Vol. 57, No. 2 DUKE MATHEMATICAL JOURNAL © October 1988

SUR LA JACOBIENNE INTERMÉDIAIRE DU DOUBLE SOLIDE D'INDICE DEUX

CLAIRE VOISIN

§0. Introduction. On se propose dans ce qui suit d'étudier partiellement la géométrie du diviseur thêta de la jacobienne intermédiaire du double solide d'indice deux, c'est à dire le revêtement double de $\mathbb{P}^3$ ramifié le long d'une quartique. C'est une variété de Fano unirationnelle, (la construction d'une application rationnelle dominante $\mathbb{P}^3 \dashrightarrow B$ est décrite dans [14]), et des résultats généraux dûs à Murre et à Bloch-Murre, ([3], [11]), permettent d'affirmer que l'application d'Abel-Jacobi Φ: $A^2(B) \to J^2(B)$ est un isomorphisme, où $J^2(B) = H^2(\Omega_B)/H^3(B, \mathbb{Z})$ est une variété abélienne principalement polarisée. D'un point de vue plus géométrique, il est prouvé dans ([5], [14]) que si F dénote la surface des droites de B, Φ induit un isomorphisme: $\operatorname{Alb} F \simeq J^2(B)$.

Le point de départ de cette étude est le fait suivant, prouvé par Welters [14]: Soit Θ le diviseur thêta de J; pour u générique dans J, on a: $h^0(\Theta_{|F_u}) = 1$ où $\Theta_{|F_u}$ est le pull-back de Θ par le composé: $F \xrightarrow[\Phi]{} J \xrightarrow[t_u]{} J$, et t_u est la translation par u.

Il est clair que ceci n'est pas satisfait lorsque le translaté F_u de F par u est contenu dans Θ (et non contenu dans $\operatorname{Sing}\Theta$), puisque $|\Theta_{|\Theta}|$ est un système linéaire de dimension dix ($= \dim J^2(B)$) sur Θ, qui donne l'application de Gauss de thêta.

Faisant la remarque évidente que le base-locus du système linéaire $|\Theta_{|\Theta}|$ s'identifie à Sing Θ (puisque les sections de $\Theta_{|\Theta}$ sont les restrictions au diviseur Θ des dérivées partielles de la fonction θ), on est conduit à étudier les translatés F_u contenus dans Θ et les systèmes linéaires sur F obtenus par restriction: $H^0(\Theta_{|\Theta}) \to H^0(\Theta_{|F_u})$, pour de tels u. Les points base de ces systèmes linéaires fourniront des points singuliers de Θ.

Les étapes de cette démarche se résument de la façon suivante: En §1, on montre une sorte de réciproque à l'énoncé de Welters: Les translatés F_u sont "à peu près" ceux qui satisfont: $h^0(\Theta_{|F_u}) > 1$.

On décrit ensuite, à l'aide de l'application de Gauss de Θ, quelle doit être la forme des systèmes linéaires sur F obtenus par restriction: $H^0(\Theta_{|\Theta}) \to H^0(\Theta_{|F_u})$, ce qui mène à la construction faite en §2: dans cette seconde section, on construit une composante W de la famille des translatés de F contenus dans Θ; En §3, on décrit les singularités des systèmes $|\Theta_{|F_u}|$ correspondants; On prouve enfin en §4 qu'on a ainsi décrit une composante de $\operatorname{Sing}^2\Theta$, de codimension cinq dans la jacobienne; ceci donne la non-rationalité de B qui n'était connue que générique-

Received October 22, 1986. Revision received September 9, 1987.

ment [1]; De plus, on obtient l'interprétation suivante des cônes tangents à Θ en ces points singuliers; ce sont les quadriques de rang cinq qui découpent la surface discriminante S sur le plongement de Veronese $V(\mathbb{P}^3) \hookrightarrow \mathbb{P}^9$, modulo l'identification: $H^0(\Omega_J) \simeq H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2))$. Ceci fournit donc un théorème de Torelli "constructif" pour B, à condition de pouvoir identifier cette composante Z de $\operatorname{Sing}^2\Theta$, parmi d'éventuelles autres composantes. En fait, on peut prouver que si B est générique, un diviseur thêta symétrique possède un unique point singulier d'ordre deux et de multiplicité paire, et que Z est l'unique composante de codimension cinq de $\operatorname{Sing}\Theta$ passant par ce point. (Comme la démonstration de ce fait est fastidieuse, on a préféré ne pas l'inclure dans ce texte.) On obtient donc un énoncé de Torelli générique pour le double solide.

