Modules de cycles et classes non ramifiées sur un espace classifiant

Bruno Kahn and Nguyen Thi Kim Ngan

Abstract

Let G be a finite group of exponent m and let k be a field of characteristic prime to m, containing the m-th roots of unity. For any Rost cycle module M over k, we construct exact sequences

$$0 \to \operatorname{Inv}_k^{\mathrm{nr}}(G, M_n) \to \operatorname{Inv}_k(G, M_n) \xrightarrow{(\partial_{D,g})} \bigoplus_{(D,g)} \operatorname{Inv}_k(D, M_{n-1})$$

where $\operatorname{Inv}_k(G, M_n)$ is Serre's group of invariants of G with values in M_n, $\operatorname{Inv}_k^{\mathrm{nr}}(G, M_n)$ is its subgroup of unramified invariants, and the "residue" morphisms $\partial_{D,g}$ are associated to pairs (D, g) where D runs through the subgroups of G and g runs through the homomorphisms $\mu_m \to G$ whose image centralises D. This allows us to recover results of Bogomolov and Peyre on the unramified cohomology of fields of invariants of G, and to generalise them.

Table des matières

Introduction

Soit G un groupe algébrique linéaire sur un corps k, et soit $M = M_*$ un module de cycles sur k au sens de Rost [Rost]. Suivant Serre [GMS, déf. 1.1], on définit le *groupe des invariants de G de degré n à valeurs dans M*

$$\operatorname{Inv}_k(G, M_n)$$

pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$: il s'agit du groupe des transformations naturelles $\varphi_K : H^1(K, G) \to M_n(K)$ où K décrit la catégorie des extensions de k. On peut aussi parler d'invariants non

---

2010 Mathematics Subject Classification 20G15, 14C15, 20J06
B.K. a bénéficié d'une aide de l'Agence Nationale de la Recherche portant la référence ANR-12-BL01-0005.

ramifiés au sens de [GMS, 33.9] : ils forment un sous-groupe $\mathrm{Inv}_k^{\mathrm{nr}}(G, M_n)$, dont la trivialité est une condition nécessaire pour une solution positive au problème de Noether.

En général le calcul de $\mathrm{Inv}_k^{\mathrm{nr}}(G, M_n)$ est difficile, et celui de $\mathrm{Inv}_k(G, M_n)$ est un peu plus facile. Le but de cet article est de réduire le calcul du premier à celui du second, dans certains cas particuliers. Le résultat principal est le suivant :

Théorème 1. *Supposons G fini constant, d'ordre premier à la caractéristique de k. Supposons de plus que k contienne les racines m-ièmes de l'unité, où m est l'exposant de G. Alors, à tout sous-groupe D de G et à tout homomorphisme $g : \mu_m \to Z_G(D)$ (centralisateur de D dans G), on peut associer un "homomorphisme résidu"*

$$\partial_{D,g} : \mathrm{Inv}_k(G, M_n) \to \mathrm{Inv}_k(D, M_{n-1})$$

tel que la suite

$$0 \to \mathrm{Inv}_k^{\mathrm{nr}}(G, M_n) \to \mathrm{Inv}_k(G, M_n) \xrightarrow{(\partial_{D,g})} \bigoplus_{(D,g)} \mathrm{Inv}_k(D, M_{n-1})$$

soit exacte.

Les hypothèses sont essentielles, en particulier celle sur les racines de l'unité. Pour G et k quelconques, on a encore un complexe comme ci-dessus, mais les $\partial_{D,g}$ ne sont sans doute pas suffisants pour détecter les invariants non ramifiés. En trouver la bonne généralisation est un problème ouvert. [1]

Corollaire 1. *Gardons les hypothèses du théorème 1 et définissons*

$$\mathrm{Inv}_k^{\mathrm{nab}}(G, M_n) = \mathrm{Ker}\left(\mathrm{Inv}_k(G, M_n) \to \bigoplus_A \mathrm{Inv}_k(A, M_n)\right)$$

où A décrit les sous-groupes abéliens de G. Alors la suite exacte du théorème 1 se raffine en une suite exacte

$$0 \to \widetilde{\mathrm{Inv}}_k^{\mathrm{nr}}(G, M_n) \to \mathrm{Inv}_k^{\mathrm{nab}}(G, M_n) \xrightarrow{(\partial_{D,g})} \bigoplus_{(D,g)} \mathrm{Inv}_k^{\mathrm{nab}}(D, M_{n-1})$$

où $\widetilde{\mathrm{Inv}}_k^{\mathrm{nr}}(G, M_n)$ désigne le sous-groupe des invariants non ramifiés normalisés (triviaux sur le G-torseur neutre).

Ce corollaire peut être considéré comme une généralisation d'un théorème de Bogomolov [CTS, th. 7.1], qu'il permet de retrouver. Nous retrouvons aussi un théorème de Peyre [Pe08, th. 1].

Voici la stratégie de la démonstration. D'après Totaro [GMS, app. C], on a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Inv}_k(G, M_n) = A^0(BG, M_n)$$

où le groupe de droite est celui de [Rost, § 5]. Le sous-groupe $\mathrm{Inv}_k^{\mathrm{nr}}(G, M_n)$ du membre de gauche correspond à un sous-groupe $A^0_{\mathrm{nr}}(BG, M_n)$ du membre de droite. Tout ceci demande un explication, puisque BG n'est pas bien défini en tant que variété lisse : c'était l'objet de [KN1] (notamment § 6.4) dont la théorie est rappelée en 1.1.

1. Mathieu Florence a fait une suggestion dans ce sens au premier auteur, quand G est fini constant mais que k ne contient pas assez de racines de l'unité.

Les résidus $\partial_{D,g}$ sont définis au § 1 en termes de BG ; le théorème 1 et le corollaire 1 sont démontrés au § 3 ; au § 5, on fait le raccord avec les résultats de Bogomolov et de Peyre.

Voici une intuition qui peut éclairer le théorème 1. Soit X une k-variété lisse, et supposons donnée une compactification lisse $X \subset \bar{X}$, telle que $D = \bar{X} - X$ soit un diviseur à croisements normaux. On a alors une suite exacte [K11, rem. 6.9]

$$0 \to A^0(\bar{X}, M_n) \to A^0(X, M_n) \to \bigoplus_{i=1}^{r} A^0(D_i^o, M_{n-1})$$

où D_i décrit l'ensemble des composantes irréductibles de D et $D_i^o = D_i \setminus \bigcup_{j \neq i} D_j$. Imaginons que BG soit représenté par une variété X comme ci-dessus. Dans le théorème 1, tout se passe comme si on pouvait alors trouver une compactification $\bar{X}$ tel que les D_i^o soient de la forme BD, où D décrit les sous-groupes de G...

Ce travail est une version remaniée et augmentée de la seconde partie de la thèse du second auteur (N.T.K.N.) [Ng10], la première partie étant parue dans [KN1] ; il a été annoncé dans [Ng11]. B.K. tient à remercier N.T.K.N. de l'avoir invité à rédiger ce texte en commun.

Guide de lecture

On utilise le langage développé dans [KN1] et rappelé au § 1.1 : si G est un groupe algébrique linéaire et F est un foncteur sur les variétés lisses vérifiant des axiomes simples, on peut donner un sens à $F(BG)$.

La section 1 introduit l'outil principal de l'article : les résidus géométriques $\partial_{D,g}$. La section 2 enchaîne en montrant que les classes sur BG, non ramifiées au sens de [CTO], sont non ramifiées au sens des résidus géométriques.

La section 3 est le cœur de ce travail. On y démontre que réciproquement, si G est fini constant d'exposant m et que k est de caractéristique première à m et contient les racines m-ièmes de l'unité, les classes sur BG, non ramifiées au sens des résidus géométriques, le sont au sens de [CTO]. La raison pour laquelle les résidus géométriques suffisent dans ce cas semble être que, si G est le groupe de Galois d'une extension L/K où $K \supset k$ et que w est une valuation discrète de rang 1 sur L, le groupe d'inertie de w est *central* dans son groupe de décomposition.

Enfin, la section 4 reformule le résultat précédent de manière universelle, tandis que la section 5 l'utilise pour retrouver (et généraliser) des théorèmes de Bogomolov et Peyre [Bog87, Pe08].

1. Résidus géométriques

Nous introduisons ici des "résidus géométriques", inspirés par les travaux de Peyre et de Voevodsky. On fixe un corps de base k.

1.1 Rappels de [KN1]

Notons $\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$ la catégorie des k-variétés lisses, les morphismes étant les morphismes plats. Pour $r \geqslant 1$, on note comme dans [KN1, déf. 2.3] S_r l'ensemble des morphismes de $\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$, union de l'ensemble des projections d'espace total un fibré vectoriel et de l'ensemble des immersions ouvertes $j : U \to X$ de coniveau $\geqslant r$ (par définition, cela signifie que $\operatorname{codim}_X(X - U) \geqslant r$). Notons d'autre part $\mathbf{Grp}$ la catégorie des k-groupes algébriques linéaires (morphismes : les homomorphismes de groupes algébriques) ; dans [KN1, déf. 2.14], on a défini une suite compatible de foncteurs

$$B_r : \mathbf{Grp} \to S_r^{-1}\,\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}, \quad r \geqslant 1 \tag{1.1}$$

où le membre de droite est la localisation à la Gabriel-Zisman de $\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$ relativement à S_r.

Pour référence ultérieure, rappelons la construction de B_r. On choisit une représentation linéaire V de G très fidèle de coniveau $\geqslant r$: cela signifie [KN1, déf. 2.7] que V contient un ouvert U G-invariant, espace total d'un G torseur et tel que $\operatorname{codim}_V(V-U) \geqslant r$. L'existence de V est assurée par un théorème de Totaro [Tot, rem. 1.4]. On définit B_rG (essentiellement) comme $U/G \in S_r^{-1}\,\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$: le “lemme sans nom” permet de montrer que B_rG est indépendant du choix de V à isomorphisme unique près, et fonctoriel en G.

Un foncteur F de $\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$ vers une catégorie $\mathcal{C}$ est dit *homotopique et pur en coniveau* $\geqslant r$ s'il inverse les morphismes de S_r (en particulier, F est invariant par homotopie). De manière équivalente, F induit un foncteur $S_r^{-1}\,\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}} \xrightarrow{F_r} \mathcal{C}$, et on pose

$$F(BG) = F_r(B_rG).$$

On renvoie à [KN1, § 3.2 et § 5] pour des exemples de tels foncteurs : cohomologie étale, cohomologie motivique, cohomologie de cycles de Rost.

Rappelons également la définition suivante [KN1, déf. 3.8] :

Définition 1.1. Soit F un foncteur de $\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$ à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens. Pour tout $G \in \mathbf{Grp}$, on pose

$$\tilde{F}(BG) = \operatorname{Ker}(F(B\varepsilon))$$

où ε est l'idempotent $G \to \operatorname{Spec}(k) \to G$. C'est la *partie réduite* de $F(BG)$.

Dans [KN1] on n'a utilisé que la fonctorialité plate sur les k-schémas lisses : cela permet par exemple de définir économiquement le foncteur $G \mapsto CH^n(BG)$ en n'utilisant que la contravariance “facile" des groupes de Chow, comme Totaro dans [Tot]. Ici nous aurons aussi besoin de fonctorialité pour certaines immersions fermées.

1.2 La construction F_{-1} de Voevodsky

Définition 1.2. Soit F un foncteur contravariant de $\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$ vers la catégorie $\mathbf{Ab}$ des groupes abéliens. On définit pour $X \in \mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$ (*cf.* [MVW, Lect. 23]) :

$$F_{-1}(X) = \operatorname{Coker}(F(X \times \mathbb{A}^1) \to F(X \times (\mathbb{A}^1 - \{0\}))) \tag{1.2}$$

et on note

$$\partial : F(X \times \mathbb{G}_m) \to F_{-1}(X).$$

Si F est contravariant pour les immersions fermées régulières, on note

$$s : F(X \times \mathbb{G}_m) \to F(X) \tag{1.3}$$

le morphisme défini par la section unité de $\mathbb{G}_m$.

Le lemme suivant se démontre sans difficulté :

Lemme 1.3. *Si F est homotopique et pur en coniveau $\geqslant r$, F_{-1} l'est aussi.* □

Lemme 1.4. *Si F est invariant par homotopie et contravariant pour les immersions fermées régulières, alors*

$$(s, \partial) : F(X \times \mathbb{G}_m) \to F(X) \oplus F_{-1}(X)$$

est un isomorphisme pour tout X.

Démonstration. Comme F est invariant par homotopie, $F(X) \xrightarrow{\sim} F(X \times \mathbb{A}^1)$. De plus, on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} F(X \times \mathbb{A}^1) \arrow[r] & F(X \times \mathbb{G}_m) \arrow[r, "\partial"] \arrow[dl, bend right, "s"'] & F_{-1}(X) \arrow[r] & 0 \\ F(X) \arrow[u, "\wr"] \arrow[ur, bend right, "p^*"'] & & & \end{tikzcd}$$

où $p : X \times \mathbb{G}_m \to X$ est la projection sur X. Comme $s \circ p^* = id$, on a

$$F(X \times \mathbb{G}_m) \xrightarrow{\sim} F(X) \oplus F_{-1}(X).$$

$\square$

Exemples 1.5 $F_{-1}(X)$ pour certains foncteurs F.

(i) Pour $F(X) = H^i(X, \mathbb{Z}(n))$, on a

$$F_{-1}(X) = H^{i-1}(X, \mathbb{Z}(n-1))$$

[MVW, 23.1]. On a le même résultat pour la cohomologie étale et la cohomologie motivique étale *i.e.*

— Si $F(X) = H^i_{\text{ét}}(X, M)$, alors $F_{-1}(X) = H^{i-1}_{\text{ét}}(X, M(-1))$;
— Si $F(X) = H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}(n))$, alors $F_{-1}(X) = H^{i-1}_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}(n-1))$.

(ii) Soit $F(X) = A^0(X, M_n)$, où $(M_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est un module de cycles au sens de Rost [Rost, § 5]. On a une suite exacte de localisation

$$A^0(X \times \mathbb{A}^1, M_n) \to A^0(X \times \mathbb{G}_m, M_n) \xrightarrow{(4)} A^0(X, M_{n-1}) \\ \xrightarrow{(5)} A^1(X \times \mathbb{A}^1, M_n) \xrightarrow{(6)} A^1(X \times \mathbb{G}_m, M_n)$$

Par le lemme 1.4 et l'invariance par homotopie de la cohomologie de cycles, (6) est injectif scindé, donc (5) est nul et (4) est surjectif, soit

$$F_{-1}(X) = A^0(X, M_{n-1}).$$

Ce calcul a implicitement utilisé la contravariance de la cohomologie de cycles pour les immersions fermées [Rost, § 12].

