Invent. math. 78, 223–256 (1984)

Inventiones mathematicae

Classes de Stiefel-Whitney de Formes quadratiques et de représentations galoisiennes réelles

Bruno Kahn

Mathematics Department, Science Center, One Oxford Street, Cambridge, MA 02138, USA

Table des Matières

Introduction 223
I. Un peu de topologie algébrique 226
I.1. Le foncteur $\mathfrak{S}_n$ 226
I.2. Le transfert multiplicatif 228
I.3. Transfert et classes de Stiefel-Whitney 233
I.4. Le cas d'un groupe discret: traductions 238
II. Démonstration des théorèmes 1, 2 et 3 239
II.1. Présentation 239
II.2. Démonstration des propositions II.1.4, II.1.5. et II.1.6. 241
II.3. Démonstration des théorèmes 1 et 2 245
II.4. Démonstration du théorème 3 249
III. Applications et généralisations 250
III.1. Transfert et w_2 250
III.2. Transfert multiplicatif en K-théorie de Milnor 251
Bibliographie 255

Introduction

Soient G un groupe et H un sous-groupe de G d'indice fini. A toute représentation complexe ρ de H on associe de manière bien connue des classes de Chern $c_i(\rho)\in H^{2i}(H,\mathbf{Z})$ ([1]); si $\operatorname{Ind}\rho$ désigne la représentation induite de H à G, le problème d'exprimer les classes $c_i(\operatorname{Ind}\rho)$ en fonction des $c_i(\rho)$ est classique ([1, 9]).

Dans ce qui suit, je donne une telle expression pour les représentations *réelles* et leurs *classes de Stiefel-Whitney*, dans le cas où G est le *groupe de Galois d'un corps* et H un sous-groupe fermé de G d'indice fini. Plus précisément, soit F un corps commutatif de caractéristique différente de 2; notons F_s une clôture séparable de F et G_F le groupe de Galois de l'extension F_s/F. Soit E une extension finie, séparable de F; à une représentation réelle ρ:

Offprint requests and correspondence to: 22 bis rue Jouvenet F-75016 Paris, France

$G_E \to GL_r(\mathbf{R})$, continue, de noyau ouvert de G_E, associons comme en [4] ses *classes de Stiefel-Whitney* $w_i(\rho) \in H^i(G_E, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ (cf. I.4) et notons $w(\rho) = \sum_{i \geqq 0} w_i(\rho)$. D'autre part, notons $\mathcal{N}$ le «transfert multiplicatif» défini par Evens [8] et adapté par Shapiro [20].

Théorème 1. $w(\operatorname{Ind}\rho) = \mathcal{N}(w(\rho)) \cdot w(\operatorname{Ind}\mathbf{1})^r$, *où r est le rang de ρ et $\mathbf{1}$ désigne la représentation triviale de G_E.*

N.B. Ce résultat est propre au groupe de Galois d'un corps (cf. II.2.3.).

Soit maintenant q une *forme quadratique* non dégénérée sur E; notons $w_i(q) \in H^i(G_E, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ les classes de Stiefel-Whitney de q définies par Delzant [5], et $w(q) = \sum_{i \geqq 0} w_i(q)$. D'autre part, notons $T(q)$ la forme quadratique non dégénérée sur F définie par $T(q)(x) = Tr_{E/F}\, q(x)$.

Théorème 2. $w(T(q)) = \mathcal{N}(w(q)) \cdot w(T(\mathbf{1}))^r$, *où r est le rang de q et $\mathbf{1}$ désigne la forme quadratique $x \mapsto x^2$ sur E.*

Les théorèmes 1 et 2 sont reliés par le

Théorème 3. *Soit $a \in E^*$; notons $\langle a \rangle$ la forme quadratique $x \mapsto ax^2$ et ρ_a: $G_E \to \mathbf{R}^*$ la représentation réelle de degré 1 de G_E définie par $g \mapsto g(\sqrt{a})/\sqrt{a} \in \{\pm 1\} \hookrightarrow \mathbf{R}^*$. Alors,*

$$w(T(\langle a \rangle)) = w(\operatorname{Ind}\rho_a) \cdot (1 + (2, d)),$$

où d est le discriminant de l'extension E/F et $(2, d) \in H^2(G_F, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ est le «symbole de Hilbert» associé à 2 et d.

Ce dernier résultat généralise celui de Serre [19], qui en est la partie homogène de degré 2.

Dans certains cas, les classes $w(\operatorname{Ind}\mathbf{1})$ et $w(T(\mathbf{1}))$ se réduisent à l'unité et les formules des théorèmes 1 et 2 se simplifient. C'est en particulier le cas lorsque l'extension E/F est *galoisienne de degré impair* (ou plus généralement contenue dans une telle extension); Shapiro [20] démontre le théorème 2 dans ce cas particulier. (N.B. lorsque E/F est contenue dans une extension galoisienne de degré impair, les formules des théorèmes 1, 2 et 3 sont immédiates par un argument de restriction-corestriction; c'est d'ailleurs la méthode suivie par Shapiro.)

Le contenu de cet article est le suivant. La partie I est topologique: on y définit (par la méthode d'Evens [8]) le transfert multiplicatif pour la cohomologie modulo 2 dans le cas d'un revêtement fini d'espaces. On énonce diverses propriétés de ce transfert et on établit une formule donnant, dans le cas d'un revêtement à deux feuillets, les classes de Stiefel-Whitney de l'image directe d'un fibré vectoriel réel sur l'expace total (th. I.3.2.): cette formule est analogue à celle démontrée par L. Evens et D.S. Kahn [9] pour les classes de Chern. On en déduit en passant (prop. I.3.4.) une généralisation d'un lemme de Deligne ([4], prop. (2.2)); ce résultat sera utilisé dans un travail ultérieur. A la fin de la partie I, on traduit les résultats précédents en termes de groupes et de représentations. Dans la partie II, on démontre les théorèmes 1 et 2; on utilise le résultat de Serre mentionné ci-dessus pour démontrer un lemme crucial (prop. II.1.4.). On déduit ensuite le théorème 3 des théorèmes 1 et 2. Enfin, la partie III applique et généralise ces résultats, qui en particulier sont relevés partiellement à la K-théorie de Milnor modulo 2.

Je désire faire deux remarques à propos de ces résultats. Tout d'abord il est probable qu'ils se généralisent à la cohomologie étale, en un sens à préciser. Ensuite, il est plus que probable que l'analogue du théorème 1 vaut pour les *classes de Chern* des représentations complexes du groupe de Galois. Il est clair, compte tenu du résultat d'Evens et Kahn [9], que pour démontrer cet analogue il suffirait d'adapter convenablement les présentes démonstrations *si l'on disposait d'un analogue de la prop.* II.1.4; malheureusement je n'ai pas été capable de démontrer un tel analogue.

Je tiens à remercier de leur intérêt et de leurs observations Christophe Soulé, Jean-Pierre Serre ainsi que Jean Lannes, qui est à l'origine de l'essentiel de la partie I. Je désire également remercier l'Université de Harvard, où ce travail a été effectué, des excellentes conditions de travail dont j'ai bénéficié.

N.B. Les propriétés exposées dans I.1. et I.2. sont (sauf exception) énoncées sans démonstration: en effet, elles sont pour la plupart, soit des traductions de [8], soit faciles à vérifier au niveau des cochaînes. Voir aussi *I.B. Madsen et R.J. Milgram*, The classifying spaces for surgery and cobordism of manifolds, Ann. Math. Studies 92 (1979), Ch 3.

Après l'achèvement de ce travail, j'ai eu connaissance de deux textes s'y rapportant directement:

l'un, de W. Fulton et R. MacPherson, décrit une formule pour les classes caractéristiques de l'image directe d'un fibré vectoriel sur l'espace total d'un revêtement de degré quelconque (classes de Chern pour un fibré complexe, de Stiefel-Whitney pour un fibré réel). Les auteurs résolvent ainsi un problème remontant à l'article d'Atiyah [1]; ils retrouvent comme cas particulier les formules de L. Evens et D.S. Kahn valables pour les revêtements cycliques de degré premier ([9], th III), ainsi que les théorème I.3.2, Propositions I.3.4, I.3.4 bis et III.1.1 de cet article.

W. Fulton-R. MacPherson. Classes caractéristiques des images directes des fibrés vectoriels pour les revêtements, à paraîre aux C.R. Acad. Sci. Paris.

L'autre, de A. Fröhlich, aborde le problème de la comparaison des classes caractéristiques des représentations galoisiennes et des formes quadratiques sous l'angle des formes quadratiques "équivariantes", ou représentations orthogonales de groupes discrets. A une représentation ρ d'un tel groupe G dans le groupe orthogonal d'une forme quadratique sur F, on peut associer (en copiant Grothendieck [10]) des classes $w_i(\rho) \in H^i(G \times G_F, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$, et Fröhlich considère essentiellement la classe w_2. Lorsque G est un quotient fini du groupe de Galois G_F, on peut voir ces classes dans la cohomologie de $G_F \times G_F$; d'autre part, en considérant l'application diagonale $G_F \to G_F \times G_F$, on peut définir la *torsion* par ρ de la forme quadratique sous-jacente à ρ. Le premier résultat de Fröhlich est que l'invariant de Hasse-Witt de cette forme tordue n'est autre que l'image de $w_2(\rho)$ par le transposé de l'application diagonale. Son deuxième résultat est une *formule de transfert* pour $w_2(\rho)$ (dans le cas d'un groupe G quelconque). En mettant bout à bout ces deux théorèmes, on obtient la «formule de Serre». L'avantage de cette approche est qu'elle circonscrit l'origine du terme $(2,d)$: il provient de la formule de transfert mentionnée ci-dessus.

A. Fröhlich. Orthogonal representations of Galois groups, Stiefel-Whitney classes and Hasse-Witt invariants, prépublication.

I. Un peu de topologie algébrique

La même construction est à l'origine du transfert multiplicatif et des opérations de Steenrod. Cette construction est bien connue et a été exposée par de nombreux auteurs dans des contextes variés ([6, 8, 20–22, 24]); l'exposition la plus simple et la plus intrinsèque me semble être celle de L. Evens [8]. Malheureusement, des problèmes de signe se posent pour effectuer cette construction dans le cas le plus général; ces problèmes ne sont d'ailleurs gênants ni pour Evens, qui n'a besoin de son transfert qu'en degré pair, ni dans le cas présent où l'on travaille modulo 2.

Si G est un groupe discret, on note EG un espace contractile sur lequel G opère librement et $BG=EG/G$ le quotient de EG par l'action de G. *L'espace* BG est un espace d'Eilenberg-Mac-Lane $K(G,1)$, bien déterminé à homotopie près; l'homologie er la cohomologie de BG s'identifient à l'homologie er à la cohomologie de G. On note $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de n lettres.

1. Le foncteur $\mathfrak{S}_n$

1.1. Soit X un espace topologique et n un entier $\geqq 1$. On définit un nouvel espace $\mathfrak{S}_n X$ de la manière suivante: le groupe $\mathfrak{S}_n$ opère sur le produit $X^n = X \times \ldots \times X$, donc sur $E\mathfrak{S}_n \times X^n$, et $\mathfrak{S}_n X$ est le quotient de $E\mathfrak{S}_n \times X^n$ par cette action; c'est un espace bien déterminé à homotopie près.

1.2. *Exemples:* a) Si X est réduit à un point (ou plus généralement contractile), $\mathfrak{S}_n X$ s'identifie à $B\mathfrak{S}_n$.

b) Si $X=BH$ pour un groupe discret H, $\mathfrak{S}_n X = B(\mathfrak{S}_n \int H)$.

1.3. L'opération $X \mapsto \mathfrak{S}_n X$ est fonctorielle à homotopie près; on peut d'ailleurs la rendre strictement fonctorielle en fixant un choix de $E\mathfrak{S}_n$. En particulier, soit E un *fibré vectoriel* (réel ou complexe) sur X, de rang r; alors $\mathfrak{S}_n E$ est un fibré vectoriel sur $\mathfrak{S}_n X$, de rang nr.

1.4. Soit Z un espace sur lequel $\mathfrak{S}_n$ opère librement; on a donc une application équivariante $e: Z \to E\mathfrak{S}_n$. Soient $\tau_1, \ldots, \tau_n$ des représentants de $\mathfrak{S}_n$ (modulo $\mathfrak{S}_{n-1}$): l'application

$$Z \to E\mathfrak{S}_n \times (Z/\mathfrak{S}_{n-1})^n$$
$$z \mapsto (e(z), \tau_1 z, \ldots, \tau_n z)$$

est équivariante et induit donc une application

$$i: Z/\mathfrak{S}_n \to \mathfrak{S}_n(Z/\mathfrak{S}_{n-1}),$$

bien déterminée à homotopie près.

1.5. Soit $p: X \to Y$ un revêtement de degré n; si $y \in Y$, soit F_y l'ensemble des bijections de $p^{-1}(y)$ vers $\{1, \dots, n\}$. Munissions l'ensemble $Z = \coprod_{y \in Y} F_y$ de la topologie telle que $\coprod_{y \in V} F_y$ soit un ouvert dès que V est un ouvert trivialisant de Y. *L'application naturelle de* Z vers Y et l'application de Z vers X:

$$f \mapsto f^{-1}(n) \in X$$

induisent un diagramme commutatif de revêtements:

$$\begin{tikzcd} Z/\mathfrak{S}_{n-1} \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ Z/\mathfrak{S}_n \arrow[r, "\simeq"] & Y. \end{tikzcd}$$

A l'aide de 1.4, on en déduit une application $i: Y \to \mathfrak{S}_n X$, bien déterminée à homotopie près. Soit E un fibré vectoriel sur X; alors:

$$p_* E \simeq i^* \mathfrak{S}_n E, \tag{1}$$

où p_* (resp. i^*) désigne l'image directe par p (resp. l'image réciproque par i).

1.6. Si n et m sont deux entiers, on a une transformation naturelle:

$$\mathfrak{S}_n \mathfrak{S}_m X \to \mathfrak{S}_{nm} X$$

pour tout espace X. De même, si X et X' sont deux espaces, on a une transformation

$$\mathfrak{S}_n(X \times X') \to \mathfrak{S}_n X \times S_n X',$$

naturelle en X et X'.

1.7. On définit deux transformations naturelles:

$$D: B\mathfrak{S}_n \times X \to \mathfrak{S}_n X$$

$$\pi: X^n \to \mathfrak{S}_n X$$

de la manière suivante: D se déduit de la «diagonale» $E\mathfrak{S}_n \times X \to E\mathfrak{S}_n \times X^n$; π est la composée: $X^n \hookrightarrow E\mathfrak{S}_n \times X^n \twoheadrightarrow \mathfrak{S}_n X$ (ou encore, à homotopie près, peut se voir comme la dernière application).