Note. Comme le fait remarquer le referee, on doit supposer tout au long de ce travail que la surface quartique de ramification ne contient pas de droite. En effet, dans le cas contraire, la surface F est singulière et la plupart des énoncés utilisent sa lissité; de même, certains énoncés ne seront prouvés que pour le double solide générique; Cependant, si les étapes du raisonnement ne sont pas nécessairement valables pour tous les doubles solides lisses, les résultats principaux restent vrais partout par différents arguments de continuité qui sont exposés en appendice. On fera donc systematiquement l'hypothèse que S ne contient pas de droite, sauf bien sûr dans l'appendice.

Je remercie Arnaud Beauville d'avoir attiré mon attention sur ce sujet.

NOTATIONS.

– S, la surface quartique de $\mathbb{P}^3$, ou bien son équation homogène.

– B, le double solide revêtement double de $\mathbb{P}^3$ ramifié le long de S: $B \xrightarrow{r} \mathbb{P}^3$

– $Y = \operatorname{Spec} \oplus_{n \geqslant 0} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2n)$; $B \subset Y$ est un élément de $|\mathcal{O}_Y(4)|$.

– F, la surface des droites de B; F_0, la surface des bitangentes de S.

– p: $F \to F_0$, l'application naturelle, qui fait de F un revêtement double non ramifié de F_0, donné par un point d'ordre deux $\eta \in \operatorname{Pic} F_0$.

– i, l'involution qui opère sur F, et sur B.

Les mêmes notations (indice "0", p, i) seront utilisées pour d'autres familles de courbes de B:

– $\mathscr{C}_0^{2,2}$ est la famille des intersections complètes E_0 de deux quadriques dans $\mathbb{P}^3$ qui se scindent dans B en deux composantes isomorphes à E_0.

– $\mathscr{C}^{2,2} \xrightarrow{p} \mathscr{C}_0^{2,2}$, $\mathscr{C}^{2,2} \xrightarrow{i} \mathscr{C}^{2,2}$, ont la signification évidente.

– $\mathscr{C}_0^3$ est la famille des cubiques rationnelles C_0 de $\mathbb{P}^3$ qui se scindent dans B en deux composantes isomorphes à C_0; D'où $\mathscr{C}^3 \xrightarrow{p} \mathscr{C}_0^3$, $\mathscr{C}^3 \xrightarrow{i} \mathscr{C}^3$.

– $\mathscr{C} \subset \mathscr{C}^{2,2}$ est la sous-famille constituée des courbes de la forme $C \cup \ell$, où $C \in \mathscr{C}^3$, et ℓ est une droite de B bisécante de C.

– Si $C \subset B$ est une courbe, $D_C \subset F$ est la courbe d'incidence associée à C, soit: $D_C = \{\ell \in F/\ell \cap C \neq \varnothing\}$. Si $C_0 \subset \mathbb{P}^3$, on notera de même $D_{C_0} \subset F_0$ la courbe des droites rencontrant C_0 et bitangentes à S. Si $C_0 = r(C)$ on a bien sûr $D_{C_0} = p_*(D_C)$.

– Si D est un diviseur sur F, on note φ_D: $F \dashrightarrow \mathbb{P}(H^0(\mathcal{O}_F(D))^\vee)$ l'application rationnelle associée à $|D|$. Si $D = D_C$, on emploie la notation φ_C.

– J est la jacobienne intermédiaire de B. Θ son diviseur thêta (défini à translation près par $c_1(\Theta)$, qui est donnée par le cup-produit sur $H^3(B)$).

– Φ dénote l'application d'Abel-Jacobi, définie à une constante près sur les familles F, $\mathscr{C}^{2,2}$, $\mathscr{C}^3$, $\mathscr{C}$; ces constantes seront supposées fixées, par le choix d'un cycle de degré un sur B.

– Si $W \subset J$ est une sous-variété de J, et si $u \in J$, on note $W_u = W + u \subset J$

0.1. *Résultats utilisés*: (provenant essentiellement de [14])

(a) J est isomorphe à la variété d'Albanese de F par l'application d'Abel-Jacobi. L'application $F \to \operatorname{Alb} F$ (ou encore Φ: $F \to J$) est un plongement local et est de degré un sur son image.

