COMPOSITIO MATHEMATICA

CLAIRE VOISIN

Sur le lieu de Noether-Lefschetz en degrés 6 et 7

Compositio Mathematica, tome 75, n^o 1 (1990), p. 47-68.
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1990__75_1_47_0>

Compositio Mathematica **75**: 47–68, 1990.

Sur le lieu de Noether-Lefschetz en degrés 6 et 7

CLAIRE VOISIN

C. Voisin, Unité associée au CNRS n° 752, Université de Paris-Sud, Mathématique, bât. 425, 91405 Orsay, France

Received 19 July 1989; accepted 13 October 1989

0. On poursuit ici l'investigation commencée dans [14] et [15]. Le lieu de Noether-Lefschetz $\mathcal{S}$ en degré d est défini comme l'ensemble des surfaces lisses de degré d dans $\mathbb{P}^3$ dont le groupe de Picard n'est pas engendré par les sections hyperplanes. Comme expliqué dans [9], [6], [14] la codimension attendue des composantes $\mathcal{S}_\lambda$ de $\mathcal{S}$ est le nombre $h^{2,0} = \dim S^{d-4}$, où l'indice λ correspond à la classe (peut-être multivaluée) qui "reste de type (1, 1)" sur $\mathcal{S}_\lambda$. On appellera composantes spéciales du lieu de Noether–Lefschetz les composantes qui ne sont pas de la codimension $h^{2,0}$. Comme expliqué dans [9], si S est lisse de degré d, $C \subset S$ une courbe de classe λ non proportionnelle à $c_1(\mathcal{O}_S(1))$, on a:

S'il existe une 2-forme holomorphe sur S s'annulant le long de C, la codimension de l'espace tangent de Zariski de $\mathcal{S}_\lambda$ au point S dans $T\mathbb{P}^N_{(S)}$ (où $\mathbb{P}^N = \mathbb{P}(H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(d)))$), est strictement inférieure à $h^{2,0}$.

Maintenant, comme le degré d'une courbe contenue dans le diviseur d'une forme canonique est borné par $d(d-4)$, on voit facilement qu'il existe un nombre fini de composantes de $\mathcal{S}_\lambda$, pour lesquelles le phénomène précédent se produit. Ceci est certainement, outre le début de classification des composantes spéciales donné dans [7], [14], [15], la motivation la plus sérieuse pour la conjecture suivante due à J. Harris:

0.1. CONJECTURE. Pour chaque d, il existe un nombre fini de composantes spéciales du lieu de Noether-Lefschetz en degré d.

On peut aller plus loin et poser la question suivante:

0.2. QUESTION (M. Green). Est-il vrai que les composantes spéciales de $\mathcal{S}$ sont obtenues suivant le procédé décrit plus haut, i.e. si $\mathcal{S}_\lambda$ est spéciale, il existe pour F générique dans $\mathcal{S}_\lambda$ une forme canonique ω sur S dont le diviseur supporte la classe λ? (on entend par là que la classe λ est une combinaison rationnelle des classes des composantes de $V(\omega)$).

Finalement, rappelons, cf. [9], que l'espace conormal de $\mathcal{S}_\lambda \subset \mathbb{P}^N$ au point F est le quotient de $H^0(K_S)$ par le sous-espace $H^{2,0}(-\lambda)$ défini par:

$H^{2,0}(-\lambda)_F = \{\omega \in H^0(K_S)/\forall u \in H^1(T_S), \omega.u$ est orthogonal à $\lambda\}$, où $\omega.u \in H^1(\Omega_S)$ et λ est vu comme un élément de $H^1(\Omega_S) \simeq H^1(\Omega_S)^*$.

Avec cette notation, le résultat établi ici est le suivant:

0.3. THEOREME. *Soit $d \leqslant 7$, et soit $\mathscr{S}_\lambda$ une composante réduite de $\mathscr{S}$. Alors pour F générique dans $\mathscr{S}_\lambda$, et pour tout $\omega \in H^{2,0}(-\lambda)_F$, la classe λ est supportée sur le diviseur $V(\omega)$ de S.*

REMARQUES. (a) Cet énoncé ne répond pas strictement à la Question 0.2, puisque l'on ne considère que des composantes réduites. Par ailleurs la réponse est plus précise puisqu'elle décrit les formes canoniques dont le diviseur supporte la classe λ.

(b) On peut se demander quelle est la généralisation du Théorème 0.3 en degré $\geqslant 8$. Il est tentant de hasarder la question suivante: est-il vrai que si $\mathscr{S}_\lambda$ est une composante spéciale réduite, telle que pour F générique dans $\mathscr{S}_\lambda$ le rang de Pic(S) soit égal à deux, l'espace $H^{2,0}(-\lambda)_F$ est de la forme: $H^0(\mathcal{O}_S(C)).H^0(K_S(-C)) \subset H^0(K_S)$, où C est un diviseur sur S de classe proportionnelle à λ, modulo $c_1(\mathcal{O}_S(1))$?

Pour clore cette introduction, on montre dans les lemmes suivants ce qui conduit à distinguer le cas $d < 8$.

0.4. LEMME. *Soit S une surface lisse de degré $d \leqslant 7$, et soit Q une surface lisse de degré $d-4$, telle que l'intersection $Q \cap S$ soit une courbe réductible $C_1 \cup C_2$; il est évident que le classe λ de C_1 n'est pas proportionnelle à $c_1(\mathcal{O}_S(1))$, et l'on a: l'espace $H^{2,0}(-\lambda)$ est constitué des polynômes de degré $d-4$ s'annulant sur l'une des courbes C_i.*

0.5. LEMME. *Soit S une surface de degré* 6 *ou* 7, *et soit D un diviseur irréductible effectif sur S. Alors l'espace $H^0(D).H^0(K_S - D) \subset H^0(K_S)$ est constitué de formes s'annulant sur une courbe $D_1 \subset S$, de classe proportionnelle à celle de D, modulo $c_1(\mathcal{O}_S(1))$.*

0.6. LEMME. *Les Lemmes* 0.4 *et* 0.5 *sont faux dès que $d \geqslant 8$.*

0.7. *Preuve du Lemme* 0.4. Comme Q est lisse, l'intersection $Q \cap S$ est réduite. Considérons les suites exactes, pour $i = 1, 2$:

$$0 \to N_{C_i}S \to N_{C_i}\mathbb{P}^3 \to \mathcal{O}_{C_i}(d) \to 0$$

$$0 \to \mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_S(C_i) \to N_{C_i}S \to 0$$

$$0 \to \mathcal{O}_S(-C_i)(d) \to \mathcal{O}_S(d) \to \mathcal{O}_{C_i}(d) \to 0.$$

Elles induisent le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
H^0(\mathcal{O}_{C_i}(d)) \arrow[r, "\beta"] & H^1(N_{C_i}S) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & H^1(N_{C_i}\mathbb{P}^3) \\
H^0(\mathcal{O}_S(d)) \arrow[u, "\alpha"] & H^2(\mathcal{O}_S) \arrow[d] & \\
& H^2(\mathcal{O}_S(C_i)) \arrow[d] & \\
& 0. &
\end{tikzcd}$$

Par [9], p. 237, l'espace $H^{2,0}(-\lambda)$ est l'orthogonal de l'image de $\gamma \circ \beta \circ \alpha$; il suffit donc de montrer: pour l'un des entiers i, on a: $H^1(N_{C_i}\mathbb{P}^3) = 0$ et l'application α est surjective; en effet cela donne alors: $H^{2,0}(-\lambda) = (\operatorname{Im} \gamma \circ \beta \circ \alpha)^\perp = (\operatorname{Im} \gamma)^\perp = H^0(K_S(-C_i)) \hookrightarrow H^0(K_S)$.

Considérons la suite exacte: $0 \to N_{C_i}Q \to N_{C_i}\mathbb{P}^3 \to \mathcal{O}_{C_i}(d-4) \to 0$; on a $d^0Q = d - 4 \leqslant 3$, et donc $K_Q < 0$. Il vient donc $H^1(N_{C_i}Q) = H^0(K_{Q|C_i})^* = 0$, car C_i est réduite. On a donc $H^1(N_{C_i}\mathbb{P}^3) \simeq H^1(\mathcal{O}_{C_i}(d-4))$.

D'autre part, $H^1(\mathcal{O}_{C_i}(d-4)) \simeq H^2(\mathcal{O}_Q(d-4)(-C_i))$ est encore le dual de $H^0(K_Q(C_i)(4-d)) = H^0(\mathcal{O}_Q(C_i)(-4))$; or ce dernier espace ne peut pas être non nul pour $i = 1$ et 2, puisque $C_1 + C_2 \in |\mathcal{O}_Q(d)|$. On peut donc supposer $H^1(N_{C_1}\mathbb{P}^3) = 0$. Pour montrer la surjectivité de la restriction $\alpha\colon H^0(\mathcal{O}_S(d)) \to H^0(\mathcal{O}_{C_1}(d))$, il suffit de montrer celle de la restriction α': $H^0(\mathcal{O}_Q(d)) - H^0(\mathcal{O}_{C_1}(d))$, ou encore la nullité de $H^1(\mathcal{O}_Q(-C_1)(d)) = H^1(\mathcal{O}_Q(C_2))$; mais elle résulte du fait que C_2 est réduite, et donc $H^1(N_{C_2}Q) = 0$, et de $H^1(\mathcal{O}_Q) = 0$.

0.8. *Preuve du Lemme* 0.5. Le lemme est évident si $h^0(D) = 1$, ou $h^0(K_S - D) = 1$, et l'on peut donc supposer $h^0(D) \geqslant 2$, $h^0(K_S - D) \geqslant 2$. Identifions $H^0(K_S - D) \subset H^0(K_S)$ à un sous-espace de $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(d-4))$ et supposons d'abord que, comme tel, il ne s'annule pas sur une surface de $\mathbb{P}^3$; on peut alors trouver deux surfaces Q_1, Q_2 de degré $d - 4$, sans composante commune, telles que $D \subset Q_1 \cap Q_2$; il en résulte que $d^0(K_D) \leqslant d^0(\mathcal{O}_D(2d-12))$ (traiter séparément le cas où D est une composante réduite de l'intersection $Q_1 \cap Q_2$, et le cas contraire); or, comme D est irréductible et $h^0(D) \geqslant 2$, on a $D^2 \geqslant 0$; il vient donc par adjonction sur S: $d^0(K_D) \geqslant K_S.D = d^0(\mathcal{O}_D(d-4))$; cela mène à une contradiction si $2d - 12 < d - 4$, ou encore $d < 8$.

Enfin, supposons que $H^0(K_S - D) \subset H^0(K_S) \simeq H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(d-4))$ s'annule sur une surface de degré $k \leqslant d - 4$, d'équation T; alors T s'annule sur D, car D est irréductible, et l'on a: $H^0(K_S - D) \subset T.H^0(\mathcal{O}_S(d-4-k))$; donc T engendre $H^0(\mathcal{O}_S(-D)(k))$, qui est donc de dimension un. Posant $D_1 =$ l'unique élément du système $|\mathcal{O}_S(-D)(k)|$, on a bien le résultat annoncé.

0.9. *Preuve de Lemme* 0.6. Prenons une surface S d'équation $F = P_1Q_1 + P_2Q_2$, avec $d^0P_1 = d_1, d^0Q_1 = d - d_1, d^0P_2 = d_2, d^0Q_2 = d - d_2$. Puisque $d \geqslant 8$, on peut choisir d_i tels que $d_i \leqslant d - 4$, et $d - d_i \leqslant d - 4$, pour $i = 1, 2$. Si P_i, Q_i sont génériques sans zéro commun, la surface S est lisse; considérons la courbe C d'équations $P_1 = P_2 = 0$, contenue dans S; la classe de C n'est pas proportionnelle à $c_1(\mathcal{O}_S(1))$ et l'on montre facilement que $H^{2,0}(-\lambda) \subset H^0(K_S)$ est la composante de degré $d - 4$ de l'idéal engendré par P_1, P_2, Q_1, Q_2. Comme on a $d_i \leqslant d - 4$ et $d - d_i \leqslant d - 4$, et que P_i, Q_i n'ont pas de zéro commun, $H^{2,0}(-\lambda) \subset H^0K_S)$ est sans point base, ce qui donne un contre-exemple au Lemme 0.4.