1.8. Soit R un anneau et C un *R-complexe de cochaînes. Alors* $C^{\otimes n}$ est un R-complexe de cochaînes sur lequel $\mathfrak{S}_n$ opère par permutations et changements de signe (cf. [7]). Soit W une $\mathfrak{S}_n$-résolution projective de type fini de R: le complexe de cochaînes $\mathfrak{S}_n C = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_n}(W, C^{\otimes n})$ est défini; on a le lemme bien connu suivant, dû à Steenrod (cf. [15], lemme 3.2):

Lemme I.1.8. *Soient C et C' deux R-complexes de cochaînes, et soient $f_0, f_1: C \to C'$ deux applications de cochaînes qui sont algébriquement homotopes. Alors $\mathfrak{S}_n f_0$, $\mathfrak{S}_n f_1$: $\mathfrak{S}_n C \to \mathfrak{S}_n C'$ sont algébriquement homotopes.*

On en déduit (cf. [15], théorème 3.3):

Proposition I.1.8. *Soit C un R-complexe de cochaînes; supposons que C et sa cohomologie soient R-projectifs. Alors on a un isomorphisme de R-modules gradués:*

$$H^*(\mathfrak{S}_n C) \simeq H^*(\mathfrak{S}_n, H^*(C)^{\otimes n}),$$

compatible au cross-produit.

En particulier, si C est une R-algèbre différentielle graduée, les R-algèbres graduées $H^*(\mathfrak{S}_n C)$ et $H^*(\mathfrak{S}_n, H^*(C)^{\otimes n})$ sont isomorphes dès que la condition de la proposition I.1.8 est vérifiée; cette condition est automatique lorsque R est un *corps* (par exemple $R = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, p premier).

1.9. Soit X un espace topologique; posons $C_X = \mathrm{Hom}(C_*(X), \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$, où $C_*(X)$ est le complexe des chaînes singulières de X. On sait ([24], prop. 1) qu'il existe une équivalence de chaines fonctorielle entre $C_*(\mathfrak{S}_n X)$ et $W \otimes_{\mathfrak{S}_n} C_*(X)$ (où la résolution W est prise sur $\mathbf{Z}$), donc entre $C_{\mathfrak{S}_n X}$ et $\mathfrak{S}_n C_X$. En appliquant la proposition I.1.8, on en déduit:

Proposition I.1.9. *On a un isomorphisme:*

$$H^*(\mathfrak{S}_n X, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \simeq H^*(\mathfrak{S}_n, H^*(X, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{\otimes n}),$$

où dans le terme de droite $\mathfrak{S}_n$ opère par permutation des facteurs.

1.10. Supposons maintenant $n=2$. La cohomologie modulo 2 de $\mathfrak{S}_2$ est alors une algèbre de polynômes $\mathbf{F}_2[d]$, où d est un générateur en degré un. Pour tout espace X, notons simplement $H^*(X)$ pour $H^*(X, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$; par la formule de Künneth, on a:

$$H^*(X \times X) \simeq H^*(X) \otimes H^*(X);$$

$$H^*(B\mathfrak{S}_2 \times X) \simeq H^*(B\mathfrak{S}_2) \otimes H^*(X) \simeq \mathbf{F}_2[d] \otimes H^*(X).$$

De la proposition I.1.9, on déduit alors:

Proposition I.1.10. *L'application*

$$H^*(\mathfrak{S}_2 X) \xrightarrow{D^* \oplus \pi^*} \mathbf{F}_2[d] \otimes H^*(X) \oplus H^*(X) \otimes H^*(X)$$

est injective.

2. Le transfert multiplicatif

2.1. Soit C un complexe de cochaînes modulo 2 (c'est-à-dire un $\mathbf{F}_2$-complexe); notons C^{**} le produit direct $\prod_{i \geqq 0} C^i$. Avec Evens [8] et Shapiro [20], on définit une application:

$$P_n: H^{**}(C) \to H^{**}(S_n C)$$

qui est une «puissance symétrique $n^{\text{ième}}$». Rappelons brièvement sa construction:

Notons C_0 le complexe à différentielle nulle défini par $\mathbf{F}_2[T]$. On a $C_0^{**} = \mathbf{F}_2[[T]]$; un élément $a \in C^{**}$ définit une application $F_a\colon C_0 \to C$ telle que $F_a(T^i) = a_i$ et donc que $F_a(1/(1-T)) = a$. Si a est un cycle, F_a prend ses valeurs dans $Z(C)$; si a et a' sont des cycles représentant la même classe de cohomologie, alors F_a et $F_{a'}$ sont homotopes; par I.1.8, les applications $\mathfrak{S}_n F_a$, $\mathfrak{S}_n F_{a'}\colon \mathfrak{S}_n C_0 \to \mathfrak{S}_n C$ qui s'en déduisent sont aussi homotopes. Identifions $C_0^{\otimes n}$ à $\mathbf{F}_2[T_1, \ldots, T_n]$ (par $T_i = 1 \otimes \ldots \otimes T \otimes \ldots \otimes 1$); alors $Y = \prod_{1 \leqq i \leqq n} 1/(1-T_i)$ est invariant par l'action de $\mathfrak{S}_n$ (parce que les coefficients sont modulo 2), donc définit un élément de $H^0(\mathfrak{S}_n, C_0^{\otimes n **}) \subset H^{**}(\mathfrak{S}_n C_0)$. Si α est un élément de $H^{**}(C)$, on pose alors $P_n(\alpha) = F_a(Y)$ pour un représentant a de α dans C^{**}; c'est un élément de $H^{**}(\mathfrak{S}_n C)$, et d'après ce qui précède il ne dépend pas du choix de a.

Par construction, la transformation P_n est naturelle en C et jouit des propriétés suivantes:

i) Si n et m sont deux entiers, le diagramme

$$\begin{tikzcd} H^{**}(C) \arrow[r, "P_m"] \arrow[d, "P_{nm}"'] & H^{**}(\mathfrak{S}_m C) \arrow[d, "P_n"'] \\ H^{**}(\mathfrak{S}_{nm} C) \arrow[r, "\rho"] & H^{**}(\mathfrak{S}_n \mathfrak{S}_m C), \end{tikzcd}$$

où ρ est induite par l'analogue de 1.6, est commutatif.

ii) Si C_1 et C_2 sont deux complexes, si $\phi\colon \mathfrak{S}_n C_1 \otimes \mathfrak{S}_n C_2 \to \mathfrak{S}_n(C_1 \otimes C_2)$ est l'application naturelle analogue de 1.6 et si $x_i \in H^{**}(C_i)$, alors

$$\phi^{**}(P_n(x_1) \times P_n(x_2)) = P_n(x_1 \times x_2),$$

où $\times$ désigne le cross-produit.

2.2. Soit X un espace topologique. En appliquant ce qui précède au complexe C_X de 1.9, on obtient l'existence d'une application:

$$P_n\colon H^{**}(X) \to H^{**}(\mathfrak{S}_n X),$$

jouissant de propriétés identiques à i) et ii) ci-dessus. En particulier, C_X est un anneau différentiel gradué; on en déduit:

iii) Si $x_1, x_2 \in H^{**}(X)$, alors $P_n(x_1 \cdot x_2) = P_n(x_1) \cdot P_n(x_2)$, où l'on note $x_1 \cdot x_2$ le cup-produit de x_1 et x_2.

2.3. *Remarque.* Voici comment définir d'autres opérations cohomologiques externes. Si C est comme en 2.1, définissons un nouveau complexe $\tilde{C} = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \oplus C$, où $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ est en degré zéro, engendré par un élément ε de différentielle nulle. Alors,

$$\tilde{C}^{\otimes n} = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}\varepsilon^{\otimes n} \oplus C^{(1)} \otimes \varepsilon^{\otimes (n-1)} \oplus \ldots \oplus C^{(n)},$$

et

$$\mathfrak{S}_n \tilde{C} = \mathfrak{S}_n^{(0)} C \otimes \varepsilon^{\otimes n} \oplus \mathfrak{S}_n^{(1)} C \otimes \varepsilon^{\otimes (n-1)} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{S}_n^{(n)} C,$$

où $\mathfrak{S}_n^{(0)} C = \mathfrak{S}_n(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$, $\mathfrak{S}_n^{(n)} C = \mathfrak{S}_n C$.

Soit $x \in H^{**}(C)$. Alors $\varepsilon + x \in H^{**}(\tilde{C})$, et

$$P_n(\varepsilon + x) = \varepsilon^n + P_n^{(1)}(x) \cdot \varepsilon^{n-1} + \ldots + P_n^{(n)}(x),$$

où $P_n^{(i)}(x) \in H^{**}(\mathfrak{S}_n^{(i)} C)$, et $P_n^{(n)}(x) = P_n(x)$.

Supposons C muni d'une coaugmentation, c'est-à-dire d'un élément privilégié $1 \in C^0$, de différentielle nulle. On a une rétraction $\tilde{C} \to C$, envoyant ε sur 1; on en déduit pour tout $x \in H^{**}(C)$ des éléments

$$P_n^{(i)}(x) \in H^{**}(\mathfrak{S}_n C), \qquad 0 \leqq i \leqq n,$$

avec $P_n^{(0)}(x) = 1$, $P_n^{(n)}(x) = P_n(x)$.

En particulier, si X est un espace topologique, $C_*(X)$ est un complexe augmenté, donc C_X est un complexe coaugmenté, et la coaugmentation correspond à l'élément unité de l'algèbre $H^*(X)$. On a donc défini des applications:

$$P_n^{(i)}: H^{**}(X) \to H^{**}(\mathfrak{S}_n X), \qquad 0 \leqq i \leqq n,$$

telles que $P_n^{(0)} = 1$, $P_n^{(n)} = P_n$, et que pour tout $x \in H^{**}(X)$,

$$P_n(1 + x) = 1 + P_n^{(1)}(x) + \ldots + P_n(x).$$

Si $x \in H^k(X)$, il est clair que $P_n^{(i)}(x) \in H^{ik}(\mathfrak{S}_n X)$.

L'application $P_n^{(i)}$ se comporte comme une fonction symétrique élémentaire de degré i; ainsi:

iii) Si n et m sont deux entiers et si ρ est comme en 2.1 i), on a:

$$\rho \circ P_{nm}^{(1)} = P_n^{(1)} \circ P_m^{(1)};$$

$$\rho \circ P_{nm}^{(2)} = P_n^{(2)} \circ P_m^{(1)} + P_n^{(1)} \circ P_m^{(2)}.$$

iv) Si $x_1, x_2 \in H^{**}(C)$, on a:

$$P_n^{(1)}(x_1 + x_2) = P_n^{(1)}(x_1) + P_n^{(1)}(x_2);$$

$$P_n^{(2)}(x_1 + x_2) = P_n^{(2)}(x_1) + P_n^{(2)}(x_2) + ((x_1, x_2)),$$

où $((x_1, x_2))$ est défini, pour tous représentants $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2$ dans C^{**}, par $f \in \mathfrak{S}_n C^{**} = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_n}(W, C^{**\otimes n})$ telle que $f(w) = \varepsilon(w)((\tilde{x}_1, \tilde{x}_2))$, où $((\tilde{x}_1, \tilde{x}_2))$ désigne la somme des conjugués de $\tilde{x}_1 \otimes \tilde{x}_2 \otimes 1 \otimes \ldots \otimes 1$ sous l'action de S_n (et ε l'augmentation de W).

Tout ceci se démontre au niveau des cochaînes; on a des énoncés analogues (mais plus compliqués) pour les autres $P_n^{(i)}$.

v) Dans iv), supposons que C soit une algèbre différentielle graduée; alors, on *a*: $((x_1, x_2)) = P_n^{(1)}(x_1 \cdot x_2) + P_n^{(1)}(x_1) \cdot P_n^{(1)}(x_2)$.

vi) *Formule de projection.* Sous l'hypothèse de v), notons $D_1^*: \mathfrak{S}_n C \to C$ l'application déduite du preduit: $C^{\otimes n} \to C$. Alors, pour tout $(x, y) \in H^{**}(\mathfrak{S}_n C) \times H^{**}(C)$, on a:

$$P_n^{(1)}(D_1^{**}(x) \cdot y) = x \cdot P_n^{(1)}(y).$$

On déduit des énoncés identiques à iii)-vi) pour un espace X en considérant le cas particulier $C=C_X$; dans vi) l'application D_1^* se déduit de l'application D définie en 1.7, restreinte à X. Dans iv), on reconnait en $((x_1, x_2))$, lorsque $n=2$, *l'image directe* $\pi_*(x_1 \times x_2)$ du cross-produit de x_1 et x_2 par l'application π définie en 1.7.

2.4. $p: X \to Y$ un revêtement à n feuillets. De l'application $i: Y \to \mathfrak{S}_n X$ définie en 1.5 et de ce qui précède, on déduit des applications $\mathcal{N}_i: H^{**}(X) \to H^{**}(Y)$, correspondant aux $P_n^{(i)}$. On a $\mathcal{N}_0=1$; $\mathcal{N}_1$ s'identifie à l'image directe (ou transfert ou corestriction) p_*; on note simplement $\mathcal{N}_n=\mathcal{N}$, c'est le *transfert multiplicatif*. Des propriétés i)-vi) ci-dessus, on déduit les propriétés suivantes:

Proposition I.2.4. a) *Soient* $x_1, x_2 \in H^{**}(X)$. *Alors on a:*

$$\mathcal{N}(x_1 \cdot x_2)=\mathcal{N}(x_1) \cdot \mathcal{N}(x_2);$$

$$\mathcal{N}_2(x_1+x_2)=\mathcal{N}_2(x_1)+\mathcal{N}_2(x_2)+p_*(x_1 \cdot x_2)+p_*(x_1) \cdot p_*(x_2).$$

b) *Soit* $p': X' \to X$ *un revêtement à m feuillets. Alors* $p''=p \circ p': X' \to Y$ *est un revêtement à nm feuillets; si* $x \in H^{**}(X')$, *on a avec des notations évidentes:*

$$\mathcal{N}''(x)=\mathcal{N} \circ \mathcal{N}'(x);$$

$$\mathcal{N}_2''(x)=\mathcal{N}_2(p'_*(x))+p_*(\mathcal{N}_2^1(x)).$$

c) *Soit* $f: Y' \to Y$ *une application et soit* $X'=Y' \times_Y X$ *le produit fibré correspondant. On a un revêtement* $p': X' \to Y'$ *à n feuillets; pour tout i, le diagramme suivant est commutatif:*

$$\begin{array}{ccc} H^{**}(X) & \xrightarrow{f'^{**}} & H^{**}(X') \\ \downarrow{\scriptstyle \mathcal{N}_i} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{N}_i'} \\ H^{**}(Y) & \xrightarrow{f^{**}} & H^{**}(Y'). \end{array}$$

d) *Soient* X_1 *et* X_2 *deux revêtements de Y de degrés* n_1 *et* n_2. *Alors* $X_1 \amalg X_2$ *est un revêtement de Y de degré* n_1+n_2; *si* $x_i \in H^{**}(X_i)$, *alors* $x_1+x_2 \in H^{**}(X_1 \amalg X_2)$ *et*

$$\mathcal{N}(x_1+x_2)=\mathcal{N}(x_1) \cdot \mathcal{N}(x_2);$$

$$\mathcal{N}_2(x_1+x_2)=\mathcal{N}_2(x_1)+\mathcal{N}_2(x_2)+p_{1*}(x_1) \cdot p_{2*}(x_2),$$

où p_i *est la projection correspondant à* X_i.