(b) par définition: $H^0(\Omega_J) = H^1(\Omega_B^2)$; utilisant le plongement de B dans Y comme diviseur de la section $T^2 - r^*(S)$ du fibré $\mathcal{O}_Y(4) = r^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(4))$ où T est la section canonique de $\mathcal{O}_Y(2)$, on obtient les isomorphismes: $N_BY \simeq \mathcal{O}_B(4)$, $K_B \simeq \mathcal{O}_B(-2)$, et la suite exacte: $0 \to \mathcal{O}_B(-4) \to \Omega_{Y|B} \to \Omega_B \to 0$. On en déduit la suite exacte: $0 \to \Omega_B^2 \to \Omega_{Y|B}^3(4) \to K_B(4) \to 0$; D'où: $0 \to H^0(\Omega_{Y|B}^3(4)) \to H^0(\mathcal{O}_B(2)) \to H^1(\Omega_B^2) \to 0$: l'image du premier espace ètant engendrée par la section T, on en déduit l'isomorphisme: $H^1(\Omega_B^2) \simeq H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2))$.

(c) Si C est une courbe de B, $\mathscr{F}$ une famille de déformations de C, la codifférentielle de l'application d'Abel-Jacobi Φ sur $\mathscr{F}$ au point C, Φ^*: $H^0(\Omega_J) \to \Omega\mathscr{F}_{(C)}$, apparaît dans le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
H^0(K_B(4)) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{rest}"] & H^1(\Omega_B^2) \arrow[r] \arrow[d, "\Phi^*"'] & 0 \\
H^0(K_B(4)_{|C}) \arrow[r] & H^1(N_CB \otimes K_B) \arrow[r] & H^1(N_CY \otimes K_B),
\end{tikzcd}$$

où la ligne du bas est un morceau de la suite exacte longue associée à la suite exacte normale de $C \subset B \subset Y$; on utilise ici l'isomorphisme: $H^1(N_CB \otimes K_B) = H^0(N_CB)^\vee$, et l'application naturelle: $H^0(N_CB)^\vee \to \Omega\mathscr{F}_{(C)}$. Cela donne immédiatement l'interprètation géométrique de l'application de Gauss de $F \hookrightarrow J$: Soit $\mathbb{P}^9 = \mathbb{P}(H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2)))$, et V le plongement de Veronese: $\mathbb{P}^3 \hookrightarrow \mathbb{P}^9$; la droite $\mathbb{P}(T_{F(\ell)}) \subset \mathbb{P}(TJ_{(0)})$ s'identifie à la droite $\langle V(p_1), V(p_2)\rangle$ où $\{p_1, p_2\} = \ell_0 \cap S$, $\ell_0 = p(\ell)$: ce qui s'écrit encore: l'espace conormal à F en ℓ est engendré par les quadriques s'annulant sur p_1 et p_2.

(d) $H^2(F, \mathbb{Z})$ est sans torsion; Soit $\nu = c_1(D_\ell) \in H^2(F, \mathbb{Z}) \cap H^{1,1}(F)$: le diviseur canonique K_F est de classe 6ν, les traces du diviseur Θ sur F sont de classe 3ν.

$\operatorname{Pic} F_0$ est discret, $(H^1(\mathcal{O}_{F_0}) = 0)$, i agit par (-1) sur $H^1(\mathcal{O}_F)$, et donc le plongement Φ: $F \to J$ satisfait $\Phi(\ell) + \Phi(i\ell) = \text{cste}$.

Si $\rho = c_1(p_*D_\ell) = c_1(D_{\ell_0})$, on a $c_1(K_{F_0}) = 3\rho + \eta$, ou encore $K_{F_0}(\eta) \equiv 3D_{\ell_0}$. Si $C_0 \in \mathscr{C}_0^3$, on a donc aussi: $K_{F_0}(\eta) \equiv D_{C_0}$.

§1. Systèmes linéaires de dimension positive sur F. Dans [14], il est prouvé que les traces $\Theta_{|F_u}$ du diviseur Θ sur les translatés de F satisfont: $h^0(\Theta_{|F_u}) = 1$ si u est générique dans J, et que si l'égalité est réalisée, F_u n'est pas contenue dans Θ. Soit $\mathscr{D}$ la variété des diviseurs effectifs de classe 3ν sur F. L'énoncé de Welters montre qu'il existe une composante $\mathscr{D}_1$ de $\mathscr{D}$ (évidemment unique car l'application $\mathscr{D} \to \mathrm{Pic}^{3\nu}(F)$ est de fibre connexe) qui est envoyée birationnellement sur $\mathrm{Pic}^{3\nu}(F) \simeq \mathrm{Pic}^0(F) \simeq J$. $\mathscr{D}_1$ est de dimension dix et réduite. Soit $\mathscr{D}'$ la réunion des composantes réduites de dimension dix de $\mathscr{D}$ et soit Y la sous-variété de $\mathscr{D}$ constituée des courbes de la forme $D_1 \cup p^{-1}(D_2)$, où D_2 est une courbe de F_0. On a alors:

1.1. PROPOSITION. *$\mathscr{D}$ est lisse le long de $\mathscr{D}' \setminus Y$.*

1.2. COROLLAIRE. *Si $h^0(\Theta_{|F_u}) > 1$, soit Θ contient F_u, soit $\Theta \cap F_u$ est de la forme $D_1 \cup p^-(D_2)$, avec $D_2 \subset F_0$.*

Démonstration du corollaire. Soit π l'application naturelle $\mathscr{D} \xrightarrow{\pi} J$, et soit s la section de $\pi_{|\mathscr{D}_1}$, donnée par: $s(u) = \Theta \cap F_u$; s est définie en u lorsque F_u n'est pas contenue dans Θ, et cela entraîne que l'espace $\mathbb{P}(H^0(\Theta_{|F_u})) \subset \mathscr{D}$ rencontre $\mathscr{D}_1$ en un unique point, à savoir $\Theta \cap F_u$; si $h^0(\Theta_{|F_u}) > 1$ et si $F_u \not\subset \Theta$, $\mathscr{D}$ est donc singulière au point $\Theta \cap F_u$. Comme $\mathscr{D}_1$ est réduite et de dimension dix, $\Theta \cap F_u$ est dans Y, par la proposition 1.1.

Démonstration de la proposition. Soit D un diviseur effectif de classe 3ν sur F; On a: $D + iD = K_F$, et $\chi(\mathscr{O}_F(D)) = 2$.

Par dualité de Serre, on obtient donc: $h^0(D) = h^0(iD) = h^2(D)$, et donc: $h^1(D) = 2h^0(D) - 2$. Considérons la suite exacte:

$$0 \to H^0(\mathscr{O}_F) \to H^0(\mathscr{O}_F(D)) \to H^0(\mathscr{O}_D(D)) \to H^1(\mathscr{O}_F) \xrightarrow{\alpha} H^1(\mathscr{O}_F(D)).$$

Si $D \in \mathscr{D}'$, $\mathscr{D}$ est lisse au point D si et seulement si $h^0(\mathscr{O}_D(D)) = 10$, c'est à dire: $\dim(\operatorname{Im}\alpha) = h^0(D) - 1$.

Or, par dualité de Serre: $H^1(\mathscr{O}_F(D)) \simeq H^1(\mathscr{O}_F(iD))^\vee \stackrel{i}{\simeq} H^1(\mathscr{O}_F(D))^\vee$: utilisant le fait que $D + iD$ fournit une section antiinvariante de K_F on peut montrer que cette forme bilinéaire sur $H^1(\mathscr{O}_F(D))$ est symétrique. On a aussi:

1.3. LEMME. *$\operatorname{Im}(\alpha)$ est totalement isotrope.*

Démonstration. Notons s_D la section de $\mathscr{O}_F(D)$ correspondant au diviseur D: soit ω_1 et $\omega_2 \in H^1(\mathscr{O}_F)$: on a: $(\alpha(\omega_1) \cdot \alpha(\omega_2))_{H^1(\mathscr{O}_F(D))} = (s_D\omega_1 \cdot i(s_D\omega_2))_{\text{Serre}} = ((s_D \cdot is_D) \cdot (\omega_1 \wedge \omega_2))_{\text{Serre}}$; or $s_D \cdot is_D$ est une section antiinvariante de K_F, tandis que $\omega_1 \wedge \omega_2$ est un élément invariant de $H^2(\mathscr{O}_F)$, par l'involution i. Donc le dernier terme est nul.

Par raison de dimension, on en déduit que $h^0(\mathscr{O}_D(D)) = 10$, si et seulement si $\operatorname{Im}\alpha$ est totalement isotrope maximal: soit β: $H^1(\mathscr{O}_F(D)) \to H^1(\mathscr{O}_D(D))$ l'application de restriction et ${}^t\beta$: $H^0(\mathscr{O}_D(K_F)) \to H^1(\mathscr{O}_F(iD))$, sa duale; On a: $\operatorname{Im}{}^t\beta =$

$(\operatorname{Ker}\beta)^{\perp} = (\operatorname{Im}\alpha)^{\perp}$, et donc $\operatorname{Im}\alpha$ est totalement isotrope maximal si et seulement si $\operatorname{Im}{}^t\beta$ est totalement isotrope.