1.3 Résidus géométriques “universels"

Soit G un k-groupe algébrique linéaire et soit H un sous-groupe fermé de G ; soit $r \geqslant 1$. Dans [KN1, Ex. 2.18] on a construit un morphisme dans $S_r^{-1}\,\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$

$$G/H \to B_r H. \tag{1.4}$$

Construction 1.6. *Soit m un entier inversible dans k. Soit X un schéma lisse sur k. Soit F un foncteur homotopique et pur en coniveau $\geqslant r$. Le* morphisme résidu universel

$$\partial_m : F(X \times B\mu_m) \to F_{-1}(X) \tag{1.5}$$

est défini de la manière suivante :

En utilisant (1.4) avec $G = \mathbb{G}_m$ et $H = \mu_m$ et en remarquant que $\mathbb{G}_m/\mu_m \xrightarrow{\sim} \mathbb{G}_m$, on obtient une flèche canonique $\mathbb{G}_m \to B_r\mu_m$ dans $S_r^{-1}\,\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$, d'où une composition :

$$\partial_m : F(X \times B\mu_m) \to F(X \times \mathbb{G}_m) \xrightarrow{\partial} F_{-1}(X).$$

De manière équivalente, soit U un $\mathbb{G}_m$-torseur linéaire de coniveau $\geqslant r$ [KN1, déf. 2.7]. Considérons le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{G}_m \arrow[d] & U \times \mathbb{G}_m \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d] & U \arrow[d] \\
\mathbb{G}_m & \mathbb{G}_m/\mu_m \arrow[l, "\times m"', "\sim"] & (U \times \mathbb{G}_m)/\mu_m \arrow[l, "\bar\pi_1"'] \arrow[r, "\bar\pi_2"] & U/\mu_m.
\end{tikzcd} \tag{1.6}$$

La ligne du bas induit un diagramme

$$F(X \times (U/\mu_m)) \to F(X \times (U \times \mathbb{G}_m)/\mu_m) \xleftarrow{\sim} F(X \times (\mathbb{G}_m/\mu_m)) \xleftarrow{\sim} F(X \times \mathbb{G}_m) \to F_{-1}(X).$$

D'où on déduit (1.5).

Nous aurons besoin du lemme suivant, qui résulte de la description du morphisme bord d'une longue suite exacte de cohomologie :

Lemme 1.7. *Soit M un module de cycles. Notons ∂_0 le résidu relatif à la valuation discrète sur $k(t) = k(\mathbb{A}^1)$ correspondant à l'origine de $\mathbb{A}^1$. Notons d'autre part δ le bord de la suite exacte de localisation relative à l'immersion ouverte $\mathbb{G}_m \hookrightarrow \mathbb{A}^1$. Alors le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
A^0(\mathbb{G}_m, M_n) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, hook] & A^0(k, M_{n-1}) \arrow[d, "="] \\
M_n(k(t)) \arrow[r, "\partial_0"] & M_{n-1}(k)
\end{tikzcd}$$

est commutatif. □

Lemme 1.8. *Soit M un module de cycles sur k, et soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors le morphisme résidu (1.5) pour $A^0(-, M_n)$ est compatible avec celui considéré par Peyre dans [Pe08, (13) p. 207].*
Plus précisément, soient $\chi : \mu_m \hookrightarrow k^*$ le caractère canonique de μ_m, W_χ la représentation fidèle de dimension 1 correspondante, B_χ la valuation discrète de rang 1 sur $k(X \times W_\chi) = k(X)(T)$ définie par le diviseur $T = 0$ et A_χ sa trace sur $k(X \times W_\chi)^{\mu_m}$. Alors on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
A^0(X \times B\mu_m, M_n) \arrow[r, "\partial_m"] \arrow[d, hook] & A^0(X, M_{n-1}) \arrow[d, hook] \\
M_n(k(X \times W_\chi)^{\mu_m}) \arrow[r, "\partial_{A_\chi}"] & M_{n-1}(k(X)).
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Par fonctorialité, on peut remplacer X par son corps des fonctions, donc (quitte à changer de corps de base) supposer que $X = \operatorname{Spec} k$.

Soit $U = \mathbb{A}^r - \{0\}$; faisons opérer $\mathbb{G}_m$ sur $\mathbb{A}^r$ et donc sur U par homothéties. Choisissons un point rationnel $x \in U(k)$: ce point définit un morphisme $\mathbb{G}_m$-équivariant $\varphi : \mathbb{G}_m \to U$, d'où un morphisme :

$$\bar\varphi : \mathbb{G}_m \xleftarrow{\sim} \mathbb{G}_m/\mu_m \to U/\mu_m.$$

Soit $\gamma : \mathbb{G}_m \to U \times \mathbb{G}_m$ le transposé du graphe de φ : avec les notations de (1.6), c'est une section μ_m-équivariante de π_1 telle que $\pi_2 \circ \gamma = \varphi$. En prenant les quotients par μ_m, γ induit une section $\bar\gamma$ de $\bar\pi_1$ telle que $\bar\pi_2 \circ \bar\gamma = \bar\varphi$, ce qui implique que la composition :

$$A^0((U/\mu_m), M_n) \xrightarrow{\bar\varphi^*} A^0(\mathbb{G}_m, M_n) \xrightarrow{\delta} M_{n-1}(k)$$

est égale à ∂_m, où δ est le morphisme bord pour la suite exacte de localisation relative à l'immersion ouverrte $\mathbb{G}_m \hookrightarrow \mathbb{A}^1$.

Finalement, on a $\varphi(\mathbb{G}_m) = L - \{0\}$ où L est la droite kx. L'assertion résulte maintenant du lemme 1.7. □

1.4 Résidus géométriques “à la Peyre"

Définition 1.9. Soit F comme dans la construction 1.6. Soient $G \in \mathbf{Grp}$, $D \subset G$ un sous-groupe fermé et $g : \mu_m \to Z_G(D)$ un homomorphisme, où $Z_G(D)$ désigne le centralisateur de D dans G. On note $\varphi : D \times \mu_m \to G$ l'homomorphisme défini par $\varphi(d, i) = d.g(i)$. On définit un morphisme :

$$\partial_{D,g} : F(BG) \xrightarrow{\varphi^*} F(B(D \times \mu_m)) \xrightarrow{\sim} F(BD \times B\mu_m) \xrightarrow{\partial_m} F_{-1}(BD)$$

où ∂_m est comme dans (1.5), l'isomorphisme provient de l'isomorphisme $B_r(D \times \mu_m) \simeq B_rD \times B_r\mu_m$ de [KN1, lemme 2.24] et $F_{-1}(BD)$ est défini par le lemme 1.3.

Proposition 1.10. *$\partial_{D,g}$ est canonique et fonctoriel en F.* □

Exemples 1.11. D'après les exemples 1.5, on a des résidus suivants :

$$\begin{aligned}
H^n_{\text{ét}}(BG, \mu_m^{\otimes j}) &\to H^{n-1}_{\text{ét}}(BD, \mu_m^{\otimes(j-1)}),\\
H^n_{\text{ét}}(BG, \mathbb{Z}(q)) &\to H^{n-1}_{\text{ét}}(BD, \mathbb{Z}(q-1)),\\
H^n(BG, \mathbb{Z}(q)) &\to H^{n-1}(BD, \mathbb{Z}(q-1)),\\
A^0(BG, M_n) &\to A^0(BD, M_{n-1}).
\end{aligned}$$

Remarque 1.12. Supposons G fini constant, d'exposant e premier à la caractéristique de k. Alors tout homomorphisme g comme ci-dessus a pour image un sous-groupe cyclique d'ordre m' divisant e, donc se factorise par $\mu_{m'}$ via la surjection $\mu_m \to \mu_{m'}$; de plus, $\mu_{m'}$ est constant. Si $g' : \mu_{m'} \to Z_G(D)$ est l'homomorphisme induit, on voit tout de suite que $\partial_{D,g} = \partial_{D,g'}$ en comparant deux suites exactes de Kummer. On peut donc se limiter aux valeurs de m divisant e et telles que $\mu_m \subset k$.

1.5 Le résidu d'un cup-produit

Le résultat principal de ce numéro (théorème 1.15) ne sera pas utilisé dans la suite ; il est néanmoins très utile pour des calculs concrets.

1.5.1 *Décomposition de la diagonale* Soient $X \in \mathbf{Sm}(k)$ et $f : X \to \mathbb{G}_m$ ($f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X^*)$). Soit $\Gamma_f : X \to X \times \mathbb{G}_m$ le graphe de f. Soit $F : \mathbf{Sm}(k)^{\text{op}} \to \mathbf{Ab}$ un foncteur homotopique et pur en coniveau $\geqslant c$. On a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
F(X \times \mathbb{A}^1) \arrow[r] & F(X \times \mathbb{G}_m) \arrow[r] \arrow[d, "\Gamma_f^*"] & F_{-1}(X) \arrow[r] & 0 \\
 & F(X) \arrow[ul, "\sim"] & &
\end{tikzcd}$$

Si $f = 1$, alors $\Gamma_f^* = s^F$ (la section de (1.3)) et donc on a

$$F(X \times \mathbb{G}_m) \xrightarrow{\sim} F(X) \oplus F_{-1}(X) \tag{1.7}$$

d'après le lemme 1.4. Alors $\Gamma_f^* - \Gamma_1^* = 0$ sur $F(X \times \mathbb{A}^1)$, donc induit un morphisme

$$\{f\}^* : F_{-1}(X) \to F(X). \tag{1.8}$$

Considérons maintenant la diagonale $\mathbb{G}_m \xrightarrow{\Delta} \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$. On a le morphisme

$$(1_X \times \Delta)^* : F(X \times \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m) \to F(X \times \mathbb{G}_m).$$

Par transport de structure, il définit un morphisme $\tilde{\Delta}$:

$$\begin{tikzcd}
F(X \times \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m) \arrow[r, "(1_X\times\Delta)^*"] \arrow[d, "\wr"] & F(X \times \mathbb{G}_m) \arrow[d, "\wr"] \\
F(X) \oplus 2F_{-1}(X) \oplus F_{-2}(X) \arrow[r, "\tilde{\Delta}"] & F(X) \oplus F_{-1}(X)
\end{tikzcd}$$

où $F_{-2} = (F_{-1})_{-1}$ et l'isomorphisme de gauche est obtenu en appliquant deux fois le lemme 1.4.

On va calculer $\tilde{\Delta}$ dans le cas particulier où F provient d'un foncteur sur $\mathbf{DM} := \mathbf{DM}^{\mathrm{eff},-}_{\mathrm{Nis}}(k)$ [MVW, Lect. 14]. Le lemme suivant justifie la notation (1.8) :

Lemme 1.13. *Si F provient d'un foncteur sur $\mathbf{DM}$ et $X = \operatorname{Spec} k$, alors $\{f\}^*$ est induit par le cup-produit par $\{f\} \in K_1^M(k) = H^1(k, \mathbb{Z}(1))$ pour $f \in k^*$.*

Démonstration. Dans ce cas, $\Gamma_f^* - \Gamma_1^*$ provient de

$$M(X) \xrightarrow{\Gamma_f - \Gamma_1} M(X \times \mathbb{G}_m) = M(X) \oplus M(X)(1)[1] \xrightarrow{pr} M(X)(1)[1]$$

Si $X = \operatorname{Spec} k$, d'où $f \in k^*$, alors

$$\Gamma_f - \Gamma_1 \in \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}(1)[1]) \cong K_1^M(k) \text{ [MVW, 4.2]}.$$

On vérifie que cet isomorphisme identifie $\Gamma_f - \Gamma_1$ à $\{f\} \in K_1^M(k) \cong k^*$ (voir [MVW, preuve de 4.4]). □

Proposition 1.14. *Supposons que F se factorise en*

$$\mathbf{Sm}(k)^{\mathrm{op}} \xrightarrow{M^{\mathrm{op}}} \mathbf{DM}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{F} \mathbf{Ab}.$$

Alors $\tilde{\Delta}$ est égale à

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sum & \{-1\} \end{pmatrix}.$$

Démonstration. On choisit la décomposition $M(\mathbb{G}_m) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(1)[1]$ donnée par le point $1 \in \mathbb{G}_m$. Cela donne exactement (1.7) sur $F(X \times \mathbb{G}_m)$ et $F_{-1}(M(X)) = F(M(X)(1)[1])$. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
F(M(X) \otimes M(\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m)) \arrow[r, "(1_X\times\Delta)^*"] \arrow[d, "\wr"] & F(M(X) \otimes M(\mathbb{G}_m)) \arrow[d, "\wr"] \\
F(M(X) \otimes (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(1)[1])^{\otimes 2}) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & F(M(X) \otimes (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(1)[1])) \arrow[d, "\wr"] \\
F(M(X)) \oplus 2F_{-1}(M(X)) \oplus F_{-2}(M(X)) \arrow[r, "\tilde{\Delta}"] & F(M(X)) \oplus F_{-1}(M(X))
\end{tikzcd}$$

Dans ce cas, $\tilde{\Delta}$ est induit par

$$M(\Delta) : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(1)[1] \to \mathbb{Z} \oplus 2\mathbb{Z}(1)[1] \oplus \mathbb{Z}(2)[2]$$

et on a

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}(j)[j],\mathbb{Z}(i)[i]) = \begin{cases} \mathrm{Hom}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}(i-j)[i-j]) = K^M_{i-j}(k) & \text{si } i \geqslant j, \\ 0 & \text{si } i < j. \end{cases}$$

D'après [HK, lem. 7.4 et cor. 7.9 (b)], on trouve que $\tilde{\Delta}$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sum & \{-1\} \end{pmatrix}$$

où $\sum : 2F_{-1}(M(X)) \to F_{-1}(M(X))$ est induit par $\mathbb{Z}(1)[1] \to 2\mathbb{Z}(1)[1]$ et $\{-1\} : F_{-2}(M(X)) \to F_{-1}(M(X))$ est induit par $\{-1\} : \mathbb{Z}(1)[1] \to \mathbb{Z}(2)[2]$ (*cf.* lemme 1.13), ce qui correspond à la formule de [HK, cor. 7.9(b)]. □

1.5.2 *Résidus géométriques et cup-produits* Soient F, G, H dans la catégorie des foncteurs contravariants de $\mathbf{Sm}(k)$ vers les groupes abéliens et supposons que pour tous schémas $X, Y \in \mathbf{Sm}(k)$, on ait un produit externe :

$$F(X) \otimes G(Y) \to H(X \times Y) \tag{1.9}$$

bifonctoriel en (X, Y). D'où un produit interne :

$$F(X) \otimes G(X) \to H(X \times X) \to H(X)$$

où la dernière flèche est donnée par la diagonale $X \to X \times X$.