De plus, si $x \in H^{**}(X)$, *alors* $\mathcal{N}(1+x)=1+p_*(x)+\mathcal{N}_2(x)+\ldots+\mathcal{N}(x)$.

N.B. Dans la proposition ci-dessus, je n'ai pas inclus les propriétés du transfert additif p_*, qui sont bien connues (mais qui peuvent de même se retrouver à partir du formalisme précédent).

2.5. Supposons $n=2$. Notons $d \in H^1(S_2 X)$ l'image de $d \in H^1(B\mathfrak{S}_2)$ via l'application transposée de $\mathfrak{S}_2 X \to B\mathfrak{S}_2$ induite par $X \to$(point). On a $D_1^*(d)=0$

dans $H^*(X)$ (où D_1 est la restriction à X de l'application D définie en 1.7); des formules iv), v) et vi) de 2.3 ci-dessus, on déduit donc:

Proposition I.2.5.a. *Pour tous $x, y \in H^{**}(X)$, on a dans $H^{**}(\mathfrak{S}_2 X)$:*

$$d \cdot P_2(x+y) = d \cdot P_2(x) + d \cdot P_2(y).$$

De même, dans le cas d'un revêtement à deux feuillets:

Proposition I.2.5.b. *Soit $X \to Y$ un revêtement de degré 2 et soit $d \in H^1(Y)$ la classe caractéristique de ce revêtement. Alors, pour tous $x, y \in H^{**}(X)$, on a dans $H^{**}(Y)$:*

$$d \cdot \mathcal{N}(x+y) = d \cdot \mathcal{N}(x) + d \cdot \mathcal{N}(y).$$

D'autre part, notons Sq^i le $i^{\text{ème}}$ *carré de Steenrod* [21]: par définition, Sq^i est un homomorphisme de degré i du groupe gradué $H^*(X)$, ayant les propriétés suivantes:

1) Sq^0 est l'identité;

2) Sq^i est nul en degré $< i$;

3) Si $x \in H^i(X)$, $Sq^i(x) = x^2$;

4) $Sq^i(xy) = \sum_{j+k=i} Sq^j(x) \cdot Sq^k(y)$.

On pose $Sq = \sum_{i \geq 0} Sq^i$: c'est le *carré total de Steenrod*. Les propriétés 1) et 4) montrent que Sq est un *automorphisme* de l'algèbre $H^*(X)$.

Proposition I.2.5.c. *Pour tout $x \in H^i(X)$, $D^* P_2(x) = \sum_{0 \leq j \leq i} d^{i-j} \times Sq^j(x)$ dans $H^*(B\mathfrak{S}_2 \times X)$.*

Cf. [21]; c'est d'ailleurs ainsi que Steenrod et Epstein définissent les puissances de Steenrod.

Remarque. Considérons les deux diagrammes commutatifs:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{e} & E\mathfrak{S}_2 \\ {\scriptstyle e}\downarrow & & \| \\ E\mathfrak{S}_2 & = & E\mathfrak{S}_2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X^2 \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p^2} \\ Y & \longrightarrow & Y^2. \end{array}$$

On en déduit un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & E\mathfrak{S}_2 \times X^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ E\mathfrak{S}_2 \times Y & \longrightarrow & E\mathfrak{S}_2 \times Y^2; \end{array}$$

d'où, en divisant par l'action de $\mathfrak{S}_2$:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "i"] \arrow[d] & \mathfrak{S}_2 X \arrow[d, "\mathfrak{S}_2 p"] \\ B\mathfrak{S}_2 \times Y \arrow[r, "D"] & \mathfrak{S}_2 Y. \end{tikzcd}$$

De ce diagramme et de la proposition précédente, on déduit alors:

Proposition I.2.5.d. *Sous les hypothèses et notations de la proposition* I.2.5.b., *soit* $x \in H^i(Y)$. *Alors*, $\mathcal{N}(p^*(x)) = \sum_{0 \leqq j \leqq i} d^{i-j} \cdot Sq^j(x)$.

Ce résultat illustre de manière saisissante la remarque de Evens [8], selon laquelle on n'a pas en général $\mathcal{N}(p^*(x)) = x^n$ pour un revêtement de degré n.

3. *Transfert et classes de Stiefel-Whitney*

3.1. Soit X un espace topologique, et soit E un fibré vectoriel réel sur X, de rang r. Les classes de Stiefel-Whitney $w_i(E)$ sont définies [14]: $w_i(E)$ est un élément de $H^i(X)$, on a $w_0(E)=1$ et $w_i(E)=0$ si $i>r$. Notons $w(E) = \sum_{i \geqq 0} w_i(E)$ la classe totale de Stiefel-Whitney de E; c'est un élément de $H^{**}(X)$. Si E' est un autre fibré vectoriel sur X, on a:

$$w(E \oplus E') = w(E) \cdot w(E'). \tag{2}$$

La classe totale de Stiefel-Whitney s'étend donc aux fibrés vectoriels *virtuels* (différences formelles de deux vrais fibrés), mais un tel objet peut avoir une infinité de classes non-nulles; c'est pourquoi on considère $w(E)$ comme un élément de $H^{**}(X)$.

Il est commode de «rajouter une variable», c'est-à-dire de considérer l'anneau $H^{**}(X, T) = H^{**}(X) \otimes \mathbf{F}_2((T^{-1}))$. On définit alors la *série de Stiefel-Whitney* associée à un fibré vectoriel virtuel E, de rang r:

$$w(E, T) = \sum_{i=0}^{\infty} T^{r-i} w_i(E).$$

La série ci-dessus contient comme information le rang du fibré E, que ne contenait pas en général la classe totale de Stiefel-Whitney. Si E' est un autre fibré, on a:

$$w(E + E', T) = w(E, T) \cdot w(E', T). \tag{3}$$

Développons $w(E, 1+T)$ suivant les puissances *positives* de T; on obtient:

$$w(E, 1+T) = \sum_{j \geqq 0} w^{(j)}(E) T^j,$$

avec

$$w^{(j)}(E)=\sum_{i\geqq 0}\binom{r-i}{j} w_i(E).$$

De la formule (3), on déduit:

$$w^{(j)}(E+E')=\sum_{k+l=j} w^{(k)}(E)\cdot w^{(l)}(E'). \tag{4}$$

Soit enfin L un fibré en droites, c'est à dire un (vrai) fibré vectoriel de rang un. Alors:

$$w(L\otimes E)=w(E,1+w_1(L)). \tag{5}$$

Les formules (2)–(5) ci-dessus sont vraies également pour des sommes directes ou produit tensoriels externes de fibrés (voir ci-dessous).

3.2. Soit $p\colon X\to Y$ un revêtement à deux feuillets; si E est un fibré vectoriel réel sur X, de rang r, notons p_*E *l'image directe* de E par p: c'est un fibré vectoriel réel sur Y, de rang $2r$. On désire calculer les classes de Stiefel-Whitney de p_*E: c'est l'objet du théorème suivant.

Théorème I.3.2. *Sous les hypothèses précédentes, on a la formule*

$$w(p_*E)=\sum_{j\geqq 0}\mathcal{N}(w^{(j)}(E))\cdot d^j, \tag{6}$$

où $w^{(j)}(E)$ a été défini ci-dessus et d est la classe caractéristique du revêtement $X\to Y$ dans $H^1(Y)$.

En vertu de la proposition I.2.5.b., cette formule peut encore s'écrire:

$$w(p_*E)=\mathcal{N}(w(E))+\sum_{i\geqq 0}\mathcal{N}(w_i)\cdot((d+1)^{r-i}+1); \tag{6'}$$

sous cette forme elle est l'analogue des formules démontrées par Evens et Kahn ([9], th. III) pour les classes de Chern de représentations complexes, dans le cas d'un sous-groupe normal d'indice premier. (Leurs démonstrations, et donc leurs résultats, sont d'ailleurs valables dans le cadre des revêtements pour un fibré vectoriel complexe, puisque les fibrés complexes sur X sont classifiés par les applications de X dans BU.)

Pour démontrer le théorème I.3.2., il suffit, vue la formule (1) de 1.5., de démontrer:

Proposition I.3.2. $w(\mathfrak{S}_2E)=\sum_{j\geqq 0}P_2(w^{(j)}(E))\cdot d^j.$

Pour démontrer cette proposition, on pourrait adapter le raisonnement de Evens et Kahn; je vais utiliser une autre méthode, plus élémentaire et qui m'a été suggérée par Jean Lannes: elle consiste à se servir de la proposition I.1.10., c'est à dire à vérifier que la proposition I.3.2. est vraie lorsqu'on l'«envoie» dans la cohomologie de $X\times X$ et dans celle de $B\mathfrak{S}_2\times X$. Or il est clair que

$$\pi^*\mathfrak{S}_2E=E\boxplus E;$$

$$D^*\mathfrak{S}_2E=v\boxtimes E;$$

où v est le fibré normal au revêtement $E\mathfrak{S}_2 \to B\mathfrak{S}_2$ (c'est à dire l'image directe du fibré trivial de rang un sur $E\mathfrak{S}_2$), et où $\boxplus$ et $\boxtimes$ désignent respectivement la somme directe externe et le produit tensoriel externe des fibrés. Dans le premier cas on a:

$$w(E \boxplus E) = w(E) \times w(E);$$

$$\pi^*\Big(\sum_{j \geqq 0} P_2(w^{(j)}(E)) \cdot d^j\Big) = \pi^*(P_2(w(E)) \qquad (\text{car } \pi^*(d)=0)$$
$$= w(E) \times w(E).$$

En effet, pour tout $x \in H^{**}(X)$, on a $\pi^*(P_2(x)) = x \times x$; cela résulte de la définition de P_2.

Dans le deuxième cas, on écrit $v = \mathbf{1} \oplus L$, où L est le fibré en droites satisfaisant $w_1(L) = d$. Vue la formule (5), on a:

$$w(v \boxtimes E) = w(E) \cdot w(E, 1+d).$$

De même que ci-dessus, considérons l'algèbre $H^{**}(X) \otimes \mathbf{F}_2[[T]]$; si x est un élément homogène de degré i, associons-lui son *polynôme de Steenrod:*

$$Sq(x, T) = \sum_{0 \leqq j \leqq i} T^j Sq^{i-j}(x); \tag{7}$$

si $x \in H^{**}(X)$ est somme d'éléments homogènes x_i de degré i, définissons

$$Sq(x, T) = \sum_{i \geqq 0} Sq(x_i, T). \tag{8}$$

On a, pour deux éléments x et x' de $H^{**}(X)$:

$$Sq(x + x', T) = Sq(x, T) + Sq(x', T); \tag{8a}$$

$$Sq(x \cdot x', T) = Sq(x, T) \cdot Sq(x', T). \tag{8b}$$

La proposition I.2.5.c., moyennant la formule iv) ainsi que le fait que $D^* \pi_* = 0$ (considérer le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E\mathfrak{S}_2 \times X & \xrightarrow{\tilde{D}} & E\mathfrak{S}_2 \times X^2 \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ B\mathfrak{S}_2 \times X & \xrightarrow{D} & \mathfrak{S}_2 X), \end{array}$$

devient alors: «*pour tout* $x \in H^{**}(X)$, $D^* P_2(x) = Sq(x, d)$». Par conséquent:

$$D^*\Big(\sum_{j \geqq 0} P_2(w^{(j)}(E)) \cdot d^j\Big) = \sum_{j \geqq 0} Sq(w^{(j)}(E), d) \cdot d^j.$$

Il faut comparer cette expression et $w(E) \cdot w(E, 1+d)$. Cela peut sans doute être fait à l'aide des *formules de Wu* [14]:

$$Sq^i(w_j) = \sum_{0 \leqq \ \leqq i} \binom{j+t-i-1}{t} w_{i-t} \cdot w_{j+t} \tag{9}$$

mais les calculs se compliquent à l'extrême. Je préfère m'en sortir en utilisant le *splitting-principle:* il permet de montrer que ces deux expressions sont égales;

a) en le vérifiant dans le cas d'un fibré en droites;

b) en vérifiant ensuite que si l'égalité est vraie pour deux fibrés, elle l'est aussi pour leur somme directe.

Dans le cas a), la première expression vaut:

$$(1+w_1)\cdot(1+d+w_1)=1+d+d\cdot w_1+w_1^2$$

(par abus de notation, on écrit $\cdot$ pour le cross-produit), tandis que la deuxième vaut:

$$\begin{aligned} Sq(w,d)+Sq(w^{(1)},d)\cdot d &= 1+d\cdot w_1+Sq^1 w_1+d \\ &= 1+d+d\cdot w_1+w_1^2; \end{aligned}$$

elles sont égales.

Traitons maintenant le cas b): il est clair que la première expression est «additive» en E. Montrons que c'est également le cas pour la deuxième: soient E et E' deux fibrés; en utilisant les formules (4), (8a) et (8b), on obtient:

$$\begin{aligned} \sum_{j\geqq 0} Sq(w^{(j)}(E+E'),d)\cdot d^j &= \sum_{j\geqq 0} Sq(\sum_{k+l=j} w^{(k)}(E)\cdot w^{(l)}(E'),d)\cdot d^j \\ &= \sum_{k,l\geqq 0} Sq(w^{(k)}(E),d)\cdot Sq(w^{(l)}(E'),d)\cdot d^{k+l} \\ &= (\sum_{j\geqq 0} Sq(w^{(j)}(E),d)\cdot d^j)\cdot(\sum_{j\geqq 0} Sq(w^{(j)}(E'),d)\cdot d^j), \quad \text{C.Q.F.D.} \end{aligned}$$

Le théorème I.3.2. est donc démontré.