Supposons que D n'est pas dans Y: alors D et iD n'ont pas de composantes communes, et $D \cdot iD$ est un ensemble i-invariant de cardinal constant, multiplicités prises en compte. Sur $\operatorname{Im}{}^t\beta$, la forme bilinéaire de $H^1(\mathcal{O}_F(iD))$ s'obtient par le composé:

$$H^0(\mathcal{O}_D(K_F)) \xrightarrow{{}^t\beta} H^1(\mathcal{O}_F(iD))$$
$$\xrightarrow{i} H^1(\mathcal{O}_F(D)) \xrightarrow{\mathrm{rest}_D} H^1(\mathcal{O}_D(D)) \xrightarrow{\sim} H^0(\mathcal{O}_D(K_F))^{\vee}$$

Or c'est aussi:

$$H^0(\mathcal{O}_D(K_F)) \xrightarrow{\mathrm{rest}_{D\cdot iD}} H^0(K_{F|D\cdot iD}) \xrightarrow{i} H^0(K_{F|D\cdot iD}) \xrightarrow{\delta} H^1(\mathcal{O}_D(D))$$

au signe près. On a $\operatorname{Ker}\delta = \operatorname{Im}\mathrm{rest}_{D\cdot iD}$, et donc ce composé est nul, si et seulement si $\operatorname{Im}\mathrm{rest}_{D\cdot iD}$ est invariant par i.

Or la suite exacte:

$$0 \to H^0(\mathcal{O}_D(D)) \xrightarrow{\mathrm{is}_D} H^0(\mathcal{O}_D(K_F)) \to \operatorname{Im}\mathrm{rest}_{D\cdot iD} \to 0$$

montre que la dimension de $\operatorname{Im}\mathrm{rest}_{D\cdot iD}$ est en fait constante égale à $-\chi(\mathcal{O}_D(D))$. Dans ces conditions, le fait que $\operatorname{Im}\mathrm{rest}_{D\cdot iD}$ soit i-invariant est fermée sur $\mathscr{D}' \setminus Y$. Par ailleurs, comme cela équivaut à la lissité de $\mathscr{D}$, le long de $\mathscr{D}'$, c'est une propriété ouverte et dense (car $\mathscr{D}$ est réduite le long de $\mathscr{D}'$). La proposition est donc prouvée.

1.4. *Remarque.* ce fait que $h^0(\Theta_{|F_u}) = 1$ pour u générique dans J est vrai également pour la variété des droites de la cubique de $\mathbb{P}^4$; il serait intéressant de savoir s'il est vrai pour les variétés de Fano X pour lesquelles on connait l'isomorphisme $\operatorname{Alb} F \simeq J(X)$, F ètant la surface des courbes de degré deux par rapport au système anticanonique.

La suite de cette section rassemble quelques faits concernant les systèmes linéaires sur F, et décrit leur relation avec l'application de Gauss du diviseur theta, dans le cas des systèmes linéaires $|\Theta_{|F_u}|$, où $F_u \subset \Theta$.

1.5. Rappelons d'abord une construction décrite dans [13]: soit L un fibré en droites sur F; à L, on associe le fibré de rang deux $E_L = R^0p_*L$ sur F_0. E_L jouit des propriétés suivantes:

– Det $E_L = \operatorname{Nm} L(\eta)$, où Nm est la trace: $\operatorname{Pic} F \to \operatorname{Pic} F_0$.

– Il existe une forme quadratique q_L: $E_L \to \operatorname{Nm} L$, partout non dégénérée. Inversement, de telles données permettent de reconstruire L de la façon suivante: le fibré projectif $\mathbb{P}(E_L)$ contient la surface des points isotropes pour q_L et les hypothèses numériques faites sur (E_L, q_L) entraînent que cette surface est isomorphe à F. Le fibré quotient tautologique sur $\mathbb{P}(E_L)$ restreint à $F \subset \mathbb{P}(E_L)$ est alors égal à L. En fait, (E_L, q_L) est associé aussi bien à iL, puisque l'isomorphisme entre F et la surface des points isotropes est définit modulo i.

1.6. Soit $W \subset J$, $W = \{u \in J/F_u \subset \Theta\}$. On supposera que W contient une composante W_1 de codimension 4 dans J (cf. §2). Pour $u \in W_1$ on notera $D_u = \Theta_{|F_u}$ et E_u le fibré de rang deux sur F_0 associé à D_u comme en 1.5. On notera $H = W + F \subset \Theta$. On a alors:

1.7. *Proposition.* (a) *si u est un point lisse de W, $u \in W_1$, et si $h^0(D_u) = 4$, on a: $H^0(\Theta_{|\Theta}) \to H^0(D_u)$ est surjectif.*

(b) *il existe un isomorphisme naturel: $N_W J_{(u)} \simeq H^0(D_u)$, et φ_D s'identifie à l'application de Gauss G_Θ de Θ, restreinte à F_u, (qui est naturellement à valeur dans $\mathbb{P}(N_W J_{(u)})$ puisque $W + F \subset \Theta$ entraîne $TW_{(u)} \subset T\Theta_{(\ell+u)}$ $\forall\, \ell \in F$).*

