RELATIONS DANS L'ANNEAU DE CHOW DE LA SURFACE DES CONIQUES DES VARIÉTÉS DE FANO, ET APPLICATIONS

By Claire Voisin

Introduction. On se propose dans ce travail d'étudier l'anneau de Chow de la surface des coniques de certaines variétés de Fano, et d'en déduire la généralisation de certains faits topologiques établis par Clemens et Griffiths pour la cubique de dimension trois [8], par des méthodes très différentes :

a) L'application d'Abel-Jacobi induit un isomorphisme $\Phi : \mathrm{Alb}\,\Sigma \to JX$, où Σ est la surface des droites de la cubique X, et JX est sa jacobienne intermédiaire.

b) La classe de $\Phi(\Sigma)$ dans JX est égale à $\Theta^3/3!$, où Θ est la polarisation naturelle de JX.

La méthode utilisée met l'accent sur le fait suivant, qui est presque équivalent à b) : le composé $D = {}^t\Phi \circ \Phi : \mathrm{Alb}\ \Sigma \to JX \xrightarrow{\sim} JX^\vee \xrightarrow{{}^t\Phi} \mathrm{Pic}^0\Sigma$, met une polarisation sur $\mathrm{Alb}(\Sigma)$, ou encore une forme d'intersection alternée sur le groupe $H_1(\Sigma, \mathbf{Z})$, soit une application antisymétrique, notée encore D, $D : H^1(\Sigma, \mathbf{Z})^* \to H^1(\Sigma, \mathbf{Z})$; alors le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} \Lambda^2 D : \Lambda^2 H^1(\Sigma, \mathbf{Z})^* \arrow[r] & \Lambda^2 H^1(\Sigma, \mathbf{Z}) \arrow[d, "\text{cup-produit}"] \\ H^2(\Sigma, \mathbf{Z})^* \arrow[u, "\text{dual du cup-produit}"] \arrow[r, "\text{dualité de Poincaré}", "\sim"'] & H^2(\Sigma, \mathbf{Z}) \end{tikzcd}$$

ce qui fournit une explication naturelle de la dualité D.

En fait la méthode proposée ici ne permet de montrer la commutativité de ce diagramme qu'au niveau des formes holomorphes (en

Manuscript received 1 October 1988.
American Journal of Mathematics 112 (1990), 877–898.

remplaçant la dualité de Poincaré par la dualité de Serre). Cette méthode consiste à établir des relations dans l'anneau de Chow de la surface Σ (Proposition 1.1), puis à appliquer la théorie de Mumford [13] des traces de formes holomorphes induites par des correspondances définies à équivalence rationnelle près.

Malheureusement, le champ d'application de cette méthode est limité essentiellement aux variétés de Fano *non tétragonales*, pour lesquelles la correspondance $I \subset \Sigma \times \Sigma$, $I = \{C, C') \in \Sigma \times \Sigma / \# C \cap C' \geq 2\}$ est vide, ce qui exclut par exemple les intersections complètes d'indice un, comme l'intersection de trois quadriques dans $\mathbf{P}^6$.

On obtient cependant des conséquences intéressantes dans le cas des variétés de Fano pour lesquelles la correspondance I définie plus haut est involutive, ce qui est le cas par exemple du double solide d'indice deux. Le plan de ce travail est le suivant : dans la Section 1 on établit (Proposition 1.1) la relation entre les applications $D : CH_0(\Sigma) \to \mathrm{Pic}^0\Sigma$ et $I : CH_0(\Sigma) \to CH_0(\Sigma)$, définies ci-dessus; dans la Section 2, on étudie géométriquement la correspondance I et on exhibe des exemples simples de variétés de Fano pour lesquelles la correspondance I est vide ou involutive, auquel cas la formule 1.1 décrit complètement la structure multiplicative de l'anneau de Chow de Σ. Dans la Section 3, on se restreint aux cas où I est simple et on décrit les conséquences topologiques de la formule 1.1.

0. Notations et définitions.

0.0. X dénote dans la suite une variété de Fano (i.e. une variété de dimension trois dont le fibré anticanonique $-K_X$ est ample). On supposera que $-K_X$ est très ample et que le modèle projectif de X donné par le plongement anticanonique est intersection de quadriques.

On définit alors les coniques de X comme étant les coniques de $\mathbf{P}^{g+1}$ contenues (schèmatiquement) dans X. Si l'indice de X (c'est-à-dire le plus grand entier divisant la classe de K_X dans Pic X), est égal à deux, les coniques de X sont simplement les courbes de degré un (ou droites) de X par rapport au système linéaire $|H|$, où H satisfait : $K_X = -2H$ dans Pic X.

0.1. On notera Σ la variété des coniques de X; on fera les hypothèses suivantes :

i) X est couverte par des coniques, et une conique générique est lisse.

ii) Σ est une surface lisse.

iii) Soit $\mathscr{C} \subset \Sigma \times X$ la conique universelle paramétrée par Σ; alors $\mathscr{C}$ a un nombre fini de points singuliers.

On notera $p : \mathscr{C} \to \Sigma$, $\pi : \mathscr{C} \to X$, les deux projections.

0.2. *Remarque*. Pour les variétés de Fano les plus naturelles, c'est-à-dire les intersections complètes, il est aisé de vérifier que les hypothèses 0.1 sont satisfaites pour le membre général de chaque famille.

0.3. L'inclusion $\mathscr{C} \subset \Sigma \times X$ fournit l'application d'Abel-Jacobi :

$$\Phi : \mathrm{Alb}\,\Sigma \to JX, \qquad \text{où} \quad JX = H^2(\Omega_X)/H^3(X, \mathbf{Z})$$

est la jacobienne intermédiaire de X, principalement polarisée par le cup-produit sur $H^3(X, \mathbf{Z})$.

On a donc une application duale ${}^t\Phi : JX = JX^\vee \to \mathrm{Pic}^0\Sigma$, et l'on notera $D = {}^t\Phi \circ \Phi : \mathrm{Alb}\,\Sigma \to \mathrm{Pic}^0\Sigma$. D est appelée l'application d'incidence.

0.4. A chaque point $C \in \Sigma$ on associe la courbe $D_C \subset \Sigma$ des coniques de X rencontrant C. Si C est générique, les hypothèses faites en 0.1 entraînent :

i) C est isomorphe à $\mathbf{P}^1$.

ii) Le fibré normal de C dans X est isomorphe à $\mathcal{O}_C \oplus \mathcal{O}_C$.

iii) C n'appartient pas à D_C.

0.5. Il est facile de voir que l'application $D : \Sigma \to \mathrm{Pic}\,\Sigma$, ainsi définie induit l'application D de 0.3 : $D : \mathrm{Alb}\,\Sigma \to \mathrm{Pic}^0\Sigma$.

0.6. Les hypothèses faites en 0.0 entraînent que si C est une conique lisse et si $C' \neq C$, on a seulement les trois possibilités suivantes : $C \cap C' = \emptyset$, $\#C \cap C' = 1$, $\#C \cap C' = 2$. On supposera qu'il n'y a qu'un nombre fini de coniques C' touchant C en deux points, et qu'il n'y a pas de conique tangente à C, lorsque C est générique.

Définissons alors pour $C \in \Sigma$ générique, le cycle I_C suivant : $I_C =$

$\Sigma_i\, n_i C_i$, où C_i parcourt l'ensemble des coniques touchant C en deux points et la multiplicité n_i est définie comme suit : C et C_i se rencontrent en deux points distincts p et q : la courbe D_C est singulière au point C_i et chacun des points p et q définit une branche locale $D_{C,p}$, $D_{C,q}$ de la courbe D_C au voisinage de C_i, on définit alors n_i comme la multiplicité d'intersection des branches $D_{C,p}$ et $D_{C,q}$ au point C_i.

0.7. L'application $I : C \to I_C$, définie pour C générique, se prolonge en une correspondance sur Σ, induisant une application notée encore $I : CH_0(\Sigma) \to CH_0(\Sigma)$, où $CH_0(\Sigma)$ dénote le groupe des cycles de dimension zéro de Σ, modulo l'équivalence rationnelle.