Considérons le diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{tikzcd} F(X\times\mathbb{A}^1)\otimes G(Y) \arrow[r] \arrow[d] & F(X\times\mathbb{G}_m)\otimes G(Y) \arrow[r] \arrow[d] & F_{-1}(X)\otimes G(Y) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\exists"'] & 0 \\ H(X\times Y\times\mathbb{A}^1) \arrow[r] & H(X\times Y\times\mathbb{G}_m) \arrow[r] & H_{-1}(X\times Y) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

On en déduit un morphisme

$$F_{-1}(X) \otimes G(Y) \to H_{-1}(X \times Y), \tag{1.10}$$

et de manière analogue

$$F(X) \otimes G_{-1}(Y) \to H_{-1}(X \times Y). \tag{1.11}$$

Pour $Y = X$, on a

$$F(X) \otimes G_{-1}(X) \oplus F_{-1}(X) \otimes G(X) \to H_{-1}(X \times X) \to H_{-1}(X).$$

Considérons encore le diagramme commutatif de suites exactes suivant :

$$\begin{tikzcd} F(X\times\mathbb{A}^1)\otimes G_{-1}(Y) \arrow[r] \arrow[d] & F(X\times\mathbb{G}_m)\otimes G_{-1}(Y) \arrow[r] \arrow[d] & F_{-1}(X)\otimes G_{-1}(Y) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\exists"'] & 0 \\ H_{-1}(X\times Y\times\mathbb{A}^1) \arrow[r] & H_{-1}(X\times Y\times\mathbb{G}_m) \arrow[r] & H_{-2}(X\times Y) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

On en déduit un morphisme

$$F_{-1}(X) \otimes G_{-1}(Y) \to H_{-2}(X \times Y). \tag{1.12}$$

Théorème 1.15. *Supposons que F, G, H se factorisent par $\mathbf{DM}$. Soient $x \in F(X \times \mathbb{G}_m)$ et $y \in G(X \times \mathbb{G}_m)$; notons xy leur cup-produit dans $H(X \times \mathbb{G}_m)$. Alors on a*

$$\partial^H(xy) = \partial^F(x)s^G(y) + s^F(x)\partial^G(y) + \{-1\}\partial^F(x)\partial^G(y) \tag{1.13}$$

où on note $\partial^F \dots$ pour garder la trace de F, G, H.

Démonstration. Appliquant ce qui précède, on a des diagrammes commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
F_{-1}(X) \otimes G(Y \times \mathbb{G}_m) \arrow[r] \arrow[d, "1\times\partial^G"] & H_{-1}(X \times Y \times \mathbb{G}_m) \arrow[d, "\partial^{H_{-1}}"] \\
F_{-1}(X) \otimes G_{-1}(Y) \arrow[r] & H_{-2}(X \times Y)
\end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd}
F_{-1}(X) \otimes G(Y \times \mathbb{G}_m) \arrow[r] \arrow[d, "1\times s^G"] & H_{-1}(X \times Y \times \mathbb{G}_m) \arrow[d, "s^{H_{-1}}"] \\
F_{-1}(X) \otimes G(Y) \arrow[r] & H_{-1}(X \times Y)
\end{tikzcd}$$

où $s^G, s^{H_{-1}}$ sont des spécialisations comme dans le lemme 1.4.

Maintenant considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
F(X \times \mathbb{G}_m) \otimes G(Y \times \mathbb{G}_m) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & (F(X) \oplus F_{-1}(X)) \otimes (G(Y) \oplus G_{-1}(Y)) \arrow[dd] \\
H(X \times \mathbb{G}_m \times Y \times \mathbb{G}_m) \arrow[d, "\wr"] & \\
H(X \times Y \times \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "(1_{X\times Y}\times\Delta)^*"] & H(X \times Y) \oplus 2H_{-1}(X \times Y) \oplus H_{-2}(X \times Y) \arrow[d, "\tilde{\Delta}"] \\
H(X \times Y \times \mathbb{G}_m) \arrow[r, "\sim"] & H(X \times Y) \oplus H_{-1}(X \times Y)
\end{tikzcd}$$

où la longue flèche de droite est construite à partir de (1.9), (1.10), (1.11), (1.12). D'où le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
F(X \times \mathbb{G}_m) \otimes G(Y \times \mathbb{G}_m) \arrow[r, "\partial^F\times s^G + s^F\times\partial^G", "+\partial^F\times\partial^G"'] \arrow[d] & \begin{array}{c} F_{-1}(X) \otimes G(Y) \quad \oplus F(X) \otimes G_{-1}(Y) \\ \oplus F_{-1}(X) \otimes G_{-1}(Y) \end{array} \arrow[d] \\
H(X \times Y \times \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m) \arrow[r] \arrow[d, "(1_{X\times Y}\times\Delta)^*"] & 2H_{-1}(X \times Y) \oplus H_{-2}(X \times Y) \arrow[d, "\tilde{\Delta}"] \\
H(X \times Y \times \mathbb{G}_m) \arrow[r, "\partial^H"] & H_{-1}(X \times Y)
\end{tikzcd}$$

Si $Y = X$, on a

$$\begin{tikzcd}
F(X \times \mathbb{G}_m) \otimes G(X \times \mathbb{G}_m) \arrow[r, "\partial^F \times s^G + s^F \times \partial^G", "+\partial^F \times \partial^G"'] \arrow[d] & \begin{array}{c} F_{-1}(X) \otimes G(X) \quad \oplus F(X) \otimes G_{-1}(Y) \\ \oplus F_{-1}(X) \otimes G_{-1}(X) \end{array} \arrow[d] \\
H(X \times X \times \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m) \arrow[r] \arrow[d, "(1_{X \times X} \times \Delta)^*"] & 2H_{-1}(X \times X) \oplus H_{-2}(X \times X) \arrow[d, "\tilde{\Delta}"] \\
H(X \times X \times \mathbb{G}_m) \arrow[r, "\partial^H"] \arrow[d, "(\Delta_X \times 1)^*"] & H_{-1}(X \times X) \arrow[d, "(\Delta_X)^*"] \\
H(X \times \mathbb{G}_m) \arrow[r, "\partial^H"] & H_{-1}(X)
\end{tikzcd}$$

où Δ_X est la diagonale $X \xrightarrow{\Delta_X} X \times X$. Du diagramme ci-dessus et de la proposition 1.14, on déduit :

$$\partial^H(xy) = \partial^F(x)s^G(y) + s^F(x)\partial^G(y) + \{-1\}\partial^F(x)\partial^G(y).$$

□

Corollaire 1.16. *La formule* (1.13) *s'applique aussi aux résidus* ∂_m *de* (1.5) *et* $\partial_{D,g}$ *de la définition 1.9.*

Démonstration. Cela résulte immédiatement de la définition de ces résidus. □

Remarque 1.17. La formule (1.13) est analogue à celle de Rost [Rost, **P3**, p. 331] (Un signe apparaît en plus chez Rost parce que les modules de cycles sont gradués).

2. Classes non ramifiées sur un espace classifiant

2.1 Le foncteur $A^0_{\mathrm{NR}}(-, M_n)$

On se donne un module de cycles $M = (M_n)$.

Définition 2.1. Soit $G \in \mathbf{Grp}$. On définit :

$$A^0_{\mathrm{NR}}(BG, M_n) = \bigcap_{(D \subset G,\ g : \mu_m \to Z_G(D))} \mathrm{Ker}(A^0(BG, M_n) \xrightarrow{\partial_{D,g}} A^0(BD, M_{n-1})),$$

où $\partial_{D,g}$ est comme dans la définition 1.9 et m parcourt les entiers $\geqslant 1$.

Proposition 2.2. *La loi* $G \mapsto A^0_{\mathrm{NR}}(BG, M_n)$ *définit un sous-foncteur de* $G \mapsto A^0(BG, M_n)$ *sur* **Grp**.

Démonstration. Soit $f : G \to H$ un homomorphisme de groupes : il s'agit de voir que $f^* A^0_{\mathrm{NR}}(BH, M_n) \subset A^0_{\mathrm{NR}}(BG, M_n)$.

Si $D \subset G$ est un sous-groupe de G, posons $D_H = f(D)$: on a $f(Z_G(D)) \subset Z_H(D_H)$. Soit $g : \mu_m \to Z_G(D)$. La composition

$$g_H : \mu_m \xrightarrow{g} Z_G(D) \xrightarrow{f} Z_H(D_H)$$

donne un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
A^0(BG,M_n) \arrow[r] & A^0(BD\times B\mu_m,M_n) \arrow[r] & A^0(BD\times \mathbb{G}_m) \arrow[r] & A^0(BD,M_{n-1})\\
A^0(BH,M_n) \arrow[r] \arrow[u] & A^0(BD_H\times B\mu_m,M_n) \arrow[r] \arrow[u] & A^0(BD_H\times \mathbb{G}_m) \arrow[r] \arrow[u] & A^0(BD_H,M_{n-1}) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

soit

$$\begin{tikzcd}
A^0(BG,M_n) \arrow[r, "\partial^G_{D,g}"] & A^0(BD,M_{n-1})\\
A^0(BH,M_n) \arrow[r, "\partial^H_{D_H,g_H}"] \arrow[u] & A^0(BD_H,M_{n-1}) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

où l'on a écrit ∂^G,∂^H pour garder la trace de G,H. D'où l'inclusion cherchée. □

2.2 Une formule simplifiée pour $A^0_{\mathrm{NR}}(BG,M_n)$

Lemme 2.3. *Soient $D'\subset D\subset G$ et $g:\mu_m\to Z_G(D)$; notons $g':\mu_m\to Z_G(D)\hookrightarrow Z_G(D')$. Alors $\operatorname{Ker}\partial_{D,g}\subset \operatorname{Ker}\partial_{D',g'}$.*

Démonstration. Cela résulte du diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
F(BG) \arrow[r] \arrow[d, "="] & F(BD\times BI) \arrow[r] \arrow[d] & F(BD\times \mathbb{G}_m) \arrow[r] \arrow[d] & F_{-1}(BD) \arrow[d]\\
F(BG) \arrow[r] & F(BD'\times BI) \arrow[r] & F(BD'\times \mathbb{G}_m) \arrow[r] & F_{-1}(BD').
\end{tikzcd}$$

□

Du lemme 2.3, on déduit :

Proposition 2.4. *On a*

$$A^0_{\mathrm{NR}}(BG,M_n)=\bigcap_{g:\ \mu_m\to G}\operatorname{Ker}(\partial_{Z_G(g),g})$$

où $Z_G(g)$ est le centralisateur de $g(\mu_m)\subset G$.

2.3 Une majoration de la cohomologie non ramifiée

Rappelons de [KN1, § 6] le groupe $A^0_{\mathrm{nr}}(BG,M_n)\subset A^0(BG,M_n)$ des classes non ramifiées : il est donné par

$$A^0_{\mathrm{nr}}(K/k,M_n)=\bigcap_{A\in\mathcal{P}(K/k)}\operatorname{Ker}(M_n(K)\xrightarrow{\partial_A}M_{n-1}(\kappa_A)),$$

où K est le corps des fonctions de U/G pour un G-torseur linéaire U de coniveau $\geqslant 1$ au sens de [KN1, déf. 2.7] et $\mathcal{P}(K/k)$ est l ?ensemble des sous-anneaux de valuation discrète A de rang un de K, de type géométrique sur k, tels que $K=Frac(A)$ [KN1, déf. 6.1] ; ce groupe ne dépend pas du choix de U et est fonctoriel en G d'après [KN1, prop. 6.4 et 2.22].

Proposition 2.5. *On a l'inclusion*

$$A^0_{\mathrm{nr}}(BG,M_n)\subset A^0_{\mathrm{NR}}(BG,M_n).$$

Démonstration. Choisissons une représentation très fidèle W de G [KN1, déf. 2.7]. Soit x un élément de $A^0_{\mathrm{nr}}(k(W)^G, M_n) \subset A^0(BG, M_n)$ *i.e.* $\partial_A(x) = 0$ pour tout $A \in \mathcal{P}(k(W)^G/k)$. Remplaçons la notation $\partial_{D,g}$ (déf. 1.9) par $\partial^G_{D,g}$, pour garder la trace du groupe G. On veut montrer que pour tout le couple (D, g), on a $\partial^G_{D,g}(x) = 0$.

Pour simplifier, posons $I = \mu_m$. Soit $\varphi : D \times I \to G$ le morphisme défini par $\varphi(d, i) = d.g(i)$. D'après la définition des résidus géométriques (déf. 1.9), $\partial^G_{D,g}$ se factorise par $\partial^{D\times I}_{D,g}$; autrement dit, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
A^0(BG, M_n) \arrow[d, "\varphi^*"] \arrow[dr, "\partial^G_{D,g}"] & \\
A^0(BD \times BI, M_n) \arrow[r, "\partial^{D\times I}_{D,g}"] & A^0(BD, M_{n-1}).
\end{tikzcd}$$

Mais $\varphi^* A^0_{\mathrm{nr}}(BG, M_n) \subset A^0_{\mathrm{nr}}(BD \times BI, M_n)$ [KN1, § 6.4]. On peut donc supposer que $G = D \times I$.

On raisonne comme Peyre dans [Pe08, p. 207] : choisissons W de la forme $W' \times W_\chi$, où W' est une représentation très fidèle de D et W_χ est la représentation fidèle canonique de dimension 1 de I. Le diagramme commutatif du lemme 1.8 :

$$\begin{tikzcd}
A^0(BD \times BI, M_n) \arrow[r, "\partial^{D\times I}_{D,g}"] \arrow[d, hook] & A^0(BD, M_{n-1}) \arrow[d, hook] \\
M_n(k(W' \oplus W_\chi)^{D\times I}) \arrow[r, "\partial_{A_\chi}"] & M_{n-1}(k(W')^D) = M_{n-1}(\kappa_{A_\chi})
\end{tikzcd}$$

où $A_\chi \in \mathcal{P}(k(W' \oplus W_\chi)^{D\times I}/k)$, montre immédiatement que $\partial^{D\times I}_{D,g} A^0_{\mathrm{nr}}(BD \times BI, M_n) = 0$. $\square$

Remarque 2.6. Pour G quelconque, il est très improbable qu'on ait égalité dans la proposition 2.5 : les résidus géométriques $\partial_{D,g}$ ne semblent pas suffisants. Le résultat principal de cet article est qu'on a égalité quand G est fini constant et que k contient assez de racines de l'unité. C'est l'objet de la section suivante.