(c) *l'injection $N_W J_{(u)}^{\vee} \subset H^0(\Omega_J) \simeq H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2))$ fournit un système de quadriques Q_u de dimension 4; il existe une application génériquement surjective: $Q_u^{\vee} \otimes \mathcal{O}_{F_0} \to E_u$, et l'injection duale $E_u^{\vee} \subset Q_u \otimes \mathcal{O}_{F_0}$, est décrite fibre à fibre par: $E_{u(\ell_0)}^{\vee} = \{q \in Q_u/q(p_1) = q(p_2) = 0$, où $\ell_0 \cap S = \{p_1, p_2\}\}$.*

Démonstration. (a) L'espace tangent à W en u est égal à $\mathrm{Ker}(H^0(\Theta_{|\Theta}) \to H^0(\Theta_{|F_u})$ modulo l'identification: $TJ_{(u)} \simeq H^0(T_J) \simeq H^0(\Theta_{|\Theta})$. Il est de dimension 6 si W est lisse de dimension 6 en u. L'image de la restriction: $H^0(\Theta_{|\Theta}) \to H^0(D_u)$ est alors de dimension 4, ce qui prouve (a).

(b) On a $N_W J_{(u)} = TJ_{(u)}/TW_{(u)}$; $N_W J_{(u)}$ est donc naturellement isomorphe à $H^0(D_u)$ par (a). Le reste est évident et suit du fait que G_Θ est donnée par le système linéaire $|\Theta_{|\Theta}|$.

(c) De l'application naturelle $Q_u^{\vee} \otimes \mathcal{O}_F \simeq H^0(D_u) \otimes \mathcal{O}_F \to D_u$, on déduit une application: $Q_u^{\vee} \otimes \mathcal{O}_{F_0} \to E_u = R^0 p_* D_u$.

Cette application est génériquement surjective (du moins pour u générique dans W) car sinon la partie mobile du système D_u proviendrait de F_0, ce qui n'est pas possible pour u générique dans W, supposée de dimension 6, (voir la preuve de 2.3.b)).

Il reste à identifier géomètriquement $E_u^{\vee} \subset Q_u \otimes \mathcal{O}_{F_0}$: pour cela considérons $H \subset \Theta$, et soit ℓ un point de F tel que H et Θ sont non-singuliers en $\ell + u$ et en $i\ell + u$. On a: $\dim H = 8$, et $\dim \Theta = 9$, et d'autre part: $TH_{(\ell+u)} \subset T\Theta_{(\ell+u)}$, $TH_{(i\ell+u)} \subset T\Theta_{(i\ell+u)}$, et par symétrie de l'application de Gauss de F: $TH_{(\ell+u)} = TH_{(i\ell+u)}$. On en déduit: $TH_{(\ell+u)} = T\Theta_{(\ell+u)} \cap T\Theta_{(i\ell+u)}$. Comme $TH_{(\ell+u)} = TF_{(\ell)} + TW_{(u)}$ on obtient l'égalité suivante: $\overline{T\Theta}_{(\ell+u)} \cap \overline{T\Theta}_{(i\ell+u)} = \overline{TF}_{(\ell)}$, dans $N_W J_{(u)}$, où le symbole "$\overline{}$" dénote la projection dans $N_W J_{(u)}$. Mais d'autre part, par construction le membre de gauche est égal à la fibre $E_u^{\vee}$. (c) suit alors de la description de $TF_{(\ell)}$ donnée en 0.1.c).

§2. Construction de W_1. Evidemment le but de l'opération est de mettre en relation la géométrie de F et celle de B, ce qui se fait naturellement par les diviseurs d'incidence associés à une famille de courbes sur B: pour obtenir des diviseurs de classe $3\nu = c_1(\Theta_{|F})$, il faut considérer des courbes de degré 3 sur B, et l'on est mené à étudier les cubiques rationnelles de B, i.e., la famille $\mathscr{C}^3$. Une courbe $C_0 \subset \mathbb{P}^3$ rationnelle lisse de degré 3 est dans $\mathscr{C}_0^3$ si et seulement si elle a partout un contact d'ordre pair avec la surface S, (c'est suffisant car C_0 est rationnelle).

