ERRATUM: NILPOTENCE, RADICAUX ET STRUCTURES MONOÏDALES

par

Yves André & Bruno Kahn

Le but de cet erratum est d'indiquer une erreur dans [**1**] et d'en corriger partiellement une autre.

- La première erreur est le corollaire 16.1.1 b) (ii): cet énoncé est faux car l'idempotent $s(\bar{\pi}_A^+)$ n'est pas central. Cette erreur est irréparable: nous remercions Peter O'Sullivan de nous l'avoir signalée. (Le lecteur vérifiera que cette partie du corollaire 16.1.1 n'est pas utilisée dans le reste de l'article.)
- La preuve de la proposition 8.1.1 b) et par conséquent celle du théorème 8.2.2.a) sont fausses. Le problème, dans la preuve de 8.1.1 b), est la phrase: "D'après 7.3.3, tout élément de ce radical est donc de trace nulle". La proposition 7.3.3 ne s'applique pas ici, parce que le foncteur H de l'énoncé est défini sur $\mathcal{A}$, mais pas sur $\mathcal{A}/\mathcal{N}$.

Nous ignorons si 8.1.1 b) et 8.2.2.a) sont vrais tels quels, mais voici un énoncé très proche de 8.2.2 qui l'est (et qui représente une version abstraite des résultats de Jannsen [**2**]). Notations: K est un corps, $\mathcal{A}$ une catégorie K-linéaire monoïdale symétrique rigide avec $\mathrm{End}(\mathbf{1}) = K$, $\mathcal{R}$ est son radical et $\mathcal{N}$ l'idéal des morphismes "universellement de trace nulle" de [**1**, lemme 7.1.1]

Théorème 1. — *a) Supposons qu'il existe une extension L/K et un foncteur K-linéaire monoïdal symétrique $H : \mathcal{A} \to \mathcal{V}$ vers une catégorie L-linéaire monoïdale symétrique rigide, dans laquelle les* Hom *sont de L-dimension finie et les endomorphismes nilpotents sont de trace nulle* (cette dernière propriété vaut par exemple si $\mathcal{V}$ est abélienne, *cf.* 7.3.3). *Alors*

(i) $\mathcal{R} \subset \mathcal{N}$,
(ii) $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ *est semi-simple,*
(iii) *le seul idéal monoïdal* $\mathcal{I}$ *de* $\mathcal{A}$ *tel que* $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ *soit semi-simple est* $\mathcal{I} = \mathcal{N}$.

b) Supposons de plus que K *soit de caractéristique nulle, que* $\mathcal{V} = Vec_L$ *et que* H *soit fidèle. Alors*

(i) $\mathcal{R} = \mathcal{N}$,
(ii) $\mathcal{A}$ *est de Wedderburn,*
(iii) $\mathcal{A}$ *est pseudo-abélienne si et seulement si* $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ *est abélienne.*

Commençons par deux lemmes:

Lemme 1. — *Soit* $\mathcal{A}$ *une catégorie* K*-linéaire monoïdale symétrique rigide avec* $\mathrm{End}(\mathbf{1}) = K$ *et soit* L/K *une extension. Soit* $\mathcal{A}_L$ *la catégorie ayant les mêmes objets que* $\mathcal{A}$ *et vérifiant* $\mathcal{A}_L(M,N) := \mathcal{A}(M,N) \otimes_K L$ *(cf.* [**1**, déf. 5.1.1]*). Alors*
a) La structure monoïdale symétrique de $\mathcal{A}$ *s'étend à* $\mathcal{A}_L$ *par linéarité, et* $\mathcal{A}_L$ *est rigide.*
b) Soit $\mathcal{N}_L$ *le plus grand idéal monoïdal de* $\mathcal{A}_L$*. Alors, pour deux objets* M, N*, on a*

$$\mathcal{N}_L(M,N) = \mathcal{N}(M,N) \otimes_K L.$$

En particulier, on a une équivalence de catégories $(\mathcal{A}/\mathcal{N})_L \simeq \mathcal{A}_L/\mathcal{N}_L$.

Démonstration. — La première partie de a) est évidente, et la deuxième résulte de la caractérisation objet par objet des catégories rigides [**1**, déf. 6.1.3]. Dans b), une inclusion est évidente. Dans l'autre sens, soit $f \in \mathcal{N}_L(M,N)$ et écrivons $f = \sum \lambda_i f_i$, avec $f_i \in \mathcal{A}(M,N)$ et les $\lambda_i \in L$, linéairement indépendants sur K. Par hypothse, on a $tr(gf) = 0$ pour tout $g \in \mathcal{A}(N,M)$. Par indépendance linéaire, cela implique $tr(gf_i) = 0$ pour tout i, donc $f_i \in \mathcal{N}(M,N)$ pour tout i. □

Remarque 1. — Ce lemme donne un sens à [**1**, rem. 7.1.9]; dans le cas des motifs, c'est le fait bien connu que l'équivalence numérique commute à l'extension des scalaires.