0.8. Soit $S \subset X$ une section hyperplane générique (une surface $K3$); les hypothèses faites en 0.1 entraînent que $\pi^{-1}(S)$ est lisse, et que S ne contient ni droite ni conique de sorte que la restriction de p à $\pi^{-1}(S)$ fait de $\pi^{-1}(S)$ un revêtement double de la surface Σ branché le long d'une courbe $B \subset \Sigma$. Un tel revêtement est déterminé par le choix d'un diviseur R de Σ, satisfaisant : $B \in |2R|$. Il est facile de voir que la classe d'équivalence linéaire de R ne dépend pas du choix de S mais seulement du fibré en coniques $\mathscr{C}$, et du diviseur $\pi^*(\mathcal{O}_X(1)$ de $\mathscr{C}$.

1. Relation entre *D* et *I*. On se propose dans cette section d'établir la relation suivante entre les applications $D : CH_0(\Sigma) \to CH_1(\Sigma)$ (définie en 0.5) et $I : CH_0(\Sigma) \to CH_0(\Sigma)$ (définie en 0.7) :

1.1. PROPOSITION. *Il existe une constante $K \in CH_0(\Sigma)$, telle que pour $C \in \Sigma$ on ait l'égalité* : $2(C + I(C)) = D_C^2 - R \cdot D_C + K$, *dans* $CH_0(\Sigma)$.

Avant de donner la preuve de la Proposition 1.1, on établira les Lemmes 1.2 et 1.3 suivants :

1.2. LEMME. *L'inclusion $\mathscr{C} \subset \Sigma \times X$ induit une application constante :*

$$p_*\pi^* : CH_0(X) \to CH_0(\Sigma).$$

Démonstration. Supposons d'abord que le degré de π est égal à 1; alors la surface Σ est dominé par une désingularisation $\tilde{\mathscr{C}}$ de $\mathscr{C}$, et $\tilde{\mathscr{C}}$ est birationnellement équivalente à X. Comme $H^0(\Omega_X) = H^0(\Omega_X^2) = 0$, on a : $H^0(\Omega_\Sigma) = H^0(\Omega_\Sigma^2) = 0$. D'autre part, Σ est dominée par une surface birationnellement équivalente à une surface $K3$ (une section hyperplane de X). Donc Σ n'est pas de type général, et, d'après [6], on a $CH_0(\Sigma) = \mathbf{Z}$. Le lemme est donc vrai dans ce cas.

Si d'autre part le degré de π est au moins deux; soit x un point générique de X, et soit C une conique lisse passant par x; comme il existe une conique $C' \neq C$ passant par x, la courbe D_C est non vide. Soit Γ une courbe de Σ, rencontrant D_C en un nombre fini de points, ne passant pas par C, et telle que $T = \pi(p^{-1}(\Gamma))$ soit une surface dans X. Alors C n'est pas contenue dans T, et rencontre T en un nombre fini de points. On en déduit que pour y dans un ouvert de Zariski de X contenant x, il existe une conique c_y passant par y et rencontrant T. Donc y est rationnellement équivalent à un cycle supporté sur T. Comme T est dominée par une surface fibrée en coniques sur Γ, on en déduit enfin qu'il existe une courbe $\Gamma' \subset X$, telle que l'application naturelle : $CH_0(\Gamma') \to CH_0(X)$ soit surjective, ce qui entraîne : $CH_0(X) \simeq \mathrm{Alb}\, X \oplus \mathbf{Z} \approx \mathbf{Z}$. Le lemme est donc encore vrai dans ce cas.

1.3. Lemme. *Soit $C \subset X$ une conique générique, et soit $S \subset X$, une section hyperplane contenant C générique. On a :*

a) *S est lisse.*
b) *$\pi^{-1}(S)$ est lisse.*
c) *$\pi^{-1}(C) = C_1 \cup D'_C$, où $C_1 \simeq C$ est la fibre de p au-dessus du point $C \in \Sigma$, et $C_1 \cap D'_C = \emptyset$.*
d) *La courbe $C_1 \subset \pi^{-1}(S)$ est une (-2)-courbe (une courbe rationnelle lisse de self-intersection -2).*
e) *L'application $p : \pi^{-1}(S) \to \Sigma$ s'identifie au composé :*

$$\pi^{-1}(S) \xrightarrow[\tau]{} \Sigma_1 \xrightarrow[r]{} \Sigma,$$

où r est un revêtement double ramifié au-dessus d'une courbe $B \in |2R|$, ayant pour seule singularité un point double ordinaire au point $C \in \Sigma$, et τ est l'éclatement de Σ_1 en son unique point singulier $r^{-1}(C)$.

Démonstration. a) L'hypothèse faite sur Σ en 0.1 entraîne que X ne contient pas de plan. Chaque conique C de X détermine un plan $P_C \subset \mathbf{P}^{g+1}$, et comme $X \subset \mathbf{P}^{g+1}$ est intersection de quadriques, on doit avoir $P_C \subset X = C$. On en déduit que $C \subset X$ est l'intersection des section S hyperplanes de X contenant C. Par Bertini, une telle section S générique est lisse en dehors de C. Enfin, comme la dimension de l'espace tangent de Zariski de C est au plus 2 en chacun de ses points, on voit facilement qu'une section hyperplane contenant C générique est lisse le

b) D'après l'hypothèse faite en 0.1, $\mathscr{C}$ a un nombre fini de points singuliers et il est facile de voir que pour C générique $\pi^{-1}(C)$ ne rencontre pas l'un de ces points. On en déduit encore par le théorème de Bertini que pour S générique contenant C, $\pi^{-1}(S)$ est lisse en dehors de $\pi^{-1}(C)$. Comme une conique générique a pour fibré normal $N_C X \simeq \mathcal{O}_C \oplus \mathcal{O}_C$ et que cette condition entraîne que π est un isomorphisme local d'un voisinage de C_1 dans $\mathscr{C}$ sur un voisinage de C dans X, le diviseur de ramification de π ne domine pas Σ, et est projeté par p sur une courbe $\Gamma_1 \subset \Sigma$. On choisit C telle que la courbe D_C rencontre Γ_1 en un nombre fini de points et donc que π soit ramifiée en un nombre fini de points sur D'_C. Enfin si C satisfait la condition : C ne rencontre pas de double droite (conique non réduite), et C ne contient pas de points sur lesquels il passe deux droites de X, on voit facilement qu'en chacun des points de D'_C où π est ramifiée, π est au moins de rang 2. Les hypothèses faites en 0.1 entraînent facilement que ces dernières conditions sont satisfaites pour C générique.

Maintenant si C est lisse, a pour fibré normal $\mathcal{O}_C \oplus \mathcal{O}_C$, et satisfait ces dernières conditions, choisissons S lisse contenant C, et telle que son espace tangent en chaque point image d'un point $y \in D'_C$ où π est ramifiée coupe transversalement $\pi_*(T\mathscr{C}_{(y)})$; alors $\pi^{-1}(S)$ est non singulière le long de C_1, puisque π est un isomorphisme local au voisinage de C_1, $\pi^{-1}(S)$ est non singulière aux points de D'_C où π est non ramifiée, et l'hypothèse de transversalité entraîne que $\pi^{-1}(S)$ est non singulière aux points de D'_C où π est ramifiée. Donc $\pi^{-1}(S)$ est non singulière le long de $\pi^{-1}(C)$ et b) est démontré.

c) Si C a pour fibré normal $\mathcal{O}_C \oplus \mathcal{O}_C$ dans X et est lisse, π induit un isomorphisme d'un voisinage de C_1 dans $\mathscr{C}$ sur un voisinage de C dans X, donc $\pi^{-1}(C)$ est lisse au voisinage de C_1 et $C_1 \cap D'_C = \emptyset$.

d) De même $\pi_{|\pi^{-1}(S)}$ induit un isomorphisme d'un voisinage de C_1 dans $\pi^{-1}(S)$ sur un voisinage de C dans S. Comme C est une courbe rationnelle lisse et S est une surface $K3$, C est une (-2)-courbe de S et donc C_1 est une (-2)-courbe de $\pi^{-1}(S)$.

e) La courbe $C_1 \subset \pi^{-1}(S)$ se contracte donc sur une singularité quadratique ordinaire : soit $\tau : \pi^{-1}(S) \to \Sigma_1$; il est clair que $p : \pi^{-1}(S) \to \Sigma$, se factorise par τ, d'où $r : \Sigma_1 \to \Sigma$, telle que $p = r \circ \tau$. Si S est générique, les hypothèses 0.0 et 0.1 entraînent que S ne contient pas de droite et pas d'autre conique que C; donc r est finie de degré deux. Le calcul des données définissant le revêtement double r peut se faire en dehors du point isolé $C \in \Sigma$, et le diviseur R est le même diviseur que dans 0.8 car au-dessus de $\Sigma \backslash \{C\}$, $\pi^{-1}(S) \subset \mathscr{C}$ appartient au système linéaire $|\pi^*(\mathcal{O}_X(1)|$ sur $\mathscr{C}$. L'assertion concernant la courbe B résulte du fait que Σ_1 a une seule singularité ordinaire en $r^{-1}(C)$.