2.0. D'après [14], il existe pour toute famille $\mathscr{F}$ de courbes dans B un élément α de Pic F, tel que: $\forall\ C \in \mathscr{F}$, $\Theta_{F_{\Phi(C)}} = D_C \cdot \alpha$ dépend du choix de Θ. Comme pour $C \in \mathscr{C}^3$, on a $c_1(\Theta_{|F}) = D_C$ dans $NS(F)$, on en déduit aisément: il existe un diviseur Θ tel que pour $C \in \mathscr{C}^3$, on ait: $\Theta_{|F_{\Phi(C)}} = D_C$. Désormais Θ dénote le diviseur thêta qui satisfait cette propriété.

2.1. LEMME. *$\mathscr{C}^3$ est de dimension six et est génériquement plongée dans J par Φ.*

Démonstration. Soit $C_0 \subset \mathbb{P}^3$, $C_0 \in \mathscr{C}_0^3$, et soit $C \in \mathscr{C}^3$, telle que $p(C) = C_0$. On suppose que C est lisse et est contenue dans une quadrique lisse de B (une surface $K3$ Q); On a alors la suite exacte: $0 \to N_C Q \to N_C B \to \mathcal{O}_C(2) \to 0$, avec $N_C Q = K_C$. Mais la flèche: $H^0(N_C B) \to H^0(\mathcal{O}_C(2))$ ne peut pas être surjective car la classe de cohomologie de C impose une condition non triviale aux déformations de Q dans B (du moins pour C, Q génériques); On en déduit: $H^1(N_C B) = 0$, et $h^0(N_C B) = 6$. Ce qui prouve la première assertion. D'autre part, la codifférentielle de Φ apparaît dans le diagramme suivant: (cf. 0.1.c))

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \langle T \rangle \arrow[r] & H^0(K_B \otimes N_B Y) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(\Omega_B^2) \arrow[r] \arrow[d, "\Phi^*"'] & 0 \\
H^0(K_B \otimes N_B Y) \arrow[rr] & & H^0(K_B \otimes N_B Y_{|C}) \arrow[r] & H^1(N_C B \otimes K_B) \arrow[r] & H^1(K_B \otimes N_C Y)
\end{tikzcd}$$

où $N_B Y = \mathcal{O}_B(4)$, et $K_B = \mathcal{O}_B(-2)$.

Il est facile de voir que $H^1(K_B \otimes N_C Y) = 0$, et donc que Φ^* est de rang $6 = \dim H^1(N_C B \otimes K_B)$; comme par ailleurs les six points $q_1, \ldots, q_6$ d'intersection de C_0 et de S imposent 6 conditions indépendantes aux quadriques de $\mathbb{P}^3$, le noyau de Φ^* doit s'identifier à l'ensemble des quadriques de $\mathbb{P}^3$ s'annulant en $q_1, \ldots, q_6$ (qui est isomorphe à l'ensemble des quadriques de B dont la restriction à C est proportionnelle à $T_{|C}$).

2.2. LEMME. *$h^0(D_C) \leqslant 4$, pour C générique dans $\mathscr{C}^3$, et B générique.*

Démonstration. On suit la technique de Welters; on fait d'abord dégénérer C sur la réunion de trois droites ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 telles que $\ell_1 \cap \ell_2 = \varnothing$ et $\ell_3 \cap \ell_1 = x_1$, $\ell_3 \cap \ell_2 = x_2$. On fait ensuite dégénérer B sur le double solide somme de deux copies de $\mathbb{P}^3$ recollées de long d'une quadrique et l'on majore $h^0(D_{\ell_1} + D_{\ell_2} + D_{\ell_3})$ sur la variété F limite. On réfère à [14] pour de détail de cette démonstration.

2.3. PROPOSITION. *$\Phi(\mathscr{C}^3)$ est contenue dans W.*

Démonstration. On applique le corollaire 1.2; On a à prouver les deux faits suivants:

(a) pour $C \in \mathscr{C}^3$, $h^0(D_C) > 1$.

(b) pour C générique dans $\mathscr{C}^3$, on ne peut pas avoir: $\Theta \cap F_{\Phi(C)} = D_1 \cup p^{-1}(D_2)$ où D_2 est une courbe de F_0.

(a) Suivant 1.5 on exhibe le fibré E_C sur F_0 associé à D_C et la forme quadratique q_C sur E_C, à valeur dans $\mathcal{O}_{F_0}(p_*D_C) = \mathcal{O}_{F_0}(D_{C_0})$. Soient $q_1, \dots, q_6$ les points d'intersection de C_0 et S. Soit $Q_C \subset H^0(\mathcal{O}_{P^3}(2))$ défini par: $Q_C = \{Q \in H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2))/Q(q_1) = \cdots = Q(q_6) = 0\}$. On a $\dim Q_C = 4$.