Le lemme suivant aurait dû figurer dans [**1**]:

Lemme 2. — *Soit* $\mathcal{B}$ *une catégorie additive et soit* $\mathcal{I}$ *un idéal de* $\mathcal{B}$ *tel que la catégorie* $\mathcal{B}/\mathcal{I}$ *soit semi-simple. Alors* $\mathcal{I}$ *contient le radical de* $\mathcal{B}$.

Démonstration. — D'après [**1**, lemme 1.4.7], le foncteur plein $\mathcal{B} \to \mathcal{B}/\mathcal{I}$ est radiciel, et d'après [**1**, prop. 2.1.2], le radical de $\mathcal{B}/\mathcal{I}$ est nul. □

Démontrons maintenant le théorème: le lecteur reconnaîtra une reproduction exacte des arguments de Jannsen.

a): tout d'abord le lemme 2 montre que (ii) $\Rightarrow$ (i). Quant à (iii), indiqué pour mémoire, il a déjà été vu dans [**1**, proposition 7.1.4 c)]. Il suffit donc de montrer (ii).

Il est clair que H se prolonge en un foncteur L-linéaire monoïdal symétrique $\mathcal{A}_L \to \mathcal{V}$: le lemme 1 ramène la preuve de (ii) au cas où $L = K$. En effet, si la conclusion du théorème est vraie pour $\mathcal{A}_L$, alors en particulier les Hom sont de K-dimension finie dans $\mathcal{A}/\mathcal{N}$; si $M \in \mathcal{A}/\mathcal{N}$ et si $\mathcal{I}$ est un idéal nilpotent de $(\mathcal{A}/\mathcal{N})(M, M)$, alors $\mathcal{I} \otimes_K L$ est un idéal nilpotent de $\mathcal{A}_L/\mathcal{N}_L(M, M)$ qui est donc nul, et $(\mathcal{A}/\mathcal{N})(M, M)$ est semi-simple.

Supposons donc $L = K$. Soit $M \in \mathcal{A}$, et soit $\mathcal{I}$ un idéal bilatère de $\mathcal{A}(M, M)$ tel que tout élément de $H(\mathcal{I})$ soit nilpotent. Si $f \in \mathcal{I}$, alors $gf \in \mathcal{I}$ pour tout $g \in \mathcal{A}(M, M)$. En particulier, $H(gf)$ est nilpotent et donc, par hypothèse, on a $tr(H(gf)) = 0$. Comme $\mathcal{A}(\mathbf{1}, \mathbf{1}) = K$, cela entraîne $tr(gf) = 0$; ainsi $\mathcal{I} \subset \mathcal{N}(M, M)$. En particulier, $\operatorname{Ker} H \subset \mathcal{N}$. Par hypothèse, les Hom de $\mathcal{A}/\operatorname{Ker} H$ sont de K-dimension finie, donc $\mathcal{A}/\operatorname{Ker} H$ est semi-primaire et, pour tout objet M, les idéaux nilpotents de $(\mathcal{A}/\operatorname{Ker} H)(M, M)$ sont contenus dans $(\mathcal{N}/\operatorname{Ker} H)(M, M)$, ce qui implique que $(\mathcal{A}/\mathcal{N})(M, M)$ est semi-simple. D'où (ii).

b): la preuve se fait comme dans [**1**, 8.2.2.b)]. □

Autres errata. — 1) au début de 1.1, l'assertion "un foncteur entre deux catégories K-linéaires est un K-foncteur si et seulement s'il transforme biproduit en biproduit" requiert que K soit un sous-anneau de $\mathbf{Q}$, ou bien $\mathbf{F}_p$.

2) Dans 1.3.6 f) (iii), lire: "...somme directe *finie* d'objets représentables".

3) Le début de la proposition 2.1.7 doit se lire ainsi:

Soit $\mathcal{I}$ un idéal d'une K-catégorie pseudo-abélienne semi-simple $\mathcal{A}$. Alors:

i) $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ est pseudo-abélienne semi-simple.

Dans la démonstration, la section s_A est un homomorphisme d'anneaux non unitaires.

D'autre part, signalons un grand nombre d'erreurs typographiques, dont toutes ne sont pas de la responsabilité des auteurs.

Références

[1] Y. André, B. Kahn (avec un appendice de P. O'Sullivan) *Nilpotence, radicaux et structures monodales*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **108** (2002), 107–291.

[2] U. Jannsen *Motives, numerical equivalence and semi-simplicity*, Invent. Math. **107** (1992), 447–452.

Yves André, Département de Mathématiques et Applications, École Normale Supérieure,, 45 rue d'Ulm, 75230 Paris Cedex 05, France.
E-mail : andre@dmi.ens.fr

Bruno Kahn, Institut de Mathématiques de Jussieu, 175–179 rue du Chevaleret, 75013 Paris, France. • *E-mail :* kahn@math.jussieu.fr