème d'intégralité, et Weil II)[4].

Comme $\#(\mathrm{L}) = q$, cela implique que $\#$ *induit un homomorphisme d'anneaux*

$$\overline{\#} : \mathrm{K}_0(\mathrm{Mot}^{\mathrm{o}}_{\mathrm{num}}) \to \mathbb{Z}/q.$$

De là, on retrouve immédiatement deux résultats frappants :

1. $\mathrm{CH}_0(\mathrm{X}_{\mathbb{F}_q(\mathrm{X})}) \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q} \Rightarrow |\mathrm{X}(\mathbb{F}_q)| \equiv 1 \pmod q$ (théorème d'Hélène Esnault, [E]) ;
2. X, Y birationnellement équivalentes $\Rightarrow |\mathrm{X}(\mathbb{F}_q)| \equiv |\mathrm{Y}(\mathbb{F}_q)| \pmod q$ (théorème d'Ekedahl–Chambert-Loir, [CL]).

Bibliographie

[A1] Y. André, *Pour une théorie inconditionnelle des motifs*, Publ. Math. IHÉS **83** (1996), p. 5–49.

[A2] Y. André, *Une introduction aux motifs (motifs purs, motifs mixtes, périodes)*, SMF, 2004.

[A3] Y. André, *Cycles de Tate et cycles motivés sur les variétés abéliennes en caractéristique* $p > 0$, à paraître au J. Institut Math. Jussieu.

[AK] Y. André et B. Kahn, *Nilpotence, radicaux et structures monoïdales* (avec un appendice de P. O'Sullivan), Rend. Sem. Math. Univ. Padova **108** (2002), p. 107–291.

[AK2] Y. André et B. Kahn *Construction inconditionnelle de groupes de Galois motiviques*, C. R. Acad. Sci. Paris **334** (2002), p. 989–994.

[BBD] A. Beilinson, J. Bernstein, P. Deligne *Faisceaux pervers*, *in* Analyse et topologie sur les espaces singuliers (I), Astérisque **100**, 1982.

[CL] A. Chambert-Loir *Points rationnels et groupes fondamentaux : applications de la cohomologie p-adique*, Séminaire Bourbaki, mars 2003, Astérisque **294**, (2004), p. 125–146.

[CS] P. Colmez et J.-P. Serre (éditeurs), Correspondance Grothendieck-Serre, Documents mathématiques **2**, SMF, 2001.

[D1] P. Deligne, *La conjecture de Weil I*, Publ. Math. IHÉS **43** (1974), p. 273–307.

[D2] P. Deligne, *La conjecture de Weil II*, Publ. Math. IHÉS **52** (1980), p. 137–252.

[D3] P. Deligne, *Hodge cycles on abelian varieties*, *in* [DMOS], p. 9–100.

[D4] P. Deligne *Catégories tannakiennes*, *in* The Grothendieck Festschrift II, Progress in Math. **87**, Birkhäuser, 1990, 111–195.

[4] Récemment j'en ai trouvé une démonstration qui évite ces résultats profonds et n'utilise que l'existence d'une cohomologie de Weil, en exploitant les résultats de [K3]. (N.d.A.)

[DM] P. Deligne et J. S. Milne, *Tannakian categories, in* [DMOS], p. 101–228.

[DMOS] P. Deligne et J. S. Milne, A. Ogus et K.-Y.Shih, *Hodge cycles, motives, and Shimura varieties*, Lecture Notes in Math. vol. **900**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1982.

[E] H. Esnault, *Varieties over a finite field with trivial Chow group of* 0*-cycles have a rational point*, Invent. Math. 151 (2003), p. 187–191.

[Fa1] G. Faltings, *Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern*, Invent. Math. **73** (1983), p. 349–366.

[Fa2] G. Faltings et G. Wüstholz, *Rational Points*, Braunschweig, Vieweg, 1984.

[Fu] W. Fulton, *Intersection theory*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **3** Folge, Band 2, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[J] U. Jannsen, *Motives, numerical equivalence, and semi-simplicity*, Invent. Math. **107** (1992), p. 447–452.

[K1] B. Kahn, *Équivalences rationnelle et numérique sur certaines variétés de type abélien sur un corps fini*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **36** (2003), p. 977–1002.

[K2] B. Kahn, *Number of points of function fields over finite fields*, prépublication, 2002.

[K3] B. Kahn, *On the multiplicities of a motive*, prépublication, 2006.

[KS] B. Kahn, R. Sujatha, *Birational motives, I*, prépublication, 2002.

[Ki] S.-I. Kimura, *Chow motives are finite dimensional, in some sense*, Math. Ann. **331** (2005), p. 173–201.

[Kl1] S. L. Kleiman, *Algebraic cycles and the Weil conjectures*, in *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, p. 359–386, North-Holland, Amsterdam, Masson, Paris, 1968.

[Kl2] S. L. Kleiman, *The standard conjectures*, in *Motives*, p. 3–20, Proc. Sympos. Pure Math. **55**, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[KM] N. M. Katz et W. Messing, *Some consequences of the Riemann hypothesis for varieties over finite fields*, Invent. Math. **23** (1974), p. 73–77.

[Li] D. Lieberman, Numerical and homological equivalence of algebraic cycles on Hodge manifolds, Amer. J. Math. **90** (1968), p. 366–374.

[M] J. S. Milne, *Lefschetz motives and the Tate conjecture*, Compositio Math. **117** (1999), no. 1, p. 45–76.

[Sa] N. Saavedra Rivano, *Catégories Tannakiennes*, Lecture Notes in Math. Vol. **265**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972.

[Sam] P. Samuel, *Relations d'équivalence en géométrie algébrique*, Proc. Internat. Congress Math. 1958, Cambridge Univ. Press, New York, 1960, p. 470–487.

[Se] J.-P. Serre, *Analogues kählériens de certaines conjectures de Weil*, Ann. of Math. (2) **71** (1960), p. 392–394.

[Sp] M. Spiess, *Proof of the Tate conjecture for products of elliptic curves over finite fields*, Math. Ann. **314** (1999), p. 285–290.

[T] J. Tate, *Endomorphisms of abelian varieties over finite fields*, Invent. Math. **2** (1966), p. 134–144.

[Ve] J.-L. Verdier, *Des catégories dérivées des catégories abéliennes*, Astérisque **239**, 1996.

[W] A. Weil, *Numbers of solutions of equations in finite fields*, Bull. Amer. Math. Soc. **55** (1949), p. 497–508.

[Z1] Y. G. Zarhin, *Isogenies of abelian varieties over fields of finite characteristics*, Math USSR-Sb. **24** (1974), p. 451–461.

[Z2] Y. G. Zarhin, *A remark on endomorphisms of abelian varieties over function fields of finite characteristics*, Math. USSR-Izv. **8** (1974), p. 477–480.