3.3. *Remarque.* Il est amusant (ou intéressant?) de constater que «la même formule» est vraie pour les carrés de Steenrod. Plus précisément, on a pour tout $x \in H^{**}(X)$:

$$Sq(P_2(x))=\sum_{j\geqq 0} P_2(Sq^{(j)}(x))\cdot d^j, \tag{10}$$

où $Sq^{(j)}(x)$ est le coefficient de T^j dans le développement de $Sq(x,1+T)$. Cela résulte par exemple de la thèse de Zarati ([24], Th. 2).

(Zarati calcule en fait $Sq^i P_2(x)$ pour un élément homogène x; on obtient la formule (10) en sommant sur i et sur les composantes homogènes d'un élément quelconque de $H^{**}(X)$.)

3.4. *Remarque.* J'ignore quel doit être l'équivalent du théorème I.3.2. dans le cas d'un revêtement de degré quelconque; il est possible qu'il faille faire intervenir les applications $\mathcal{N}_i$ définies en 2.3. (Voir néanmoins III.1.) Par contre, il est facile de déduire du théorème I.3.2. certains rèsultats valables en tout degré: c'est ainsi que l'on a la généralisation suivante d'un lemme de Deligne ([4], prop. 2.2.):

Proposition I.3.4. *Soit p: $X \to Y$ un revêtement fini et E un fibré vectoriel sur X, de rang r. Supposons que:*

a) $r \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2^{k+1})$;

b) $w_i(E)=0$ *pour* $0<i<2^k$.

Alors:

a′) $rg\, p_* E \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2^{k+1})$;

b′) $w_i(p_* E) = p_* w_i(E)$ *pour* $0 < i < 2^{k+1}$.

Le résultat de Deligne est le cas particulier $k=1$ de cette proposition.

Démonstration. D'abord, on effectue quelques réductions:

1) Soient (Y_α) les composantes connexes de Y; soit $X_\alpha = p^{-1}(Y_\alpha)$, soient $X_{\alpha\beta}$ les composantes connexes de X_α et $E_{\alpha\beta}$ les fibrés correspondants. Si E vérifie les hypothèses a) et b) de la proposition, il en est de même de tous les $E_{\alpha\beta}$; si tous les $E_{\alpha\beta}$ vérifient les conclusions a′) et b′), il en est de même de E.

2) Soit $p'\colon Y \to Z$ un autre revêtement fini. Si, pour les revêtements p et p', a) et b) entraînent a′) et b′) pour tout fibré vectoriel, il en est de même pour le revêtement $p' \circ p$.

3) Soit $f\colon Y' \to Y$ un revêtement fini de degré impair; notons X' le produit fibré $Y' \times_Y X$ et f' (resp. p') la projection de X' sur X (resp. de X' sur Y'). Soit E un fibré vectoriel sur X vérifiant les hypothèses a) et b); alors il en est de même de $E' = f'^* E$ sur l'espace X'; si $p'_* E'$ satisfait a′) et b′), il en est de même de $p_* E$.

La vérification de 1) et 2) est laissée au lecteur. Pour montrer 3), on utilise le fait que l'application $f^*\colon H^*(Y) \to H^*(Y')$ est injective; lorsque Y est connexe, cela résulte de la formule $f_* f^* = n$, où n est le degré du revêtement.

En vertu de 1), on peut supposer X et Y connexes. Le groupe fondamental $\pi_1(X)$ (un point-base ayant été choisi une fois pour toutes) s'identifie alors à un sous-groupe de $\pi_1(Y)$, dont l'indice est le degré du revêtement. Soit K l'intersection des conjugués de $\pi_1(X)$: c'est un sous-groupe normal d'indice fini de $\pi_1(Y)$. Notons G le quotient, et soit S un 2-sous-groupe de Sylow de G; l'image réciproque de S dans $\pi_1(Y)$ détermine par la théorie de Galois un revêtement fini Y' de Y, de degré impair. Vues les propriétés des p-groupes, l'image réciproque par $f\colon Y' \to Y$ de $p\colon Y \to X$ a la propriété suivante:

Si C est une composante connexe de $X' = Y' \times_Y X$, le revêtement $h\colon C \to Y'$ se factorise en une suite $h = h_s \circ h_{s-1} \circ \ldots \circ h_0$, où chaque h_j est un revêtement de degré 2.

Grâce aux points 1), 2) et 3), on voit maintenant *qu'il suffit de démontrer la proposition* I.3.4. *dans le cas d'un revêtement de degré* 2. Pour cela, utilisons le théorème 1 sous la forme (6′); cela donne:

$$w(p_* E) = \mathcal{N}(1 + w_{2^k}(E) + \ldots) + (d+1)^r + 1 + (\text{termes de degré} \geqq 2^{k+1}).$$

Comme $r \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2^{k+1})$, le terme $(1+d)^r + 1$ est également de degré $\geqq 2^{k+1}$. Finalement, développant $\mathcal{N}(1 + w_{2^k}(E) + \ldots)$ grâce à la règle $\mathcal{N}(1+x) = 1 + p_*(x) + \mathcal{N}(x)$, on obtient:

$$w(p_* E) = 1 + p_* w_{2^k}(E) + \ldots + p_* w_{2^{k+1}-1}(E) + (\text{termes de degré} \geqq 2^{k+1}),$$

ce qui termine la démonstration.

Les résultats de Evens et Kahn permettent de démontrer des énoncés analogues pour les classes de Chern d'un fibré vectoriel complexe. La méthode est la même: par un argument de p-sous-groupes de Sylow, on se ramème au cas d'un revêtement galoisien de degré premier et on applique les formules démontrées par ces auteurs. Un exemple de tel énoncé est le suivant:

Proposition I.3.4.bis. *Soit $p: X \to Y$ un revêtement fini connexe de degré n et soit E un fibré vectoriel complexe sur X; notons $c_i(E) \in H^{2i}(X, \mathbf{Z})$ les classes de Chern de E. Supposons que:*

a) $rg\, E \equiv 0 (\bmod N)$;

b) $c_i(E) = 0$ *pour* $0 < i < m$,

où N est tel que $l^{v_l(N)} > m$ pour tout diviseur premier l de $n!$. Alors:

b′) $c_i(p_* E) = 0$ *pour* $0 < i < m$, *et*

$c_m(p_* E) = p_* c_m(E)$.

Si $X = BH$ pour un groupe discret H et E est induit par une représentation complexe de H (cf. I.4. ci-dessous), les $c_i(E)$ sont de torsion et Grothendieck majore leur ordre ([10], p. 263; voir aussi Thomas [23]); on peut se servir de ces majorations pour améliorer la prop. I.3.4.bis.

4. Le cas d'un groupe discret: traductions

4.1. Soit H un groupe discret, et $\rho: H \to GL(V)$ une représentation de H sur un espace vectoriel (réel ou complexe) V de dimension r. On associe à ρ un fibré vectoriel (réel ou complexe) E sur BH de la manière suivante: V définit un fibré vectoriel trivial sur EH, et H opère diagonalement sur son espace total $EH \times V$; E est alors défini comme le quotient par H de cette action. Les classes de Stiefel-Whitney (ou de Chern) de ce fibré sont des éléments de la cohomologie de BH; comme celle-ci s'identifie canoniquement à celle du groupe H, on a défini des classes de Stiefel-Whitney

$$w_i(\rho) \in H^i(H, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^b = H^i(H)$$

ou des classes de Chern

$$c_i(\rho) \in H^{2i}(H, \mathbf{Z}).$$

4.2. Les résultats de I.3. s'appliquent à H et ses représentations réelles: moyennant 4.1. ci-dessus, c'est le cas particulier $X = BH$. Si l'on fait les traductions suivantes:

H	X
$\mathfrak{S}_n \int H$	$\mathfrak{S}_n X$
ρ représentation réelle de H de rang r	E fibré vectoriel réel sur X, de rang r
H sous-groupe de G d'indice n	$p: X \to Y$ revêtement connexe de degré n
$\mathrm{Ind}_H^G \rho$	$p_* E$
Res: $H^*(G) \to H^*(H)$	$p^*: H^*(Y) \to H^*(X)$
Cor: $H^*(H) \to H^*(G)$	$p_*: H^*(X) \to H^*(Y)$
$\mathcal{N}_i: H^{**}(H) \to H^{**}(G)$	$\mathcal{N}_i: H^{**}(X) \to H^{**}(Y)$

on obient les énoncés suivants, correspondant au théorème I.3.2. et à la prop. I.3.4.:

Théorème I.4.2. *Soit G un groupe discret, H un sous-groupe de G d'indice 2, et ρ une représentation réelle de H, de rang r. Notons* $\operatorname{Ind}\rho$ *l'induite de ρ de H à G, et soient $d \in H^1(G)$ l'image par inflation du générateur de $H^1(G/H)$. Alors:*

$$w(\operatorname{Ind}\rho) = \sum_{j \geqq 0} \mathcal{N}(w^{(j)}(\rho)) \cdot d^j, \tag{6}$$

où les $w^{(j)}$ sont comme en 3.1. *Cette formule peut aussi s'écrire:*

$$w(\operatorname{Ind}\rho) = \mathcal{N}(w(\rho)) + \sum_{i \geqq 0} \mathcal{N}(w_i(\rho)) \cdot ((d+1)^{r-i} + 1). \tag{6'}$$

Proposition I.4.2. *Conservons les notations du théorème précédent, mais supposons H d'indice fini quelconque dans G. Supposons que:*

a) $r \equiv 0 (\operatorname{mod} 2^{k+1})$;

b) $w_i(\rho) = 0$ *pour* $0 < i < 2^k$.

Alors:

a') $\operatorname{rg}\operatorname{Ind}\rho \equiv 0 (\operatorname{mod} 2^{k+1})$;

b') $w_i(\operatorname{Ind}\rho) = \operatorname{Cor} w_i(\rho)$ *pour* $0 < i < 2^{k+1}$.

II. Démonstration des théorèmes 1, 2 et 3

1. Présentation

Comme le canevas des démonstrations est assez compliqué, j'en donne ici une brève esquisse, pour la commodité du lecteur.

1.1. Soit F un corps commutatif de caractéristique différente de 2. Notons F_s une clôture séparable de F, et G_F le groupe de Galois de l'extension F_s/F. Dans toute la suite, on note $H^i(F)$ le groupe de cohomologie $H^i(G_F, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ et $H^{**}(F)$ le produit direct $\prod_{i \geqq 0} H^i(F)$; c'est un anneau commutatif gradué pour le cup-produit. Munissons $H^{**}(F)$ de l'augmentation $\varepsilon(x) = x_0$, où x_0 est la composante de x de degré zéro et $H^0(F)$ est canoniquement identifié à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$; un élément x de $H^{**}(F)$ est inversible si et seulement si $\varepsilon(x) \neq 0$. La théorie de Kummer donne un isomorphisme:

$$F^*/F^{*2} \xrightarrow{\sim} H^1(F);$$

si $a \in F^*$, on note (a) son image dans $H^1(F)$ par la théorie de Kummer. Le cup-produit $(a_1) \ldots . (a_n)$ sera souvent noté $(a_1, \ldots, a_n)$.

Dèfinition 1.1. *Un élément de $H^n(F)$ est dit décomposable s'il peut s'écrire comme somme de cup-produits $(a_1, \ldots, a_n)$; un élément de $H^{**}(F)$ est dit décomposable si toutes ses composantes sont décomposables. On note $H^{**}(F)_{\mathrm{dec}}$ le sous-anneau de $H^{**}(F)$ formé des éléments décomposables.*

Remarque. Milnor conjecture que *pour tout corps* F, on a $H^{**}(F)_{\text{déc}} = H^{**}(F)$ ([13], § 6). Cette conjecture a été vérifiée dans de nombreux cas particuliers et Merkurjev [12] a démontré qu'elle est vraie pour les éléments de $H^2(F)$ *en général*.

1.2. Soit $\rho\colon G_F \to GL_r(\mathbf{R})$ une représentation réelle de G_F. Supposons que le noyau de ρ soit un *sous-groupe fermé d'indice fini* de G_F; ρ se factorise donc à travers un groupe fini G et on définit ses classes de Stiefel-Whitney dans $H^{**}(F)$ comme les images par inflation de ses classes de Stiefel-Whitney dans $H^{**}(G)$: cette définition ne dépend pas du choix du quotient G de G_F. Ceci évite de considérer le classifiant du groupe profini G_F. Toutes les propriétés énoncées en I.3.1. restent vraies pour les classes de Stiefel-Whitney des représentations réelles (de noyau ouvert) de G_F; de même, toutes les notions introduites en I.2. et en I.4. «passent» à la cohomologie galoisienne.

1.3. Soit q une forme quadratique non dégénérée sur F, de rang r. Ecrivons $q \sim a_1 x_1^2 + \ldots + a_r x_r^2$, grâce au choix d'une base orthogonale. Avec Delzant [5], on définit les *classes de Stiefel-Whitney* de q par les formules:

$$w_i(q) = \sum_{i_1 < \ldots < i_r} (a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}) \in H^i(F).$$

Cette définition ne dépend pas de la base orthogonale choisie; on a $w_0(q) = 1$ et $w_i(q) = 0$ lorsque $i > r$. Par la théorie de Kummer, $w_1(q)$ représente le *discriminant* de q, et $w_2(q)$ coïncide avec son *invariant de Hasse-Witt*. Posons $w(q) = \sum_{i \geqq 0} w_i(q)$; si q' est une autre forme quadratique, on a:

$$w(q \oplus q') = w(q) \cdot w(q').$$

La classe totale w se prolonge donc aux *formes quadratiques virtuelles*, mais il n'est plus vrai en général que $w_i(q) = 0$ pour $i > rg\, q$ pour une forme virtuelle q.

Je suis maintenant en mesure d'indiquer le schéma des démonstrations. Tout d'abord, on prouve:

Proposition II.1.4. *Soit E/F une extension quadratique de discriminant $d \in H^1(F)$. Alors, pour tout élément décomposable x de $H^{**}(E)$, on a:*

$$d \cdot \mathcal{N}(x) = \varepsilon(x) d.$$

On prouve ensuite:

Proposition II.1.5. *Sous les hypothèses de la prop.* II.1.4., *soit ρ une représentation réelle de G_E. Supposons que $w(\rho)$ soit décomposable. Alors:*

1) Le théorème 1 *est vrai pour l'extension E/F et la représentation ρ;*

2) $w(\operatorname{Ind} \rho)$ est décomposable.