Supposons maintenant que l'on a $d^0P_1 \geqslant d^0Q_2$, et soit $k = d^0P_1 - d^0Q_2$; alors pour tout $T \in H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(k)), F$ peut encore s'écrire: $F = (P_1 - TQ_2)Q_1 + (P_2 + TQ_1)Q_2$; la courbe C_T d'équations $P_1 - TQ_2 = P_2 + TQ_1 = 0$ est contenue dans S et linéairement équivalente à C: il est facile de voir que les courbes C_T décrivent en fait tout le système linéaire $|C|$, et d'en déduire que l'espace $H^0(\mathcal{O}_S(C)).H^0(K_S - C) \subset H^0(K_S)$ est encore la composante de degré $d - 4$ de l'idéal engendré par P_1, P_2, Q_1, Q_2. Comme ce système linéaire est sans point base, cela donne un contre-exemple au lemme 0.5.

Rappels et notations: cf. [15]

0.10. On note $S^k := H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(k))$.

0.11. $S_0^d \subset S^d$ est l'ouvert constitué des polynômes F paramétrant une surface lisse S. Contrairement à ce que l'on a fait en introduction, on se placera désormais sur S_0^d (au lieu de l'espace projectif associé); le lieu de Noether-Lefschetz $\mathcal{S}$ est donc un sous-ensemble de S_0^d.

0.12. Pour $F \in S_0^d$, on note $J^k(F)$ (parfois J^k) la composante de degré k de l'idéal jacobien de F, engendré par les dérivées partielles $\partial F/\partial X_i$; on note $R^k(F)$ (parfois R^k) le quotient $S^k/J^k(F)$; $R = \oplus_k R^k$ est l'anneau jacobien de F.

0.13. On a des isomorphismes naturels:

$$H^0(K_S) \simeq S^{d-4} \simeq R^{d-4}(F), \quad H^1(\Omega_S)^{\text{prim}} \simeq R^{2d-4}(F), \quad H^1(T_S) \simeq R^d,$$

(le dernier isomorphisme n'est valable que si $d > 4$), et $H^2(\mathcal{O}_S) \simeq R^{3d-4}$. On a aussi un isomorphisme canonique: $R^{4d-8}(F) \simeq \mathbb{C}$, qui, par le produit dans l'anneau R, fournit une dualité parfaite entre $R^k(F)$ et $R^{4d-8-k}(F)$. Les isomorphismes ci-dessus font correspondre cette dualité à la dualité de Serre.

0.14. Si λ est une classe entière primitive de type $(1, 1)$ sur S, la classe $\lambda \in$

$H^1(\Omega_S)^{\text{prim}}$ correspond par l'isomorphisme de 0.13 à un élément P de $R^{2d-4}(F)$.

Le diagramme suivant est alors commutatif:

$$\begin{array}{ccc} H^1(T_S) & \xrightarrow{[\lambda]} & H^2(\mathcal{O}_S), \\ \wr\| & & \wr\| \\ R^d & \xrightarrow[m_P]{} & R^{3d-4} \end{array}$$

où $[\lambda]$ est le cup-produit par $\lambda \in H^1(\Omega_S)$, et m_P est la multiplication par P dans l'anneau R.

0.15. Pour un sous-espace $W \subset R^k$, on note $\tilde{W} \subset S^k$ l'image réciproque de W par la projection naturelle $S^k \to R^k$; de la commutativité du diagramme 0.14, on déduit facilement: $T\mathcal{S}_{\lambda(F)} = \tilde{W}_d$, où $W_d \subset R^d(F)$ est le noyau de m_P et P, λ, F sont comme en 0.14.

0.16. De $H^{2,0}(-\lambda) = (\operatorname{Im}[\lambda])^\perp \subset H^0(K_S)$ (cf. [9]), on tire:

$H^{2,0}(-\lambda) = (\operatorname{Im} m_P)^\perp \subset R^{d-4}$, en utilisant la dualité $R^{3d-4} \simeq (R^{d-4})^*$ de 0.13. Comme la multiplication par P est self-duale, on a encore: $H^{2,0}(-\lambda) = \tilde{W}_{d-4} = W_{d-4}$, où $W_{d-4} = \operatorname{Ker} m_P \colon R^{d-4} \to R^{3d-8}$.

De ce qui précède, on tire: la codimension de $T\mathcal{S}_{\lambda(F)} \subset S^d$ est égale à $h^{2,0} - k$, où $k = \dim H^{2,0}(-\lambda)$. Si $\mathcal{S}_\lambda$ est réduite et spéciale, on a en un point générique F de $\mathcal{S}_\lambda$, $k = h^{2,0} - \operatorname{codim} \mathcal{S}_\lambda > 0$.

Section 1

1.1. Soit $\mathcal{S}_\lambda \subset S_0^d$ une composante réduite spéciale du lieu de Noether-Lefschetz en degré d. En chaque point lisse F de $\mathcal{S}_\lambda$, on a déterminé en Section 0 un sous-espace $H^{2,0}(-\lambda)_F \subset H^0(K_S) \simeq S^{d-4}$, de dimension $k = h^{2,0} - \operatorname{codim} \mathcal{S}_\lambda$. Cet espace varie holomorphiquement avec $F \in \mathcal{S}_\lambda$, et fournit donc une application holomorphe $\chi \colon \mathcal{S}_\lambda \to \operatorname{Grass}(k, S^{d-4})$. On se propose dans cette section d'étudier la différentielle de χ. Le point intéressant concernant l'inclusion $H^{2,0}(-\lambda) \subset S^{d-4}$ est que l'on a, par 0.15, 0.16: $W_F := S^4 . H^{2,0}(-\lambda) \subset T\mathcal{S}_{\lambda,F} \subset S^d$. Au point générique F de $\mathcal{S}_\lambda$, la dimension de W_F est localement constante, et l'on a ainsi une distribution holomorphe: $W_F \subset T\mathcal{S}_{\lambda(F)}$ sur la variété $\mathcal{S}_\lambda$.

Les résultats établis dans cette section sont les suivants:

1.2. PROPOSITION. *Si $d \leqslant 7$, la différentielle $\chi_{*,F}$ de χ au point F est nulle sur le sous-espace $W_F \subset T\mathcal{S}_{\lambda(F)}$.*

1.3. COROLLAIRE. *Si $d \leqslant 7$, la distribution W_F est intégrable.*

1.4. COROLLAIRE. *Sur les variétés intégrales de la distribution W_F, l'application χ est constante.*

1.5. COROLLAIRE. *Les variétés intégrales de la distribution W_F sont exactement les systèmes linéaires $F + S^4.H^{2,0}(-\lambda)_F$ (ou plus précisément leur intersection avec S^d_0), qui sont donc contenus dans $\mathscr{S}_\lambda$. Le long de ces espaces, le sous-espace $H^{2,0}(-\lambda) \subset S^{d-4}$ est constant.*

1.6. REMARQUE. Il est clair que l'on doit s'attendre à ces énoncés, si le Théorème 0.3 est vrai, et si comme le suggère le Lemme 0.4, en degré $d \leqslant 7$, l'espace $H^{2,0}(-\lambda)$ est constitué de polynômes s'annulant sur une courbe de S, de classe proportionnelle à λ, modulo $c_1(\mathcal{O}_S(1))$; en effet, cette courbe est alors contenue dans tout élément du système linéaire $F + S^4.H^{2,0}(-\lambda)_F$, et y détermine un diviseur de classe non proportionnelle à une section plane.

1.7. REMARQUE. Les trois corollaires sont faux dès que $d \geqslant 8$, comme le montre l'exemple donné dans la preuve du Lemme 0.6.

1.8. Soit $F \in \mathscr{S}_\lambda \subset S^d_0$ un point lisse de $\mathscr{S}_\lambda$, paramétrant la surface S; soit $F^1H^2(S, \mathbb{C})^{\text{prim}} := H^{2,0}(S) \oplus H^{1,1}(S)^{\text{prim}} \subset H^2(S, \mathbb{C})^{\text{prim}}$. Rappelons, [2] [8], que le résidu fournit une application surjective $\text{res}_F\colon S^{2d-4} \to F^1H^2(S, \mathbb{C})^{\text{prim}}$ donnée par $\text{res}_F(P) = (P/F^2).\Omega \in H^3(\mathbb{P}^3\backslash S, \mathbb{C}) \simeq H^2(S, \mathbb{C})^{\text{prim}}$, où $\Omega := \Sigma_i(-1)^i X_i dX_0 \wedge \ldots d\hat{X}_i \ldots \wedge dX_3$.

Via les projections: $S^{2d-4} \to R^{2d-4}(F)$, et $F^1H^2(S, \mathbb{C})^{\text{prim}} \to H^{1,1}(S)^{\text{prim}}$, res_F induit l'isomorphisme $R^{2d-4} \simeq H^1(\Omega_S)^{\text{prim}}$ de 0.13.

1.9. Soit $\lambda \neq 0 \in H^2(S, \mathbb{Z})^{\text{prim}} \cap H^{1,1}(S)$; alors $\lambda \in F^1H^2(S, \mathbb{C})^{\text{prim}}$, et il existe donc $P \in S^{2d-4}$, tel que $\lambda = \text{res}_F(P)$.

Notant $\bar{P}$ l'image de P dans R^{2d-4}, on a, par 0.15: $T\mathscr{S}_{\lambda(F)} = \tilde{W}_d$, et par 0.16 $H^{2,0}(-\lambda) = \tilde{W}_{d-4}$.

1.10. Pour tout entier $k \geqslant 0$, introduisons les applications $D^k_F\colon J^k(F) \to R^{k-d}(F)$, $\bar{D}^k_F\colon J^k(F) \to \text{Hom}(S^d, R^k(F))$, définies par:

$$D^k_F\left(\sum_i P_i \partial F/\partial X_i\right) = \sum_i \partial P_i/\partial X_i \quad (\text{mod}\, J^{k-d}(F))$$

et,

$$\bar{D}^k_F\left(\sum_i P_i \partial F/\partial X_i\right)(R) = \sum_i P_i \partial R/\partial X_i;$$

il est facile de voir que ces applications sont bien définies (i.e. ces expressions ne dépendent que de $\Sigma_i P_i \partial F/\partial X_i \in J^k(F)$ et non pas des P_i). Le lemme suivant donne la signification de $\bar{D}^k_F$:

1.11. LEMME. *Soit $t \mapsto F_t$ une application holomorphe du disque dans S^d, avec*

$F_0 = F$ *soit* $R = (\mathrm{d}F_t/\mathrm{d}t)_{t=0} \in S^d$; *soit* $(\varphi_t)_{t\in\Delta}$ *une section holomorphe du fibré* $t \to J^k(F_t) \subset S^k$: *alors*: $(\mathrm{d}\varphi_t/\mathrm{d}t)_{t=0} = \bar{D}^k_F(\varphi_0)(R)$, *modulo* $J^k(F)$.

Démonstration. On peut trouver des sections holomorphes $P_i(t) \in S^{k-d+1}$ telles que: $\varphi_t = \Sigma_i P_i(t)\partial F_t/\partial X_i$. Différenciant par rapport à t, on obtient:

$$(\mathrm{d}\varphi_t/\mathrm{d}t)_{t=0} = \sum_i (\mathrm{d}P_i/\mathrm{d}t)_{t=0}\partial F/\partial X_i + \sum_i P_i(0)\partial R/\partial X_i,$$

ce qui est égal, modulo J^k, à

$$\sum_i P_i(0)\partial R/\partial X_i = \bar{D}^k_F(\varphi_0)(R).$$

Le lemme suivant établit la relation entre D^k_F et la connexion de Gauss-Manin sur $(H^2(S, \mathbb{C}))_{F\in S^d_0}$.

1.12. LEMME. *Soit* $t \mapsto F_t$ *une application holomorphe du disque dans* $\mathscr{S}_\lambda$, *avec* $F_0 = F$. *Soit* $\mathrm{P}_t \in S^{2d-4}$ *une section holomorphe, telle que* $\mathrm{res}_{F_t}(P_t) = \lambda_t \in F^1H^2(S_t, \mathbb{C})$. *Soit* $R = (\mathrm{d}F_t/\mathrm{d}t)_{t=0}$, *on a*: $(\mathrm{d}P_t/\mathrm{d}t)_{t=0} = D^{3d-4}_F(RP_0)$, *modulo* $J^{2d-4}(F)$.