Preuve de la Proposition 1.1. Choisissons C et S, satisfaisant les conclusions du Lemme 1.3. Supposons de plus que C satisfait l'hypothèse 0.6 de sorte qu'il existe un nombre fini de coniques rencontrant C en deux points, qui sont distincts. La courbe D'_C est alors isomorphe à D_C, sauf au-dessus du support de I_C (cf. 0.6) où la situation est la suivante : Soit C' rencontrant C en deux points p et q; les points $p' = (C', p)$ et $q' = (C', q)$ de $\Sigma \times X$ sont par définition sur la courbe $D'_C \subset \pi^{-1}(S)$. La courbe D'_C ne rencontre pas la courbe C_1, d'après 1.3.c), et s'identifie via τ, à une courbe notée encore D'_C de Σ_1. Soit σ l'involution qui agit sur le revêtement double $\Sigma_1 \xrightarrow{r} \Sigma$. Alors $\sigma(p') = q'$; le support de I_C est donc disjoint de la courbe B de ramification de r, et r induit un isomorphisme local de $D'_C \cup \sigma(D'_C)$ sur D_C, au voisinage de p'; par cet isomorphisme, la branche D'_C de $D'_C \cup \sigma(D'_C)$ est envoyée sur la branche (locale) $D_{C,p}$ de D_C (cf. 0.6), et la branche $\sigma(D'_C)$ sur la branche $D_{C,q}$. Par la définition du cycle I_C, on a donc : $D'_C \cdot \sigma(D'_C) = r^*(I_C) + Z$, où Z est supporté sur $D'_C \cap B'$, et $B' \subset \Sigma_1$ est la courbe de ramification de r. Comme $D_C{}'$ est isomorphe à D_C en dehors de $r^{-1}(I_C)$ et ne passe pas par le point singulier de Σ_1, on a : $Z = D'_C.\ B'$, et, par définition du diviseur R, Z est linéairement équivalent à $r^*(R) \cdot D'_C$. D'où finalement, puisque ces cycles sont supportés en dehors du point $r^{-1}(C)$ de Σ_1, l'égalité suivante dans le groupe de Chow de $\pi^{-1}(S)$:

$$(*) \qquad (p^*(D_C) - D'_C) \cdot D'_C = p^*(I(C)) + p^*(R) \cdot D'_C,$$

obtenue en notant que $\tau^*(\sigma(D'_C))$ est égal à $p^*(D_C) - D'_C$.

Par ailleurs, considérons $\pi : \pi^{-1}(S) \to S$; $C \subset S$ est une (-2)-courbe de S; on a donc : $\mathcal{O}_S(C)_{|C} = \mathcal{O}_C(-2x)$, pour $x \in C$. On en déduit : $p_*(\pi^*(C^2)) = -2D_x$, où D_x est le cycle de Σ des coniques passant par x; d'après le Lemme 1.2 la classe de ce cycle dans $CH_0(\Sigma)$ ne dépend pas du point $x \in X$. On a enfin : $\pi^*(C^2) = (\pi^*C)^2 = (C_1 + D'_C)^2 = C_1^2 + D'^2_C$ puisque par 1.3.c) $C_1 \cap D'_C = \emptyset$. Utilisant l'égalité (*), on obtient :

$$(**)\quad \begin{aligned}&\pi^*(C^2) = C_1^2 + p^*(D_C)\cdot D'_C - p^*(I(C)) - p^*(R)\cdot D'_C,\\ &\text{dans}\quad CH_0(\pi^{-1}(S)).\end{aligned}$$

Comme C_1 est une (-2)-courbe de $\pi^{-1}(S)$, il est facile de vérifier que : $p_*(C_1^2) = -2C$ dans $CH_0(\Sigma)$. Appliquant p_* à l'égalité (**), on obtient donc : $-2D_x = -2C + D_C^2 - 2I(C) - R\cdot D_C$, compte tenu de : $p_*(D'_C) = D_C$, et $p_*p^* = 2Id$ dans $CH_0(\Sigma)$. Posant $K = 2D_x$, la formule 1.1 est donc démontrée.

2. Etude de la correspondance *I*; Exemples. Par construction la correspondance I est non vide si et seulement s'il existe deux coniques se rencontrant transversalement en deux points dans X. La réunion de ces deux coniques est alors une courbe elliptique de degré 4, intersection de deux quadriques dans $\mathbf{P}^3$. C'est une courbe nodale à condition que chaque conique soit réduite et que leurs points d'intersection ne soient pas situés sur un point singulier de l'une des deux coniques. Si $X \subset \mathbf{P}^{g+1}$ est intersection de quadriques, et satisfait l'hypothèse 0.1 on a :

2.1. LEMME. *Soit E une courbe elliptique de degré 4, nodale, contenue dans X. Alors il existe une section hyperplane lisse de X, contenant E.*

Démonstration. E engendre un sous-espace de $\mathbf{P}^{g+1}$ de dimension 3, soit $\mathbf{P}_E^3$, et dans $\mathbf{P}_E^3$, E est l'intersection complète de deux quadriques (sinon, E a une composante plane cubique, et si X est intersection de quadriques, X contient un plan; cela contredit 0.1); si la restriction à $\mathbf{P}_E^3$ du système de quadriques contenant X est de rang deux, on a $\mathbf{P}_E^3 \cap X = E$. Mais si son rang est inférieur à deux, X contient une quadrique de dimension deux, ce qui contredit l'hypothèse faite sur Σ en 0.1. Donc $\mathbf{P}_E^3 \cap X = E$, et E est l'intersection des sections hyperplanes de X qui contiennent E; on conclut alors par le théorème de Bertini comme en 1.3.a) en tenant compte du fait que la dimension de l'espace tangent de Zariski de E est partout au plus égale à deux.

2.2. Maintenant, si la courbe elliptique E est contenue dans une section hyperplane lisse S de X, S est une surface $K3$, et E se meut dans un pinceau sans point base de S : en effet, si $|E|$ a une partie fixe, la partie mobile est une courbe rationnelle, ce qui est absurde (on utilise la fait que E est intersection de deux quadriques dans $\mathbf{P}_E^3$). On en déduit que X contient des courbes elliptiques de degré quatre lisses. D'autre part, le système linéaire $|E|$ sur S, trace un g_4^1 sur les section hyperplanes lisses de S. Donc une section hyperplane lisse de S est tétragonale, et l'on vérifie facilement qu'on a en fait : toute section courbe lisse Γ de X est tétragonale.

2.3. Notons enfin que l'existence d'une courbe elliptique de degré 4 dans X a la conséquence suivante sur les sysygies de X : les relations entre les quadriques contenant X ne sont pas engendrées par les relations linéaires (i.e. de la forme $\Sigma_i P_iQ_i = 0$, avec $\deg P_i = 1$). Je ne sais pas dans quelle mesure il y a une réciproque.