On prouve ensuite:

Proposition II.1.6. *Soit $\rho\colon G_F \to GL_2(\mathbf{R})$ une représentation de degré* 2 *de G_F. Alors $w(\rho)$ est décomposable.*

On est alors en mesure de prouver les théorèmes 1 et 2; pour le théorème 1, on utilise un théorème d'induction ([18], prop. 3), et pour le théorème 2 on utilise le résultat de Serre [19]. Enfin, on déduit le théorème 3 des théorémes 1 et 2.

2. Démonstration des propositions II.1.4, II.1.5. *et* II.1.6.

2.1. Vues la prop. I.2.5.b. et la multiplicativité de $\mathcal{N}$, il suffit de prouver la prop. II.1.4. pour $x \in H^1(E)$. Pour cela on va donner une expression *explicite* de $\mathcal{N}(x)$:

Lemme II.2.1. *Soit* $a \in E^*$. *Alors:*

$$\begin{aligned} \mathcal{N}((a)) &= (Tr_{E/F}a, -dN_{E/F}a) + (2,d) \qquad \text{si } Tr_{E/F}a \neq 0; \\ &= (2,d) \qquad \text{si } Tr_{E/F}a = 0. \end{aligned}$$

Ce lemme entraîne $d \cdot \mathcal{N}((a)) = 0$: en effet, le membre de droite n'est autre que $\mathrm{Cor}_{E/F}((Tr\,a, a\sqrt{d}) + (2, \sqrt{d}))$.

N.B. Il est utile pour la suite de signaler les relations suivantes (dont la deuxième vient d'être utilisée): *on a* $(2,2) = (2,-1) = 0$. En voici deux justifications:

a) La forme quadratique $2x^2 + 2y^2 - z^2$ représente zéro (prendre $(x,y,z) = (1,1,2)$); de même, la forme quadratique $2x^2 - y^2 - z^2$ représente zéro (prendre $(x,y,z) = (1,1,1)$).

b) En fait, ces relations sont déja vraies dans $K_2(F)$ (pour tout F): $\{2,2\} = \{2,-1\} = \{2, 1-2\} = 0$ dans K_2.

Démonstration du lemme II.2.1. D'après Serre ([19], th. 1'), on a:

$$w_2(\mathrm{Ind}\,\rho_a) = w_2(T(\langle a \rangle)) + (2,d),$$

où ρ_a, $\langle a \rangle$ et T ont été définis dans l'introduction. D'autre part, le th. I.4.2. appliqué à ρ_a montre que $w_2(\mathrm{Ind}\,\rho_a) = \mathcal{N}((a))$. On a donc:

$$\mathcal{N}((a)) = w_2(T(\langle a \rangle)) + (2,d),$$

et tout revient à calculer w_2 pour la forme quadratique $q: x \mapsto Tr_{E/F}ax^2$. Supposons d'abord a de trace non nulle; les éléments 1 et $\frac{\sqrt{d}}{a}$ forment alors une base de E sur F. Cette base est orthogonale pour q et on a:

$$q(1) = Tr\,a;$$

$$q\left(\frac{\sqrt{d}}{a}\right) = Tr\,\frac{d}{a} = d \cdot N(a) \cdot Tr\,a.$$

Par conséquent, $w_2(q) = (Tr\,a, (Tr\,a) \cdot d \cdot Na) = (Tr\,a, -d \cdot Na)$, ce qui établit le lemme lorsque $Tr\,a \neq 0$. Lorsque $Tr\,a = 0$, $(1, \sqrt{d})$ forme une base symplectique pour q; donc q est hyperbolique et $w_2(q) = 0$.

2.2. Pour démontrer II.1.5., on commence par établir le lemme suivant:

Lemme II.2.2. *Sous les hypothèses de la prop.* II.1.4., *on a:*

a) $\mathrm{Cor}_{E/F}(H^{**}(E)_{\mathrm{dec}}) \subset H^{**}(F)_{\mathrm{dec}}$;

b) $\mathcal{N}(H^{**}(E)_{\mathrm{dec}}) \subset H^{**}(F)_{\mathrm{dec}}$.

Démonstration. a) est bien connu; rappelons qu'une méthode pour le voir est de montrer que $H^{**}_{\mathrm{dec}}(E)$ est engendré par les éléments de la forme $(x_1, \ldots, x_{n-1}, y)$, où $x_1, \ldots, x_{n-1} \in H^1(F)$ et $y \in H^1(E)$; cf. [2], p. 377.

Pour montrer b), la formule de la prop. I.2.4., a):

$$\mathcal{N}(x+y) = \mathcal{N}(x) + \mathcal{N}(y) + \mathrm{Cor}(x \cdot y) + \mathrm{Cor}\, x \cdot \mathrm{Cor}\, y$$

et la multiplicativité de $\mathcal{N}$ permettent, compte tenu de a) ci-dessus, de se ramener au cas des éléments de $H^1(E)$. Mais alors b) est conséquence du lemme II.2.1.

Prouvons maintenant la proposition II.1.5. L'affirmation 2) est claire vus le lemme qui précède et le théorème I.4.2. Pour démontrer 1), utilisons ce dernier sous la forme (6'); compte tenu de la prop. II.1.4., cette formule devient:

$$w(\mathrm{Ind}\,\rho) = \mathcal{N}(w(\rho)) + (d+1)^r + 1,$$

où r est le rang de la représentation ρ. D'autre part, on a $w(\mathrm{Ind}\,\mathbf{1}) = 1 + d$; en appliquant une deuxième fois la prop. II.1.4., on obtient:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(w(\rho)) \cdot w(\mathrm{Ind}\,\mathbf{1})^r &= \mathcal{N}(w(\rho)) \cdot ((d+1)^r + 1) + \mathcal{N}(w(\rho)) \\ &= (d+1)^r + 1 + \mathcal{N}(w(\rho)).\end{aligned}$$

L'affirmation 1) est donc démontrée.

2.3. *Remarque.* Pour un groupe G quelconque, la proposition II.1.5. garde un sens, mais est *fausse* en général. Par exemple, prenons pour G le groupe diédral D_4 d'ordre 8, vu comme produit semi-direct d'un groupe d'ordre 2 par un groupe H de type (2, 2), de base (e, f), l'action étant donnée par permutation de e et f. Soit x le caractère de H prenant la valeur 0 sur f et 1 sur e, y défini de même en interchangeant e et f; on sait que la cohomologie modulo 2 de H est une algèbre de polynômes sur les générateurs x et y, et G/H opère sur celle-ci en interchangeant x et y. Soit ρ la représentation de G induite de la représentation de H définie par x; la formule (6') montre que $w_3(\rho) = 0$, par contre le terme de degré 3 dans la formule du th. 1 est $d \cdot \mathcal{N}(x)$, où d est comme ci-dessus. Or ce terme est *non nul* dans $H^3(G)$; dans le cas contraire, vue l'exactitude bien connue de la suite

$$H^2(H) \xrightarrow{\mathrm{Cor}} H^2(G) \xrightarrow{.d} H^3(G),$$

on aurait $\mathcal{N}(x) = \mathrm{Cor}\, u$ pour $u \in H^2(H)$; en prenant les restrictions à la cohomologie de H, cela donnerait:

$$xy = u + u',$$

où u' est le conjugué de u sous l'action de G/H; vue la structure de la cohomologie de H, une telle égalité est impossible, donc la formule du théorème 1 est fausse pour G, H et la représentation définie par x.

2.4. Pour démontrer II.1.6., on pourrait invoquer le théorème de Merkurjev mentionné ci-dessus, qui affirme que tout élément de $H^2(F)$ est décomposable. En réalité, le recours à ce théorème n'est pas nécessaire comme on va le voir ci-dessous.

Soit ρ comme en II.1.6. L'image de ρ est un sous-groupe fini Γ de $GL_2(\mathbf{R})$; comme il existe une forme quadratique définie positive invariante par ρ, on peut même supposer Γ contenu dans le groupe orthogonal O_2. On voit ainsi que Γ est cyclique ou diédral; il est cyclique si et seulement si il est contenu dans SO_2 ou s'il est engendré par la symétrie par rapport à une droite.

a) Supposons Γ contenu dans SO_2, donc cyclique. Notons $\bar{\rho}$ la représentation de Γ induite par ρ; alors $w_1(\bar{\rho})=0$ et l'extension de Γ définie par $w_2(\bar{\rho})\in H^2(\Gamma)$ est le pull-back de l'extension Spin_2 de SO_2, donc $w_2(\bar{\rho})$ est l'élément non nul de $H^2(\Gamma)$ (en effet le revêtement $\mathrm{Spin}_2\to SO_2$ est isomorphe au revêtement $S^1\to S^1$ donné par la multiplication par 2). La classe $w_2(\rho)$ est l'image par inflation de $w_2(\bar{\rho})$; pour l'identifier, considérons-la comme un élément d'ordre $\leqq 2$ du *groupe de Brauer* de F via le plongement $H^2(F) \simeq H^2(F,\mu_2)\hookrightarrow H^2(F,F_s^*)$. Soit n l'ordre de Γ et χ un isomorphisme de Γ sur $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$; χ définit un générateur de $H^1(\Gamma,\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ et par inflation un élément de $H^1(F,\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$, encore noté χ. Soit $\delta\chi\in H^2(\Gamma,\mathbf{Z})$ le bord de χ par rapport à la suite exacte $0\to\mathbf{Z}\xrightarrow{n}\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}\to 0$; vu [17], p. 141, le générateur de $H^2(\Gamma)$ est égal au cup-produit $\varepsilon\cdot\delta\chi$, où ε est le générateur de $H^0(\Gamma)$. Considéré comme un élémént de $Br(F)$, $w_2(\rho)$ est donc égal au cup-produit de $-1\in H^0(F,F_s^*)$ par $\delta\chi\in H^2(F,\mathbf{Z})$: c'est le symbole $(\chi,-1)$ de [17], p. 211. On sait que ce symbole est encore égal au cup-produit $(-1)\cdot\chi$, où (-1) est l'image de -1 dans $H^1(F,\mu_n)$ par la théorie de Kummer et le cup-produit est élément de $H^2(F,\mu_n)$, considéré comme plongé dans $Br(F)$.

Si n est impair, ce cup-produit est nul. Supposons n pair; soit E/F l'extension cyclique de degré n définie par χ, et soit E'/F l'unique sous-extension de E/F telle que $[E:E']=2$. Il est bien connu ([3], § 11, ex 4) qu'il existe $x\in E'^*$ tel que $N_{E'/F}(x)=-1$; on peut d'ailleurs choisir $x=s\sqrt{d'}/\sqrt{d'}$, où d' représente le discriminant de l'extension E/E' et s est un générateur de $\Gamma=\mathrm{Gal}(E/F)$ (*loc. cit.*).

Lemme II.2.4. *On a* $(\chi,-1)=\mathrm{Cor}_{E'/F}(x,d')$.

Il est clair que II.1.6. résulte de ce lemme par exemple grâce à [16]. Démontrons le lemme: en appliquant la formule de projection, le premier membre devient:

$$(\chi,-1)=(\chi,N(x))=\mathrm{Cor}((\mathrm{Res}\,\chi)\cdot(x)),$$

où (x) est l'image de x dans $H^1(E',\mu_n)$ par la théorie de Kummer.

Or la restriction de χ à $G_{E'}$ n'est autre que le caractère associé à l'extension E/E', c'est-à-dire n'est autre que l'image de $((d')\in H^1(E')$ dans $H^1(E',\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$. Par fonctorialité du cup-produit, le lecteur se convaincra que l'image de $(x,d')\in H^2(E')\simeq H^2(E',\mu_2)$ dans $H^2(E',\mu_n)$ est égale à $(x)\cdot(\mathrm{Res}\,\chi)$, ce qui démontre le lemme II.2.4.

b) Supposons Γ non coutenu dans SO_2. Il contient alors un sous-groups Γ_1 d'indice 2 et contenu dans SO_2. Soit s un générateur de Γ_1 et t un élément de $\Gamma-\Gamma_1$; alors t est d'ordre 2 et Γ est produit semi-direct du sous-groupe engendré par t et de Γ_1, l'action sur Γ_1 étant donnée par $tst^{-1}=s^{-1}$.

Soit E/F l'extension définie par Γ, et E_1 (resp. F_1) le sous-corps de E des éléments invariants par t (resp. par s); E est composé linéairement disjoint sur F de E_1 et F_1; de plus, l'extension E/F_1 est cyclique de groupe Γ_1.

Supposons d'abord Γ_1 d'ordre impair; alors d'après a), $w_2(\rho)$ est dans le noyau de Res: $H^2(F)\to H^2(F_1)$. Vue l'exactitude de la suite

$$H^1(F)\xrightarrow{\cdot d}H^2(F)\xrightarrow{\text{Res}}H^2(F_1) \tag{11}$$

où $d=\operatorname{disc}(F_1/F)$, on a $w_2(\rho)=d\cdot u$ pour $u\in H^1(F)$ et donc $w_2(\rho)$ est décomposable.

Supposons maintenant Γ_1 d'ordre pair, soit $|\Gamma_1|=2m$. Soit E' le sous-corps de E formé des éléments invariants par s^m, et E_1' le sous-corps de E' formé des éléments invariants par t. Notons d' un représentant dans E'^* du discriminant de E/E' et $x=s\sqrt{d'}/\sqrt{d'}$: c'est un élément de E' et, d'après a), on a:

$$\operatorname{Res}_{F_1/F}w_2(\rho)=\operatorname{Cor}_{E'/F_1}(x,d').$$

On peut d'ailleurs choisir pour d' un représentant du discriminant de E_1/E_1', c'est à dire un élément invariant par t. Observons qu'alors:

$$\begin{aligned}tx&=ts\sqrt{d'}/t\sqrt{d'}=s^{-1}t\sqrt{d'}/t\sqrt{d'}=s^{-1}\sqrt{d'}/\sqrt{d'}=s^{-1}(\sqrt{d'}/s\sqrt{d'})\\&=s^{-1}x^{-1},\end{aligned}$$

c'est à dire que $x\cdot stx=1$. Du théorème 90 de Hilbert, on déduit qu'il existe $y\in E'^*$ tel que $x=sty/y$; par conséquent,

$$\begin{aligned}(x,d')&=(sty,d')+(y,d')=(sty,std')+(y,d')\\&=\operatorname{Res}_{E'/K}\operatorname{Cor}_{E'/K}(y,d'),\end{aligned}$$

où K est le sous-corps de E' des éléments fixés par st; on a utilisé implicitement le fait que $std'=sd'=x^2d'$.