Démonstration. Notons d'abord que le terme de droite a un sens, puisque $F_t \in \mathscr{S}_\lambda \Rightarrow R \in T\mathscr{S}_{\lambda(F)} \Rightarrow RP_0 \in J^{3d-4}(F)$, par 0.15. Pour vérifier l'assertion, on utilise bien sûr le fait que la section $(\lambda_t)_{t\in\Delta}$ est plate. Ecrivons $\lambda_t = \mathrm{Res}_{S_t}(P_t/F_t^2).\Omega$; d'après [2], la différentiation de Gauss-Manin appliquée au terme de droite s'obtient simplement en différenciant par rapport à t la forme méromorphe $(P_t/F_t^2).\Omega$, ce qui donne:

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_{\partial/\partial t}(\lambda_t)_{t=0} = \mathrm{Res}_S(\mathrm{d}/\mathrm{d}t(P_t/F_t^2)_{t=0}.\Omega \\ &= \mathrm{Res}_S((\mathrm{d}P_t/\mathrm{d}t)_{t=0})/F^2.\Omega) - 2\,\mathrm{Res}_S(RP_0/F^3).\Omega = 0. \end{aligned} \qquad (*)$$

Par hypothèse, $RP_0 \in J^{3d-4}(F)$, et il existe donc par [8], un polynôme $Q \in S^{2d-4}$, tel que $(Q/F^2).\Omega = (RP_0/F^3).\Omega + d\Phi\,(**)$, où Φ est une forme de degré deux sur $\mathbb{P}^3$, ayant un pôle d'ordre deux le long de S. De plus, par 0.13 et 1.8, la réduction de Q modulo J^{2d-4} est uniquement déterminée par RP_0, et l'on doit donc avoir par $(*)$: $2Q = (\mathrm{d}P_t/\mathrm{d}t)_{t=0}$, modulo J^{2d-4}. Il n'y a donc plus qu'à déterminer Q, modulo J^{2d-4}: $\Lambda^2\Omega_{\mathbb{P}^3}(3)$ est engendré par les formes

$$\Omega_l := X_i dX_j \wedge dX_k - X_j dX_i \wedge dX_k + X_k dX_i \wedge dX_j, \quad \text{avec } \{i, j, k\} = \{0, \dots, 3\}\backslash\{l\},$$

et $i < j < k$. Une forme $\Phi \in H^0(\Lambda^2\Omega_{\mathbb{P}^3}(2S))$ peut s'écrire sous la forme:

$\Phi = \Sigma_l \Phi_l / F^2 . \Omega_l$; il est facile de calculer qu'on a alors:

$$d\Phi = (2/F^3)\left(\sum_l \Phi_l \partial F/\partial X_l\right).\Omega - (1/F^2)\left(\sum_l \partial\Phi_l/\partial X_l\right).$$

Ecrivant $RP_0 = \Sigma_i T_i \partial F/\partial X_i$, avec $T_i \in S^{2d-3}$, l'identité (**) devient:

$$Q/F^2 = (RP_0/F^3) + (2/F^3)\left(\sum_l \Phi_l \partial F/\partial X_l\right) - (1/F^2)\left(\sum_l \partial\Phi_l/\partial X_l\right), \qquad (***)$$

puis:

$$FQ = F\left(-\sum_l \partial\Phi_l/\partial X_l\right) + \sum_i (T_i + 2\Phi_i)\partial F/\partial X_i. \qquad (****)$$

On obtient donc la solution évidente: $T_i = -2\Phi_i, Q = -\Sigma_l \partial\Phi_l/\partial X_l)$. Comme Q est uniquement déterminée modulo J^{2d-4} par la condition (**), on a donc: $Q = (1/2)(\Sigma_i \partial T_i/\partial X_i)$ (modulo J^{2d-4}) et $(\mathrm{d}P_t/\mathrm{d}t)_{t=0} = D_F^{3d-4}(RP_0)$ dans R^{2d-4}.

Avant de calculer la différentielle χ_*, notons la relation évidente entre $\bar{D}_F^k$ et D_F^k:

1.13. LEMME. *Pour $\varphi \in J^k(F), R \in S^d$, on a: $\bar{D}_F^k(\varphi)(R) = D_F^{k+d}(\varphi R) - R D_F^k(\varphi)$.*

Démonstration. Cela résulte immédiatement des définitions et de la règle de Leibnitz.

1.14. Finalement, on utilisera encore la notation $\bar{D}_F^k$ pour l'application de J^k dans $\mathrm{Hom}(S^{d+a}, R^{k+a})$, définie par $\bar{D}_F^k(\varphi)(R) = D_F^{k+d+a}(\varphi R) - R D_F^k(\varphi)$, où $R \in S^{d+a}$ et $\varphi \in J^k(F), a \in \mathbb{Z}$.

Rappelons maintenant que χ est une application définie sur $\mathscr{S}_\lambda$, à valeurs dans la Grassmannienne $\mathrm{Grass}(k, S^{d-4})$, et qu'on a: $\chi(F) = H^{2,0}(-\lambda)_F \subset S^{d-4} = \mathrm{Ker}\, \bar{m}_{P_0}: S^{d-4} \to R^{3d-8}(F)$. La différentielle $\chi_{*,F}$ au point F est donc une application linéaire

$$\chi_{*,F}: T\mathscr{S}_{\lambda(F)} \to \mathrm{Hom}(H^{2,0}(-\lambda), S^{d-4}/H^{2,0}(-\lambda)),$$

et le composé

$$\bar{m}_{P_0} \circ \chi_{*,F}: T\mathscr{S}_{\lambda(F)} \to \mathrm{Hom}(H^{2,0}(-\lambda), R^{3d-8})$$

est bien défini. On a alors:

1.15. LEMME. *Pour $R \in T\mathscr{S}_{\lambda(F)}, Q \in H^{2,0}(-\lambda)_F$, on a:*

$$\bar{m}_{P_0} \circ \chi_{*,F}(R)(Q) = -Q D_F^{3d-4}(P_0 R) + \bar{D}_F^{3d-8}(QP_0)(R). \qquad \text{(E)}$$

Démonstration. $\mathscr{S}_\lambda$ est par hypothèse lisse au point F, et l'espace $H^{2,0}(-\lambda) \subset S^{d-4}$ est de dimension localement constante au voisinage de F. Soit $t \to F_t$ une application holomorphe du disque dans $\mathscr{S}_\lambda$, avec $F_0 = F$, et $(\mathrm{d}F_t/\mathrm{d}t)_{t=0} = R$. Soit une section holomorphe $(P_t)_{t\in\Delta}$ de S^{2d-4}, telle que $\lambda_t = \mathrm{res}_{F_t} P_t \in F^1H^2(S_t, \mathbb{C})$ et soit $(Q_t)_{t\in\Delta}$ une section holomorphe de la famille $(H^{2,0}(-\lambda)_{F_t})_{t\in\Delta}$, telle que $Q_0 = Q$; il est bien connu que $\chi_{*,F}(R)(Q) = (\mathrm{d}Q_t/\mathrm{d}t)_{t=0}$, modulo $H^{2,0}(-\lambda)_F$. Comme par 0.16,

$$H^{2,0}(-\lambda)_{F_t} = \mathrm{Ker}\, m_{\bar{P}_t}: S^{d-4} \to R^{3d-8}(F_t),$$

on a: $P_tQ_t \in J^{3d-8}(F_t)$. D'après le Lemme 1.11, on obtient donc: $(\mathrm{d}(P_tQ_t)/\mathrm{d}t)_{t=0} = \bar{D}_F^{3d-8}(P_0Q_0)(R)$, modulo $J^{3d-8}(F)$. Développant le premier terme, on obtient:

$$P_0(\mathrm{d}Q_t/\mathrm{d}t)_{t=0} + Q_0(\mathrm{d}P_t/\mathrm{d}t)_{t=0} = \bar{D}_F^{3d-8}(P_0Q_0)(R), \text{ dans } R^{3d-8}(F).$$

D'après le Lemme 1.12, on a enfin: $(\mathrm{d}P_t/\mathrm{d}t)_{t=0} = D_F^{3d-4}(P_0R)$ dans $R^{2d-4}(F)$, ce qui donne bien l'égalité (E).

Appliquant enfin le Lemme 1.13, on peut réécrire (E) sous la forme:

$$P_0\cdot\chi_{*,F}(R)(Q) = -RD_F^{3d-8}(P_0Q) + \bar{D}_F^{3d-4}(RP_0)(Q), \tag{E'}$$

où le dernier terme est défini en 1.14.

On déduit aisément de (E′) le résultat suivant:

1.16. LEMME. *Soit* $Q' \in H^{2,0}(-\lambda)_F$, *soit* $T \in S^4$; *on a* $TQ' \in T\mathscr{S}_{\lambda(F)}$ *et l'égalité*:

$$\bar{P}_0\cdot\chi_{*,F}(TQ')(Q) = T(-Q'D_F^{3d-8}(P_0Q) + \bar{D}_F^{3d-8}(Q'P_0)(Q)), \quad \textit{dans } R^{3d-8}(F). \tag{E''}$$

(cela résulte en effet de la propriété évidente: pour $\varphi \in J^k(F)$, $S \in S^n$, $T \in S^m$, $\bar{D}_F^{k+m}(T\varphi)(S) = T\bar{D}_F^k(\varphi)(S)$, dans $R^{k+m-d+n}(F)$).

1.17. COROLLAIRE. *Posons, pour* $Q, Q' \in H^{2,0}(-\lambda)_F$, $\varphi(Q, Q') = -Q'D_F^{3d-8}(P_0Q) + \bar{D}_F^{3d-8}(Q'P_0)(Q)$. *On a*: $\varphi(Q, Q') \in R^{3d-12}$, *et* $\varphi(Q, Q').S^4 \subset \bar{P}_0.S^{d-4} \subset R^{3d-8}$.

La condition $d \leqslant 7$ apparaît donc naturellement à ce stade; en effet, il est clair que l'inclusion ci-dessus est très contraignante lorsque $d - 4 < 4$. En fait on montrera en Section 3 la proposition suivante:

1.18. PROPOSITION. *Si* $d \leqslant 7$, *tout* $\varphi \in R^{3d-12}(F)$, *satisfaisant la conclusion du corollaire* 1.17 *est nul.*

Il est facile d'en déduire les résultats annoncés au début de cette section:

1.19. *Preuve de la Proposition* 1.2. D'après (E″), on a, pour $Q, Q' \in H^{2,0}(-\lambda)_F$, $T \in S^4$, $\bar{P}_0 . \chi_{*,F}(TQ')(Q) = T\varphi(Q, Q') = 0$, par la Proposition 1.18. On en déduit immédiatement que $\chi_{*,F}(TQ')(Q) = 0$, puisque la multiplication par $\bar{P}_0$ induit une injection: $S^{d-4}/H^{2,0}(-\lambda)_F \hookrightarrow R^{3d-8}(F)$. On en déduit immédiatement par linéarité que $\chi_{*,F|W_F} = 0$, puisque par définition $W_F = S^4 . H^{2,0}(-\lambda)_F \subset T\mathscr{S}_{\lambda(F)}$.

1.20. Preuve des corollaires. On suppose bien sûr F générique, de sorte que la dimension de W_{F_t} est localement constante au voisinage de F. Considérons l'inclusion $W_F \subset S^d$, variant holomorphiquement avec $F \in \mathscr{S}_\lambda$; elle fournit donc une application $\chi' : \mathscr{S}_\lambda \to \mathrm{Grass}(k', S^d)$; de $W_F = S^4 . H^{2,0}(-\lambda)_F$, et du fait que $\chi_{*,F|W_F} = 0$, on tire immédiatement: $\chi'_{*,F|W_F} = 0$; or cela entraîne de toute évidence la condition d'intégrabilité.