3. Le théorème principal

À partir de maintenant, on suppose que G est un groupe fini constant d'exposant m, où m est un entier inversible dans k, et que $\mu_m \subset k$. Le but de cette section est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 3.1. *Sous les hypothèsess ci-dessus, on a :*

$$A^0_{\mathrm{NR}}(BG, M_n) = A^0_{\mathrm{nr}}(BG, M_n)$$

(égalité dans $A^0(BG, M_n)$).

3.1 Un sous-groupe intermédiaire

D'après la proposition 2.5, il suffit de démontrer que $A^0_{\mathrm{NR}}(BG, M_n) \subset A^0_{\mathrm{nr}}(BG, M_n)$. Pour cela, on va définir un autre sous-groupe de $A^0(BG, M_n)$ contenant $A^0_{\mathrm{NR}}(BG, M_n)$ de la manière suivante.

Soit W une représentation linéaire fidèle de G. Soient $A \in \mathcal{P}(k(W)^G/k)$ et $B \in \mathcal{P}(k(W)/k)$ au dessus de A. Soient D le groupe de décomposition de B dans G et I son groupe d'inertie.

Remarque 3.2. Comme l'exposant de G divise m, l'ordre de G divise une puissance de m et donc $|G|$ est inversible dans k. D'après [Se68, IV, § 2, cor. 2, cor. 3], I est cyclique, canoniquement isomorphe à μ_q avec $q|m$, et *central* dans D.

Définition 3.3. On définit :

$$A^0_{\mathrm{NR},sp}(k(W)^G, M_n) = \bigcap_{(D\subset G,\ g:I\to Z_G(D))} \mathrm{Ker}(A^0(BG, M_n) \xrightarrow{\partial_{D,g}} A^0(BD, M_{n-1})),$$

où l'intersection porte sur l'ensemble des sous groupes D, I relatifs à $A \in \mathcal{P}(k(W)^G/k)$ comme ci-dessus et $\partial_{D,g}$ est comme dans la définition 1.9.

Il est clair que

$$A^0_{\mathrm{NR}}(BG, M_n) \subset A^0_{\mathrm{NR},sp}(k(W)^G, M_n).$$

On va montrer dans les numéros suivants :

Théorème 3.4. *Soient B, A comme ci-dessus, et soient D et I les sous-groupes de décomposition et d'inertie de B. Considérons les résidus :*

$$A^0(BG, M_n) \xrightarrow{\partial_{D,g}} A^0(BD, M_{n-1}) \text{ (cf. déf. 1.9)}$$

et

$$M_n(k(W)^G) \xrightarrow{\partial_A} M_{n-1}(\kappa_A)$$

où κ_A est le corps résiduel de A. Si $x \in A^0(BG, M_n)$ est tel que $\partial_{D,g}(x) = 0$, alors $\partial_A(x) = 0$. Par conséquent,

$$A^0_{\mathrm{NR},sp}(k(W)^G, M_n) \subset A^0_{\mathrm{nr}}(BG, M_n) \text{ (cf. déf. 3.3 et [KN1, déf. 6.1]).}$$

D'où on déduit le théorème principal 3.1 et un peu plus précisément :

Corollaire 3.5.

$$A^0_{\mathrm{NR}}(BG, M_n) = A^0_{\mathrm{NR},sp}(k(W)^G, M_n) = A^0_{\mathrm{nr}}(BG, M_n).$$

De plus, comme $A^0_{\mathrm{nr}}(BG, M_n)$ et $A^0_{\mathrm{NR}}(BG, M_n)$ sont des foncteurs contravariants en G (*cf.* [KN1, § 5.5] et proposition 2.2), on obtient :

Corollaire 3.6. *On a aussi un résultat équivalent au théorème 3.1 pour la partie réduite (cf. déf. 1.1) :*

$$\tilde{A}^0_{\mathrm{NR}}(BG, M_n) = \tilde{A}^0_{\mathrm{nr}}(BG, M_n).$$

3.2 Lemmes

Dans cette partie, on garde les hypothèses de la définition 2.1 et les notations précédentes.

Pour montrer le théorème 3.4, on a besoin des lemmes suivants. Les deux premiers reformulent certains résultats de Saltman [Sa84] :

Lemme 3.7. *Soit k un corps contenant le groupe μ_q des racines de l'unité où q est inversible dans k. Soient G un groupe fini et N un groupe cyclique d'ordre q. Soit G' une extension centrale de G par N. Donnons-nous un 2-cocycle normalisé c de G à valeurs dans N définissant l'extension G', associé à une section ensembliste s de la projection $\pi : G' \to G$ (vérifiant $s(1) = 1$).*
Soit k'/k une extension de groupe de Galois G. Soit $\chi : N \xrightarrow{\sim} \mu_q$ un caractère fidèle de N sur k.

Notons W_χ la k-représentation de dimension un correspondante. Soit W la représentation de G' induite de W_χ. Alors W est fidèle et on a un isomorphisme

$$k'(W)/k'(W)^{G'} \xrightarrow{\sim} \operatorname{Frac}(S'(k'/k))/\operatorname{Frac}(R(k'/k))$$

où G' opère sur $k'(W)$ par son action sur k' (via G) et sur W, et $S'(k'/k), R(k'/k)$ sont associées à c comme dans Saltman [Sa84, p. 74, 75].

Rappelons d'abord la définition de l'extension $S'(k'/k)/R(k'/k)$ de [Sa84, pp. 74, 75]. Dans la situation de l'énoncé :

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow G' \underset{\pi}{\overset{s}{\rightleftarrows}} G \longrightarrow 1$$

le 2-cocycle c est défini par la relation :

$$s(g)s(h) = s(gh)c(g,h).$$

Soit $g' \in G'$: on écrit $g' = n(g')s\pi(g')$ avec $n(g') \in N \subset Z(G')$.

— $S''(k'/k) := k'[y(g) \mid g \in G](1/s)$ où $s = \prod_{g\in G} y(g)$. Et G opère sur $S''(k'/k)$ par son action sur k' et par

$$gy(h) = y(gh)\ \forall g \in G.$$

— $S(k'/k) := S''(k'/k)[x(g) \mid 1 \neq g \in G]/(x(g)^q = y(g)/y(1))$. Notons $x(1) = 1$. Alors l'action de G sur $S(k'/k)$ étend celle sur $S''(k'/k)$ via

$$gx(h) = [x(gh)/x(h)]\chi(c(g,h)).$$

— $S'(k'/k) := S(k'/k)[\gamma]/(\gamma^q = y(1))$. Donc N opère sur $S'(k'/k)$ par l'action triviale sur $S(k'/k)$ et par

$$n\gamma = \chi(n)\gamma.$$

Alors G' opère sur $S'(k'/k)$ via N et G.

— $R(k'/k) := S(k'/k)^G$.

Le diagramme suivant résume ce qui précède :

$$\begin{tikzcd}
 & & S'(k'/k) \\
k' \arrow[r] & S''(k'/k) \arrow[r] & S(k'/k) \arrow[u, "N"'] \\
k \arrow[u, "G"'] \arrow[rr] & & R(k'/k). \arrow[u, "G"']
\end{tikzcd}$$

Démonstration du lemme 3.7. D'après la définition des représentations induites, on a

$$W = k[G'] \otimes_{k[N]} W_\chi$$

de base $\{s(g)\otimes w | g\in G\}$ où w est une base de W_χ. L'action de G' sur W est :

$$\begin{aligned}
g'\in G',\ g'(s(g)\otimes w) &= g's(g)\otimes w\\
&= n(g')s\pi(g')s(g)\otimes w\\
&= n(g')s(\pi(g')g)c(\pi(g'),g)\otimes w\\
&= s(\pi(g')g)\otimes n(g')c(\pi(g'),g).w\\
&= s(\pi(g')g)\otimes \chi(n(g')c(\pi(g'),g))w\\
&= \chi(n(g')c(\pi(g'),g))s(\pi(g')g)\otimes w.
\end{aligned}$$

En particulier :

- Si $n\in N$, on a :

$$n(s(g)\otimes w)=\chi(n)s(g)\otimes w.$$

- Si $h\in G$, on a :

$$s(h)(s(g)\otimes w)=\chi(c(h,g))s(hg)\otimes w.$$

Montrons que $\operatorname{Ind}_N^{G'}\chi$ est une représentation fidèle de G'. Pour $g'\in G'$ et $x=\sum_{g\in G}\lambda_g s(g)\otimes w\in W,\ \lambda_g\in k$, on a :

$$\begin{aligned}
g'x=x \iff& g'\sum_{g\in G}\lambda_g s(g)\otimes w=\sum_{g\in G}\lambda_g s(g)\otimes w\\
\iff& \sum_{g\in G}\lambda_g g's(g)\otimes w=\sum_{g\in G}\lambda_g s(g)\otimes w\\
\iff& \sum_{g\in G}\lambda_g\chi(n(g')c(\pi(g'),g))s(\pi(g')g)\otimes w=\sum_{g\in G}\lambda_g s(g)\otimes w\\
\iff& \sum_{g\in G}\lambda_g\chi(n(g')c(\pi(g'),g))s(\pi(g')g)\otimes w=\sum_{g\in G}\lambda_{\pi(g')g} s(\pi(g')g)\otimes w\\
\iff& \lambda_g\chi(n(g')c(\pi(g'),g))=\lambda_{\pi(g')g}\ \forall g\in G.
\end{aligned}$$

Si $g'=n(g')\in N-\{1\}$, alors $\chi(n(g'))\neq 1$ et donc

$$g'x=x\Leftrightarrow \lambda_g\chi(n(g'))=\lambda_g\ \forall g\in G\Leftrightarrow \lambda_g=0\ \forall g\in G\Leftrightarrow x=0.$$

Si $g'=n(g')s\pi(g')\in G'-N$, *i.e.* $\pi(g')\neq 1$, soit m le nombre d'éléments de G, on a :

$$g'x=x\Leftrightarrow \lambda_g\chi(n(g')c(\pi(g'),g))=\lambda_{\pi(g')g}\ \forall g\in G.$$

Ici on a m variables λ_g mais il y a au maximum $m-1$ équations indépendantes. Donc on peut trouver des λ_g hors des solutions *i.e.* des λ_g tels que $g'x\neq x$.

Posons

$$\gamma=1\otimes w \text{ et } x(g)=\frac{s(g)\otimes w}{1\otimes w}\in k(W)\ \forall g\neq 1.$$

Si $h\in G$, on a

$$\begin{aligned}
s(h)x(g) &= \frac{s(h)s(g)\otimes w}{s(h)\otimes w}\\
&= \frac{\chi(c(h,g))s(hg)\otimes w}{s(h)\otimes w}\\
&= \chi(c(h,g))x(hg)/x(h).
\end{aligned}$$

Si $n \in N$, on a

$$\begin{aligned} nx(g) &= \frac{\chi(nc(1,g))s(g) \otimes w}{\chi(nc(1,1))1 \otimes w} \\ &= x(g) \text{ car } c(1,1) = c(1,g) = c(g,1) = 1. \end{aligned}$$

Ainsi, N opère trivialement sur $\{x(g) | g \in G\}$.

Pour $n \in N$, $n\gamma = \chi(n)\gamma$.
Pour $h \in G$,

$$\begin{aligned} s(h)\gamma &= s(h) \otimes w \\ &= (1 \otimes w)\frac{s(h) \otimes w}{1 \otimes w} = \gamma x(h). \end{aligned}$$

Ainsi, on a les mêmes générateurs et relations que chez Saltman, et donc

$$k'(W)/k'(W)^{G'} \xrightarrow{\sim} \operatorname{Frac}(S'(k'/k))/\operatorname{Frac}(R(k'/k)).$$

$\square$

Remarque 3.8. Dans la démonstration ci-dessus, si on note $W^{g'} = \{x \in W | g'x = x\}$ (pour $g' \in G' - N$), alors $\dim W^{g'} = [G : \langle \pi(g') \rangle]$. Donc

$$\nu(W) = 1 \Leftrightarrow \exists g' : |G| - [G : \langle \pi(g') \rangle] = 1 \Leftrightarrow |G| = |\langle \pi(g') \rangle| = 2$$

(*cf.* [KN1, rem. 2.8]).

Lemme 3.9. *Avec les notations du lemme précédent, on a un k-isomorphisme*

$$k'(W)^{G'} \simeq k(\mathcal{A})(x)$$

où x est une indéterminée, $\mathcal{A}$ est la k-algèbre centrale simple définie par le 2-cocycle c et $k(\mathcal{A})$ est son corps de déploiement générique (corps des fonctions de la variété de Severi-Brauer de $\mathcal{A}$).

Démonstration. Cela résulte du lemme 3.7 et de [Sa84, thm. 1.5]. $\square$

Lemme 3.10. *Soit K un corps complet pour une valuation discrète v de rang un. Soit A l'anneau de valuation de v. On suppose qu'on est dans la situation suivante :*

$$K \xrightarrow{G} K_{\mathrm{nr}} \xrightarrow{N} K'$$

où K'/K est galoisienne de groupe G', d'inertie N. Soit $B \subset K_{\mathrm{nr}}$ la clôture intégrale de A. Soient κ_A, κ_B les corps résiduels de A, B. Supposons que q soit inversible dans κ_A. Alors
a) L'image de $[G'] \in H^2(G, N) = H^2(\kappa_B/\kappa_A, N)$ est triviale dans le groupe de Brauer $\mathrm{Br}(\kappa_A)$.
b) L'extension $\kappa_B(W)^{G'}/\kappa_A$ est rationnelle, où W est la représentation du lemme 3.7.