Par conséquent:

$$\operatorname{Cor}_{E'/F_1}(x,d')=\operatorname{Cor}_{E'/F_1}\operatorname{Res}_{E'/K}c=\operatorname{Res}_{F_1/F}\operatorname{Cor}_{K/F}c,$$

où $c=\operatorname{Cor}_{E'/K}(y,d')$. L'élément $w_2(\rho)+\operatorname{Cor}_{E'/F}(y,d')$ est donc dans le noyau de la restriction de F à F_1; vua la suite exacte (11), cet élément est de la forme $d\cdot u$ (comme ci-dessus), ce qui achève de prouver que $w_2(\rho)$ est décomposable dans le cas diédral.

$$\begin{tikzcd}
 & E \arrow[dl, dash, "t"'] \arrow[d, dash, "s^m"] & \\
E_1 \arrow[d, dash, "s^m"'] & E' \arrow[dl, dash, "t"] \arrow[dd, dash, "s"] \arrow[dr, dash, "st"] & \\
E_1' \arrow[ddr, dash, "s"'] & & K \arrow[ddl, dash, "s"] \\
 & F_1 \arrow[d, dash, "t"] & \\
 & F &
\end{tikzcd}$$

3. Démonstration des théorèmes 1 *et* 2

Pour démontrer les théorèmes 1 et 2, on se ramène au cas d'une extension quadratique par une méthode identique à celle de la démonstration de la proposition I.3.4.

3.1. Soit E une extension finie séparable de F. Soit $\tilde{E}/F$ une extension galoisienne finie contenant E/F, G son groupe de Galois et S un 2-sous-groupe de Sylow de G. Soit K l'extension de F déterminée par S; elle a les propriétés suivantes:

- le degré $[K:F]$ est impair;
- soit $E'=K\otimes_F E$ l'algèbre étale obtenue à partir de E par extension des scalaires de F à K: E' est produit direct de corps $E_1,\dots,E_k$, extensions finies séparables de K. De plus, pour tout i, l'extension E_i/K est contenue dans une extension galoisienne dont le groupe de Galois est un 2-groupe.

Lemme II.3.2. *Il suffit de démontrer le théorème* 1 (*resp. le théorème* 2) *pour une extension E/F et une représentation ρ* (*resp. une forme quadratique q*) *dans le cas suivant: E/F est contenue dans une extension galoisienne finie $\tilde{E}/F$ dont le groupe de Galois est un* 2-*groupe, et la restriction de ρ à $G_{\tilde{E}}$ est triviale* (*resp. q devient isomorphe sur $\tilde{E}$ à la forme quadratique standard de même rang*).

En effet, supposons le théorème 1 (resp. 2) établi dans ce cas particulier. Dans le cas général, on effectue la construction de 3.1.: quitte à augmenter $\tilde{E}$, on peut aussi supposer que la restriction de ρ à $G_{\tilde{E}}$ est triviale (resp. que q devient isomorphe sur $\tilde{E}$ à la forme standard). Pour tout i, notons ρ_i (resp. q_i) la restriction de ρ (resp. de q) à G_{E_i} (resp. à E_i): les couples $(E_i/K,\rho_i)$ (resp. $(E_i/K,q_i)$) satisfont aux hypothèses de II.3.2. De plus, on a:

$$\mathrm{Res}_{K/F}\,\mathrm{Ind}_{E/F}\,\rho=\sum_{0\leq i\leq k}\mathrm{Ind}_{E_i/K}\,\rho_i$$

$$(\text{resp. } \mathrm{Res}_{K/F}\,T_{E/F}(q)=\sum_{0\leq i\leq k}T_{E_i/K}(q_i)).$$

D'autre part, on a par fonctorialité $w(\operatorname{Res}\rho)=\operatorname{Res}w(\rho)$ (resp. la même formule pour une forme quadratique q). En utilisant ceci et la «formule des doubles classes» de [8], prop 3 (qui est la traduction de I.2.4. c)), on tire de tout ceci:

$$\begin{aligned} w(\operatorname{Res}_{K/F}\rho) &= \operatorname{Res}_{K/F}w(\rho)=\prod_i \mathcal{N}_{E_i/K}(w(\rho_i))\cdot\Big(\prod_i w(\operatorname{Ind}_{E_i/K}\mathbf{1})\Big)^{rg\rho} \\ &= \operatorname{Res}_{K/F}\mathcal{N}_{E/F}(w(\rho))\cdot w(\operatorname{Res}_{K/F}\operatorname{Ind}_{E/F}\mathbf{1})^{rg\rho} \\ &= \operatorname{Res}_{K/F}(\mathcal{N}_{E/F}(w(\rho))\cdot w(\operatorname{Ind}_{E/F}\mathbf{1})^{rg\rho} \end{aligned}$$

(resp. même formule et même démonstration pour une forme quadratique q).

Comme $[K:F]$ est impair, $\operatorname{Res}_{K/F}$ est injective en cohomologie modulo 2, donc le lemme est démontré.

3.3. A partir de maintenant, on suppose qu'on est sous les hypothèses de II.3.2. Traitons d'abord le cas d'une représentation ρ: par hypothèse, ρ provient d'une représentation du groupe de Galois G de $\tilde{E}/F$. On observe que si le théorème 1 est vrai pour deux représentations ρ_1 et ρ_2, il l'est aussi pour leur somme directe: c'est évident vues les propriétés d'additivité de w et du transfert multiplicatif $\mathcal{N}$. Cette remarque permet de se ramener au cas où ρ provient d'une représentation *irréductible* de G. Or G est un 2-groupe, donc est nilpotent: un théorème de Serre énonce alors que ρ est induite d'une représentation de degré 1 ou 2 d'un sous-groupe H de G (voir [18], proposition 3).

Soit D l'extension de E déterminée par H: il existe (propriété des p-groupes) une suite $E=E_0\subset E_1\subset\ldots\subset E_m=D$ de sous-extensions de D telles que pour tout i, $[E_i:E_{i-1}]=2$. Il résulte donc de la prop. II.1.6. et d'une application répétée de la prop. II.1.5. que $w(\rho)$ *est décomposable.*

De même que ci-dessus, filtrons l'extension E/F par une suite $F=F_s\subset F_{s-1}\subset\ldots\subset F_0=E$, telle que pour tout i, $[F_{i-1}:F_i]=2$. Pour démontrer le théorème 1, on raisonne par récurrence sur s. Si $s=0$, il n'y a rien à démontrer. Supposons $s\geqq 1$ et le théorème démontré pour l'extension E/F_{s-1}; supposons de plus démontré que $w(\operatorname{Ind}_{E/F_{s-1}}\rho)$ est décomposable. Par la prop. II.1.5., $w(\operatorname{Ind}_{E/F}\rho)$ est décomposable, et de plus:

$$w(\operatorname{Ind}_{E/F}\rho)=\mathcal{N}_{F_{s-1}/F}(w(\operatorname{Ind}_{E/F_{s-1}}\rho))\cdot w(\operatorname{Ind}_{F_{s-1}/F}\mathbf{1})^{[E:F_{s-1}]\cdot r},$$

où $r=rg\rho$. En utilisant l'hypothèse de récurrence, le second membre de cette égalité devient:

$$\begin{aligned} &\mathcal{N}_{F_{s-1}/F}[\mathcal{N}_{E/F_{s-1}}(w(\rho))\cdot w(\operatorname{Ind}_{E/F_{s-1}}\mathbf{1})^r]\cdot w(\operatorname{Ind}_{F_{s-1}/F}\mathbf{1})^{[E:F_{s-1}]\cdot r} \\ &\quad=\mathcal{N}_{E/F}(w(\rho))\cdot[\mathcal{N}_{F_{s-1}}(w(\operatorname{Ind}_{E/F_{s-1}}\mathbf{1}))\cdot w(\operatorname{Ind}_{F_{s-1}/F}\mathbf{1})^{[E:F_{s-1}]}]^r. \end{aligned}$$

Or on montre comme ci-dessus que $w(\operatorname{Ind}_{E/F_{s-1}}\mathbf{1})$ est décomposable; on peut donc appliquer la prop. II.1.5. à la représentation $\operatorname{Ind}_{E/F_{s-1}}\mathbf{1}$, de degré $[E:F_{s-1}]$. En substituant dans la dernière expression, on obtient l'énoncé du théorème 1, ce qui achève sa démonstration.

3.4. *Remarque.* Ce qui précède établit en fait le résultat suivant:

Théorème 4. *Pour tout corps F et toute représentation réelle ρ de G_F, on a $w(\rho) \in H^{**}(F)_{\text{déc}}$.*

Pour voir ceci, on se ramène au cas où ρ se factorise par un 2-groupe G, quotient de G_F. On peut alors supposer ρ irréductible et on utilise alors comme ci-dessus le théorème de Serre [18] et les prop. II.1.5. et II.1.6.

Pour se ramener au cas où ρ se factorise par un 2-groupe, on raisonne comme en 3.2., en utilisant le fait que *pour toute extension finie E/F, on a* $\mathrm{Cor}(H^*(E)_{\text{déc}}) \subset H^*(F)_{\text{déc}}$ (ce qui généralise le lemme II.2.2. a)). La manière la plus simple de le voir est de démontrer que le diagramme

$$\begin{tikzcd} k_*(E) \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\mathrm{Cor}"'] & H^*E) \arrow[d, "\mathrm{Cor}"'] \\ k_*(F) \arrow[r, "\gamma"] & H^*(F), \end{tikzcd}$$

où k_* désigne la K-théorie de Milnor (mod 2) [13], γ est le «symbole galoisien» (loc. cit.) et l'application Cor de gauche est le transfert défini par Bass, Tate et Kato, est commutatif. Cela se démontre par les mêmes méthodes, en se ramenant au cas d'une extension quadratique.

Corollaire. *Pour toute représentation ρ de G_F, on a:*

1) $Sq^i w_j(\rho) = \binom{j}{i} \eta^i \cdot w_j(\rho)$, *où η est la classe de -1 dans $H^1(F)$.*

2) $w_j(\rho) = \prod_{k=0}^{t} w_{2^k}(\rho)^{\varepsilon_k}$, *où l'on a écrit $j = \sum_{k=0}^{t} \varepsilon_k 2^k$, avec $\varepsilon_k = 0$ ou 1.*

L'affirmation 1) est vraie en général pour un élément homogène décomposable de degré j: une manière simple de le démontrer est d'observer que $Sq\,x = (1+\eta)\cdot x$ lorsque x est homogène de degré 1 et d'utiliser ensuite le fait que Sq est un homomorphisme d'algèbres.

Pour montrer 2), il suffit de montrer (en omettant désormais systématiquement ρ des notations): si $m < 2^k$, on a $w_{2^k+m} = w_{2^k} \cdot w_m$. Pour cela, on utilise les formules de Wu (I.3.2., formule (9)) avec $i = m$, $j = 2^k$. Compte tenu de 1) ci-dessus, cela donne (en supposant $m > 0$):

$$\begin{aligned} w_{2^k+m} &= Sq^m(w_{2^k}) + \sum_{t=0}^{m-1} \binom{2^k+t-m-1}{t} w_{m-t} \cdot w_{2^k+t} \\ &= \sum_{t=0}^{m-1} \binom{2^k+t-m-1}{t} w_{m-t} \cdot w_{2^k+t}. \end{aligned}$$

En raisonnant par récurrence sur m, cette expression est égale à:

$$w_{2^k} \cdot \sum_{t=0}^{m-1} \binom{2^k+t-m-1}{t} w_{m-t} \cdot w_t = w_{2^k} \cdot \left[w_m + \sum_{t=1}^{m-1} \binom{2^k+t-m-1}{t} w_{m-t} \cdot w_t \right].$$

Pour terminer la démonstration, il suffit de montrer est égale à:
$\binom{2^k+t-m-1}{t} \equiv \binom{2^k-t-1}{m-t} \pmod 2$ et que $\binom{2^k-t-1}{t} \equiv 0 \pmod 2$ pour $t<2^k$.
Pour cela, on peut utiliser la remarque suivante, qui se voit en écrivant $(1+X)^{2^k+t} \equiv (1+X^{2^k})\ (1+X)^t \pmod 2$: *si* $t<2^k$, *alors pour tout* n, $\binom{2^k+n}{t} \equiv \binom{n}{t} \pmod 2$. $\left(\text{On utilise la convention habituelle } \binom{n}{t}=0 \text{ si } n<t.\right)$
Montrons par exemple la première congruence (la deuxième étant plus facile): si $m<2^{k-1}$, on écrit $2^k+t-m-1=2^{k-1}+(2^{k-1}+t-m-1)$ et de même $2^k-t-1 = 2^{k-1}+(2^{k-1}-t-1)$. En appliquant la remarque précédente, on se ramène ainsi au cas où $m \geqq 2^{k-1}$; on écrit alors $\binom{2^k+t-m-1}{t} = \binom{2^k+t-m-1}{2^k-m-1}$. Par le même argument, cette expression est congruente à $\binom{2^{k-1}+t-m-1}{2^k-m-1}$; mais celle-ci est identiquement nulle puisque le terme du haut est plus petit que le terme du bas. On traite de même le deuxième symbole binômial, ce qui prouve la congruence cherchée.

3.5. Pour démontrer le théorème 2, on raisonne comme en 3.3.; en se servant du fait que toute forme quadratique possède un base orthogonale, on se ramène à prouver l'analogue suivant de II.1.5.:

Proposition II.3.5. *Le théorème* 2 *est vrai pour une extension quadratique et une forme de rang* 1.

Démonstration. Supposons $q=\langle a\rangle$, où $a \in E^*$. On doit démontrer:

$$w(T(q)) = \mathcal{N}(1+(a))\cdot(1+(d)+(2,d)).$$

Or le premier membre est égal à

$$1+(dN_{E/F}a)+(Tr\,a,\ -dN\,a)$$

(cf. dém. du lemme II.2.1.), tandis que le deuxième membre est:

$$\begin{aligned}&(1+\mathrm{Cor}(a)+\mathcal{N}((a)))\cdot(1+(d)+(2,d))\\ &\quad =1+(d)+(Na)+(2,d)+\mathcal{N}((a))+(d,Na)+(d)\cdot\mathcal{N}((a))+(2,d,Na)\\ &+(2,d)\cdot\mathcal{N}((a)).\end{aligned}$$

Les termes de degré $\geqq 3$ sont nuls. En effet, on a $(d)\cdot\mathcal{N}((a))=0$ (prop. II.1.4.), donc aussi $(2,d)\cdot\mathcal{N}((a))=0$; d'autre part, $(d,Na)=0$ (par la formule de projection), donc aussi $(2,d,Na)=0$. On voit que tout revient à montrer:

$$(Tr\,a,\ -dN\,a)=(2,d)+\mathcal{N}((a));$$

mais c'est le contenu du lemme II.2.1. Ceci achève la démonstration de II.3.5., et donc du théorème 2.