D'autre part, cela entraîne en fait: soit X une variété intégrale (locale) de la distribution W, alors X est un ouvert dans l'espace affine $F + S^4 . H^{2,0}(-\lambda)_F$. En effet, par définition des variétés intégrales, l'application $\chi'|_X$ peut s'interpréter comme l'application de Gauss de $X \subset S_0^d$. Comme sa différentielle est nulle sur X, le résultat découle de [10], p. 367.

Enfin, comme par la Proposition 1.2, la différentielle de χ est nulle sur X, l'espace $H^{2,0}(-\lambda)$ est constant le long de X; notant finalement que $\mathscr{S}_\lambda$ étant un ensemble algébrique, si $\mathscr{S}_\lambda$ contient un ouvert usuel de l'espace affine

$F + S^4 . H^{2,0}(-\lambda)_F$, $\mathscr{S}_\lambda$ contient en fait $(F + S^4 . H^{2,0}(-\lambda)_F)_0 :=$
$(F + S^4 . H^{2,0}(-\lambda)) \cap S_0^d$, les corollaires 1.3, 1.4, 1.5 sont démontrés.

Section 2

2.1. On se propose dans cette section de montrer que les composantes réduites spéciales du lieu de Noether-Lefschetz en degré $\leqslant 7$ satisfont la conclusion 0.3. D'après les résultats établis en Section 1 (moyennant la preuve de la Proposition 1.18), on a: soit $d \leqslant 7$; soit $\mathscr{S}_\lambda \subset S_0^d$ une composante spéciale réduite de $\mathscr{S}$; soit F un point générique de $\mathscr{S}_\lambda$, et soit $Q \in H^{2,0}(-\lambda)_F \subset S^{d-4}$; alors $(F + Q . S^4)_0 \subset \mathscr{S}_\lambda$, et pour G générique dans $(F + Q . S^4)_0$, on a $H^{2,0}(-\lambda)_G = H^{2,0}(-\lambda)_F$. Nous allons en déduire:

THEOREME 0.3. *Pour F générique dans $\mathscr{S}_\lambda$, et $Q \in H^{2,0}(-\lambda)_F$, le diviseur $V(Q|_S)$ (où S est la surface définie par F) supporte la classe λ, i.e. λ est une combinaison rationnelle des classes des composantes de $V(Q|_S)$.*

2.2. Évidemment, on désire appliquer comme dans [15] la méthode de Griffiths et Harris [16], à un pinceau générique du type $tF + QT$, où $T \in S^4$. Malheureusement Q peut être très singulière, (éventuellement non réduite), de sorte qu'il est difficile d'expliciter un modèle lisse pour l'éclatement de $\mathbb{P}^3$ le long du base locus $F = QT = 0$, et a fortiori après un éventuel changement de base $t = s^k$. La proposition suivante et ses corollaires permettent de contourner cette difficulté.

2.3. Soit T un polynôme de degré 4, tel que la courbe C d'équations $T = F = 0$ soit lisse. Soit $Q \in S^{d-4}$ fixé, et supposons que le pinceau $F_t = F + tQT$, $t \in \mathbb{P}^1$, soit contenu dans $\mathscr{S}_\lambda$; la classe $\lambda_t \in H^2(S_t, \mathbb{Z}) \cap H^{1,1}(S_t)$ est bien définie dans un voisinage simplement connexe U de 0; soit $\mathscr{L}_t \in \operatorname{Pic} S_t$ le faisceau inversible de classe λ_t; on définit une application $\alpha\colon U \to \operatorname{Pic} C$ par $\alpha(t) = \mathscr{L}_t|_C$ (ce qui a un sens car $C \subset S_t$ pour tout t). On a la proposition suivante:

2.4. PROPOSITION. *Si $Q \in H^{2,0}(-\lambda)_F$, la différentielle de α est nulle en $t = 0$.*

Démonstration. La classe $\lambda_0 \in H^2(F, \mathbb{Z})$ est de type (1, 1), et donc $\lambda_0 \in H^1(\Omega_S)$. Le cup-produit avec λ_0 donne des applications $[\lambda_0]\colon H^1(T_S) \to H^2(\mathscr{O}_S)$ et $[\lambda_0]\colon H^1(T_S(-C)) \to H^2(\mathscr{O}_S(-C))$, et le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccc} H^1(T_S(-C)) & \xrightarrow[{[\lambda_0]}]{} & H^2(\mathscr{O}_S(-C)), \\ {\scriptstyle T}\big\downarrow & & {\scriptstyle T}\big\downarrow \\ H^1(T_S) & \xrightarrow[{[\lambda_0]}]{} & H^2(\mathscr{O}_S) \end{array} \tag{D}$$

où T est considéré comme la section canonique de $H^0(\mathscr{O}_S(C)$.

On a une application naturelle $\delta\colon H^0(\mathscr{O}_S(d-4)) \to H^1(T_S(-4)) = H^1(T_S(-C))$, induite par la suite exacte: $0 \to T_S(-4) \to T_{\mathbb{P}^3}|_S(-4) \to \mathscr{O}_S(d-4)) \to 0$. $Q \in S^{d-4}$ fournit donc un élément $\bar{Q}$ de $H^1(T_S(-4))$; de $Q \in H^{2,0}(-\lambda)_F$, on tire: $[\lambda_0].\bar{Q} = 0$ dans $H^2(\mathscr{O}_S(-4))$; en effet, pour tout $T \in S^4$, $T.\bar{Q} \in H^1(T_S)$ est annulé par $[\lambda_0]$, et la commutativité du diagramme (D), pour tout T, entraîne que $[\lambda_0].\bar{Q}$ satisfait: $\forall T \in S^4$, $T.[\lambda_0].\bar{Q} = 0$ dans $H^2(\mathscr{O}_S)$; cela entraîne $[\lambda_0].\bar{Q} = 0$ dans $H^2(\mathscr{O}_S(-4))$ du fait de la surjectivité du produit $\mu\colon H^0(K_S) \otimes H^0(\mathscr{O}_S(4)) \to H^0(K_S(4))$.

Maintenant le résultat découle de la description suivante de la différentielle de α en 0. L'application de Kodaïra-Spencer en 0 envoie $\partial/\partial t$ sur la projection $\overline{TQ}$ de TQ dans $R^d(F) \simeq H^1(T_S)$; $\overline{TQ}$ provient évidemment, via T, de $\bar{Q} \in H^1(T_S(-C).[\lambda_0].\bar{Q}$ appartient alors à $H^2(\mathscr{O}_S(-C))$ et est envoyé sur 0 dans $H^2(\mathscr{O}_S)$ par T, puisque par hypothèse $\overline{TQ}$ est tangent à $\mathscr{S}_\lambda$, et par la commutativité de (D). Ecrivant la suite exacte: $0 \to \mathscr{O}_S(-C) \to \mathscr{O}_S \to \mathscr{O}_C \to 0$, on obtient la suite exacte: $0 \to H^1(\mathscr{O}_C) \to H^2(\mathscr{O}_S(-C)) \xrightarrow[T]{} H^2(\mathscr{O}_S)$; $[\lambda_0].\bar{Q}$ est donc naturellement un élément de $H^1(\mathscr{O}_C)$, et est égal à $\alpha_*(\partial/\partial t)$.

De $Q \in H^{2,0}(-\lambda)_F$, on tire donc $[\lambda_0].\bar{Q} = 0$ dans $H^2(\mathscr{O}_S(-4))$, puis $\alpha_*(\partial/\partial t) = 0$, dans $H^1(\mathscr{O}_C)$, et la proposition est démontrée.

De la proposition, on tire le corollaire suivant:

2.5. COROLLAIRE. (i) *La classe λ est invariante par monodromie sur la variété* $(F + Q.S^4)_0$.

(ii) *Pour $T \in S^4$, tel que la courbe C définie par $F = T = 0$ soit lisse, la restriction $\mathcal{L}_{t|C}$ est indépendante de $t \in \mathbb{P}^1$, où $\mathcal{L}_t \in \operatorname{Pic} S_t$ est le faisceau inversible de classe λ_t (globalement définie), et S_t est comme en* 2.3.

Démonstration. Pour montrer (i) il suffit de le montrer sur un pinceau générique passant par F, i.e. de la forme $(F + tQT)_{t\in\mathbb{P}^1}$, avec T générique dans S^4. Sur un tel pinceau la classe λ_t est localement définie (peut-être globalement multivaluée); l'application $\alpha\colon t \to \mathcal{L}_{t|C}$ (multivaluée) est partout de différentielle nulle d'après la Proposition 2.4, et parce que d'après 2.0, $Q \in H^{2,0}(-\lambda)_{F_t}$ pour tout t. On en déduit qu'elle est en fait globalement constante. Soit alors $\lambda' \in H^2(S, \mathbb{Z})$ une classe obtenue à partir de λ par monodromie; on a par ce qui précède $\mathcal{L}'|_C = \mathcal{L}|_C$, où $\mathcal{L}'$ est le faisceau inversible sur S de classe λ' (noter que λ' est encore de type (1, 1) puisque le pinceau est contenu dans $\mathcal{S}_\lambda$). Or C est générique dans $|\mathcal{O}_S(4)|$ et donc l'application de restriction $\operatorname{Pic} S \to \operatorname{Pic} C$ est injective. Il vient donc $\mathcal{L}' = \mathcal{L}$, et $\lambda' = \lambda$, ce qui montre (i); (ii) suit alors de (i) et de sa démonstration.

Avec ce corollaire, il est aisé d'appliquer les arguments de Griffiths et Harris [16], pour démontrer le Théorème 0.3: on montre d'abord le lemme suivant:

2.6. LEMME. *Soit $F \in \mathcal{S}_\lambda$ un point générique, $Q \in H^{2,0}(-\lambda)_F$; soit $D := V(Q|_S)$ le diviseur de Q sur S: soient $T \in S^4$ générique, et C la courbe d'équations $F = T = 0$. Alors il existe des entiers k, n, n_i, tels que $\mathcal{L}|_C^{\otimes k} = nh_C + \sum_i n_i p_i$ dans JC, où $h_C = \mathrm{cl}(\mathcal{O}_C(1))$, et $\{p_i\}$ est l'ensemble $D \cap C$.*

Démonstration. T étant générique, la courbe C est lisse, ainsi que la surface Σ d'équation T. Comme $d^0T = 4$, on peut aussi supposer que $\operatorname{Pic}(\Sigma) = \mathbb{Z}$ est engendré par $h_\Sigma := \mathrm{cl}(\mathcal{O}_\Sigma(1))$.

Pour Δ un disque suffisamment petit, soit $\mathcal{X}$ la variété de dimension trois définie par: $\mathcal{X} = \{(x, t) \in \mathbb{P}^3 \times \Delta/(tF + QT)(x) = 0\}$. $\mathcal{X}$ est non singulière en dehors de $\mathcal{X}_0$, qui est constituée de la réunion de Σ et de $V(Q)$. De plus, on a l'inclusion naturelle $C \times \Delta \subset \mathcal{X}$, avec $C \times \{0\} \subset \Sigma \times \{0\} \subset \mathcal{X}_0$. D'autre part, il est facile de voir que l'intersection de $\operatorname{Sing} \mathcal{X}$ avec Σ est supportée sur les points p_i, qui constituent l'intersection $\Sigma \cap S \cap V(Q)$. On en déduit:

Il existe une désingularisation $\tau\colon Z \to \mathcal{X}$ de $\mathcal{X}$, telle que le transformé propre $\tilde{\Sigma}$ de Σ dans Z est lisse et isomorphe à Σ en dehors des points p_i, et le transformé propre $C \tilde{\times} \Delta$ de $C \times \Delta$ dans Z est lisse et isomorphe à $C \times \Delta$ en dehors des points $(p_i, 0)$.

Soit $Z_t = (\mathrm{pr}_2 \circ \tau)^{-1}(t)$; d'après le Théorème 1.5 et le Corollaire 2.5 on a: il existe un fibré inversible $\mathcal{L}_t$ sur Z_t de classe λ_t, uniquement déterminé, pour $t \neq 0$; de plus, on a: $\mathcal{L}_{t|C} = \alpha := \mathrm{cl}(\mathcal{L}|_C)$, où $\mathcal{L}$ est le faisceau inversible sur S de classe λ.

Comme Z est lisse, il existe un entier k, et un fibré inversible $\mathcal{K}$ sur Z, tel que pour tout $t \neq 0$, on ait: $\mathcal{K}|_{Z_t} = \mathcal{L}_t^{\otimes k}$.