2.4. Si le genre g de X est au moins égal à 7, le nombre de Brill-Noether pour un g_4^1 sur une courbe de genre au moins 7 étant négatif, le théorème de [10] entraîne : si toute section courbe Γ de X est tétragonale, toute section hyperplane lisse S de X satisfait : Pic S n'est pas engendré par $c_1(\mathcal{O}_S(\Gamma))$. Au vu des énoncés du type Noether, il est naturel de penser que si X est d'indice un, a son groupe de Picard engendré par $c_1(K_X)$, et est de genre au moins 7, X ne contient pas de courbes elliptiques de degré 4. La proposition suivante montre que c'est bien le cas.

2.5. PROPOSITION. *Si X est de genre au moins* 7, *et satisfait* Pic $X = \mathbf{Z}$, *engendré par* $c_1(-K_X)$, *X ne contient pas de courbes elliptiques de degré* 4.

Démonstration. On utilise la description projective de ces variétés, donnée par Mukai dans [12] : on a $g \leq 12$, et $g \neq 11$. On ne donnera la démonstration que dans le cas $g = 7$; les autres cas se traitent exactement de la même manière; toutes ces variétés sont intersection de quadriques dans leur plongement anticanonique.

Pour $g = 7$, X est décrite de la façon suivante : Soit V un espace vectoriel de dimension 9 muni d'une forme bilinéaire symétrique F non dégénérée : soit $G(4, V)$ la grassmannienne des sous-espaces U de V de dimension 4; la sous-variété Y de $G(4, V)$ constituée des espaces U totalement isotropes pour F est de dimension 10 et engendre (dans le plongement de Plücker) un espace de dimension 15; X est obtenue comme une section linéaire de Y par un sous-espace de dimension 8 de $\mathbf{P}^{15}$, soit $X = H_8 \cap Y \subset H_8$.

D'après 2.2, si X contient une courbe elliptique de degré 4, nodale, alors X contient une courbe elliptique E de degré 4 lisse, et d'après le

Lemme 2.1, on doit avoir $\mathbf{P}_E^3 \cap X = E$. Comme $X = H_8 \cap Y$, il suffit donc de prouver :

2.6. LEMME. *Si $E \subset Y$ est une courbe elliptique lisse de degré* 4, *on a* $\mathbf{P}_E^3 \cap Y \neq E$.

Démonstration de 2.6. Soit donc $E \subset Y \subset G(4, V)$ une telle courbe : E est de degré 4 dans le plongement de Plücker, et le dual du sous-fibré tautologique de $G(4, V)$ fournit donc un fibré vectoriel de rang quatre et degré 4 $\mathscr{E}$ sur E. L'application naturelle : $V^* \otimes \mathcal{O}_E \to \mathscr{E}$, donne une application $\alpha : V^* \to H^0(\mathscr{E})$, et les sections de $\mathscr{E}$ données par α engendrent $\mathscr{E}$.

Comme $\mathscr{E}$ est engendré par ses section globales, $\mathscr{E}$ est extension du fibré trivial ${\mathcal{O}_E}^3$ par un fibré inversible $\mathscr{L}$: soit $0 \to {\mathcal{O}_E}^3 \to \mathscr{E} \to \mathscr{L} \to 0$. On a deg $\mathscr{L} = 4$; cela entraîne : $h^0(\mathscr{E}) \leq 7$, et comme E est plongée dans la grassmannienne, on a aussi $\operatorname{rang}(\alpha) \geq 5$; il y a donc trois possibilités :

i) $\operatorname{rang}(\alpha) = 5$: il existe alors un sous-espace vectoriel $W \subset V$ de dimension 5 tel que l'injection $E \subset G(4, V)$ se factorise par $G(4, W)$. Les espaces paramétrés par E sont des hyperplans de W et sont totalement isotropes pour F. Comme il y en a une infinité, on a : $F_{|W} = 0$, et comme $\dim W = 5$, $\dim V = 9$, cela contredit le fait que F est non dégénérée.

ii) $\operatorname{rang}(\alpha) = 6$: il existe alors un sous-espace vectoriel $W \subset V$ de dimension 6, tel que l'injection $E \subset G(4, V)$ se factorise par $G(4, W)$. Comme W contient des sous-espaces totalement isotropes pour F de dimension 4, on a : rang $F_{|W} \leq 4$, et comme F est non-dégénérée on a $\operatorname{rang}(F_{|W}) \geq 3$; dans le premier cas les sous-espaces de W de dimension quatre totalement isotropes pour F sont paramétrés par deux coniques disjointes (dans le plongement de Plücker), et dans le second cas par une conique, ce qui contredit le fait que E est une courbe elliptique.

iii) $\operatorname{rang}(\alpha) = 7$. Dans ce cas, l'extension $0 \to {\mathcal{O}_E}^3 \to \mathscr{E} \to \mathscr{L} \to 0$ est scindée et l'on voit aisément qu'il existe un espace $W_1 \subset V$, de dimension 3, et un espace $W \subset V$, de dimension 7, tels que E est contenue dans la famille des sous-espace U de V contenant W_1 et contenus dans W. La réunion des espaces $U(e)$ pour $e \in E$ engendre W, et comme chaque espace $U(e)$ est totalement isotrope pour F, W_1 est contenu dans le noyau de $F_{|W}$. Comme F est non dégénérée, W_1 est donc le noyau de $F_{|W}$, et $F_{|W}$ définit une quadrique Q de rang quatre dans l'espace $\mathbf{P}(W/W_1)$. Il est évident que $p(W/W_1)$ s'identifie à $\mathbf{P}_E^3$ et que $\mathbf{P}(W/W_1) \cap Y = Q$. 2.6 est donc démontré.

2.7. Des exemples plus immédiats de variétés de Fano pour lesquelles la correspondance I est vide sont donnés par les variétés d'indice 2 pour lesquelles $K_X = -2H$, avec H très ample; en effet, dans ce cas, les coniques de X sont les droites de X dans le modèle projectif donné par $|H|$ et bien sûr, deux droites se rencontrent en au plus un point; la cubique de dimension 3, l'intersection de deux quadriques dans $\mathbf{P}^5$, l'intersection de la grassmannienne $G(2, 5) \subset \mathbf{P}^9$ par un sous-espace linéaire de dimension 6 sont de tels exemples (cf. [9]).

2.8. Il existe enfin deux variétés de Fano pour lesquelles la Proposition 1.1 a des conséquences importantes : ce sont le double solide d'indice 2 (revêtement double de $\mathbf{P}^3$ ramifié le long d'une quartique) et la variété d'indice 1 et de genre 6 $X_{10} \subset \mathbf{P}^7$ obtenue comme l'intersection de la grassmannienne $G(2, 5)$ par un sous-espace linéaire H_7 et une quadrique Q. Dans ces deux cas, on a en effet :

2.9. Lemme. *La correspondance I est involutive (donnée par une involution méromorphe de Σ), et les courbes elliptiques de degré* 4 *(par rapport au système anticanonique) sont paramétrées par une variété rationnelle de dimension quatre. En particulier l'application d'Abel-Jacobi est constante sur la famille des courbes elliptiques de degré* 4.