4. Démonstration du théorème 3

4.1. On démontre d'abord le théorème 3 pour une extension quadratique. La formule à démontrer s'écrit alors:

$$1+w_1(T(\langle a\rangle))+w_2(T(\langle a\rangle))=(1+w_1(\operatorname{Ind}\rho_a)+w_2(\operatorname{Ind}\rho_a))\cdot(1+(2,d)),$$

c'est-à-dire:

$w_1(T(\langle a\rangle))=w_1(\operatorname{Ind}\rho_a)$;
$w_2(T(\langle a\rangle))=w_2(\operatorname{Ind}\rho_a)+(2,d)$;
$w_1(\operatorname{Ind}\rho_a)\cdot(2,d)=0$;
$w_2(\operatorname{Ind}\rho_a)\cdot(2,d)=0$.

Or la première formule est bien connue (les deux membres sont égaux à (dNa)); la deuxième n'est autre que le résultat de Serre ([19]) déjà utilisé; la troisième se démontre en écrivant $(dNa,2,d)=(d,2,d)+(Na,2,d)$ (le premier terme est nul car $(d,d)=(d,-1)$ et $(2,-1)=0$, le deuxième est nul parce que $(d,Na)=0$); enfin, la quatrième résulte du fait que $w_2(\operatorname{Ind}\rho_a)=\mathcal{N}((a))$ et que $(d)\cdot\mathcal{N}((a))=0$ (prop. II.1.4.). Le théorème 3 est donc vrai pour une extension quadratique.

4.2. Pour démontrer le théorème 3 en général, on se ramène d'abord, comme en II.3.2., au cas où le groupe de Galois de la clôture galoisienne de E/F est un 2-groupe. Pour cela, on procéde de la même manière; la seule chose à observer est que, pour tous $d_1,\dots,d_k\in K^*$, on a:

$$(1+(2,d_1))\dots(1+(2,d_k))=1+(2,d_1\dots d_k);$$

cela résulte du fait que $(2,2)=0$.

4.3. Ceci fait, on filtre comme en II.3.3. l'extension E/F par une suite $F=F_s\subset F_{s-1}\dots\subset F_0=E$, avec $[F_{i-1}:F_i]=2$ pour tout i; on raisonne par récurrence sur s. Si $s=0$, il n'y a rien à démontrer, et le cas $s=1$ a été traité en 4.1. Supposons $s\geqq 2$; par récurrence, on a (pour $a\in E^*$):

$$w(T_{E/F_{s-1}}(\langle a\rangle))=w(\operatorname{Ind}_{E/F_{s-1}}\rho_a)\cdot(1+(2,d_{E/F_{s-1}})). \tag{12}$$

D'autre part, les théorèmes 1 et 2 donnent respectivement:

$$w(\operatorname{Ind}_{E/F}\rho_a)=\mathcal{N}_{F_{s-1}}(w(\operatorname{Ind}_{E/F_{s-1}}\rho_a))\cdot w(\operatorname{Ind}_{F_{s-1}/F}\mathbf{1})^{[E:F_{s-1}]}; \tag{13a}$$

$$w(T_{E/F}(\langle a\rangle))=\mathcal{N}_{F_{s-1}/F}(w(T_{E/F_{s-1}}(\langle a\rangle)))\cdot w(T_{F_{s-1}/F}(\mathbf{1}))^{[E:F_{s-1}]}. \tag{13b}$$

Divisions (13b) par (13a). Compte tenu de (12) et de 4.1. (appliqué à F_{s-1}/F et $a=1$), cela donne:

$$\frac{w(T_{E/F}(\langle a\rangle))}{w(\operatorname{Ind}_{E/F}\rho_a)}=\mathcal{N}_{F_{s-1}/F}(1+(2,d_{E/F_{s-1}}))\cdot(1+(2,d_{F_{s-1}/F}))^{[E:F_{s-1}]}.$$

Dans le deuxième membre, le deuxième facteur est égal à 1, puisque $[E:F_{s-1}]$ est pair et que $(2,2)=0$. Tout revient donc à montrer:

Lemme II.4.3. *On a* $\mathcal{N}_{F_{s-1}/F}(1+(2,d_{E/F_{s-1}}))=1+(2,d_{E/F})$.

Or le premier membre de cette égalité est encore égal à:

$$1+\mathrm{Cor}_{F_{s-1}/F}(2,d_{E/F_{s-1}})+\mathcal{N}_{F_{s-1}/F}(2,d_{E/F_{s-1}})).$$

le deuxième terme est $(2,N_{F_{s-1}/F}d_{E/F_{s-1}})=(2,d_{E/F})$. Le troisième terme s'écrit $\mathcal{N}((2))\cdot\mathcal{N}((d'))$ (où $d'=d_{E/F_{s-1}}$). On a, grâce à II.2.1.:

$$\mathcal{N}(2))=(2,d) \quad (d=d_{F_{s-1}/F});$$

$$\mathcal{N}((d'))=(2,d)+(Tr\,d',\ -dNd').$$

On a $(2,d)\cdot(2,d)=0$ (car $(2,2)=0$; de même, $(2,d)\cdot(Tr\,d',\ -dNd')=0$ (car $(d,\ -dNd')=\mathrm{Cor}(\mathrm{Res}\,d,d'\sqrt{d})=0$); par conséquent, $\mathcal{N}((2,d'))=0$, ce qui montre le lemme II.4.3. et termine la démonstration du théorème 3.

III. Applications et généralisations

1. Transfert et w_2

En prenant la partie homogène de degré 2 du théorème 2, on obtient l'énoncé suivant, d'intérêt indépendant:

Proposition III.1.1. *Avec les notations du théorème* 2, *on a:*

$$w_2(T(q))=\mathrm{Cor}\,w_2(q)+\mathcal{N}_2(w_1(q))+r(d)\cdot\mathrm{Cor}\,w_1(q)+r\,w_2(T(\mathbf{1}))+\frac{r(r-1)}{2}(d)^2,$$

où (d) *est le discriminant de l'extension et* $\mathcal{N}_2$ *a été défini en* I.2.4.

Je laisse au lecteur le soin de vérifier ceci; pour développer $\mathcal{N}(w(q))$, on écrit $\mathcal{N}(1+w_1+w_2+\dots)=1+\mathrm{Cor}(w_1+w_2+\dots)+\mathcal{N}_2(w_2+\dots)+\dots$, les points de suspension indiquant des termes de degré $\geqq 3$. Cet énoncé a un analogue évident pour les représentations réelles (prendre dans le théorème 1 la partie homogène de degré 2); on peut se convaincre qu'il reste valable dans le cas d'un groupe quelconque, plus nécéssairement groupe de Galois d'un corps (en effet les formules des théorèmes 1 et I.3.2. ne diffèrent qu'en degré $\geqq 3$).

Application: Pour tout $(a)\in H^1(E)$, notons $\eta((a))=w_2(T(\langle a\rangle))$; de la proposition ci-dessus, on déduit alors l'énoncé suivant (énoncé sans démonstration dans [11]):

Corollaire. *Sous les mêmes hypothèses, on a:*

$$w_2(T(q))=\mathrm{Cor}\,w_2(q)+\eta(w_1(q))+(r-1)\,\eta(0)+\frac{r(r-1)}{2}(d)^2+(r-1)(d)\cdot\mathrm{Cor}\,w_1(q).$$

Ma démonstration originelle de cette formule était une récurrence assez pénible; l'approache ci-dessus a pour avantage qu'elle *explique* la formule bizarre du corollaire.

Démonstration: on applique la proposition III.1.1. à q et à la forme quadratique $\langle \operatorname{disc} q \rangle$ (où $\operatorname{disc} q$ est un représentant dans E^* de $w_1(q)$) et on retranche membre à membre.

2. *Transfert multiplicatif en K-théorie de Milnor*

La conjecture de Milnor mentionnée en II.1.1. affirme que l'homomorphisme $k_*(F) \to H^*(F)$, où k_* désigne l'anneau de Milnor (mod 2), est un isomorphisme pour tout corps F de caractéristique $\neq 2$. Si cette conjecture est vraie, le transfert multiplicatif et les théorèmes 1, 2 et 3 se «relèvent» à $k_*(F)$. En prenant un peu d'avance sur la démonstration de la conjecture de Milnor, on peut essayer de les relever *tout de suite*. Pour cela, il faut d'abord:

- définir des classes caractéristiques pour une forme quadratique dans $k_*(F)$;
- définir des classes caractéristiques pour une représentation réelle dans $k_*(F)$;
- définir un transfert multiplicatif de $k_*(E)$ vers $k_*(F)$ lorsque E est une extension finie, séparable de F.

Pour les formes quadratiques, ceci a été fait par Milnor [13]. Pour le reste, je me contente ici de réaliser une partie de ce programme, à savoir:

- définir des classes caractéristiques dans $k_*(F)$ pour les représentations «monomiales»;
- définir le transfert multiplicatif pour k_* dans le cas des extensions quadratiques.

2.1. Pour tout groupe topologique G, notons $A_0(G)$ *l'anneau de Burnside* de G; c'est le groupe de Grothendieck de la catégorie des ensembles finis sur lesquels G opère continûment (G-ensembles finis), muni de la multiplication déduite du produit cartésien des G-ensembles. La donnée d'un G-ensemble à r éléments équivaut à celle d'un homomorphisme continu de G dans $\mathfrak{S}_r$ (muni de la topologie discrète) défini à conjugaison près par un élément de $\mathfrak{S}_n$; si G est le groupe de Galois absolu d'un corps F, elle équivaut aussi par la théorie de Galois à la donnée d'une *algèbre étale* sur F, de rang r; l'algèbre étale correspondant à un G-ensemble est un corps si et seulement si l'action de G sur ce G-ensemble est transitive.

2.2. De même, notons $A(G)$ l'anneau des *représentations nonomiales* de G; c'est le groupe de Grothendieck de la catégorie dont les objets sont les morphismes surjectifs de G-ensembles finis dont chaque fibre a deux éléments (revêtements à deux feuillets de G-ensembles finis); la donnée d'un tel objet ayant une base à r éléments équivaut à celle d'un homomorphisme continu de G dans le produit en couronnes $\mathfrak{S}_r \int (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ (le groupe $\mathfrak{S}'_r$ de Serre [19]), défini à conjugaison près par un élément de $\mathfrak{S}'_r$. Si G est le groupe de Galois absolu d'un corps F, elle équivaut également à la donnée d'un couple (E, E'), où E et E' sont des F-algèbres étales, E est de rang r sur F et E' est un E-module libre de rang 2. On définit des homomorphismes d'anneaux $A(G) \to A_0(G)$ et $A_0(G) \to A(G)$; le premier se définit en associant à un revêtement de G-ensembles sa base, et le deuxième en associant à un G-ensemble X le «revêtement trivial» $(X, X \amalg X)$. Ces deux homomorsphismes correspondent respectivement à la projection $\mathfrak{S}'_r \twoheadrightarrow \mathfrak{S}_r$ et au plongement canonique $\mathfrak{S}_r \hookrightarrow \mathfrak{S}'_r$.

2.3. Soit H un sous-groupe de G, fermé d'indice fini. La restriction à H de l'action de G définit des homomorphismes $\mathrm{Res}\colon A_0(G) \to A_0(H)$ et $\mathrm{Res}\colon A(G) \to A(H)$. Inversement, à un H-ensemble fini X, associons l'ensemble $G \times_H X$ quotient du produit cartésien $G \times X$ par les relations $(gh, x) = (g, hx)$ pour tous $(g, h, x) \in G \times H \times X$: c'est un ensemble fini à $(G:H) \cdot |X|$ éléments sur lequel G opère par $\gamma(g, x) = (\gamma g, x)$. Cette construction induit une application $\mathrm{Ind}\colon A_0(H) \to A_0(G)$ additive et vérifiant la «formule de projection» (ou «loi de réciprocité de Frobenius»); une construction analogue sur les revêtements de H-ensembles définit une application analogue $\mathrm{Ind}\colon A(H) \to A(G)$. Les applications Res et Ind commutent aux homomorphismes définis en 2.2. Si G est le groupe de Galois d'un corps, elles correspondent respectivement à l'extension et à la restriction des scalaires après traduction en termes d'algèbres étales.

2.4. *Remarque.* Le groupe $A(G)$ est visiblement engendré par les classes de revêtements de G-ensembles tels que G opère transitivement sur la base; ce sont les éléments *irréductibles* de $A(G)$. Soit χ un homomorphisme (continu) de G dans $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$: comme $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ est canoniquement isomorphe à S'_1, χ définit un élément (χ) de $A(G)$. Si H est un sous-groupe fermé d'indice fini de G et si χ est un tel caractère de H, alors $\mathrm{Ind}(\chi)$ est un élément irréductible de $A(G)$; inversement, *tout élément irréductible de $A(G)$ s'obtient de cette manière* (de façon d'ailleurs unique à conjugaison près), d'où la terminologie «représentations monomiales».

2.5. Un revêtement à deux feuillets de G-ensembles finis équivaut à la donnée d'un couple (X, t), où X est un G-ensemble fini et t est une involution de X, sans points fixes et commutant à l'action de G. A un tel couple (X, t), associons le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des fonctions $f\colon X \to \mathbf{R}$ vérifiant $f(tx) = -f(x)$ pour tout $x \in X$. Le groupe G opère sur cet espace vectoriel; on a ainsi défini un homomorphisme de $A(G)$ dans l'anneau $R(G)$ *des représentations réelles de G* (cet homomorphisme n'est pas injectif en général). En termes d'homomorphismes de G dans $\mathfrak{S}'_r$, cette application peut s'interpréter en remarquant que $\mathfrak{S}'_r$ est canoniquement isomorphe au groupe orthogonal entier $O_r(\mathbf{Z})$ (faire opérer $\mathfrak{S}'_r$ sur la base canonique de $\mathbf{Z}^r$ par permutations et changements de signes); la construction précédente correspond alors au plongement de $O_r(\mathbf{Z})$ dans $O_r(\mathbf{R})$. En composant avec l'homomorphisme défini en 2.2., on obtient un homomorphisme $A_0(G) \to R(G)$, qui à un G-ensemble associe sa *représentation de permutation.* Les homomorphismes $A(G) \to R(G)$ et $A_0(G) \to R(G)$ font commuter les applications Res et Ind de 2.3. avec la restriction et l'induction usuelles.