Considérons la restriction de $\mathscr{K}$ à $C \tilde{\times} \Delta$: on a $\mathrm{cl}(\mathscr{K}|_{C\times\{t\}}) = \mathrm{cl}(\mathscr{L}_{t|C}^{\otimes k}) = k\alpha$ pour $t \neq 0$, et l'on en déduit: $\mathrm{cl}(\mathscr{K}|_{C\tilde{\times}\Delta}) = (\mathrm{pr}_1 \circ \tau)^*(k\alpha) + E$, où E est un diviseur supporté sur le diviseur exceptionnel de $C \tilde{\times} \Delta$, $\tau: C \tilde{\times} \Delta \to C \times \Delta$ est la restriction de $\tau: Z \to \mathscr{X}$ et $\mathrm{pr}_1: C \times \Delta \to C$ est la première projection.

Notant C_0 le transformé propre de $C \times \{0\}$ dans $C \tilde{\times} \Delta$, on en déduit immédiatement: il existe des entiers m_i tels que

$$\mathrm{cl}(\mathscr{K}|_{C_0}) = k\alpha + \sum_i m_i p_i \tag{$*$}$$

(où l'on a identifié dans le second membre C_0 à C);

cela résulte en effet des considérations précédentes et du fait que le diviseur exceptionnel de $C \tilde{\times} \Delta$ ne rencontre C_0 qu'aux points p_i. Par ailleurs, considérons la restriction de $\mathscr{K}$ à $\tilde{\Sigma}$; comm $\mathrm{Pic}(\Sigma) = \mathbb{Z}.h$ on doit avoir $\mathrm{cl}(\mathscr{K}|_{\tilde{\Sigma}}) = nh_\Sigma + E'$, où E' est un diviseur supporté sur le diviseur exceptionnel de $\tilde{\Sigma}$. Restreignant cette identité à $C_0 \subset \tilde{\Sigma}$, on obtient: il existe des entiers m'_i tels que:

$$\mathrm{cl}(\mathscr{K}|_{C_0}) = nh_C + \sum_i m'_i p_i. \tag{$**$}$$

Comparant ($*$) et ($**$), on obtient bien l'égalité désirée, avec $n_i = m_i - m'_i$.

2.7. On achève maintenant la preuve du Théorème 0.3 comme dans [12], [16].

Ecrivons $D = \sum_j k_j D_j$, avec D_j irréductibles; on a alors $\{p_i\} = U_j\{q_{k,j}\}$, où $\{q_{k,j}\} = C \cap D_j$. D'après [12], lorsque C décrit un ouvert de Zariski de $|\mathcal{O}_S(4)|$, la monodromie sur l'ensemble $\{p_i\}$ agit comme le produit sur j des groupes symétriques permutant les points $q_{k,j}$.

On en déduit immédiatement que dans la relation $k\alpha = nh_C + \sum_j(\sum_k n_{k,j} q_{k,j})$ on a en fait tous les $n_{k,j}$ égaux à une constante n'_j; comme $\sum_k q_{k,j} = D_j.C$, si C est générique, on obtient finalement:

$$k\alpha = nh_C + \sum_j n'_j(D_j.C) = \left(nh + \sum_j n'_j D_j\right).C.$$

Rappelant que $\alpha = \mathrm{cl}(\mathscr{L}|_C)$ et que C est un élément générique de $|\mathcal{O}_S(4)|$, on en déduit finalement $k\lambda = nh + \sum_j n'_j[D_j]$, ce qui achève la preuve du Théorème 0.3.

Section 3

3.0. Cette section est consacrée à la preuve de la Proposition 1.18. Le cas $d = 6$ est facile et l'on se contentera de détailler la démonstration dans le cas $d = 7$; on a alors $2d - 4 = 10 = d^0 P_0$, et $3d - 12 = 9 = d^0\varphi$. On rappelle que $\varphi \in R^9$ et satisfait la condition $\varphi . S^4 \subset P_0 S^3 \subset R^{13}$, et l'on veut montrer que $\varphi = 0$. Notons, pour tout k, $W_k = \mathrm{Ker}(P_0 \colon R^k \to R^{k+10})$, et $W'_k = \mathrm{Ker}(\varphi \colon R^k \to R^{k+9})$. La condition $\varphi . S^4 \subset P_0 S^3 = W_7^{\perp}$ est équivalente à: $\forall U \in W_7, \forall T \in S^4, \varphi . T . U = 0$ dans $R^{20} \simeq \mathbb{C}$ (cf. 0.13), ce qui entraîne encore: $W_7 \subset W'_7$; on en déduit aussi $W_k \subset W'_k$ pour $k \leqslant 7$, puisque $W'_k = [W'_7 \colon R^{7-k}]$, $W_k = [W_7 \colon R^{7-k}]$.

3.1. De $\varphi . S^4 \subset P_0 S^3$, on tire enfin une injection: $R^4/W'_4 \hookrightarrow R^3/W_3$, qu'on notera φ_4, définie par le composé: $R^4/W'_4 \xrightarrow{\varphi} P_0 S^3 \simeq R^3/W_3$. Bien sûr, φ_4 s'étend en fait en une application injective $\varphi = \bigoplus_{k \geqslant 4} \varphi_k \colon \bigoplus_{k \geqslant 4} R^k/W'_k \to \bigoplus_{k \geqslant 4} R^{k-1}/W^{k-1}$ de R-modules.

3.2. Notons enfin que puisque $d^0\varphi = 9$, on a une dualité parfaite entre R^k/W'_k et R^{11-k}/W'_{11-k}, donnée par le composé:

$$R^k/W'_k \otimes R^{11-k}/W'_{11-k} \to R^{11}/W'_{11} \xrightarrow{\varphi} R^{20} \simeq \mathbb{C},$$

tandis qu'on a une dualité analogue entre R^k/W_k et R^{10-k}/W_{10-k}, du fait que $d^0 P_0 = 10$.

On a donc en particulier $\operatorname{codim} W'_4 = \operatorname{codim} W'_7$, et comme $W_7 \subset W'_7$, on a: $\operatorname{codim} W'_7 \leqslant \operatorname{codim} W_7 = \operatorname{codim} W_3 \leqslant 19$, puisque par hypothèse $W_3 \neq 0$, et $\dim S^3 = \dim R^3 = 20$.

On supposera désormais $\varphi \neq 0$, de manière à obtenir une contradiction. La première étape consiste à établir la proposition suivante:

3.3. PROPOSITION. *On a:* $\operatorname{codim} W'_4 \leqslant 12$ *et* $\tilde{W}'_4$ *a un base locus de dimension positive* (cf. notation 0.15).

La démonstration se fera par une série de lemmes (3.4–3.7):

3.4. LEMME. *Si* $\operatorname{codim} W'_4 > 15$, *alors* $\operatorname{codim} W_3 \geqslant \operatorname{codim} W_4$.

Démonstration. Posons $H_3 =$ Image réciproque de $\operatorname{Im} \varphi_4$ dans S^3; si $\operatorname{codim} W'_4 > 15$, on a $\operatorname{codim} H_3 \leqslant 3$, et par [4], cela entraîne $\operatorname{codim} S^3 . H_3 \leqslant \operatorname{codim} H_3$, où $S^3 . H_3 \subset S^6$ est l'espace engendré par H_3 en degré 6. On en déduit alors: $\operatorname{codim} \operatorname{Im} \varphi_7 \leqslant \operatorname{codim} \operatorname{Im} \varphi_4$, et comme $\dim R^4/W'_4 = \dim R^7/W'_7$, et que les φ_k sont injectives, on obtient immédiatement le résultat, par $\operatorname{codim} W_6 = \operatorname{codim} W_4$.

3.5. LEMME. *Si* $\operatorname{codim} W'_4 > 12$, *on a: soit* $\operatorname{codim} W_3 \geqslant \operatorname{codim} W_4$, *soit* $\operatorname{codim} W'_3 \geqslant \operatorname{codim} W'_4$.

Démonstration. Avec les notations précédentes, l'hypothèse $\operatorname{codim} W'_4 > 12$, entraîne $\operatorname{codim} H_3 \leqslant 6$. Si $\operatorname{codim} H_3 \leqslant 3$, on raisonne comme en Lemme 3.4, et donc la première possibilité a lieu. Si d'autre part, on a $6 \geqslant \operatorname{codim} H_3 \geqslant 4$ par le théorème de Gotzmann [17], on voit facilement que l'on est dans l'une des situations suivantes: (a) codim $S^k.H_3 \leqslant$ codim H_3, (b) H_3 est contenu dans l'idéal $I_\Delta(3)$ d'une droite Δ de $\mathbb{P}^3$. Si (a) a lieu, on conclut comme en Lemme 3.4. Si (b) a lieu, on a $H_3 \subset I_\Delta(3)$ est de codimension $\leqslant 2$. Toujours par [17], on a dans ce dernier cas: $\operatorname{codim}(S^k.H_3 \subset I_\Delta(3+k)) \leqslant \operatorname{codim}(H_3 \subset I_\Delta(3))$; il vient alors:

$$\operatorname{Im} \varphi_8 \subset I_\Delta(7)/\tilde{W}_7 \cap I_\Delta(7),$$

et sa codimension dans ce dernier espace est inférieure ou égale à celle de Im φ_4 dans $I_\Delta(3)/\tilde{W}_3$. Mais d'autre part, de J^6 sans point base, on déduit facilement que rang $J^7|_\Delta \geqslant 4$ et donc que rang $\tilde{W}_{7|\Delta} \geqslant 4$. On a donc: la codimension de $I_\Delta(7)/\tilde{W}_7 \cap I_\Delta(7)$ dans $S^7/\tilde{W}_7$ est au plus quatre. On obtient finalement les inégalités:

$$\begin{aligned} &\operatorname{codim}(\operatorname{Im} \varphi_8 \subset S^7/\tilde{W}_7) \leqslant 4 + \operatorname{codim}(\operatorname{Im} \varphi_8 \subset I_\Delta(7)/\tilde{W}_7 \cap I_\Delta(7)) \\ &\quad \leqslant 4 + \operatorname{codim}(\operatorname{Im} \varphi_4 \subset I_\Delta(3)/\tilde{W}_3 = \operatorname{codim}(\operatorname{Im} \varphi_4 \subset S^3/\tilde{W}_3). \end{aligned}$$

De dim $S^7/\tilde{W}_7 = \dim S^3/\tilde{W}_3$, et de l'injectivité des φ_k on en déduit: $\dim S^3/\tilde{W}'_3 = \dim S^8/\tilde{W}'_8 \geqslant \dim S^4/\tilde{W}'_4$, ce qui prouve le lemme.