Démonstration. a) Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} {[G'] \in H^2(G,N)} \arrow[r] \arrow[d] & H^2(G, \kappa_B^*) \arrow[r, hook] \arrow[dl, dashed, "\varphi"] & \mathrm{Br}(\kappa_A) \\ H^2(G, K_{\mathrm{nr}}^*) \arrow[d, hook] & & \\ \mathrm{Br}(K). & & \end{tikzcd}$$

Il existe un morphisme $\varphi : H^2(G,\kappa_B^*) \to H^2(G,K_{\mathrm{nr}}^*)$ faisant commuter le triangle, et il est injectif (*cf.* [Se68, pp. 192–194]). En effet, on a la suite exacte :

$$1 \to U_{K_{\mathrm{nr}}} \to K_{\mathrm{nr}}^* \xrightarrow{v} \mathbb{Z} \to 0$$

scindée par le choix d'une uniformisante de K. On en déduit une suite exacte scindée :

$$0 \to H^2(G,U_{K_{\mathrm{nr}}}) \to H^2(G,K_{\mathrm{nr}}^*) \to H^2(G,\mathbb{Z}) \to 0.$$

De plus, on a une autre suite exacte :

$$1 \to U^1_{K_{\mathrm{nr}}} \to U_{K_{\mathrm{nr}}} \to \kappa_B^* \to 1$$

où $U^1_{K_{\mathrm{nr}}}$ est le sous-groupe de $U_{K_{\mathrm{nr}}}$ formé des $a \in U_{K_{\mathrm{nr}}}$ tels que $v(1-a) \geqslant 1$. On a $H^q(G,U^1_{K_{\mathrm{nr}}}) = 0$ pour tout $q \geqslant 1$ [Se68, lemme 2, p. 193]. Donc

$$H^2(G,\kappa_B^*) \xleftarrow{\sim} H^2(G,U_{K_{\mathrm{nr}}}) \hookrightarrow H^2(G,K_{\mathrm{nr}}^*).$$

Comme K'/K est une extension de groupe de Galois G' induite par K_{nr}/K de groupe G ("the embedding problem"), d'après [Sa84, prop. 1.1], l'image de $[G']$ dans $H^2(G,K_{\mathrm{nr}}^*)$ est triviale. Elle est donc triviale dans $H^2(G,\kappa_B^*) \hookrightarrow \mathrm{Br}(\kappa_A)$.

b) Cela résulte de a) et du lemme 3.9, puisqu'avec les notations de ce lemme on a $[\mathcal{A}] = [G'] \in \mathrm{Br}(\kappa_A)$. □

Lemme 3.11 "Lemme sans nom tordu". *Soient G, N, G' comme dans le lemme 3.9. Soit k'/k une extension de groupe de Galois G. Soient W, W' deux représentations fidèles de G' sur k. Alors $k'(W)^{G'}$ et $k'(W')^{G'}$ sont stablement équivalents sur k. Si l'un est pur, l'autre est stablement pur.*

Démonstration. Soit U un ouvert de W tel que U soit un G'-torseur (*cf.* [KN1, rem. 2.8]). Alors $U_{k'} = U \times_k \mathrm{Spec}(k')$ est encore un G'-torseur (puisque $\mathrm{Spec}(k')$ est un k-schéma affine ! [SGA 1, VIII, cor. 7.9] ou [Mil, chap. 1, th. 2.23]). Donc $U_{k'} \times_k W'/G'$ est un fibré vectoriel sur $U_{k'}/G'$. Et donc $k'(W \oplus W')^{G'} = k'(U_{k'} \times W')^{G'}$ est transcendant pur sur $k'(W)^{G'}$. On raisonne de même avec W'. □

3.3 Démonstration du théorème 3.4

D'après la remarque 3.2, I est cyclique ($I \xrightarrow{\sim} \mu_q$ où $q|m$) et central dans D. Rappelons aussi que

$$I = \mathrm{Ker}(D \to Gal(\kappa_B/\kappa_A)).$$

Soit W' une k-représentation fidèle de D, qui est somme directe d'au moins deux représentations régulières de D (*cf.* [KN1, rem. 2.8 et § 5.5]). Soit

$$\chi : I \xrightarrow{\sim} \mu_q \hookrightarrow k^*$$

un caractère fidèle de I (*cf.* [Pe08, dém. prop. 3, p. 207]). Soit π une uniformisante de B telle que $\pi^q \in k(W)^I$ (un tel π existe, *cf.* [Lang, chap. II, prop. 12]). Alors, $k(W) = k(W)^I[\pi]$ et

$$\sigma\pi = \chi(\sigma)\pi \tag{3.1}$$

pour $\sigma \in I$, parce que $\mu_q \subset k(W)^I$ et donc l'extension $k(W)/k(W)^I$ est kummerienne.

On note $\varphi : D \times I \to G$ le morphisme défini par $(d,i) \mapsto di$. Alors $D \times I$ opère sur W via φ.

Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\overline{k(W)} \arrow[r] & \overline{k(W \oplus W' \oplus \chi)} & \overline{k(W' \oplus \chi)} \arrow[l] \\
k(W) \arrow[u] \arrow[r] & k(W \oplus W' \oplus \chi) \arrow[u] & k(W' \oplus \chi) \arrow[u] \arrow[l] \\
k(W)^G \arrow[u, "G"'] \arrow[r] & k(W \oplus W' \oplus \chi)^{D\times I} \arrow[u, "D\times I"'] & k(W' \oplus \chi)^{D\times I} \arrow[u, "D\times I"'] \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

où $D \times I$ opère sur $W \oplus W' \oplus \chi$ par l'action de $D \times I$ sur W, l'action de D sur W' et l'action de I sur χ.

Soit $(X_1, \ldots, X_s)$ une base de W'. D'après [Bour1, lemme 1, p. 156], il existe une unique valuation discrète de rang un w_1 prolongeant v_B dans $k(W)(X_1)$, telle que

$$w_1(P) = w_1(\sum_j a_j X_1^j) = \inf_j \{v_B(a_j) + j\xi\}$$

où $a_j \in k(W)$ et $\xi \in \mathbb{Z}$. On choisit $\xi = 0$ et donc $w_1(X_1) = 0$. De plus, d'après [Bour1, prop. 2, p. 157], le corps résiduel κ_{w_1} de w_1 est transcendant pur sur $\kappa_B = \kappa_{v_B}$ et plus précisément $\kappa_{w_1} = \kappa_B(t_1)$ où t_1 est l'image de X_1 dans κ_{w_1}. Par récurrence, il existe une unique valuation discrète w prolongeant v_B dans $k(W \oplus W')$ telle que

$$w(\sum_J a_J X^J) = \inf_J \{v_B(a_J)\}$$

où

$$J = (j_1, \ldots, j_s), X^J = X_1^{j_1} \ldots X_s^{j_s}, a_J \in k(W).$$

Donc $w(X_i) = 0, i = 1, \ldots, s$ pour $X_i \in W'$ et $\kappa_w = \kappa_B(t_1, \ldots, t_s)$ où t_i est l'image de X_i dans κ_w pour tout i. Notons la formule :

$$w(\lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_s X_s) = 0 \quad \text{si } k^s \ni (\lambda_1, \ldots, \lambda_s) \neq (0, \ldots, 0). \tag{3.2}$$

Enfin, il existe une unique valuation discrète de rang un $v_{B'}$ prolongeant w donc prolongeant v_B dans $k(W \oplus W' \oplus \chi) = k(W \oplus W')(T)$ telle que

$$v_{B'}(\sum_{J,l} a_{J,l} X^J T^l) = \inf_l \{w(\sum_J a_{J,l} X^J) + l\} = \inf_{J,l} \{v_B(a_{J,l}) + l\},\ a_{J,l} \in k(W).$$

Donc $v_{B'}(T) = 1$ (on choisit $\xi = 1$). Et donc $v_{B'}(T/\pi) = 0$ où π engendre l'idéal maximal m_B de B. D'où $\kappa_{B'} = \kappa_{v_{B'}} = \kappa_B(t_1, \ldots, t_s, t)$ où t est l'image de T/π dans $\kappa_{B'}$. Ainsi l'anneau B' de $v_{B'}$ prolonge B dans $k(W \oplus W' \oplus \chi)$. Posons $A' = B' \cap k(W \oplus W' \oplus \chi)^{D\times I}$.

Comme W' est une somme de représentations régulières de D, on peut choisir les X_i ci-dessus de telle sorte qu'ils soient permutés par D, soit $gX_i = X_{g(i)}$ pour tout i. C'est ce que nous faisons dans le lemme qui suit.

Lemme 3.12. *Le groupe de décomposition de B' dans $D \times I$ est $D \times I$ et son groupe d'inertie est $1 \times I$.*

Démonstration. D'abord on va montrer que $(D \times 1)B' = B'$. Soit $g \in D$. Comme D est le groupe de décomposition de B, on a $gB = B$. Par le choix des X_i, on a $gX^J = g(X_1^{j_1} \ldots X_s^{j_s}) = X^{gJ}$.

Alors

$$\begin{aligned}v_{gB'}(\sum_{J,l} a_{J,l}X^JT^l) &= v_{B'}(g(\sum_{J,l} a_{J,l}X^JT^l)) = v_{B'}(\sum_{J,l}(ga_{J,l})X^{gJ}T^l)\\ &= \inf_{J,l}\{v_B(ga_{J,l})+l\} = \inf_{J,l}\{v_{gB}(a_{J,l})+l\}\\ &= \inf_{J,l}\{v_B(a_{J,l})+l\} = v_{B'}(\sum_{J,l} a_{J,l}X^JT^l).\end{aligned}$$

Grâce à l'unicité de B', on a $gB' = B'$ pour tout $g \in D$, donc $(D \times 1)B' = B'$. Et on a aussi $W' \subset B'$. Grâce à l'équation (3.2), on a $v_{B'}(\sum \lambda_i X_i) = 0$ avec $\lambda_i \in k$ et donc $W' \hookrightarrow \kappa_{B'}$. Posons $\overline{W'} = \mathrm{Im}(W')$, c'est le sous-espace vectoriel de $\kappa_{B'}$ de base $t_1, \dots, t_s$ et D opère librement sur $\overline{W'}$. Notons que $W' \to \overline{W'}$ est un isomorphisme $D \times I$-équivariant de k-espaces vectoriels.

Comme $I \subset D$ et $I = \langle\sigma\rangle$ opère sur T par $\sigma T = \chi(\sigma)T$ où $\chi(\sigma) \in k^*$, on a de manière analogue

$$\begin{aligned}v_{\sigma B'}(\sum_{J,l} a_{J,l}X^JT^l) &= v_{B'}(\sigma(\sum_{J,l} a_{J,l}X^JT^l)) = v_{B'}(\sum_{J,l}(\chi(\sigma)(\sigma a_{J,l}))X^JT^l)\\ &= \inf_{J,l}\{v_B(\chi(\sigma)(\sigma a_{J,l}))+l\} = \inf_{J,l}\{v_{\sigma B}(a_{J,l})+l\}\\ &= \inf_{J,l}\{v_B(a_{J,l})+l\} = v_{B'}(\sum_{J,l} a_{J,l}X^JT^l).\end{aligned}$$

Ainsi $(1 \times I)B' = B'$. En conclusion, $(D \times I)B' = B'$.

D'autre part, I opère trivialement sur κ_B à cause de la définition de I et D opère librement sur $\{t_1, \dots, t_s\}$. De plus,

$$\sigma t = \sigma(T/\pi) = \chi(\sigma)T/\chi(\sigma)\pi = t$$

où π est choisi comme en (3.1). Ainsi $1 \times I$ opère trivialement sur le corps $\kappa_B(t_1, \dots, t_s, t)$. $\square$

Soient B_χ la restriction de B' à $k(W' \oplus \chi) = k(W')(T)$ et v_{B_χ} sa valuation associée. Alors v_{B_χ} est nulle sur $k(W')$ et $v_{B_\chi}(T) = 1$ (donc B_χ est l'anneau que Peyre a considéré dans [Pe08, p. 207]). Posons $A_\chi = B_\chi \cap k(W' + \chi)^{D\times I}$. On a aussi que le groupe de décomposition de B_χ est $D \times I$ et son groupe d'inertie est $1 \times I$. On a des diagrammes :

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r] & B' & B_\chi \arrow[l] \\ A \arrow[u] \arrow[r] & A' \arrow[u] & A_\chi \arrow[u] \arrow[l] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \kappa_B \arrow[r] & \kappa_{B'} & \kappa_{B_\chi} \arrow[l] \\ \kappa_A \arrow[u, "D/I"] \arrow[r] & \kappa_{A'} \arrow[u, "D"'] & \kappa_{A_\chi}. \arrow[u, "D"'] \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Lemme 3.13. *L'indice de ramification de $A'|A$ est 1.*

Démonstration. D'abord, d'après notre construction, l'indice de ramification de $B|A$ est $e_{B|A} = |I| = q$ et celui de $B'|B$ est $e_{B'|B} = v_{B'}(\pi_B) = 1$ où π_B est une uniformisante de B. D'après le lemme 3.12, $e_{B'|A'} = |1 \times I| = |I| = q$. Enfin, grâce à la relation :

$$e_{B'|A} = e_{B'|B}e_{B|A} = e_{B'|A'}e_{A'|A},$$

on en déduit $e_{A'|A} = 1$. $\square$

On en déduit un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
A^0(BG, M_n) \arrow[r] \arrow[d, hook] & A^0(BD \times BI, M_n) \arrow[rr, "\partial_{D\times I,g}"] \arrow[d, hook] \arrow[dr] & & A^0(BD, M_{n-1}) \arrow[d, hook] \\
M_n(k(W)^G) \arrow[r] \arrow[d, "\partial_A"] & M_n(k(W \oplus W' \oplus \chi)^{D\times I}) \arrow[d, "\partial_{A'}"] & M_n(k(W' \oplus \chi)^{D\times I}) \arrow[l] \arrow[r, "\partial_{A_\chi}"] \arrow[d, "\partial_{A_\chi}"] & M_{n-1}(k(W')^D) \arrow[dl, "="] \\
M_{n-1}(\kappa_A) \arrow[r, "\alpha"] & M_{n-1}(\kappa_{A'}) & M_{n-1}(\kappa_{A_\chi}). \arrow[l, "e_{A'|A_\chi}\cdot"'] &
\end{tikzcd}$$

En effet, le rectangle supérieur gauche et le triangle supérieur central commutent par définition du foncteur $A^0(-, M_n)$ et des morphismes $A^p(X, M_n) \to A^p(Y, M_n)$ pour $Y \to X$ [Rost, § 12]. Le trapèze supérieur droit commute grâce au lemme 1.8. Enfin, la commutativité des rectangles inférieurs résulte du lemme 3.13 et de l'axiome (R3a) de [Rost].