Démonstration. i) Dans le cas du double solide $B \xrightarrow{r} \mathbf{P}^3$, les coniques pour le système anticanonique $r^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(2))$ sont les courbes de B envoyées isomorphiquement par r sur des droites de $\mathbf{P}^3$. Si ℓ est une telle courbe, et si ℓ' rencontre ℓ en plus d'un point, ℓ et ℓ' ont même image dans $\mathbf{P}^3$, de sorte que $\ell' = i(\ell)$, où i est l'involution agissant sur B, au-dessus de $\mathbf{P}^3$. Il est facile de voir par ailleurs que les courbes elliptiques de degré 4 de B sont exactement les images réciproques par r des droites de $\mathbf{P}^3$ et sont donc paramétrées par $G(2, 4)$, une quadrique de dimension quatre.

ii) Pour $X_{10} \subset \mathbf{P}^7$, $X_{10} = G(2, V) \cap H_7 \cap Q$, avec $\dim V = 5$, on vérifie facilement que les courbes elliptiques de degré 4 de X sont obtenues de la façon suivante : soit $H \subset V$ un hyperplan; considérons $G(2, H) \subset G(2, V)$; c'est une quadrique de dimension quatre Q_H qui engendre un sous-espace de dimension 5, $\mathbf{P}_H^5$ de $\mathbf{P}^9$, et l'on a : $\mathbf{P}_H^5 \cap G(2, V) = Q_H$. On a alors :

$$\mathbf{P}^5_H \cap X = \mathbf{P}^5_H \cap H_7 \cap Q \cap G(2, V) = \mathbf{P}^5_H \cap H_7 \cap Q \cap Q_H;$$

comme X ne contient pas de plan, ni de quadrique de dimension deux, ni d'intersection de deux quadriques dans $\mathbf{P}^4$, on doit avoir : $\mathbf{P}^5_H \cap H_7$ est de dimension 3 (i.e. l'intersection est transversale dans $\mathbf{P}^9$), et l'intersection de Q et Q_H avec ce $\mathbf{P}^3$ est de dimension 1. C'est donc une courbe elliptique de degré 4 de X. Ces dernières sont donc paramétrées par l'espace projectif de dimension 4, $\mathbf{P}(V^*)$.

Enfin, pour voir que I est involutive, considérons une conique C générique de X. Il est facile de voir les droites paramétrées par C (par l'inclusion $C \subset G(2, V)$) décrivent une quadrique de dimension deux dans $\mathbf{P}(V)$, qui engendre un hyperplan $\mathbf{P}(H) \subset \mathbf{P}(V)$. Reprenant les notations précédentes, on a alors : $\mathbf{P}^3_H \cap X = C \cup C'$, où C' est une conique de X, rencontrant C en deux points. Il est facile de vérifier que $C' = I_C$, et donc I est bien involutive.

2.10. *Remarque.* Contrairement au cas du double solide, l'involution de Σ donnée par le graphe de I n'est pas partout définie : précisément elle n'est pas définie aux points $C \in \Sigma$ correspondant à des *coniques duales*, c'est-à-dire que la famille des droites paramétrées par C décrit un plan de $\mathbf{P}(V)$, et C est la conique duale d'une conique contenue dans ce plan.

3. Conséquences de la formule 1.1. On se propose dans cette section d'exploiter la formule 1.1 dans les cas où la correspondance I est vide ou bien involutive et telle que les cycles $C + I_C$ soient rationnellement constants dans X.

Comme conséquences immédiates de la Proposition 1.1 on a tout d'abord les corollaires suivants :

3.1. Corollaire. *Si* $I = \emptyset$, *l'application d'incidence* D : Alb $\Sigma \to$ $\mathrm{Pic}^0\Sigma$ *est une isogénie et son noyau est contenu dans les points d'ordre* 2 *de* Alb Σ.

Démonstration. De $2C = D_C^2 - R\cdot D_C + K$ dans $CH_0(\Sigma)$, on tire : $2(C - C') = (D_C + D_{C'} - R)\cdot(D_C - D_{C'})$. Notant $\rho \in NS^1(\Sigma)$ la classe (constante) $c_1(D_C + D_{C'} - R)$, on a donc : $2a(C - C') = \rho\cdot(D_C - D_{C'})$, où a est l'application d'Albanese de Σ, et ρ : $\mathrm{Pic}^0\Sigma \to$ Alb Σ est le cup-produit par $\rho \in H^2(\Sigma, \mathbf{Z})$. Le composé : Alb $\Sigma \xrightarrow{D}$

$\mathrm{Pic}^0\Sigma \xrightarrow{\rho} \mathrm{Alb}\,\Sigma$ est donc la multiplication par 2, ce qui prouve le corollaire puisque Alb Σ et $\mathrm{Pic}^0\Sigma$ ont la même dimension.

3.2. COROLLAIRE. *Si I est involutive, et satisfait : le cycle $C + I_C$ est rationnellement constant dans X, l'involution I agit par $-Id$ sur* Alb Σ.

Démonstration. Comme $C + I_C$ est rationnellement constant dans X, le diviseur $D_C + D_{I_C}$ est linéairement constant dans Σ : de $2(C + I_C) = D_C^2 - R\cdot D_C + K$ dans $CH_0(\Sigma)$, et du fait que I est involutive, on tire également :

$$2(C + I_C) = D_{I_C}^2 - R\cdot D_{I_C} + K,$$

soit :

$$4(C + I_C) = D_C^2 + D_{I_C}^2 - R\cdot(D_C + D_{I_C}) + 2K,$$

et enfin :

$$8(C + I_C) = (D_C + D_{I_C})^2 + (D_C - D_{I_C})^2 - 2R\cdot(D_C + D_{I_C}) + 4K \quad \text{dans} \quad CH_0(\Sigma).$$

Comme $D_C - D_{I_C}$ est algébriquement équivalent à zéro, on a $a((D_C - D_{I_C})^2) = 0$ et donc les cycles $C + I_C$ sont Albanese-équivalents à une constante, ce qui entraîne que I agit par $-Id$ sur Alb Σ.

Un troisième corollaire élémentaire est le suivant :

3.2. COROLLAIRE. a) *Si $I = \emptyset$, l'application d'intersection :*

$$\mu_0 : CH_1^0(\Sigma) \otimes_{\mathbf{Z}} CH_1^0(\Sigma) \to CH_0^0(\Sigma)$$

est surjective.

b) *Si I est involutive satisfait : les cycles $C + I_C$ sont rationnellement constants dans X, l'application d'intersection :*

$$\mu_0 : CH_1^0(\Sigma) \otimes_{\mathbf{Z}} CH_1^0(\Sigma) \to CH_0^0(\Sigma)$$

a pour image le groupe $CH_0^0(\Sigma)^+$.

Ici CH_1^0 et CH_0^0 dénotent les groupes des cycles algébriquement équivalents à zéro, et $CH_0^0(\Sigma)^+$ dénote le sous-groupe de $CH_0^0(\Sigma)$ des classes de cycles invariantes par I.

Démonstration. a) résulte immédiatement de la formule 1.1 avec $I = \emptyset$. b) d'après le Corollaire 3.2 I agit par $-Id$ sur $CH_1^0(\Sigma)$, donc l'image de μ_0 est contenue dans le groupe $CH_0^0(\Sigma)^+$. D'autre part la formule 1.1, est écrite en 3.2 sous la forme : $8(C + I_C) = (D_C - D_{I_C})^2 + K'$, où K' est une constante de $CH_0(\Sigma)$. Comme $D_C - D_{I_C} \in CH_1^0(\Sigma)$, et que les cycles $8(C + I_C - C' - I_{C'})$ engendrent $CH_0^0(\Sigma)^+$, on a bien le résultat désiré.

3.4. *Remarque.* Dans le cas du double solide, I est donnée par une involution partout définie et en général sans points fixes. Dans le cas de la variété $X \subset \mathbf{P}^7$ étudiée en 2.8, 2.9, après éclatement des points d'indétermination de l'involution méromorphe définie par le graphe de I, on obtient une involution $\tilde{I}$ agissant en général sans points fixes sur la surface $\tilde{\Sigma}$. Dans les deux cas, la surface quotient Σ/I (resp. $\tilde{\Sigma}/\tilde{I}$) est lisse, munie d'un revêtement double non ramifié $s : \Sigma \to \Sigma/I$, (resp. $s : \tilde{\Sigma} \to \tilde{\Sigma}/\tilde{I}$) et les conclusions de 3.2 et 3.3b) se réécrivent sous la forme :

—Alb $\Sigma/I = 0$ (resp. Alb $\tilde{\Sigma}/\tilde{I} = 0$) et,
—l'image de μ_0 est égale à $s^*(CH_0^0(\Sigma/I))$, (resp. $s^*(CH_0^0(\tilde{\Sigma}/\tilde{I}))$).