3.6. LEMME. *Les inégalités du Lemme* 3.5 *sont impossibles.*

Démonstration. On se contentera de traiter la première inégalité; la seconde se traite de la même manière: pour $P \subset \mathbb{P}^3$, un plan d'équation $\tilde{P} \in S^1$, on note $m_P^k: S^k/\tilde{W}_k \to S^{k+1}/\tilde{W}_{k+1}$, la multiplication par $\tilde{P}$. Montrons d'abord que l'hypothèse $\dim S^3/\tilde{W}_3 \geqslant \dim S^4/\tilde{W}_4$ entraîne: m_P^k est un isomorphisme, pour $3 \leqslant k \leqslant 6$, et P générique: ceci est facile. Il suffit en effet de montrer que m_P^3 est injective, puisque cela entraîne que m_P^3 est surjective, donc que m_P^k est surjective, pour $k \geqslant 3$, et par dualité (noter que pour la dualité $S^k/\tilde{W}_k \simeq R^k/W_k \simeq (R^{10-k}/W^{10-k})^* \simeq (S^{10-k}/\tilde{W}^{10-k})^*$, on a: m_P^k est duale de m_P^{9-k}), m_P^k est un isomorphisme pour $3 \leqslant k \leqslant 6$. Or, de $19 \geqslant \dim S^3/\tilde{W}_3 \geqslant \dim S^4/\tilde{W}_4 = \dim S^6/\tilde{W}_6$, on tire: codim $\tilde{W}_6 \leqslant 19$, puis par [4] p. 1, codim $\tilde{W}_{6|P} \leqslant 3$ pour P générique. Comme $\tilde{W}_{6|P}$ est sans point base, il vient donc: codim $\tilde{W}_{7|P} \leqslant 2$ ce qui équivaut à: corang $m_P^6 \leqslant 2$; par dualité, on a alors dim Ker $m_P^3 \leqslant 2$, et l'inégalité $\dim S^4/\tilde{W}_4 \leqslant \dim S^3/\tilde{W}_3$ entraîne alors corang $m_P^3 \leqslant 2$, d'où codim $\tilde{W}_{4|P} \leqslant 2$ ce qui entraîne facilement $\tilde{W}_{7|P} = H^0(\mathcal{O}_P(7))$; mais alors m_P^6 est en fait surjective, et donc m_P^3 est injective, ce qui prouve l'assertion. Maintenant, de m_P^3 surjective, on tire $\tilde{W}_{4|P} = H^0(\mathcal{O}_P(4))$, pour P générique, et comme $\tilde{W}_4 \subset \tilde{W}'_4$, on a aussi $\tilde{W}'_{4|P} = H^0(\mathcal{O}_P(4))$, ce qui entraîne $m_P'^3$ surjective où $m_P'^3$ est la multiplication par $\tilde{P}: S^k/\tilde{W}'_k \to S^{k+1}/\tilde{W}'_{k+1}$. Utilisant la dualité $S^k/\tilde{W}'_k \simeq (S^{9-k}/\tilde{W}'_{9-k})^*$, avec $m_P'^k$ duale de $m_P'^{8-k}$, on obtient finalement:

3.7. La multiplication $m_P'^k$ est un isomorphisme pour $3 \leqslant k \leqslant 7$. Soit maintenant

$\mathscr{D} \subset S^1$ l'hypersurface définie par la condition: "$m'^3_{\tilde{P}}$ n'est pas un isomorphisme". Pour $\tilde{P} \in \mathscr{D}$, correspondant au plan P, on a: corang $m'^3_{\tilde{P}}$ = corang $m'^6_{\tilde{P}}$ = corang $m'^7_{\tilde{P}} > 0$ (ces égalités résultent en effet du fait que les $m'_{\tilde{Q}}$ sont des isomorphismes si Q est générique, et commutent avec les $m'_{\tilde{P}}$). La dernière égalité s'écrit encore: codim $\tilde{W}'_{7|P}$ = codim $\tilde{W}'_{8|P}$, et comme codim $\tilde{W}'_{7|P}$ est sans point base (et diffèrent de $H^0(\mathcal{O}_P(7))$, on en déduit codim $\tilde{W}'_{7|P} \geqslant 8$.

3.8. Définissant alors $\tilde{W}''_k$, pour tout $k \geqslant 0$, par: $S^k/\tilde{W}''_k = \operatorname{Ker} m'^k_{\tilde{P}}$, on a donc: $\dim S^3/\tilde{W}''_3 = \dim S^4/\tilde{W}''_4 = \cdots = \dim S^7/\tilde{W}''_7 \leqslant 11$, et pour $\tilde{Q}$ générique dans S, les multiplications $m''^k_{\tilde{Q}}: S^k/\tilde{W}''_k \to S^{k+1}/\tilde{W}''_{k+1}$ par $\tilde{Q}$, sont des isomorphismes pour $k \leqslant 6$. Introduisant l'hypersurface $\mathscr{D}'$ de S^1 définie par la condition: "$m''^3_{\tilde{Q}}$ n'est pas un isomorphisme", et raisonnant comme plus haut, on obtient facilement: $\mathscr{D}'$ est un hyperplan multiple de S, soit $I_x(1)$, pour un point x de $\mathbb{P}^3$, et pour $\tilde{Q} \in \mathscr{D}'$, $\tilde{Q}^5.S^3 \subset \tilde{W}''_8$. Cela entraîne bien sûr $I^5_x.S^3 \subset \tilde{W}''_{10}$, et comme $\tilde{W}''_{10}$ contient J^{10}, on en déduit facilement que $\tilde{W}''_{10} = S^{10}$, cela entraîne finalement $\tilde{W}''_k = S^k$ pour $k \leqslant 10$, car $[\tilde{W}''_k] = [\tilde{W}''_{10}: S^{10-k}]$. On a donc prouvé: pour $\tilde{P} \in \mathscr{D}, m'^3_{\tilde{P}} = 0$. On en déduit facilement que $\mathscr{D}$ est un hyperplan multiple de S^1, soit $I_y(1)$, pour un point y de $\mathbb{P}^3$, qui satisfait donc: $I_y(1).S^3 \subset \tilde{W}'_3$, et aussi $I_y(1).S^{10} \subset \tilde{W}'_{11}$. Comme $\tilde{W}'_{11}$ est sans point base, on a donc $\tilde{W}'_{11} = S^{11}$, ce qui contredit l'hypothèse $\varphi \neq 0$.

De ces trois lemmes, on déduit immédiatement l'assertion: codim $\tilde{W}'_4 \leqslant 12$, de la Proposition 3.3. Il reste à prouver:

3.9. LEMME. *$\tilde{W}'_4$ a un base locus de dimension positive.*

Démonstration. On raisonnera encore par l'absurde; on a donc par hypothèse: $\tilde{W}'_{11} \neq S^{11}$, codim $\tilde{W}'_4 \leqslant 12$, et $\tilde{W}'_4$ a un nombre fini de points base.

On montre d'abord facilement que pour $\tilde{P}$ générique dans S^1, les multiplications $m'^2_{\tilde{P}}$ et $m'^3_{\tilde{P}}$ sont injectives; il suffit en effet de voir que $\tilde{W}'_{8|P} = H^0(\mathcal{O}_P(8))$ et cela résulte de codim $\tilde{W}'_7 = \tilde{W}'_4 \leqslant 12$, qui entraîne, par [4], p. 1: codim $\tilde{W}'_{7|P} \leqslant 1$. Etudions différents cas:

(a) $\dim \tilde{W}'_2 \geqslant 3$.

S'il existe $Q_1, Q_2 \in \tilde{W}'_2$ s'intersectant suivant une courbe, comme $\tilde{W}'_4$ a un nombre fini de points base on peut choisir $Q_3 \in \tilde{W}'_4, Q_4 \in \tilde{W}'_6$, telles que Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 forment une séquence régulière sur $\mathbb{P}^3$. Une telle séquence engendre S^{11}, ce qui est absurde.

Dans le cas contraire $\tilde{W}'_4$ est contenu dans l'idéal $I_P(2)$ d'un plan $P \subset \mathbb{P}^3$, et sa codimension dans $I_P(2)$ est au plus 1. On vérifie facilement que cela entraîne en fait: $\tilde{W}'_2 = I_P(2)$, et $I_P(4) \subset \tilde{W}'_4$. Mais par ailleurs $\tilde{W}'_{4|P}$ est de dimension au moins trois et a un nombre fini de points base, et $\tilde{W}'_{6|P}$ n'a pas de points base: cela entraîne facilement $\tilde{W}'_{11|P} = H^0(\mathcal{O}_P(11))$, et donc $\tilde{W}'_{11} = S^{11}$, ce qui est absurde.

(b) codim $\tilde{W}'_2 \geqslant 8$.

Pour $\tilde{P}$ générique dans S^1, on a $m'^2_{\tilde{P}}$ et $m'^3_{\tilde{P}}$ injectives, et $\tilde{W}'_{4|P}$ est sans point base.

Si dim $S^3/\tilde{W}'_3 \leqslant 10$, il vient donc: corang $m'^2_P \leqslant 2$, d'où codim $\tilde{W}'_{3|P} \leqslant 2$, et donc $\tilde{W}'_{5|P} = H^0(\mathcal{O}_P(5))$; de même, si dim $S^3/\tilde{W}'_3 > 10$, il vient corang $m'^4_P \leqslant 1$, d'où codim $\tilde{W}'_{4|P} \leqslant 1$, et $\tilde{W}'_{5|P} = H^0(\mathcal{O}_P(5))$; dans les deux cas, on en déduit que m'^4_P est surjective, de même que m'^k_P, pour $k \geqslant 4$. Par dualité, on en déduit que m'^k_P est un isomorphisme, pour $4 \leqslant k \leqslant 6$, avec: dim $S^4/\tilde{W}'_4 \leqslant 12$. On exclut ce cas par les mêmes arguments qu'en Lemma 3.6. Le Lemme 3.9 est donc prouvé, ainsi que la Proposition 3.3.

3.10. Soit maintenant Z la réunion réduite des composantes de dimension positive du base locus de $\tilde{W}'_4$. Composant les applications $\varphi_k: S^k/\tilde{W}'_k \to S^{k-1}/\tilde{W}_{k-1}$ de 3.1 avec les projections naturelles correspondant aux injections $\tilde{W}_k \subset \tilde{W}'_k$ de 3.0: $S^{k-1}/\tilde{W}_{k-1} \to S^{k-1}/\tilde{W}'_{k-1}$, on obtient une application $\psi = \oplus_{k \geqslant 4} \psi_k$ de S-modules avec $\psi_k: S^k/\tilde{W}'_k \to S^{k-1}/\tilde{W}'_{k-1}$. Le lemme suivant est presque évident:

3.11. LEMME. *On a* $\operatorname{Im} \psi_4 \subset I_Z(3)/\tilde{W}'_3$.

Démonstration. Notons que le terme de droite a bien un sens car $\tilde{W}'_4 \subset I_Z(4) \Rightarrow \tilde{W}'_3 \subset I_Z(3)$. Notons $\chi_4: S^4 \to S^3/I_Z(3)$, le composé: $S^4 \to S^4/\tilde{W}'_4 \xrightarrow{\psi_4} S^3/\tilde{W}'_3 \to S^3/I_Z(3)$, et définissons de même $\chi_5: S^5 \to S^4/I_Z(4)$. Considérons la suite exacte: $0 \to G \xrightarrow{j} S^4 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(4) \to 0$, définissant G, et soit α l'application naturelle d'évaluation: $S^3/I_Z(3) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \to \mathcal{O}_Z(3)$. La composé $\alpha \circ \chi_4 \circ j$ est une application de $\mathcal{O}_P$-modules; d'autre part, $G(1)$ est engendré par ses sections globales qui s'identifient à: $\operatorname{Ker}(S^4 \otimes S^1 \to S^5)$; comme χ_4 et χ_5 satisfont la relation: $\forall A \in S^1$, $\forall T \in S^4, \chi_5(TA) = A\chi_4(T)$, on en déduit immédiatement que $\alpha \circ \chi_4 \circ j$ induit l'application nulle au niveau des sections globales: $H^0(G(1)) \to H^0(\mathcal{O}_Z(4))$, et donc que $\alpha \circ \chi_4 \circ j = 0$. Cela signifie que le composé $\alpha \circ \chi_4$ fournit par passage au quotient une application $\bar{\chi}_4: \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(4) \to \mathcal{O}_Z(3)$ de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}$-modules, ou encore une section de $\mathcal{O}_Z(-1)$. Comme Z est réduit, et que ses composantes sont de dimension positive, on a donc $\alpha \circ \chi_4 = 0$, et $\chi_4 = 0$, ce qui prouve le lemme.

Nous allons établir maintenant la proposition suivante:

3.12. PROPOSITION. *Il existe une conique* $C \subset \mathbb{P}^3$ *telle que* $\tilde{W}'_4 = I_C(4)$, $\tilde{W}'_7 = I_C(7) + J^7$*et* C *satisfait*: rang $J^6(F)|_C = 2$.

Démonstration. On sait que le base locus de $\tilde{W}'_4$ est de dimension positive et que codim $\tilde{W}'_4 \leqslant 12$; $\tilde{W}'_4$ ne peut donc pas s'annuler sur une surface et les seules possibilités sont les suivantes:

(a) Z est une courbe cubique plane.
(b) Z est la réunion de deux droites disjointes.
(c) Z est une conique plane.
(d) Z est une droite.

L'existence de l'application injective $\varphi_4: S^4/\tilde{W}'_4 \to I_Z(3)/\tilde{W}_3$ permet d'exclure rapidement les deux premiers cas:

3.13. LEMME. (*a*) *est impossible.*

Démonstration. En effet on a alors $\dim I_Z(3) = 11$, et donc $\dim I_Z(3)/\tilde{W}_3 \leqslant 10$. Par ailleurs $\dim S^4/\tilde{W}'_4 \geqslant h^0(\mathcal{O}_Z(4)) = 12$, ce qui contredit l'injectivité de φ_4.