Pour conclure, il suffit de montrer que la flèche α est injective, et pour cela, il suffit de voir que l'extension $\kappa_{A'}/\kappa_A$ est unirationnelle [KN1, lemme 5.3].

Soit $W'' = \mathrm{Ind}_I^D \chi$ (vue comme k-représentation). Comme χ est un facteur direct de la représentation régulière de I, W'' est un facteur direct de la représentation régulière de D, donc $W'' \subset W'$. D'après le lemme 3.7, W'' est fidèle. On note $\overline{W''}$ l'image de W'' dans $\kappa_{B'}$.

D'après le lemme 3.10 b), $\kappa_B(\overline{W''}, t)^D = \kappa_B(\overline{W''})^D(t)$ est transcendant pur sur κ_A. D'après le lemme 3.11, $\kappa_{A'} = \kappa_B(\overline{W'}, t)^D$ et $\kappa_B(\overline{W''}, t)^D$ sont stablement équivalents sur κ_A et finalement $\kappa_{A'}$ est stablement pur sur κ_A.

Remarque 3.14. La représentation W'' intervenant à la fin de la démonstration ci-dessus provient du lemme 3.9 ; elle joue un rôle clé dans la démonstration. En principe, on aurait pu utiliser $W'' \oplus W''$ à la place de W' ci-dessus mais cela rendrait la vérification du lemme 3.12 plus délicate. Pour cette raison, nous avons préféré procéder indirectement en passant par la représentation régulière de D.

3.4 Un raffinement du théorème principal

Définition 3.15. Soit G k-groupe algébrique linéaire. On définit

$$A^0_{\mathrm{nab}}(BG, M_n) = \bigcap_A \mathrm{Ker}(A^0(BG, M_n) \to A^0(BA, M_n))$$

où A parcourt les sous-groupes abéliens fermés de G, de type multiplicatif déployé.

Notons que $A^0_{\mathrm{nab}}(BG, M_n) \subset \tilde{A}^0(BG, M_n)$ (considérer $A = 1$ dans la définition 3.15).

Lemme 3.16. *Avec les notations de la définition 3.15, on a*

$$\tilde{A}^0_{\mathrm{nr}}(BG, M_n) \subset A^0_{\mathrm{nab}}(BG, M_n).$$

Démonstration. C'est évident par fonctorialité, puisque $\tilde{A}^0_{\mathrm{nr}}(BA, M_n) = 0$ pour tout A de type multiplicatif déployé [KN1, th. 2.29 et cor. 6.5]. □

Lemme 3.17 “Lemme de Bogomolov”. *Supposons G fini constant et d'exposant m, avec $\mu_m \subset k$. Pour tout $D \subset G$ et $g : I = \mu_m \to Z_G(D)$, on a*

$$\partial_{D,g}(A^0_{\mathrm{nab}}(BG, M_n)) \subset A^0_{\mathrm{nab}}(BD, M_{n-1}).$$

Démonstration. Soit A_D un sous-groupe abélien de D. Posant $A = \langle A_D, g(\mu_m)\rangle$ (qui est abélien !), on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
A^0(BG, M_n) \arrow[r] \arrow[d] & A^0(BA, M_n) \arrow[d] \\
A^0(BD \times BI, M_n) \arrow[r] \arrow[d] & A^0(BA_D \times BI, M_n) \arrow[d] \\
A^0(BD, M_{n-1}) \arrow[r] & A^0(BA_D, M_{n-1}).
\end{tikzcd}$$

D'où l'énoncé. ☐

Corollaire 3.18. *On a la suite exacte suivante*

$$0 \to \tilde{A}^0_{\mathrm{nr}}(BG, M_n) \to A^0_{\mathrm{nab}}(BG, M_n) \xrightarrow{\partial_{D,g}} \bigoplus_{D,g} A^0_{\mathrm{nab}}(BD, M_{n-1}). \tag{3.3}$$

Démonstration. D'après le théorème 3.1, le lemme 3.17 et le lemme 3.16, on a le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \tilde{A}^0_{\mathrm{nr}}(BG, M_n) \arrow[r] \arrow[dr, hook] & \tilde{A}^0(BG, M_n) \arrow[r] & \bigoplus_{D,g} A^0(BD, M_{n-1}) \\
& & A^0_{\mathrm{nab}}(BG, M_n) \arrow[r] \arrow[u, hook] & \bigoplus_{D,g} A^0_{\mathrm{nab}}(BD, M_{n-1}) \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

où la première ligne est une suite exacte. D'où (3.3). ☐

Pour le théorème suivant, rappelons la définition [KN1, déf. 5.4] :

Définition 3.19. Un module de cycles M est dit *connectif* s'il existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $M_n = 0$ pour tout $n < n_0$.

Théorème 3.20. *Avec l'hypothèse de la définition 3.15, soient M un module de cycles et $n \in \mathbb{Z}$.*

(i) *Si $A^0_{\mathrm{nab}}(BG, M_n) = 0$, alors $\tilde{A}^0_{\mathrm{nr}}(BG, M_n) = 0$.*

(ii) *Si M est connectif et*

$$\forall H \subset G, \forall m \leqslant n, \tilde{A}^0_{\mathrm{nr}}(BH, M_m) = 0,$$

alors

$$\forall H \subset G, \forall m \leqslant n, A^0_{\mathrm{nab}}(BH, M_m) = 0.$$

Démonstration. On a tout de suite (i) grâce au lemme 3.16. On montre (ii) par récurrence sur m. Comme M est connectif, c'est évident pour m petit. Supposons que ce soit vrai pour $m - 1$. Utilisons la suite exacte (3.3) avec $A^0_{\mathrm{nab}}(BD, M_{m-1}) = 0 \ \forall D$, on a

$$A^0_{\mathrm{nab}}(BG, M_m) \xleftarrow{\sim} \tilde{A}^0_{\mathrm{nr}}(BG, M_m) = 0.$$

Et c'est vrai aussi pour tout sous-groupe H de G. ☐

4. Reformulation : 0-cycles sur le compactifié de BG

4.1 Le foncteur $\overline{CH}_0$

Définition 4.1. Soient donnés $X \in \mathbf{Sm}(k)$ et une compactification $j : X \hookrightarrow \bar{X}$ où $\bar{X}$ est projectif et lisse. On définit

$$\overline{CH}_0(X) = CH_0(\bar{X}) = A_0(\bar{X}, K_0^M).$$

Proposition 4.2. *Si k est de caractéristique zéro, $\overline{CH}_0(X)$ ne dépend que de X et $\overline{CH}_0$ définit un foncteur homotopique et pur en coniveau $\geqslant 1$.*

La partie délicate de cette proposition est la fonctorialité.

Démonstration. Notons $\mathbf{Sm}^{\mathrm{proj}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Sm}$ formée des schémas projectifs, S_b la classe des morphismes birationnels de $\mathbf{Sm}$. D'après [KS, thm. 2.1], on a un diagramme commutatif de foncteurs

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Sm}^{\mathrm{proj}} \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathbf{Sm} \arrow[d] \\ S_b^{-1}\,\mathbf{Sm}^{\mathrm{proj}} \arrow[r, "\sim"] & S_b^{-1}\,\mathbf{Sm} \end{tikzcd}$$

où le foncteur du bas est une équivalence de catégories.

Considérons le foncteur $F : \mathbf{Sm} \to \mathbf{Ab}$ donné par $F(X) = H_0(X, \mathbb{Z})$ (homologie de Suslin, *cf.* [KN1, déf. 3.14]). Il vérifie les hypothèses de [KS, § 3] par rapport au digramme ci-dessus. En effet, pour X projectif et lisse, $F(X) = H_0(X, \mathbb{Z}) = CH_0(X)$ et d'après Fulton [Ful, ex. 16.1.11, p .312], $CH_0(X) = CH_0(Y)$ pour tout $X \to Y$ dans S_b. Donc on a un isomorphisme naturel de foncteurs :

$$(\mathbf{Sm}^{\mathrm{proj}} \to \mathbf{Sm} \xrightarrow{F} \mathbf{Ab}) \simeq (\mathbf{Sm}^{\mathrm{proj}} \to S_b^{-1}\,\mathbf{Sm}^{\mathrm{proj}} \xrightarrow{CH_0} \mathbf{Ab}).$$

En appliquant [KS, § 3 et thm. 2.1], on obtient une transformation naturelle de foncteurs

$$H_0(X, \mathbb{Z}) \to \overline{CH}_0(X)$$

où $H_p(-, \mathbb{Z}(q))$ est l'homologie motivique de Voevodsky [KN1, 3.2.4] et $\overline{CH}_0(X) := CH_0(\bar{X})$ pour $\bar{X}$ une compactification lisse de X : c'est exactement le foncteur de la définition 4.1, qui est donc bien défini.

De plus, $\overline{CH}_0$ est homotopique et pur en coniveau $\geqslant 1$. En effet, soit $U \hookrightarrow X$ une immersion ouverte, alors $\bar{X}$ est aussi un compactifié de U :

$$U \hookrightarrow X \hookrightarrow \bar{X}.$$

Donc

$$\overline{CH}_0(U) = \overline{CH}_0(\bar{X}) = CH_0(X).$$

D'autre part, soit $f : E \to X$ un fibré vectoriel. Soit U un ouvert de X, on a le cartésien suivant

$$\begin{tikzcd} j^*E \arrow[r, hook, "o"] \arrow[d] & E \arrow[d, "f"] \\ U \arrow[r, hook, "j", "o"'] & X \end{tikzcd}$$

où $j^*E \cong U \times \mathbb{A}^n$ quand U est assez petit. Alors

$$\begin{tikzcd} \overline{CH}_0(j^*E) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \overline{CH}_0(E) \arrow[d] \\ \overline{CH}_0(U) \arrow[r, "\sim"] & \overline{CH}_0(X). \end{tikzcd}$$

Il nous amène à considérer le cas $E = X \times \mathbb{A}^n$.

Soit $j : X \hookrightarrow Y$ une compactification de X, nous avons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} E = X \times \mathbb{A}^n \arrow[r, hook] \arrow[d] & Y \times \mathbb{A}^n \arrow[r, hook] & Y \times \mathbb{P}^n \arrow[d] \\ X \arrow[rr, hook] & & Y \end{tikzcd}$$

où $Y \times \mathbb{P}^n$ est une compactification lisse de E. D'après [Ful, III, thm. 3.3], on a $CH_0(Y \times \mathbb{P}^n) \xrightarrow{\sim} CH_0(Y)$. Donc

$$\overline{CH}_0(E) = \overline{CH}_0(X).$$

□

Remarque 4.3. Comme sous-produit de la démonstration de la proposition 4.2, on obtient un morphisme de foncteurs

$$H_0(-, \mathbb{Z}) \to \overline{CH}_0.$$

Ce morphisme est surjectif d'après [K11, prop. 6.1].

Soit $G \in \mathbf{Grp}$: d'après la proposition 4.2 et [KN1, déf. 2.14], $\overline{CH}_0(BG)$ est bien défini et on a une surjection

$$H_0(BG, \mathbb{Z}) \twoheadrightarrow \overline{CH}_0(BG).$$

Question 4.4. Peut-on définir $\overline{CH}_0(-)$ *a priori* comme quotient de $H_0(-, \mathbb{Z})$, sans utiliser la résolution des singularités (sous-jacente à la preuve de la proposition 4.2) ? Voir remarque 4.6 pour une réponse dans le cas particulier de BG.

4.2 Un résultat dual du théorème 3.1

Proposition 4.5. *Si k est de caractéristique zéro et contient une racine primitive e-ième de l'unité, on a la suite exacte*

$$\bigoplus_{D \subset G, g : \mu_e \to Z_G(D)} H_{-1}(BD, \mathbb{Z}(-1)) \to H_0(BG, \mathbb{Z}) \to \overline{CH}_0(BG) \to 0 \tag{4.1}$$

pour tout groupe fini G dont l'exposant divise e.

Démonstration. D'après le théorème 3.1, on a :

$$0 \to A^0_{\mathrm{nr}}(BG, M_0) \to A^0(BG, M_0) \to \bigoplus_{D, g : I \to Z_G(D)} A^0(BD, M_{-1}).$$

Soient U_G un G-torseur linéaire de coniveau $\geqslant c$ et $\bar{X}$ une compactification lisse de U_G/G. D'après [KN1, déf. 6.1 et prop. 6.6], on a

$$A^0_{\mathrm{nr}}(BG, M_0) = A^0_{\mathrm{nr}}(U_G/G, M_0) = A^0(\bar{X}, M_0).$$

De plus, d'après [K11, thm. 1.3], pour X lisse, on a

$$A^0(X, M_0) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{CM}}(H^X, M)$$

où CM est la catégorie des modules de cycles et pour tout corps F/k,

$$H_n^X(F) = H_{-n}(X_F, \mathbb{Z}(-n)).$$

Donc on a la suite exacte :

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{CM}}(H^{\bar{X}}, M) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{CM}}(H^{U_G/G}, M) \to \bigoplus_{D,g:I\to Z_G(D)} \mathrm{Hom}_{\mathrm{CM}}(H^{U_D/D}[1], M).$$

En appliquant le lemme de Yoneda dans la catégorie abélienne CM, on en tire la suite exacte

$$\bigoplus_{D,g:I\to Z_G(D)} H^{U_D/D}[1] \to H^{U_G/G} \to H^{\bar{X}} \to 0.$$

D'où la suite exacte suivante sur le corps de base k :

$$\bigoplus_{D,g:I\to Z_G(D)} H_{-1}(BD, \mathbb{Z}(-1)) \to H_0(BG, \mathbb{Z}) \to H_0(\bar{X}, \mathbb{Z}) \to 0$$

où $H_0(\bar{X}, \mathbb{Z}) = A_0(\bar{X}, K_0^M) = \overline{CH}_0(BG)$ (*cf.* déf. 4.1).

Le morphisme $H_{-1}(BD, \mathbb{Z}(-1)) \to H_0(BG, \mathbb{Z})$ est donné explicitement par

$$\begin{array}{ccc} H_{-1}(BD, \mathbb{Z}(-1)) = & & \mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}}(\mathbb{Z}, M(U_D/D)(1)[1]) \\ & & \downarrow \\ & & \mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}}(\mathbb{Z}, M(U_D/D) \otimes M(\mathbb{G}_m)) \\ & & {\scriptstyle (*)}\downarrow \\ & & \mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}}(\mathbb{Z}, M(U_D/D) \otimes M(U_{\mu_m}/\mu_m)) \\ & & \downarrow \\ H_0(BG, \mathbb{Z}) & = & \mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}}(\mathbb{Z}, M(U_G/G)) \end{array}$$

où $(*)$ est donné par $\mathbb{G}_m \to B\mu_m$. □

Remarque 4.6. Si k est de caractéristique p, la suite exacte (4.1) donne une définition de "$\overline{CH}_0(BG)$".