3.5. Avant de tirer d'autres conséquences de la formule 1.1, on rappelle brièvement le résultat principal de [13].

Soit S une surface lisse et G une variété lisse. Soit Z un cycle relatif de codimension 2 sur $G \times S$. Pour toute deux-forme ω sur S, on a une deux forme $Z[\omega]$ sur G, qui dépend linéairement de ω et additivement de Z. Si $Z \subset G \times S$ est effectif et lisse, $Z[\omega]$ est simplement la trace $p_{1*}p_2^*(\omega)$. Si Z' est un autre cycle relatif de codimension deux sur $G \times S$, satisfaisant : $\forall g \in G$, $Z'(g) = Z(g)$ dans $CH_0(S)$, on a : $\forall \omega \in H^0(\Omega_S^2)$, $Z'[\omega] = Z[\omega]$.

3.6. Soit S une surface lisse, et G une variété lisse. Soient D et D' deux diviseurs relatifs sur $G \times S$. Soit Z le cycle relatif de codimension deux sur $G \times S$ défini par $Z = D \cdot D'$. On a le résultat suivant :

3.7. PROPOSITION. *Soit* $\omega \in H^0(\Omega_S^2)$, *et* $u, v \in TG_{(g_0)}$; *notons* $Du \in H^1(\mathcal{O}_S)$ (*resp.* $D'u, Dv, D'v$) *l'image de* u (*resp.* v) *par la différentielle au point* g_0 *de l'application induite par* D, *notée encore* $D : G \to \operatorname{Pic} S$, (*resp.* $D' : G \to \operatorname{Pic} S$); *alors* : $Z[\omega](u \wedge v) = \int_S \omega \wedge (Du \wedge D'v + D'u \wedge Dv)$.

Démonstration. Comme la proposition est locale sur G, et que les deux membres ne dépendent que de la classe d'équivalence linéaire relative de D et D', on peut supposer que $D = \Sigma_i n_i D_i$ et $D' = \Sigma_j m_j D_j'$ avec $D_i(g)$, $D_j'(g)$ effectifs, lisses et se coupant transversalement, pour tout g dans un voisinage de g_0. On a alors $Z = \Sigma_{i,j} n_i m_j D_i \cdot D_j'$, et comme $Z[\omega]$ dépend additivement de Z, on voit immédiatement qu'il suffit de prouver l'égalité pour D et D' satisfaisant ces conditions. Dans ce cas, moyennant le choix de sections $s(g) \in H^0(\mathcal{O}_S(D(g))$, (resp. $s'(g) \in H^0(\mathcal{O}_S(D'(g)))$ définissant les diviseurs $D(g)$ (resp. $D'(g)$), D induit une application naturelle $\alpha : TG_{(g_0)} \to H^0(\mathcal{O}_{D(g_0)}(D(g_0)))$, et la suite exacte :

$$0 \to \mathcal{O}_S \xrightarrow{s(g_0)} \mathcal{O}_S(D(g_0)) \to \mathcal{O}_{D(g_0)}(D(g_0)) \to 0,$$

induit l'application $\delta : H^0(\mathcal{O}_{D(g0)}(D(g_0))) \to H^1(\mathcal{O}_S)$ telle que : $D(u) = \delta \circ \alpha(u)$. Notons α' et δ' les applications correspondantes pour D'. Le choix de la section $s'(g_0)$ fournit également l'isomorphisme d'adjonction :

$$\Omega_S^2(D'(g_0))_{|D'(g_0)} \simeq \Omega_{D'(g_0)},$$

et donc $\omega \cdot \alpha'(u)$ et $\omega \cdot \alpha'(v)$ fournissent des sections de $\Omega_{D'(g_0)}$, tandis que $\alpha(u)_{|Z(g_0)}$ et $\alpha(v)_{|Z(g_0)}$ sont des sections de $\mathcal{O}_{Z(g_0)}(D(g_0))$, où $Z(g_0) \subset D'(g_0)$ appartient à $|D(g_0)_{|D'(g_0)}|$ et est défini par la section $s(g_0)_{|D'(g_0)}$; notant $\delta'' : H^0(\mathcal{O}_{Z(g_0)}(D(g_0)) \to H^1(\mathcal{O}_{D'(g_0)})$ la flèche de connexion associée à la suite exacte :

$$0 \to \mathcal{O}_{D'(g_0)} \xrightarrow{s(g_0)} \mathcal{O}_{D(g_0)}(D(g_0)) \to \mathcal{O}_{Z(g_0)}(D(g_0)) \to 0,$$

on a :

$$\delta''(\alpha(u)_{|Z(g_0)}) = \delta(\alpha(u))_{|D'(g_0)}$$

et les égalités :

$$\int_S \omega \wedge (Du \wedge D'v + D'u \wedge Dv)$$

$$= \int_S \omega \wedge (Du \wedge \delta'(\alpha'(v)) + \delta'(\alpha'(u)) \wedge Dv)$$

$$= \int_{D'(g_0)} \omega \cdot \alpha'(v) \wedge Du_{|D'(\gamma_0)} - \omega \cdot \alpha'(u) \wedge Dv_{|D'(g_0)}$$

$$= \int_{D'(g_0)} \omega \cdot \alpha'(v) \wedge \delta''(\alpha(u)_{|Z(g_0)}) - \omega \cdot \alpha'(u) \wedge \delta''(\alpha(v)_{|(Z(g_0)})$$

$= \mathrm{Res}_{Z(g_0)}(\omega \cdot \alpha'(v) \cdot \alpha(u)_{|Z(g_0)} - \omega \cdot \alpha'(u) \cdot \alpha(v)_{|Z(g_0)}$ où $\mathrm{Res}_{Z(g_0)}$: $H^0(\Omega_{D'(g_0)}(D(g_0))_{|Z(g_0)}) \to \mathbf{C}$ dénote le résidu géométrique construit à l'aide de la section $s(g_0)_{|D'(g_0)}$.

Comparant enfin la construction locale des application α et α', du résidu géométrique, et de la trace $Z[\omega]$, on obtient bien le résultat annoncé.

Des Propositions 1.1 et 3.6, on tire maintenant :

3.8. Proposition. a) *Si X satisfait $I = \emptyset$, on a* :

$$\forall \omega \in H^0(K_\Sigma),\ \forall c \in \Sigma,\ \forall u, v \in T\Sigma_{(c)},\ \omega(u \wedge v) = \int_\Sigma \omega \wedge Du \wedge Dv,$$

où $Du \in H^1(\mathcal{O}_\Sigma)$ dénote la différentielle de l'application $D : \Sigma \to \mathrm{Pic}\,\Sigma$ (définie en 0.5), *au point c, appliquée à u.*

b) *Si I est involutive, on a* :

$$\forall \omega \in H^0(K_\Sigma), \forall c \in \Sigma,\ \forall u, v \in T\Sigma_{(c)},$$

on a

$$(\omega + I[\omega])(u \wedge v) = \int_S \omega \wedge Du \wedge Dv.$$

Démonstration. a) De l'égalité 1.1 : $2C = D_C^2 - R \cdot D_C + K$ dans $CH_0(\Sigma)$, on déduit que si $\Delta \subset \Sigma \times \Sigma$ est le diviseur d'incidence, $Z =$

$\Delta^2 - p_2^*(R)\cdot\Delta$ est une correspondance sur $\Sigma \times \Sigma$, telle que pour tout $C \in \Sigma$, $Z(C) = p_2 \circ p_1^*(C)$ est rationnellement équivalent à $2Z'(C)$, à une constante près, où Z' est la diagonale de $\Sigma \times \Sigma$. On a donc par 3.5, $\forall\omega \in H^0(K_\Sigma)$, $Z[\omega] = 2Z'[\omega] = 2\omega$, et $Z[\omega]$ se calcule par la Proposition 3.7, donnant, après simplification par 2, l'égalité annoncée.

b) Même raisonnement, en remplaçant la diagonale dans a) par la somme de la diagonale et du graphe de I; notons que $I[\omega]$ n'est autre que $I^*\omega$, si l'on considère I comme une involution méromorphe de Σ.