2.6. Soit F un corps de caractéristique $\neq 2$; notons $W(F)$ *l'anneau de Witt-Grothendieck* de F, formé des classes d'isométrie de formes quadratiques non dégénérées sur F (on n'a pas quotienté par l'idéal des formes hyperboliques). Je vais définir un homomorphisme d'anneaux:

$$h\colon A(G_F)\to W(F)$$

de la manière suivante: un générateur de $A(G_F)$ correspond, d'après 2.2. et 2.5., à un élément de *l'ensemble de cohomologie* $H^1(G_F, O_r(\mathbf{Z}))$ (avec action triviale) pour un certain r. Le plongement de $O_r(\mathbf{Z})$ dans $O_r(F_s)$ envoie cet ensemble dans l'ensemble de cohomologie $H^1(G_F, O_r(F_s))$ qui, d'après [17], p. 162, cor. 1, classifie les formes quadratiques de rang r sur F. On peut décrire plus concrètement l'homomorphisme h de la manière suivante: à un générateur de $A(G_F)$ correspond comme en 2.2. un couple (E, E') d'algèbres étales sur F, ou encore (puisque car $F \neq 2$) un couple (E, a) où E est une F-algèbre étale et $a \in E^*/E^{*2}$. L'image de cet élément par h est alors la classe de la forme quadratique $x \mapsto Tr_{E/F}\, a x^2$.

Notons $R_{\text{déc}}(G_F)$ le sous-anneau de $A(G_F)$ engendré par les éléments (χ) de 2.4., où χ décrit $H^1(F)$. D'autre part, si $x \in A(G_F)$, notons $w(x)$ la classe totale de Stiefel-Whitney de l'image de x dans $R(G_F)$ (cf. 2.5.) et $d_x \in H^1(F)$ l'élément défini par la *signature:* $\mathfrak{S}'_r \to \mathfrak{S}_r \xrightarrow{\text{sgn}} \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Dans la proposition suivante, les propriétés i), ii) et iii) sont conséquences de la définition de h et la propriété iv) est conséquence du théorème 3.

Proposition III.2.6. i) *h prolonge l'homomorphisme naturel $R_{\text{déc}}(G_F)\to W(F)$; en particulier, il est surjectif.*

ii) *Si K est une extension de F, $h_K \circ \mathrm{Res}_{K/F} = \mathrm{Res}_{K/F} \circ h_F$.*

iii) *Si E est une extension finie, séparable de F, $h_F \circ \mathrm{Ind}_{E/F} = T_{E/F} \circ h_E$.*

iv) *Pour tout $x \in A(G_F)$, $w(h(x)) = w(x)\cdot(1+(2, d_x))$.*

2.7. *Remarque.* De même que $A(G_F)$, $W(F)$ ne dépend que de G_F et non pas du corps F en particulier cf. [5]. Par contre, j'ignore si l'homomorphisme h ci-dessus est ou non indépendant du choix de F.

2.8. *Remarque.* Ni l'homomorphisme h, ni même son composé avec l'homomorphisme $A_0(G_F)\to A(G_F)$, ne se factorisent en général à travers l'image dans $R(G_F)$ des homomorphismes de 2.5. Il suffit de donner un contre-exemple dans le deuxième cas: prenons deux éléments a et b de F^* (supposés non carrés) et notons E (resp. F_a, F_b, F_{ab}) l'extension $F(\sqrt{a}, \sqrt{b})$ (resp. $F(\sqrt{a})$, $F(\sqrt{b})$, $F(\sqrt{ab})$) de F. Soit E_1 (resp. E_2) l'algèbre étale $E \times F \times F$ (resp. $F_a \times F_b \times F_{ab}$); E_1 et E_2 ont même image dans $R(G_F)$ (la «régulière» de $\mathrm{Gal}(E/F)$ plus deux fois la représentation triviale), mais les formes quadratiques qui leur sont associées sont respectivement:

$$q_1 = x_1^2 + a x_2^2 + b x_3^2 + ab x_4^2 + x_5^2 + x_6^2;$$

$$q_2 = 2x_1^2 + 2a x_2^2 + 2x_3^2 + 2b x_4^2 + 2x_5^2 + 2ab x_6^2.$$

Si q_1 et q_2 sont équivalentes, il en est de même pour les formes $q'_1 = x_1^2 + a x_2^2 + b x_3^2 + ab x_4^2$ et $2q'_1$ (en effet, les formes $x_1^2 + x_2^2$ et $2x_1^2 + 2x_2^2$ sont équivalentes); mais ceci signifie que 2 est norme réduite de l'algèbre de quaternions $(-a, -b)$ sur F, ce qui n'est déjà pas le cas en prenant $F = \mathbf{Q}(X, Y)$, $a = X$, $b = Y$.

2.9. La propsotion II.2.6., iv) conduit à poser la

Définition. *Soit ρ un élément de $A(G_F)$. On pose $w^M(\rho)=w^M(h(\rho))\cdot(1+\{2,d_\rho\})$, où w^M est la classe totale de Stiefel-Whitney à valeurs dans $k_{**}(F)$ définie par Milnor* [13] *pour les formes quadratiques.*

La proposition II.2.6., iv) montre que l'image de $w^M(\rho)$ dans la cohomologie de F coïncide avec la classe totale de Stiefel-Whitney associée à l'image de ρ dans $R(G_F)$. Naturellement on espère que $w^M(\rho)$ *lui-même* ne dépend que de l'image de ρ dans $R(G_F)$ (on peut le vérifier sur le contre-exemple 2.8.); toutefois je ne suis pas parvenu à le démontrer en général.

2.10. Je vais maintenant définir le transfert multiplicatif en K-théorie *pour une extension quadratique.* Soit E/F une extension quadratique; notons $t(E^*)$ la réduction modulo 2 de l'algèbre tensorielle $T(E^*)$. Définissons une application $\mathcal{N}$: $\bar{t}(E^*)\to k_{**}(F)$ (ou $\bar{t}$ signifie «produit direct des facteurs homogènes») en trois étapes:

1) Si $a\in E^*/E^{*2}=t_1(E^*)$, $\mathcal{N}(a)=w_2(\operatorname{Ind}\rho_a)=\{Tr\,a,\,-dNa\}+\{2,d\}$, où d est le discriminant de l'extension et le premier terme est nul si $Tr\,a=0$; $\mathcal{N}(1)=1$ (où $1\in t_0(E^*)=\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$).

2) Si $a_1,\dots a_n\in t_1(E^*)$, $\mathcal{N}(a_1\otimes\dots\otimes a_n)=\mathcal{N}(a_1)\dots N(a_n)$.

3) Si $x=\sum_i x_i$, où les x_i sont des tenseurs simples (dont seul un nombre fini a un degré donné), $\mathcal{N}(x)=\sum_i\mathcal{N}(x_i)+\sum_{i<j}\operatorname{Cor}(\bar{x}_i\cdot\bar{x}_j)+(\operatorname{Cor}\bar{x}_i)\cdot(\operatorname{Cor}\bar{x}_j)$ où $\bar{y}$ est l'image de y dans $k_*(E)$.

Proposition III.2.10. a) *$\mathcal{N}$ induit une application, encore notée $\mathcal{N}$, de $k_{**}(E)$ dans $k_{**}(F)$. Cette application possède les propriétés suivantes:*

i) *Pour tous $x,y\in k_{**}(E)$, $\mathcal{N}(x\cdot y)=\mathcal{N}(x)\cdot\mathcal{N}(y)$.*

ii) *Pour tous $x,y\in k_{**}(E)$, $\mathcal{N}(x+y)=\mathcal{N}(x)+\mathcal{N}(y)+\operatorname{Cor}(x\cdot y)+(\operatorname{Cor}x)\cdot(\operatorname{Cor}y)$.*

iii) *Si $x\in k_{**}(E)$, $\operatorname{Res}\mathcal{N}(x)=x\cdot{}^{\sigma}x$, où σ est le générateur de $Gal(E/F)$.*

iv) *Si $x=\sum_{i\geq 0}x_i$ où $x_i\in k_i(F)$, $\mathcal{N}(\operatorname{Res}x)=\sum_{i\geq 0}\{-d\}^i\cdot x_i$.*

v) *Soit K une extension de F, linéairement disjointe de E, et soit $L=KE$. Alors, $\operatorname{Res}_{K/F}\circ\mathcal{N}_{E/F}=\mathcal{N}_{L/K}\circ\operatorname{Res}_{L/E}$.*

vi) *Le symbole galoisien commute aux transferts multiplicatifs.*

b) *Soit q une forme quadratique sur E. Alors l'analogue du théorème* 2 *est vrai pour q, E/F et $\mathcal{N}$ dans l'anneau de Milnor* (mod 2).

c) *Même énoncé pour un élément de $A'(F)$.*

Démonstration. Soit I le noyau de l'application naturelle $\bar{t}(E)\to k_{**}(E)$. Si $x\in\bar{t}(E)$ et $y\in I$, on doit montrer que $\mathcal{N}(x+y)=\mathcal{N}(x)$. Vue l'étape 3), puis l'étape 2), on est ramené à prouver:

Lemme III.2.1. *On a pour tout* $a \neq 0, 1$: $\mathcal{N}(a) \cdot \mathcal{N}(1-a) = 0$.

Vue l'égalité $\{d, -dNa\} = \operatorname{Cor}\{d, a\sqrt{d}\} = 0$, il suffit de montrer que $x = \{Tr\,a,\ Tr(1-a),\ -dNa,\ -dN(1-a)\} = 0$. Rappelons l'identité suivante ([13], lemme 1.3.): si $u+v+w=1$, *alors* $\{u, v, w\} = 0$. En utilisant cette identité et $\{d, Nu\} = 0$, on obtient successivement:

$$x = \{Tr\,a, Tr(1-a), -dNa, -(1 - Tr\,a + Na)\} \quad (\{-dNa, d\} = 0, N(1-a) = 1 - Tr\,a + Na)$$
$$= \{Tr\,a, Tr(1-a), -d, -N(1-a)\} \quad (\{Tr(1-a), Na, -(1 - Tr\,a + Na\} = 0)$$
$$= \{Tr\,a, Tr(1-a), -dN(1-a), -1\} \quad (\{d, N(1-a)\} = 0)$$
$$= 0 \quad (\{Tr\,a, Tr(1-a), -1\} = 0).$$

Pour ne pas allonger démesurément cet article, je laisse la vérification de i), ii), iii), v) et vi) au lecteur et me contente de prouver iv). Vus i) et ii), $\mathcal{N}(\operatorname{Res} x)$ est additif et multiplicatif en x; on est donc ramené à montrer iv) lorsque x est homogène de degré un, ce qui se vérifie tout de suite sur l'expression explicite de $\mathcal{N}(x)$.

Pour montrer b), on peut supposer que q est de rang un; la démonstration est alors formellement identique à celle de II.3.5. Enfin, c) se déduit aisément de b) vue la définition de $w(\rho)$ dans $k_{**}(E)$ pour un élément ρ de $R(F)$!

Corollaire. *Avec les notations précédentes, soit* $x \in k_i(F)$ *tel que* $\operatorname{Res}_{E/F} x = 0$. *Alors,* $\{-d\}^i \cdot x = 0$.

Bibliographie

1. Atiyah, M.F.: Characters and the cohomology of finite groups. Publ. Math. I.H.E.S. **9**, 23–64 (1961)
2. Bass, H., Tate, J.: The Milnor ring of a global field. Lecture Notes in Mathematics, vol. 342, 349–428. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1973
3. Bourbaki, N.: Algèbre, Ch. V. Paris: Masson 1981
4. Deligne, P.: Les constantes locales de l'équation fonctionnelle de la fonction L d'Artin d'une représentation orthogonale. Invent. Math. **35**, 299–316 (1976)
5. Delzant, A.: Définition des classes de Stiefel-Whitney d'un module quadratique sur un corps de caractéristique différente de 2. C.R. Acad. Sci. Paris **255**, 1366–1368 (1962)
6. Epstein, D.: Steenrod operations in homological algebra. Invent. Math. **1**, 152–208 (1966)
7. Evens, L.: The cohomology ring of a finite group. A.M.S. Trans. **101**, 224–239 (1961)
8. Evens, L.: A generalization of the transfer map in the cohomology of groups. A.M.S. Trans. **108**, 54–65 (1963)
9. Evens, L., Kahn, D.S.: An integral Riemann-Roch formula for induced representations of finite groups. A.M.S. Trans. **245**, 309–330 (1978)
10. Grothendieck, A.: Classes de Chern et représentations linéaires des groupes discrets. In: Dix exposés sur la cohomologie des schémas. Amsterdam: North-Holland 1967
11. Kahn, B.: Extension algébriques et formes quadratiques. Sém. Th. des Nombres, Bordeaux, 1982/83
12. Merkurjev, A.S.: On the norm residue symbol of degree 2. Soviet Math. Dokl. **24**, 546–551 (1981). (Traduit du russe)
13. Milnor, J.W.: Algebraic K-theory and quadratic forms. Invent. Math. **9**, 318–344 (1969/70)

14. Milnor, J.W., Stasheff, J.: Characteristic classes. Ann. Math. Studies **76**, Princeton, 1974
15. Nakaoka, M.: Homology of the infinite symmetric group. Ann. of Math. **73**, (2) 229–257 (1961)
16. Rosset, S., Tate, J.: A reciprocity law for K_2-traces. Comment. Math. Helv. **58**, 38–47 (1983)
17. Serre, J-P.: Corps Locaux. Paris: Hermann 1968
18. Serre, J-P.: Conducteurs d'Artin des caractères réels. Invent. Math. **14**, 173–183 (1971)
19. Serre, J-P.: L'invariant de Witt de la forme $Tr x^2$. (Comm. Math. Helv. à paraître) (1984)
20. Shapiro, J.: A Riemann-Roch-type theorem for the Witt and Milnor rings of a field. J. Pure Appl. Algebra **15**, 293–304 (1979)
21. Steenrod, N.E., Epstein, D.: Cohomology operations. Ann. Math. Studies **50**, Princeton, 1962
22. Steiner, R.: Multiplicative transfers in ordinary cohomology. Proc. Edinburgh Math. Soc. **25**, 113–131 (1982)
23. Thomas, C.B.: An integral Riemann-Roch formula for flat line bundles. Proc. London Math. Soc. **34**, 87–101 (1977)
24. Zarati, S.: Défaut de stabilité d'opérations cohomologiques. Thèse 3[e] cycle, Orsay, 1978

Oblatum V-1984