4.3 Conditions équivalentes pour avoir des groupes non ramifiés triviaux

Définition 4.7. Soient k un corps et X un schéma lisse sur k. On dit que X *n'a pas d'invariants non ramifiés*[2] si pour tout module de cycles M,

$$M_n(k) \xrightarrow{\sim} A^0_{\mathrm{nr}}(X, M_n).$$

Théorème 4.8. *Si k est de caractéristique zéro, alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) X n'a pas d'invariants non ramifiés (déf. 4.7) ;

b) L'application deg : $\overline{CH}_0(X_F) \to \mathbb{Z}$ est bijective pour toute extension F/k.

Démonstration. D'après la définition 4.1 et la résolution des singularités, on a

$$\overline{CH}_0(X_F) = CH_0(\bar{X}_F)$$

2. De type motivique, à cause des invariants dans le groupe de Witt.

où $\bar{X}$ est une compactification propre et lisse de X. Donc ce théorème est exactement [Me, th 2.11]. □

Corollaire 4.9. *Soit $G \in \mathbf{Grp}$. Si k est de caractéristique zéro, alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) "BG" n'a pas d'invariants non ramifiés (déf. 4.7) ;

b) $\widetilde{\overline{CH}}_0(BG_F) = 0$ pour toute extension F/k (déf. 1.1).

Démonstration. Remarquons que pour $\operatorname{Spec} k \to G$, on a

$$\begin{tikzcd}
\overline{CH}_0(BG_F) \arrow[r] & \mathbb{Z} \\
\overline{CH}_0(B1) \arrow[u] \arrow[ur, "\sim"'] &
\end{tikzcd}$$

D'où le résultat d'après le théorème 4.8. □

Corollaire 4.10. *Soit G un groupe fini d'exposant m sur un corps k contenant μ_m, où m est inversible dans k. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) "BG" n'a pas d'invariants non ramifiés (déf. 4.7) ;

b) Pour tout module de cycles M et pour tout n,

$$\tilde{A}^0(BG, M_n) \xrightarrow{\partial_{D,g}} \bigoplus_{D,g} A^0(BD, M_{n-1})$$

est injectif.

c) Pour toute extension F/k,

$$\bigoplus_{D,g} H_{-1}(BD_F, \mathbb{Z}(-1)) \to \tilde{H}_0(BG_F, \mathbb{Z})$$

est surjectif.

Démonstration. $(a) \Leftrightarrow (b)$ grâce au théorème 3.1 et à la définition 4.7. Et $(a) \Leftrightarrow (c)$ à cause de la proposition 4.5 et du corollaire 4.9. □

Corollaire 4.11. *Soit G un groupe fini d'exposant m sur un corps k contenant μ_m, m est inversible dans k. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) Pour tout $H \subset G$, "BH" n'a pas d'invariants non ramifiés (déf. 4.7) ;

i^{bis}) Comme i) mais à valeurs dans un module de cycles connectif (déf. 3.19).

ii) Pour tout $H \subset G$ et pour toute extension F/k,

$$\bigoplus_{A \subset H} H_0(BA_F, \mathbb{Z}) \twoheadrightarrow H_0(BH_F, \mathbb{Z})$$

où A parcourt les sous-groupes abéliens de H.

Démonstration. On va montrer $(i) \Rightarrow (i^{bis}) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i)$.

$(i) \Rightarrow (i^{bis})$ est évident.

$(i^{bis}) \Rightarrow (ii)$: Pour tout $H \subset G$ et pour tout M connectif, d'après le théorème 3.20, on a

$$A^0(BH, M_n) \hookrightarrow \bigoplus_A A^0(BA, M_n).$$

D'après [KN1, th. 5.17], ceci implique

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{CM}}(H^{BH}, M[n]) \hookrightarrow \bigoplus_A \mathrm{Hom}_{\mathrm{CM}}(H^{BA}, M[n])$$

pour tout M connectif. Comme H^{BH}, H^{BA} sont connectifs [KN1, lemme 5.15], ceci implique par le lemme de Yoneda

$$\forall H \subset G, \bigoplus_A H^{BA} \twoheadrightarrow H^{BH}.$$

En évaluant H_0 sur un corps F, on a

$$\forall H \subset G, \forall F/k, \bigoplus_{A \subset H} H_0(BA_F, \mathbb{Z}) \twoheadrightarrow H_0(BH_F, \mathbb{Z}).$$

$(ii) \Rightarrow (i)$: Pour tout module de cycles M, on a [KN1, th. 5.17]

$$A^0(BH, M_0) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{CM}}(H^{BH}, M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{HI}}(h_0^{Nis}(BH), \mathcal{M}_0).$$

Donc (ii) implique

$$\bigoplus_{A \subset H} h_0^{Nis}(BA)(\operatorname{Spec} F) \twoheadrightarrow h_0^{Nis}(BH)(\operatorname{Spec} F)$$

pour tout F/k. Pour conclure, on a besoin du lemme suivant :

Lemme 4.12. *Soient $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathrm{HI}$ deux faisceaux Nisnevich avec transferts invariants par homotopie et $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$. Alors,*

$$f \text{ est un épimorphisme} \Leftrightarrow \forall F/k, f_F \text{ est surjectif.}$$

Démonstration. C'est évident pour $\Rightarrow$. Pour $\Leftarrow$, posons $\mathcal{H} = \operatorname{Coker} f$, on a $\mathcal{H}_{\operatorname{Spec} F} = 0\ \forall F/k$. D'après [MVW, cor. 11.2], $\mathcal{H} = 0$. Donc f est un épimorphisme. □

Appliquons le lemme 4.12 pour $\mathcal{F} = \oplus_A h_0^{Nis}(BA),\ \mathcal{G} = h_0^{Nis}(BH)$, on a

$$\forall H \subset G, \bigoplus_{A \subset H} h_0^{Nis}(BA) \twoheadrightarrow h_0^{Nis}(BH).$$

Ceci implique

$$\forall H \subset G, A^0(BH, M_n) \hookrightarrow \bigoplus_A A^0(BA, M_n)$$

pour tout module de cycles M. On en déduit (i) grâce au lemme 3.16. □

5. Application : théorèmes de Bogomolov et de Peyre

On retrouve ici les théorèmes de Bogomolov [CTS, thm. 7.1] et de Peyre [Pe08, thm. 1].

5.1 Généralité du théorème de Bogomolov

Lemme 5.1. *Soit k un corps contenant μ_m, où m est inversible dans k. Soit G un groupe fini d'exposant m. On a*

$$A^0_{\mathrm{nr}}(BG, H^2_{\text{ét}}(\mathbb{Z})) = A^0_{\mathrm{nab}}(BG, H^2_{\text{ét}}(\mathbb{Z})) = 0.$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
&A^0_{\mathrm{nab}}(BG, H^2_{\text{ét}}(\mathbb{Z}))\\
&= \operatorname{Ker}(A^0(BG, H^2_{\text{ét}}(\mathbb{Z})) \to \bigoplus_A A^0(BA, H^2_{\text{ét}}(\mathbb{Z}))) \text{ (déf. 3.15)}\\
&= \operatorname{Ker}(H^2_{\text{ét}}(BG, \mathbb{Z}) \to \bigoplus_A H^2_{\text{ét}}(BA, \mathbb{Z})) \text{ ([KN1, th. 8.3 a), } n = 0])\\
&= \operatorname{Ker}(H^2(G, \mathbb{Z}) \oplus H^2_{\text{ét}}(k, \mathbb{Z}) \to \bigoplus_A H^2(A, \mathbb{Z}) \oplus H^2_{\text{ét}}(k, \mathbb{Z}))\text{[KN1, (7.4)]}\\
&= \operatorname{Ker}(\operatorname{Hom}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \oplus H^2_{\text{ét}}(k, \mathbb{Z}) \to \bigoplus_A \operatorname{Hom}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \oplus H^2_{\text{ét}}(k, \mathbb{Z}))\\
&= 0
\end{aligned}$$

où A parcourt les sous-groupes abéliens de G. On conclut avec le lemme 3.16. □

Théorème 5.2. *Soit k un corps contenant μ_m, où m est inversible dans k. Soient G un groupe fini d'exposant m et W une k-représentation fidèle de G. On a*

$$\widetilde{\operatorname{Br}}_{\mathrm{nr}}(k(W)^G) = \bigcap_{A \in \mathcal{B}_G} \operatorname{Ker}(H^2(G, k^*) \to H^2(A, k^*)). \tag{5.1}$$

où $\mathcal{B}_G$ est l'ensemble des sous-groupes bicycliques de G et $\widetilde{\operatorname{Br}}_{\mathrm{nr}}(k(W)^G)$ est la partie réduite de $\operatorname{Br}_{\mathrm{nr}}(k(W)^G) = \operatorname{Br}_{\mathrm{nr}}(BG)$ (cf. déf. 1.1).

En particulier, si $k = k_s$ est séparablement clos, on a [Bog87]

$$\operatorname{Br}_{\mathrm{nr}}(k_s(W)^G) = \bigcap_{A \in \mathcal{B}_G} \operatorname{Ker}(H^2(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to H^2(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})). \tag{5.2}$$

En général ($\mu_m \subset k$),

$$\widetilde{\operatorname{Br}}_{\mathrm{nr}}(k(W)^G) \hookrightarrow \widetilde{\operatorname{Br}}_{\mathrm{nr}}(k_s(W)^G) = \operatorname{Br}_{\mathrm{nr}}(k_s(W)^G).$$

Démonstration. Rappelons que

$$\operatorname{Br}(k(W)^G) = H^2_{\text{ét}}(k(W)^G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) = A^0(BG, H^3_{\text{ét}}(\mathbb{Z}(1))).$$

Utilisons le corolaire 3.18 et le lemme 5.1 : on a

$$\begin{aligned}
\operatorname{Br}_{\mathrm{nr}}(BG) &= \operatorname{Br}_{\mathrm{nab}}(BG)\\
&\subset \bigcap_{A \in \mathcal{B}_G} \operatorname{Ker}(A^0(BG, H^3_{\text{ét}}(\mathbb{Z}(1))) \to A^0(BA, H^3_{\text{ét}}(\mathbb{Z}(1)))).
\end{aligned} \tag{5.3}$$

En fait, on a égalité. En effet, soit γ appartenant à la partie droite de (5.3), on raisonne comme Peyre [Pe08, rem. 4]. Soient $D \subset G$ et $g : I = \mu_m \to Z_G(D)$. Soit $x \in D$, alors $A = \langle x, I \rangle$ est un sous-groupe bicyclique de G. On a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
H^3_{\text{ét}}(BG, \mathbb{Z}(1))) \arrow[r, "\partial_{D,g}"] \arrow[d] & H^2_{\text{ét}}(BD, \mathbb{Z})) \arrow[r, equal] \arrow[d] & \operatorname{Hom}(D, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \oplus H^2_{\text{ét}}(k, \mathbb{Z}) \arrow[d]\\
H^3_{\text{ét}}(BA, \mathbb{Z}(1))) \arrow[r, "\partial_{\langle x \rangle,g}"] & H^2_{\text{ét}}(B\langle x \rangle, \mathbb{Z}))] \arrow[r, equal] & \operatorname{Hom}(\langle x \rangle, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \oplus H^2_{\text{ét}}(k, \mathbb{Z}).
\end{tikzcd}$$

où les égalités résultent de [KN1, (7.4)].

Comme l'image de γ dans $H^3_{\text{ét}}(BA,\mathbb{Z}(1))$ et donc dans $H^2_{\text{ét}}(B\langle x\rangle,\mathbb{Z})$ est nulle pour tout $x\in D$, son image dans $H^2_{\text{ét}}(BD,\mathbb{Z})$ l'est aussi. Alors $\gamma\in \operatorname{Br}_{\text{nr}}(k(W)^G)$. Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned}\widetilde{\operatorname{Br}}_{\text{nr}}(k(W)^G) &= \bigcap_{A\in\mathcal{B}_G} \operatorname{Ker}(\tilde{A}^0(BG,H^3_{\text{ét}}(\mathbb{Z}(1)))\to \tilde{A}^0(BA,H^3_{\text{ét}}(\mathbb{Z}(1))))\\ &= \bigcap_{A\in\mathcal{B}_G} \operatorname{Ker}(\tilde{H}^3_{\text{ét}}(BG,\mathbb{Z}(1))\to \tilde{H}^3_{\text{ét}}(BA,\mathbb{Z}(1)))\ ([\text{KN1},\ (8.6)]).\end{aligned}$$

D'après [KN1, (7.5)], on a $\tilde{H}^3_{\text{ét}}(BG,\mathbb{Z}(1))=H^2(G,k^*)$. D'où (5.1).

Si k est séparablement clos, on a

$$H^3_{\text{ét}}(k_s,\mathbb{Z}(1))=H^2(k_s,\mathbb{G}_m)=\operatorname{Br}(k_s)=0,\quad H^2(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1))\xrightarrow{\sim} H^2(G,k^*).$$

D'où (5.2).