3.9. Notant encore $D : H^0(\Omega_\Sigma)^* \to H^1(\mathcal{O}_\Sigma)$, l'application induite par D : Alb $\Sigma \to \mathrm{Pic}^0\Sigma$, au niveau des espaces tangents de Alb Σ et $\mathrm{Pic}^0\Sigma$, la Proposition 3.8 se réécrit encore de la façon suivante :

3.10. Dans le cas a) le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^2 D : \Lambda^2 H^0(\Omega_\Sigma)^* & \longrightarrow & \Lambda^2 H^1(\mathcal{O}_\Sigma) \\ \uparrow & & \downarrow \\ H^0(K_\Sigma)^* & \xrightarrow{\sim} & H^2(\mathcal{O}_\Sigma), \end{array}$$

où les flèches verticales sont données par le cup-produit, et la flèche du bas est la dualité de Serre. Dans le cas b) le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^2 D : \Lambda^2 H^0(\Omega_\Sigma)^* & \longrightarrow & \Lambda^2 H^1(\mathcal{O}_\Sigma) \\ \uparrow & & \downarrow \\ H^0(K_\Sigma)^* & \xrightarrow{f} & H^2(\mathcal{O}_\Sigma), \end{array}$$

où les flèches verticales sont données par le cup-produit, et f est le composé de ${}^t(Id + I)$ et de la dualité de Serre.

3.11. Corollaire. a) *Si X satisfait $I = \emptyset$, le composé $\nu \circ \Lambda^2\Phi^*$:*

$$\Lambda^2 H^1(\Omega_X^2) \to \Lambda^2 H^0(\Omega_\Sigma) \to H^0(K_\Sigma)$$

est surjectif, où ν dénote le cup-produit.

b) *Si X satisfait : I est involutive et les cycles $C + I_C$ sont rationnellement constants dans X, le composé $\nu \circ \Lambda^2\Phi^*$:*

$$\Lambda^2 H^1(\Omega_X^2) \to \Lambda^2 H^0(\Omega_\Sigma) \to H^0(K_\Sigma)$$

a pour image le sous-espace de $H^0(K_\Sigma)$ *constitué des deux-formes I-invariantes (ou encore avec les notations de* 3.4 *le sous-espace* $s^*H^0(K_{\Sigma/I})$ *de* $H^0(K_\Sigma)$).

Démonstration. a) On sait par le Corollaire 3.1 que $\Phi^* : H^1(\Omega_X^2) \to H^0(\Omega_\Sigma)$ est surjectif; il suffit donc de montrer que ν est surjectif; par passage au conjugué, il suffit de montrer que $\bar{\nu} : \Lambda^2 H^1(\mathcal{O}_\Sigma) \to H^2(\mathcal{O}_\Sigma)$ est surjectif; mais cela suit immédiatement de la commutativité du diagramme 3.10.a) et du fait que la dualité de Serre est un isomorphisme.

b) Soit $K = \operatorname{Im} \Phi^* \subset H^0(\Omega_\Sigma)$; alors le conjugué $\bar{K} \subset H^1(\mathcal{O}_\Sigma)$ est égal à Im D; il suffit donc de prouver que le composé $\bar{\nu} \circ \Lambda^2 D$ a pour image $H^2(\mathcal{O}_\Sigma)^+$; mais cela résulte de la commutativité du diagramme 3.10.b), qui entraîne que $H^2(\mathcal{O}_\Sigma)^+$ est contenu dans l'image de $\bar{\nu} \circ \Lambda^2 D$, et du Corollaire 3.2 qui entraîne l'inclusion inverse.

3.12. *Remarque.* Ces faits sont connus pour la cubique de dimension 3 et pour le double solide d'indice 2 ([8], [15]); mais les preuves qui en sont données consistent à prouver l'injectivité des applications considérées et à montrer que les deux espaces ont même dimension.

3.13. Notons que la commutativité des diagrammes de 3.10 caractérise presque les surfaces de JX de classe $\Theta^{k-2}/(k-2)!$ (cas a) et $2\Theta^{k-2}/(k-2)!$ (cas b), où $k = \dim JX = \dim H^1(\Omega_X^2)$. En effet, on a la proposition suivante :

3.14. Proposition. *Cas* a) *les deux faits suivants sont équivalents* :

i) *le composé* $\nu \circ \Lambda^2\Phi^* : \Lambda^2 H^1(\Omega_X^2) \to H^0(K_\Sigma)$ *est injectif.*
ii) *la classe de* $\Phi(\Sigma)$ *dans* JX *est égale à* $\Theta^{k-2}/(k-2)!$

Cas b) *les deux faits suivants sont équivalents* :

i) *le composé* $\nu \circ \Lambda^2\Phi^* : \Lambda^2 H^1(\Omega_X^2) \to H^0(K_\Sigma)$ *est injectif.*
ii) *la classe de* $\Phi(\Sigma)$ *dans* JX *est égale à* $2\Theta^{k-2}/(k-2)!$.

(*cette classe est dans les deux énoncés comptée avec la multiplicité donnée par le degré de* $\Phi : \Sigma \to \Sigma' \subset JX$).

Démonstration. L'hypothèse d'injectivité dans les deux cas équivaut à la surjectivité des applications duales : $\Lambda^2\Phi_* \circ {}^t\nu : H^0(K_\Sigma)^* \to \Lambda^2 H^1(\Omega_X^2)^* \simeq \Lambda^2 TJX_{(0)}$. Géométriquement, cela signifie encore :

3.15. Les vecteurs $\Phi_* u \wedge \Phi_* v$, pour $c \in \Sigma$, u, $v \in T\Sigma_{(c)}$, engendrent $\Lambda^2(TJX_{(0)}$. Notons $\bigstar : TJX_{(0)} \to H^1(\mathcal{O}_{JX})$, l'application de dualité donnée par le diviseur Θ de JX. D'après 0.3 on a : pour $c \in \Sigma$, et $u \in T\Sigma_{(c)}$, $Du = \Phi^*(\bigstar(\Phi_* u))$. L'égalité de 3.8 entraîne :

cas a) $\forall \omega \in \Lambda^2 H^0(\Omega_{JX})$, $\forall c \in \Sigma$, $\forall u$, $v \in T\Sigma_{(c)}$,

$$\begin{aligned}\omega(\Phi_* u \wedge \Phi_* v) &= \int_\Sigma \Phi^*\omega \wedge \Phi^*(\bigstar(\Phi_* u)) \wedge \Phi^*(\bigstar(\Phi_* v)),\\ &= ([\Phi(\Sigma)]\cdot \omega \wedge \bigstar(\Phi_* u) \wedge \bigstar(\Phi_* v))_{JX}\end{aligned}$$

où $[\Phi(\Sigma)]$ dénote la classe de $\Phi(\Sigma)$ dans $H^{k-2}(\Omega_{JX}^{k-2})$.

cas b) $\forall \omega \in \Lambda^2 H^0(\Omega_{JX})$, $\forall c \in \Sigma$, $\forall u$, $v \in T\Sigma_{(c)}$,

$$\begin{aligned}2\omega(\Phi_* u \wedge \Phi_* v) &= \int_\Sigma \Phi^*\omega \wedge \Phi^*(\bigstar(\Phi_* u)) \wedge \Phi^*(\bigstar(\Phi_* v)),\\ &= ([\Phi(\Sigma)]\cdot \omega \wedge \bigstar(\Phi_* u) \wedge \bigstar(\Phi_* v))_{JX}\end{aligned}$$

où l'on utilise, dans la première égalité, le fait que les formes sur Σ, provenant de $\Lambda^2 H^0(\Omega_{JX})$ sont invariantes par I.

D'après 3.15 ces égalités sont satisfaites pour tout $W \in \Lambda^2 TJX_{(0)}$, i.e. $\forall W \in \Lambda^2(TJX_{(0)}$, $\forall \omega \in \Lambda^2 H^0(\Omega_{JX})$, on a :

cas a) $\omega(W) = ([\Phi(\Sigma)]\cdot(\omega \wedge \Lambda^2(\bigstar)(W)))_{JX}$
cas b) $2\omega(W) = ([\Phi(\Sigma)]\cdot(\omega \wedge \Lambda^2(\bigstar)(W)))_{JX}$.