3.14. LEMME. (*b*) *est impossible.*

Démonstration. Dans ce cas, on a en effet $\dim I_Z(3) = 12$, d'où $\dim I_Z(3)/\tilde{W}_3 \leqslant 11$. D'autre part $h^0(\mathcal{O}_Z(4)) = 10$. Définissant $H_3 \subset I_Z(3)$ comme en 3.4, on trouve alors: la codimension de H_3 dans $I_Z(3)$ est au plus un. Si $H_3 = I_Z(3)$, on a: $\operatorname{Im} \varphi_8 = I_Z(7)/I_Z(7) \cap \tilde{W}_7 \subset S^7/\tilde{W}_7$. Or J^6 est sans point base, et donc: rang $J^7|_Z \geqslant 8$; on en déduit facilement $\dim I_Z(7)/\tilde{W}_7 \cap I_Z(7) \geqslant \dim S^7/\tilde{W}_7 - 8$ et donc rang $\varphi_8 \geqslant \dim S^7/\tilde{W}_7 - 8 = \dim S^3/\tilde{W}_3 - 8 = \dim I_Z(3)/\tilde{W}_3 \geqslant$ rang φ_4. On obtient donc $\dim S^8/\tilde{W}'_8 = \dim S^3/\tilde{W}'_3 \geqslant \dim S^4/\tilde{W}'_4$, ce qui a été exclu dans le Lemme 3.6.

De même, si $H_3 = I_Z(3)$ est un hyperplan, on voit facilement que $\operatorname{Im} \varphi_8$ est au moins un hyperplan de $I_Z(7)/\tilde{W}_7 \cap I_Z(7)$, ce qui donne comme précédemment: rang $\varphi_8 \geqslant$ rang φ_4, ce qui est absurde.

Le lemme suivant règle le cas (c):

3.15. LEMME. *Si Z est une conique, alors* $\tilde{W}'_4 = I_Z(4)$.

Démonstration. Soient P le plan de C, et $\tilde{P}$ une équation pour P; on définit $m'_{\tilde{P}}$ comme en 3.6 *et* $\tilde{W}''_k$ comme en 3.8. On a l'injection $\varphi_4\colon S^4/\tilde{W}'_4 \to I_C(3)/\tilde{W}_3$ $I_C(3)/\tilde{W}_3$ étant de dimension au plus 12, on a donc $\dim S^4/\tilde{W}'_4 \leqslant 12$, et la codimension de $\tilde{W}'_4$ dans $I_C(4)$ est au plus trois. La multiplication $m'^3_{\tilde{P}}$ fournit une injection: $S^3/\tilde{W}''_3 \hookrightarrow I_C(4)/\tilde{W}'_4$, et l'on a donc $\dim S^3/\tilde{W}''_3 \leqslant 3$; cela entraîne en fait $\tilde{W}''_3 = S^3$ par [6], [14] si l'on note que $W''_3 = \operatorname{Ker} \tilde{P}.\varphi$, avec $d^0(\tilde{P}\varphi) = 10$. Donc on a $I_P(4) \subset \tilde{W}'_4 \subset I_Z(4)$. Considérons $\tilde{W}'_4|_P \subset I_{Z,P}(4)$. Identifiant $I_{Z,P}(4)$ à $H^0(\mathcal{O}_P(2))$, on obtient un système $W'''_2 \subset H^0(\mathcal{O}_P(2))$, de codimension inférieure ou égale à trois (par codim$(\tilde{W}'_4 \subset I_C(4)) \leqslant 3$). Or on peut supposer que ce système a un nombre fini de points base, car sinon $\tilde{W}'_4$ serait contenu dans l'idéal d'une cubique plane (éventuellement non réduite) et ce cas est en fait réglé par le Lemme 3.11 si l'on note que le Lemme 3.11 est valable pour Z une courbe intersection complète, même non-réduite. Maintenant, si W'''_2 a un nombre fini de points base, on peut choisir $Q_1, Q_2 \in W'''_2$ et $Q_3 \in J^6|_P$, tels que Q_1, Q_2, Q_3 forment une séquence régulière sur $\mathbb{P}^2$; une telle séquence engendre $H^0(\mathcal{O}_P(9))$. Multipliant tout par $Q \in H^0(\mathcal{O}_P(2))$, équation de $Z \subset P$, on voit que $\tilde{W}'_{11}|_P$ contient $I_{Z,P}(11)$. Comme $\tilde{W}'_{11}$ contient $I_P(11)$ on trouve finalement: $I_Z(11) \subset \tilde{W}'_{11}$, puis $I_Z(11) \subset \tilde{W}'_{11}$, puis $I_Z(4) \subset \tilde{W}'_4$, et le lemme est démontré.

Il reste à traiter le cas (d): on va montrer

3.16. LEMME. *Si Z est une droite, on a en fait $\tilde{W}'_4 = I_C(4)$, où C est une conique double supportée sur Z.*

Démonstration. La première étape de la démonstration consiste à établir d'abord:

3.17. SOUS-LEMME. *On a* $I_Z^2(4) \subset \tilde{W}'_4$.

Nous ne donnerons pas le détail de démonstration, qui est un peu longue: le principe consiste à étudier l'application $m'^3_{\tilde{P}}: S^3/\tilde{W}'_3 \to I_Z(4)/\tilde{W}'_4$, et son noyau $\tilde{W}''_3/\tilde{W}'_3$, pour $\tilde{P} \in I_Z(1)$: les hypothèses entraînent $\dim I_Z(4)/\tilde{W}'_4 \leqslant 7$ et donc $\operatorname{codim} \tilde{W}''_3 \leqslant 7$; comme $W''_3 = \operatorname{Ker} \tilde{P}\varphi$, avec $d^0\tilde{P}\varphi = 10$, et que pour $d = 7$, on a $2d - 7 = 7$, on peut appliquer le résultat de [15] à W''_3. On conclut finalement qu'on doit avoir $W''_3 \supset I_Z(3)$, ce qui entraîne bien: $I_Z^2(4) \subset \tilde{W}'_4$.

3.18. Ceci étant acquis, nous avons donc: $I_Z^2(4) \subset \tilde{W}'_4 \subset I_Z(4)$ et $\operatorname{codim} \tilde{W}'_4 \leqslant 12$. Posons $\bar{W}''_{11} = (\tilde{W}'_{11} \cap I_Z(11)/I_Z^2(11)$; on a alors: (i) $\bar{W}''_{11}$ est un hyperplan de $(I_Z/I_Z^2)(11)$; (ii) $\bar{W}''_k := (\tilde{W}'_k \cap I_Z(k))/I_Z^2(k)$ est aussi égal a $[\bar{W}''_{11}: S^{11-k}(Z)]$, où $S^p(Z) = H^0(\mathcal{O}_Z(p))$, et où le conducteur $[:]$ a la signification évidente, compte tenu de la structure de $S(Z)$-module de $\oplus_q (I_Z/I_Z^2)(q)$. En effet, (i) résulte du fait que $\tilde{W}'_{11} \subset S^{11}$ est un hyperplan, contient $I_Z^2(11)$, et ne peut pas contenir $I_Z(11)$, car comme J^6 est sans point base, on voit facilement que $J^{11}|_Z = S^{11}(Z)$. (ii) résulte alors du fait que $\tilde{W}'_k = [\tilde{W}'_{11}: S^{11-k}]$.

3.19. Maintenant, $\bar{W}''_{11}$, étant un hyperplan de $(I_Z/I_Z^2)(11) = H^0(\mathcal{I}_Z/\mathcal{I}_Z^2(11))$, donne par dualité de Serre une extension $e \in \operatorname{Ext}^1(\mathcal{I}_Z/\mathcal{I}_Z^2, \mathcal{O}_Z(-13))$ et donc un fibré vectoriel $\mathcal{E}$ sur Z, s'inscrivant dans une suite exacte:

$$0 \to \mathcal{O}_Z(-13) \to \mathcal{E} \to \mathcal{I}_Z/\mathcal{I}_Z^2 \to 0. \tag{E}$$

La propriété (ii) ci-dessus et la définition même d'une classe d'extension montrent alors que l'application naturelle $H^0(\mathcal{E}(k)) \to H^0(\mathcal{I}_Z/\mathcal{I}_Z^2(k)) = (\mathcal{I}_Z/\mathcal{I}_Z^2(k)$, identifie, pour $k \leqslant 11$, $H^0(\mathcal{E}(k))$ *à* $\bar{W}''_{11}$.

Comme $\mathcal{E}$ est un fibré vectoriel de rang trois sur la droite Z, il existe des entiers $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma < 0$, tels que: $\mathcal{E} \simeq \mathcal{O}_Z(\alpha) \oplus \mathcal{O}_Z(\beta) \oplus \mathcal{O}_Z(\gamma)$; on a par (E): $\alpha + \beta + \gamma = -15$.

3.20. Notons maintenant que l'hypothèse $\operatorname{codim} \tilde{W}'_4 \leqslant 12$ entraîne $\bar{W}''_4 \neq 0$, soit par ce qui précède $H^0(\mathcal{E}(4)) \neq 0$; de plus on a: $\operatorname{codim} \tilde{W}'_4 \geqslant 9$. En effet, dans le cas contraire, la codimension de $\tilde{W}'_4$ dans $I_Z(4)$ serait inférieure ou égale à 3. Pour $\tilde{P} \in I_Z(1) \subset S^1$, on considère la multiplication $m'^3_{\tilde{P}}: S^3/\tilde{W}'_3 \to I_Z(4)/\tilde{W}'_4$: son noyau étant $\tilde{W}''_3/\tilde{W}'_3$, on a $\operatorname{codim} \tilde{W}''_3 \leqslant 3$, et cela entraîne, par [6], que $\tilde{W}''_3 = S^3$: on aurait alors $I_Z(4) \subset \tilde{W}'_4$ et on sait déjà que c'est impossible. Il y a donc quatre possibilités à étudier: $h^0(\mathcal{E}(4)) = 1, \ldots, 4$, correspondant respectivement à $\operatorname{codim} \tilde{W}'_4 = 12, \ldots, 9$.

3.21. (a) $h^0(\mathcal{E}(4)) = 1$, d'où $\operatorname{codim} \tilde{W}'_4 = 12 = \operatorname{codim} \tilde{W}'_7$; dans ce cas, on doit avoir $\gamma = -4$, $\beta \leqslant -5$, $\alpha \leqslant -5$, et la seule possibilité est $\beta = -5$, $\alpha = -6$; on en déduit $h^0(\mathscr{E}(7)) = 9$; mais alors on calcule que codim $\bar{W}''_7 = 5 = \operatorname{codim}(\tilde{W}'_7 \cap I_Z(7) \subset I_Z(7))$. On a donc: $\operatorname{codim}(W'_7 \cap I_Z(7) \subset S^7) = 13$; de $\operatorname{codim}(\tilde{W}'_7 \subset S^7) = 12$ on tire alors: $\tilde{W}'_7 \cap I_Z(7) \subset \tilde{W}'_7$ est au moins un hyperplan; or ceci est absurde car $\tilde{W}'_6$ est sans point base, et donc $\tilde{W}'_7|_Z$ est au moins de rang 4.

(b) Les possibilités $h^0(\mathscr{E}(4)) = 2$ ou 3 sont exclues pour la même raison: on vérifie que l'on doit toujours avoir $h^1(\mathscr{E}(7)) = 0$, en énumérant les possibilités pour (α, β, γ), si $h^0(\mathscr{E}(4)) \leqslant 3$, et cela entraîne comme en (a) que $h^0(\mathscr{E}(7)) = 9$, puis que $\operatorname{codim}(\tilde{W}'_7 \cap I_Z(7) \subset S^7) = 13$; comme $h^0(\mathscr{E}(4)) \leqslant 3$ entraîne codim $\tilde{W}'_4 \geqslant 10$, on trouve aussi: codim $\tilde{W}'_7 \geqslant 10$, et enfin, la codimension de $\tilde{W}'_7 \cap I_Z(7)$ dans $\tilde{W}'_7$ est plus petite que 3. Comme expliqué en (a) ceci est impossible.