En général, on a $\widetilde{\operatorname{Br}}_{\text{nr}}(k_s(W)^G)=\operatorname{Br}_{\text{nr}}(k_s(W)^G)$ car $\operatorname{Br}(k_s)=0$. Considérons la longue suite exacte suivante :

$$H^1(G,k^*)\to H^1(G,k_s^*)\to H^1(G,k_s^*/k^*)\to H^2(G,k^*)\to H^2(G,K_s^*)$$

Comme $\mu_m\subset k^*\subset k_s^*$, on a

$$H^1(G,k^*)\xleftarrow{\sim} H^1(G,\mu_m)\xrightarrow{\sim} H^1(G,k_s^*).$$

Donc la suite

$$0\to H^1(G,k_s^*/k^*)\to H^2(G,k^*)\to H^2(G,K_s^*)$$

est exacte. D'où le diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{tikzcd} & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\ & & \widetilde{\operatorname{Br}}_{\text{nr}}(BG) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Br}_{\text{nr}}(BG_{k_s}) \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & H^1(G,k_s^*/k^*) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & H^2(G,k^*) \arrow[r] \arrow[d] & H^2(G,k_s^*) \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & \bigoplus_{A\in\mathcal{B}_G} H^1(A,k_s^*/k^*) \arrow[r] & \bigoplus_{A\in\mathcal{B}_G} H^2(A,k^*) \arrow[r] & \bigoplus_{A\in\mathcal{B}_G} H^2(A,k_s^*). \end{tikzcd}$$

La flèche fragmentée est injective parce que

$$H^1(G,k_s^*/k^*)=\operatorname{Hom}(G,k_s^*/k^*)\hookrightarrow \bigoplus_{A\in\mathcal{B}_G}\operatorname{Hom}(A,k_s^*/k^*)=\bigoplus_{A\in\mathcal{B}_G} H^1(A,k_s^*/k^*).$$

On en déduit l'inclusion $\widetilde{\operatorname{Br}}_{\text{nr}}(BG)\hookrightarrow \operatorname{Br}_{\text{nr}}(BG_{k_s})$. □

5.2 Une généralisation de $A^0_{\text{NR}}(-,M_n)$ inspirée par Bogomolov

Définition 5.3. Soit $F:\mathbf{Sm}_{\text{fl}}^{\text{op}}\to\mathbf{Ab}$. On définit

$$F_{\text{neg}}(X):=\bigcup_U \operatorname{Ker}(F(X)\to F(U))=\operatorname{Ker}(F(X)\to F(\operatorname{Spec} k(X)))$$

où U parcourt les ouverts de X et $k(X)$ est le corps des fonctions de X, et

$$F_{\mathrm{st}}(X) := F(X)/F_{\mathrm{neg}}(X) = \mathrm{Im}(F(X) \to F(\operatorname{Spec} k(X))).$$

Ce sont respectivement la *partie négligeable* et l'*image stable* de F (en X). Ils définissent des foncteurs sur $\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$.

Lemme 5.4. *Supposons k infini. Si F est homotopique et pur en coniveau $\geqslant c$ (cf. [KN1, déf. 3.1]), alors $F_{\mathrm{neg}}, F_{\mathrm{st}}$ le sont aussi.*

Démonstration. Soit $E \to X$ un fibré vectoriel. Soit U un ouvert de X. Considérons le diagramme cartésien suivant

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[d] & \supset & E_U \arrow[d] & & E_\eta \arrow[ll, hook'] \arrow[d] & k(E) \arrow[l, hook'] \\
X & \supset & U & \supset & \operatorname{Spec} k(X) &
\end{tikzcd}$$

D'après l'hypothèse sur F, on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
F(E) \arrow[r] & F(E_U) \arrow[r] & F(E_\eta) \arrow[r] & F(k(E)) \\
F(X) \arrow[r] \arrow[u, "\wr"'] & F(U) \arrow[r] \arrow[u, "\wr"'] & F(k(X)) \arrow[u, "\wr"'] &
\end{tikzcd}$$

D'où $F_{\mathrm{neg}}(X) \xrightarrow{\sim} F_{\mathrm{neg}}(E)'$ où $F_{\mathrm{neg}}(E)' = \mathrm{Ker}(F(E) \to F(E_\eta))$. En fait $F_{\mathrm{neg}}(E)' = F_{\mathrm{neg}}(E)$. En effet, on va montrer $F(E_\eta) \hookrightarrow F(\operatorname{Spec} k(E))$. On peut se ramener au cas $X = \operatorname{Spec} k$. Pour tout ouvert V de $E_\eta = \mathbb{A}^n_k$, $V(k)$ est non vide. Donc $F(k) \to F(V)$ admet une section et $F(k) \hookrightarrow F(k(E))$. Alors, on a $F_{\mathrm{neg}}(X) \xrightarrow{\sim} F_{\mathrm{neg}}(E)$.

Soit $U \subset X$ un ouvert de X de coniveau $\delta(X, U) \geqslant c$ (*cf.* [KN1, déf. 2.1]). On a aussi le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F_{\mathrm{neg}}(U) \arrow[r] & F(U) \arrow[r] & F(\operatorname{Spec} k(U)) \\
0 \arrow[r] & F_{\mathrm{neg}}(X) \arrow[r] \arrow[u, dashed] & F(X) \arrow[r] \arrow[u, "\wr"'] & F(\operatorname{Spec} k(X)) \arrow[u, "\wr"']
\end{tikzcd}$$

car $k(U) = k(X)$. D'où $F_{\mathrm{neg}}(X) \xrightarrow{\sim} F_{\mathrm{neg}}(U)$. Ainsi, F_{neg} est homotopique et pur en coniveau $\geqslant c$.

Donc d'après la définition de F_{st}, on en déduit tout de suite qu'il est homotopique et pur en coniveau $\geqslant c$. □

Remarque 5.5. Si G est un groupe fini sur un corps infini k contenant μ_m où m est inversible dans k, alors $F_{\mathrm{neg}}(BG), F_{\mathrm{st}}(BG)$ sont bien définis (*cf.* déf. 2.1).

Définition 5.6. On définit

$$F_{\mathrm{NR}}(BG) := \{x \in F(BG) \mid \forall (D, g), \partial_{D,g}(x) \in (F_{-1})_{\mathrm{neg}}(BD)\}.$$

Exemple 5.7 [Bog92]. Soit $F = H^i_{\text{ét}}(-, \mathbb{Z}(n))$. Pour X lisse, on retrouve des classes k-négligeables de $H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}(n))$:

$$H^i_{\mathrm{neg}}(X, \mathbb{Z}(n)) = \mathrm{Ker}(H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}(n)) \to H^i_{\text{ét}}(k(X), \mathbb{Z}(n))),$$

et la cohomologie stable de $H^i_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}(n))$:

$$H^i_{\text{st}}(X,\mathbb{Z}(n)) = H^i_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}(n))/H^i_{\text{neg}}(X,\mathbb{Z}(n)).$$

Donc d'après [KN1, prop. 3.9], l'exemple 1.5, 1) et la définition 5.6, on a

$$\begin{aligned} &H^i_{\text{NR}}(BG,\mathbb{Z}(n)) \\ &\qquad = \{x \in H^i_{\text{ét}}(BG,\mathbb{Z}(n)) \mid \forall (D,g), \partial_{D,g}(x) \in H^{i-1}_{\text{neg}}(BD,\mathbb{Z}(n-1)).\} \end{aligned} \tag{5.4}$$

5.3 Théorème de Peyre

Définition 5.8. Soit G un groupe fini sur un corps k contenant μ_m où m est inversible dans k.

On définit le groupe $H^3_p(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ des *classes permutation-négligeables* comme le groupe [Pe08, déf. 4]

$$\sum_{H\subset G} \mathrm{Cor}^G_H(\mathrm{Im}(H^1(H,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\otimes 2} \xrightarrow{\cup} H^3(H,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}))).$$

Notons $H^4_{Ch}(BG,\mathbb{Z}(2)) = \langle c_2(\rho)\rangle$ le sous-groupe de $H^4_{\text{ét}}(BG,\mathbb{Z}(2))$ engendré par les classes de Chern des représentations ρ de G.

Utilisant [Pe08, prop. 1 et prop. 2] et [KN1, th. 7.1], on obtient

Lemme 5.9. *Si k est séparablement clos, alors*

$$H^3_p(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] = H^4_{Ch}(BG,\mathbb{Z}(2)) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}].$$

Théorème 5.10. *Soit k un corps contenant μ_m où m est inversible dans k. Soient G un k-groupe fini d'exposant m et W une représentation fidèle de G. On a un isomorphisme :*

$$H^4_{\text{NR}}(BG,\mathbb{Z}(2))/H^4_{Ch}(BG,\mathbb{Z}(2)) \xrightarrow{\sim} H^4_{\text{nr}}(k(W)^G,\mathbb{Z}(2)) \tag{5.5}$$

où $H^4_{\text{NR}}(BG,\mathbb{Z}(2))$ est comme en (5.4) et $H^4_{Ch}(BG,\mathbb{Z}(2))$ comme dans la définition 5.8.

Démonstration. D'après le théorème 3.1, on a :

$$H^3_{\text{nr}}(k(W)^G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = A^0_{\text{NR}}(BG,H^3_{\text{ét}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))).$$

La suite exacte de [KN1, th. 8.3 b)] donne une suite exacte

$$0 \to CH^2(BG) \to H^4_{\text{ét}}(BG,\mathbb{Z}(2)) \to A^0(BG,H^4_{\text{ét}}(\mathbb{Z}(2))) \to 0.$$

Alors, on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & CH^2(BG) \arrow[r] & H^4_{\text{ét}}(BG,\mathbb{Z}(2)) \arrow[r] \arrow[d, "\partial_{D,g}"] & A^0(BG,H^4_{\text{ét}}(\mathbb{Z}(2))) \arrow[r] \arrow[d, "\partial_{D,g}"] & 0 \\ & & H^3_{\text{ét}}(BD,\mathbb{Z}(1)) \arrow[r, "\sim"] & A^0(BD,H^3_{\text{ét}}(\mathbb{Z}(1))) & \end{tikzcd}$$

où l'isomorphisme provient de [KN1, th 8.3 a)]. D'après [Tot, p. 257], $CH^2(BG)$ est engendré par des classes de Chern des représentations de G. D'où on déduit (5.5). □

Remarque 5.11. En particulier, si k est algébriquement clos de caractéristique zéro, on a d'après [KN1, th. 7.1 et lemme 7.3, 1)]

$$\begin{aligned} &H^4_{\text{ét}}(BG,\mathbb{Z}(2)) \cong H^3(G,H^1_{\text{ét}}(k,\mathbb{Z}(2)) = H^3(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}), \\ &\qquad\qquad \text{et } H^3_{\text{ét}}(BD,\mathbb{Z}(1)) = H^3(D,\mathbb{Z}) = H^2(D,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Donc d'après le lemme 5.9 et (5.5), on a :

$$H^3_{\mathrm{nr}}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})/H^3_p(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \twoheadrightarrow H^3_{\mathrm{nr}}(k(W)^G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)),$$

et son noyau est annulé par une puissance de 2, où

$$H^3_{\mathrm{nr}}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \bigcap_{D\subset G,\ g:I\to Z_G(D)} \mathrm{Ker}(H^3(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial_{D,g}} H^2(D,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})).$$

On peut montrer que les résidus $\partial_{D,g}$ sont égaux à ceux de Peyre [Pe08, déf. 5]. On retrouve alors le théorème 1 de [Pe08].

Remarque 5.12. Grâce à la suite exacte (3.3) et au théorème 5.2, on obtient une généralisation en degré 3 de la suite exacte de Bogomolov :

$$0 \to A^0_{\mathrm{nr}}(BG, H^3_{\text{ét}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))) \to A^0_{\mathrm{nab}}(BG, H^3_{\text{ét}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))) \xrightarrow{\partial_{D,g}} \bigoplus_{D,g} \mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(BD).$$

Références

Bog87 F.A. Bogomolov, *The Brauer group of quotient spaces of linear representations*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **51** (1987), 485-516, 688.

Bog92 F.A. Bogomolov, *Stable cohomology of groups and algebraic varieties*, Mat. Sb. **183** (1992), 3-28.

Bour1 N. Bourbaki, Algèbre commutative, Chapitres 5 à 7, Hermann.

CTO J.-L. Colliot-Thélène, M. Ojanguren, *Variétés unirationnelles non rationnelles : au delà de l'exemple d'Artin et Mumford*, Invent. Math. **97** (1989), 141–158.

CTS J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc, *The rationality problem for fields of invariants under linear algebraic groups (with special regards to the Brauer group)*, in Proceedings of the International Colloquium on Algebraic groups and Homogeneous Spaces (Mumbai 2004), ed. V. Mehta, TIFR Mumbai, Narosa Publishing House (2007), 113–186.

Ful W. Fulton, Intersection theory, Second edition. Springer-Verlag, Berlin, 1998.

GMS S. Garibaldi, A. Merkurjev, J.-P. Serre, *Cohomological invariants in Galois cohomology*, AMS University Lecture Series, Vol. 28 (2003).

HK A. Huber-Klawitter, B. Kahn, *The slice filtration and mixed Tate motives*, Compositio Math. **142** (2006), 907–936.

K11 B. Kahn, *Relatively unramified elements in cycle modules*, J. K-theory **7** (2011), 409–427.

KN1 B. Kahn, Nguyen T. K. Ngan *Sur l'espace classifiant d'un groupe algébrique linéaire, I*, J. Math. Pures Appl. **102** (2014) 972–1013.

KS B. Kahn, R. Sujatha, *A few localisation theorems*, Homology, Homotopy and Applications, vol. **9** (2), 2007, 137-161.

Lang S. Lang, Algebraic Number Theory, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 110.

Me A. S. Merkurjev, *Unramified elements in cycle modules*, J. London Math. Soc. **78** (2008), 51-64.

MVW C. Mazza, V. Voevodsky, C. Weibel, Lectures notes on motivic cohomology, Clay Mathematics Monographs **2**, Amer. Math. Soc., 2006.

Mil J.S. Milne, Etale Cohomology, Princeton University Press, 1980.

Ng10 Nguyen T. K. Ngan, Modules de cycles et classes non ramifiées sur un espace classifiant, thèse de doctorat, Université Paris Diderot, 2010.

Ng11 Nguyen T. K. Ngan *Classes non ramifiées sur un espace classifiant*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I **349** (2011), 233–237.

Pe08 E. Peyre, *Unramified cohomology of degree 3 and Noether's problem*, Invent. Math. **171**,191-225 (2008).

Rost M. Rost, *Chow groups with cofficients*, Doc. Math. **1** (1996), 319-393.

Sa84 D. J. Saltman, *Noether's problem over an algebraically closed field*, Invent. Math. **77**, 71-84 (1984).

Se68 J.-P. Serre, Corps locaux, Actualités Scientifiques et Industrielles, vol. 1296, Hermann, Paris, 1968.

Tot B. Totaro *The Chow ring of a classifying space*, *in* Algebraic K-Theory, ed. W. Raskind and C. Weibel, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, **67**, American Mathematical Society, 1999, 249–281.

SGA 1 Revêtements étales et groupe fondamental, (A. Grothendieck et al.) Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1960 – 1961 (SGA 1), Lecture Notes in Math. **224**, Springer, Berlin, 1971.

Bruno Kahn bruno.kahn@imj-prg.fr
IMJ-PRG, Case 247, 4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France

Nguyen Thi Kim Ngan nguyen.t.k.ngan.vn@gmail.com
Faculty of Natural Sciences, Thu Dau Mot University, Binh Duong, Vietnam