Or cela entraîne évidemment :

cas a) $[\Phi(\Sigma)] = \Theta^{k-2}/(k-2)!$;
cas b) $[\Phi(\Sigma)] = 2\Theta^{k-2}/(k-2)!$, prouvant l'implication i) $\Rightarrow$ ii).

la réciproque ii) $\Rightarrow$ i) est dans les deux cas une conséquence immédiate du théorème de Lefschetz.

Enonçons enfin les corollaires *numériques* suivants :

3.16. Corollaire. *Si X satisfait $I = \emptyset$, et $k = h^{2,1}(X)$ est au moins égal à* 3, *alors* $\chi(\mathcal{O}_\Sigma) = (k-1)(k-2)/2$ *entraîne* :

i) Φ : Alb $\Sigma \rightarrow JX$ *est une isogénie dont le noyau est contenu dans l'ensemble des points d'ordre* 2 *de* Alb Σ.

ii) $[\Phi(\Sigma)] = \Theta^{k-2}/(k-2)!$

Démonstration. On sait déjà que le noyau de Φ est contenu dans l'ensemble des points d'ordre 2 de Alb Σ (Corollaire 3.1); soit $n =$ dim Alb Σ; on a $n \leq k$; d'après le Corollaire 3.11, on a : $h^0(K_\Sigma) \leq n(n-1)/2$, et donc :

$$(*) \qquad \chi(\mathcal{O}_\Sigma) \leq 1 - n + n(n-1)/2 = (n-1)(n-2)/2,$$

et l'égalité a lieu si et seulement si le cup-produit $\nu : \Lambda^2 H^0(\Omega_\Sigma) \rightarrow H^0(K_\Sigma)$ est injectif. Si $\chi(\mathcal{O}_\Sigma) = (k-1)(k-2)/2$, avec $k \geq n$, et $k \geq 3$, on a nécessairement $k = n$, et Φ est surjective; de plus l'égalité a lieu dans (*), et donc ν est injectif; comme $\Phi^* : H^1(\Omega_X^2) \rightarrow H^0(\Omega_\Sigma)$ est injectif, le composé $\nu \circ \Lambda^2\Phi^*$ est injectif et la Proposition 3.14.a) entraîne alors ii).

Je remercie Arnaud Beauville de m'avoir signalé que les conclusions du Corollaire 3.16 entraînent en fait l'énoncé suivant :

3.17. Corollaire. Φ : Alb $\Sigma \rightarrow JX$ *est un isomorphisme, lorsque* i) *et* ii) *du Corollaire* 3.16 *sont satisfaits.*

Démonstration. Il suffit de prouver que $\Phi^* : H^1(JX, \mathbf{Z}) \rightarrow H^1(\Sigma, \mathbf{Z})$ fait de $H^1(JX, \mathbf{Z})$ un facteur direct de $H^1(\Sigma, \mathbf{Z})$, car cela entraîne que Φ : Alb $\Sigma \rightarrow JX$, est à fibre connexe. Mais il suffit pour cela que le composé $\Phi_*\Phi^* : H^1(JX, \mathbf{Z}) \rightarrow H^{2k-3}(JX, \mathbf{Z})$ envoie $H^1(JX, \mathbf{Z})$ en facteur direct dans $H^{2k-3}(JX, \mathbf{Z})$. Comme $\Phi_*\Phi^*$ est le cup-produit par $[\Phi(\Sigma)]$, cela est clair par ii).

Dans le cas involutif, on a enfin le corollaire suivant :

3.18. Corollaire. *Si X satisfait : I est involutive et les cycles $C + I_C$ sont rationnellement constants dans X, et si $k = h^{2,1}(X)$ est au moins égal à* 2, *les fait suivants sont équivalents* :

i) $h^0(K_\Sigma)^+ = k(k-1)/2$

ii) Φ *est surjective et la classe* $[\Phi(\Sigma)]$ *est égale à* $2\Theta^{k-2}/(k-2)!$

Démonstration. Soit n la dimension de Im $\Phi \subset JX$. D'après le Corollaire 3.11 on a :

$$(*) \qquad h^0(K_\Sigma)^+ \leq n(n-1)/2;$$

si

$$h^0(K_\Sigma)^+ = k(k-1)/2,$$

avec $k \geq n$ et $k \geq 2$, on doit avoir $k = n$ et Φ est alors surjective : de plus l'égalité doit avoir lieu dans (*), et donc le composé $\nu \circ \Lambda^2\Phi^*$: $\Lambda^2 H^1(\Omega_X^2) \to H^0(K_\Sigma)$ doit être injectif. D'après la Proposition 3.14, on a donc $[\Phi(\Sigma)] = 2\Theta^{k-2}/(k-2)!$. La réciproque est évidente.

Remarque. Si, après une éventuelle désingularisation, I correspond à une involution $\tilde{I}$ sans point fixe sur une surface $\tilde{\Sigma}$ biméromorphiquement équivalente à Σ, i) est encore équivalent à : $\chi(\mathcal{O}_\Sigma) = 2(1 + k(k-1)/2)$ puisque I agit par $-Id$ sur $H^1(\mathcal{O}_\Sigma)$. Rappelons que c'est le cas pour le double solide d'indice 2, et la variété d'indice un $X_{10} \subset \mathbf{P}^7$ (cf. Section 2).

3.19. *Exemples*. a) Pour la cubique de dimension 3, il est facile de calculer $h^{2,1}(X) = 5$, et $\chi(\mathcal{O}_\Sigma) = 6$. Les conclusions des Corollaires 3.16, 3.17 ont donc lieu dans ce cas (cf. [8]).

b) Welters a établi dans [15] les invariants de la surface Σ pour le double solide : on a : $h^0(K_\Sigma)^+ = 45$; il est facile de calculer que $h^{2,1}(X) = 10$, et donc les conclusions du Corollaire 3.18 ont lieu dans ce cas; enfin Welters montre également que $h^1(\mathcal{O}_\Sigma) = 10$, de sorte que la surjectivité de Φ entraîne que Φ est une isogénie.

UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD, FRANCE

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Beauville, Variétés de Prym et Jacobiennes intermédiaires, *Ann. Sci. E.N.S.*, **10** (1977), 309–391.

[2] ———, Sous-variétés spéciales des variétés de Prym, *??? Math.*, **45**, Fasc. 3, (1982), 357–383.

[3] S. Bloch, *Lectures on Algebraic Cycles*, Duke University, Mathematics series IV, 1980.

[4] ———, Some elementary theorems about algebraic cycles on abelian varieties, *Invent. Math.*, **37** (1976), 215–228.

[5] ——— and J. Murre, On the Chow group of certain types of Fano threefolds, *Comp. Math.*, **39**, Fasc. I (1979), 47–105.

[6] ———, A. Kas, and D. Lieberman, Zero-cycles on surfaces with $p_g = 0$, *Comp. Math.*, **33** (1976), 135–145.

[7] H. Clemens, On the surjectivity of the Abel-Jacobi map, *Annals of Math.*, **117** (1983), 71–76.

[8] ——— and P. Griffiths, The intermediate jacobian of the cubic threefold, *Annals of Math.*, **95** (1972), 281–356.

[9] V. A. Iskovskikh, Anticanonical models of three dimensional algebraic varieties, *J. Soviet. Math.*, **13** (1980), 745–814.

[10] R. Lazarsfeld, Brill-Noether-Petri without degenerations, *J. Diff. Geometry*, **23** (1986), 299–307.

[11] M. Letizia, The Abel-Jacobi map for the quartic threefold, *Invent. Math.*, **75** (1984), 477–492.

[12] S. Mukai, Fano manifolds of coindex three, (Preprint).

[13] D. Mumford, Rational equivalence of zero-cycles on surfaces, *J. Math. Kyoto Univ.*, **9** (1968), 195–204.

[14] M. Reid, Lines on Fano threefolds according to Shokurov, *Institut Mittag-Leffler Report N° 11*, 1980.

[15] G. E. Welters, Abel-Jacobi isogenies for certain types of Fano threefolds, *Mathematical Centre Tracts 141*, Amsterdam, 1981.