(c) Il reste donc seulement la possibilité: $h^0(\mathscr{E}(4)) = 4$. Dans ce cas on a codim $\tilde{W}'_4 = 9 =$ codim $\tilde{W}'_7$, et l'autre part, comme ci-dessus, on a: codim $\tilde{W}'_7 \cap I_Z(7) = 13 - h^1(\mathscr{E}(7))$; de rang $\tilde{W}'_7|_Z \geqslant 4$, on tire alors: $h^1(\mathscr{E}(7)) = 0$.

On a donc $\alpha \geqslant -8$; il est facile alors de voir que $h^0(\mathscr{E}(4)) = 4$ entraîne $\beta \leqslant -6$, puis $\alpha = -1$. Donc $h^0(\mathscr{E}(1)) \neq 0$, et $\bar{W}''_1 \neq 0$, d'où finalement: $\bar{W}'_1 \neq 0$. Il existe donc un plan P contenant Z, tel que $I_Z(4) \subset \tilde{W}'_4$. On a alors: $\tilde{W}'_7|_P$ est de codimension 9 dans $H^0(\mathscr{O}_P(4))$ et contient $I^2_{Z,P}(4)$. On a donc nécessairement: $\tilde{W}'_4|_P = I^2_{Z,P}(4)$, et comme $I_P(4) \subset \tilde{W}'_4$, cela entraîne que $\tilde{W}'_4$ est l'idéal de la conique supportée sur Z et contenue dans P.

3.22. La première assertion de la Proposition 3.12 est donc prouvée; la seconde se montre alors de la façon suivante: de $\tilde{W}'_4 = I_C(4)$, où C est une conique, on tire codim $\tilde{W}'_4 = 9 =$ codim $\tilde{W}'_7$, et $I_C(7) \subset \tilde{W}'_7$; on obtient donc, puisque $h^0(\mathscr{O}_C(7)) = 15$, rang $\tilde{W}'_7|_P = 6$; par ailleurs J^6 est sans point base, ce qui entraîne facilement rang $J^7|_C \geqslant 6$; comme $J^7 \subset \tilde{W}'_7$, on en déduit: $J^7|_C = \tilde{W}'_7|_C$, et rang $J^7|_C \geqslant 6$, ce qui entraîne enfin: $\tilde{W}'_7 = I_C(7) + J^7$, et rang $(J^6|_C) = 2$.

3.23. *Fin de la preuve de la Proposition* 1.18. Il ne reste donc plus qu'à montrer que la situation décrite en Proposition 3.12 mène encore à une contradiction. On utilise pour cela les injections $\varphi_k\colon S^k/\tilde{W}'_k \to I_C(k-1)/\tilde{W}_{k-1} \hookrightarrow S^{k-1}/\tilde{W}_{k-1}$ de 3.1 (définies pour $6 \geqslant k \geqslant 4$); le fait que l'image de φ_k est contenue dans $I_C(k-1)/\tilde{W}_{k-1}$ résulte de ce que le Lemme 3.11 est valable si Z est une conique, même non réduite et de ce que pour $k \leqslant 6$, on a $\tilde{W}_{k-1} \subset I_C(k-1)$, par la Proposition 3.12. On dispose donc des injections: $\varphi_4\colon S^4/\tilde{W}'_4 \to I_C(3)/\tilde{W}_3 \hookrightarrow S^3/\tilde{W}_3$, $\varphi_5\colon S^5/\tilde{W}'_5 \to I_C(4)/\tilde{W}_4 \hookrightarrow S^4/\tilde{W}_4$, qui commutent évidemment avec la multiplication par les éléments de S^1.

3.24. Soit P le plan de C, $\tilde{P}$ une équation pour P: soit $\tilde{W}''_k \subset R^k$ le noyau de la multiplication par $\tilde{P}.P_0$, pour $k \leqslant 9$: on a $W''_k \supset W_k$, et W''_k/W_k est le noyau de la multiplication $m^k_P\colon S^k/\tilde{W}_k \to S^{k+1}/\tilde{W}_{k+1}$. Si $\tilde{P}P_0$ est non nul dans R^{11}, W^*_9 est un hyperplan de R^9, et comme en 3.2, on a une dualité parfaite entre $R^k/\tilde{W}''_k$ et R^{9-k}/W''_{9-k}, ou encore entre $S^k/\tilde{W}''_k$ et $S^{9-k}/\tilde{W}''_{9-k}$.

Comme la multiplication par $\tilde{P}\colon S^4/\tilde{W}'_4 \to S^5/\tilde{W}'_5$ est nulle, et que φ_5 est injective, on a $\operatorname{Im}\varphi_4 \subset \tilde{W}''_3/\tilde{W}_3$; comme $\dim S^4/\tilde{W}'_4 = 9$, on a donc: (*) $\dim \tilde{W}''_3 \geqslant \dim \tilde{W}_3 + 9$, soit encore $\operatorname{codim} \tilde{W}''_3 \leqslant 11 - \dim \tilde{W}_3$, et l'égalité entraîne $\tilde{W}''_3 \subset I_C(3)$, car alors $\tilde{W}''_3/\tilde{W}_3 = \operatorname{Im}\varphi_4 \subset I_C(3)/\tilde{W}_3$.

3.25. Maintenant $\tilde{W}''_3 = S^3$ est impossible; en effet, cela entraînerait $\tilde{W}''_2 = S^2$, d'où $\tilde{P}.S^2 \subset \tilde{W}_3$; on aurait alors: $\dim I_C(3)/\tilde{W}_3 \leqslant 3$, ce qui contredit l'inégalité: $\dim I_C(3)/\tilde{W}_3 \geqslant 9$, due à l'injectivité de φ_4.

Plus généralement, de $\tilde{P}.\tilde{W}''_2 \subset \tilde{W}_3$, on tire: $\dim \tilde{W}''_2 \leqslant \dim \tilde{W}_3$, et donc $\operatorname{codim} \tilde{W}''_2 \geqslant 10 - \dim \tilde{W}_3$.

D'autre part, pour $\tilde{Q}$ générique dans S^1, la multiplication par $\tilde{Q}$, $m''^2_Q: S^2/\tilde{W}''_2 \to S^3/\tilde{W}''_3$ est injective; en effet, par la dualité 3.24, il suffit de voir que $m''^6_Q\, S^6/\tilde{W}''_6 \to S^7/\tilde{W}''_7$ est surjective, ou encire $\tilde{W}''_7|_Q = H^0(\mathcal{O}_Q(7))$, où Q est le plan d'équation $\tilde{Q}$. Mais de $\operatorname{codim} \tilde{W}''_3 \leqslant 10$, on tire $\operatorname{codim} \tilde{W}''_6 \leqslant 10$, d'où par [4] $\operatorname{codim}(\tilde{W}''_6|_Q) \leqslant 1$, et comme $\tilde{W}''_6$ est sans point base, $\tilde{W}''_7|_Q = H^0(\mathcal{O}_Q(7))$, comme souhaité.

De $\dim S^2/\tilde{W}''_2 \geqslant 10 - \dim \tilde{W}_3$, $\dim S^3/\tilde{W}''_3 \leqslant 11 - \dim \tilde{W}_3$, et m''^2_Q injective pour $\tilde{Q}$ générique, on déduit: $\operatorname{codim} \tilde{W}''_{3/Q} \leqslant 1$, pour Q générique. Cela entraîne que $\tilde{W}''_3$ n'est pas contenu dans $I_C(3)$, et donc que l'égalité est impossible dans (*), soit finalement $\dim S^3/\tilde{W}''_3 \leqslant 10 - \dim \tilde{W}_3 \leqslant \dim S^2/\tilde{W}''_2$ et: la multiplication m''^2_Q est un isomorphisme pour $\tilde{Q}$ générique dans S^1, avec $\dim S^2/\tilde{W}''_2 \leqslant 9$. Cette dernière possibilité mène à une contradiction de la façon suivante: introduisons encore l'hypersurface $\mathcal{D}$ de S, constituée des polynômes $\tilde{Q}$ tels que m''^2_Q ne soit pas un isomorphisme; comme dans le paragraphe 3.7 de la preuve du Lemme 3.6, on a: pour $\tilde{Q} \in \mathcal{D}$, $\operatorname{codim} \tilde{W}''_6|_Q = \operatorname{codim} \tilde{W}''_7|_Q > 0$, ce qui entraîne, puisque $\tilde{W}''_6$ est sans point base, $\operatorname{codim} \tilde{W}''_6|_Q \geqslant 7$, et donc $\dim \operatorname{Ker} m''^2_Q \geqslant 7$; on en déduit que $\mathcal{D}$ est un hyperplan multiple, soit $\mathcal{D}_{\mathrm{red}} = I_x(1) \subset S^1$, pour un point x de $\mathbb{P}^3$, et que les éléments $\tilde{Q}$ de $I_x(1)$ satisfont: $Q^3.S^2 \subset \tilde{W}''_5$. On vérifie facilement que $J^9 + I^3_x(9) = S^9$, et cela contredit $J^9 + I^3_x(9) \subset \tilde{W}''_9$, qui est un hyperplan de S^9, par 3.24 et 3.25.

Note ajoutée sur épreuve

Dans son article intitulé "The Noether-Lefschetz locus of regular elliptic surfaces with section and $p_g \geq 2$", (Amer. J. of Math. 112 (1990)), David Cox a mené un calcul très similaire à celui de §I, dans le cas des surfaces elliptiques, et qui lui permet de la même façon d'étudier à l'ordre deux "le défaut de codimension" des composantes du lieu de Noether-Lefschetz.

Bibliographie

[1] Carlson, J. and Donagi, R., Hypersurfaces variations are maximal I, *Invent. Math.* 89, 37–374 (1987).

[2] Carlson, J. and Griffiths, P., Infinitesimal variations of Hodge structures and the global Torelli problem, dans "Géométrie Algébrique", Angers 5–76 Sijthoff and Northoff (1980).

[3] Ellingsrud, G., Gruson, L., Peskine, C. and Stomme, S.A., On the normal bundle of curves on smooth projective surfaces, *Invent. Math.* 80, 181–184 (1985).

[4] Green, M., Macaulay representations and hyperplane restrictions. Preprint.

[5] Green, M., Koszul cohomology and the geometry of projective varieties II, *J. Diff. Geom.* 2, 279–288 (1984).

[6] Green, M., A new proof of the explicit Noether-Lefschetz theorem, *J. Diff. Geom.* 27, 155–159 (1988).

[7] Green, M., Components of maximal dimension in the Noether-Lesfchetz locus, *J. Diff. Geom.* 29, 295–302 (1989).

[8] Griffiths, P., On the periods of certain rational integrals, I, II, *Ann. of Math.* 90, 460–541 (1969).

[9] Griffiths, P. and Harris, J., Infinitesimal variations of Hodge structures II, *Compo. Math.* 207–265, vol. 50 (1983).

[10] Griffiths, P. and Harris, J. Algebraic Geometry and local differential geometry, *Ann. Scient.* Ec. Norm. Sup. 4ème série, t. 12, 355–442 (1979).

[11] Hulek, K. and Harris, J., On the normal bundle of curves on complete intersection surfaces, *Math. Ann.* 271, 31–51 (1985).

[12] Lopez, A., On the Picard group of projective surfaces, P.H.D. Thesis, Brown University.

[13] Miranda, R., Ciliberto, C. and Harris, J., General components of the Noether-Lefschetz locus and their density in the space of all surfaces, *Math. Ann.* 282, 667–670 (1988).

[14] Voisin, C., Une précision concernant le théorème de Noether, *Math. Ann.* 280, 605–611 (1988).

[15] Voisin, C., Composantes de petite codimension du lieu de Noether-Lefschetz, *Comm. Math.* Helv 64 (1989) 515–526.

[16] Griffiths, P. and Harris, J., On the Noether-Lefschetz theorem and some remarks on codimension- two cycles, *Math. Ann.* 271, 31–51 (1985).

[17] Gotzmann, G., Eine Bedingung fur die Flachheit und das Hilbert polynom eines Graduierten Ringes, *Math. Z.* 158 (1978) 61–70.