(i) Soit $E_C^\vee \subset Q_C \otimes \mathcal{O}_{F_0}$, défini fibre à fibre par: $E^\vee_{C(\ell_0)} = \{Q \in Q_C/Q(p_1) = Q(p_2) = 0$, où $\ell_0 \cap S = \{p_1, p_2\}\}$. $E_C^\vee$ est un sous-fibré vectoriel de rang deux de $Q_C \otimes \mathcal{O}_{F_0}$ en dehors des bisécantes de C_0 qui sont en nombre fini dans F_0. $E_C^\vee$ s'étend en un fibré de rang deux sur F_0.

On calcule aisément: Det $E_C^\vee = -K_{F_0} = -D_{C_0} + \eta$ (cf. 0.1.d))

(ii) Construisons d'abord q_C^0: $E_C \to \mathcal{O}_{F_0}$, une forme quadratique à valeur dans $\mathcal{O}_{F_0}$: q_C^0 est définie fibre à fibre de la façon suivante: soit $\ell_0 \in F_0$, soit $Q \in E^\vee_{C(\ell_0)}$: on a $Q(p_1) = Q(p_2) = 0$ et donc $Q^2/S_{|\ell_0}$ est un élément de $H^0(\mathcal{O}_{\ell_0}) = \mathbb{C}$, puisque Q^2 et S ont le même diviseur sur ℓ_0. De même, on a $Q(q_1) = \cdots = Q(q_6) = 0$, et donc $Q^2/S_{|C_0}$ est un élément de $H^0(\mathcal{O}_{C_0}) = \mathbb{C}$. Posons $q_C^0(Q) = Q^2/S_{|\ell_0} - Q^2/S_{|C_0}$. On vérifie aisément que q_C^0 est une forme quadratique sur $E_C^\vee$, à valeur dans $\mathcal{O}_{F_0}$, et non dégénérée en dehors de la courbe D_{C_0}. D'autre part si $\ell_0 \in D_{C_0}$ est une simple sécante de C_0, q_C^0 s'annule identiquement sur la fibre $E^\vee_{C(\ell_0)}$: en effet, on a alors $Q^2/S_{|\ell_0 \cup C_0} \in H^0(\mathcal{O}_{C_0 \cup \ell_0})$, pour $Q \in E^\vee_{C(\ell_0)}$; or la courbe $C_0 \cup \ell_0$ est connexe: donc $H^0(\mathcal{O}_{C_0 \cup \ell_0}) = \mathbb{C}$, et $Q^2/S_{|C_0} = Q^2/S_{|\ell_0}$, pour $Q \in E^\vee_{C(\ell_0)}$. On en déduit que q_C^0 provient d'une forme quadratique q_C à valeur dans $\mathcal{O}_{F_0}(-D_C)$, génériquement non dégénérée, donc partout non dégénérée pour raison de déterminants.

(iii) Il est aisé maintenant de vérifier que le fibré E_C dual de $E_C^\vee$ est associé à D_C. En effet l'injection $E_C^\vee \subset Q_C \otimes \mathcal{O}_{F_0}$ fournit une application $Q_C \otimes \mathcal{O}_{F_0} \to E_C$ surjective en dehors d'un nombre fini de points; la donnée du couple (E_C, q_C) est équivalente d'après 1.5 à la donnée d'un diviseur sur F, défini modulo i, et l'application induite $Q_C^\vee \to H^0(E_C)$ fournit une application rationnelle ψ_C: $F \dashrightarrow \mathbb{P}(Q_C)$, définie en dehors d'un nombre fini de points, et associée à ce diviseur. La description explicite de ψ_C (cf. 3.1.) montre alors que ce diviseur est bien D_C.

Enfin, comme on a $h^0(D_C) \geqslant 2$, le point (a) est démontré. En fait, on peut dire plus; En effet l'application ψ_C n'envoie pas F dans un plan de $\mathbb{P}(Q_C)$ (cela se vérifie facilement pour C générique), ce qui entraîne que l'application: $Q_C^\vee \to H^0(E_C)$ est injective. On a donc $h^0(D_C) \geqslant 4$; avec le lemme 2.2., on obtient: pour C générique dans $\mathscr{C}^3$ (et B générique) $h^0(D_C) = 4$, et ψ_C est en fait donnée par le système complet $|D_C|$, ou encore $\psi_C = \varphi_C$.

(b) Supposons par l'absurde que pour C générique dans $\mathscr{C}^3$, $\Theta \cap F_{\Phi(C)}$ est de la forme $D_1 \cup p^{-1}(D_2)$, avec $D_2 \subset F_0$: il existe alors deux applications rationnelles définies sur $\mathscr{C}^3$: $C \mapsto D_1 \subset F$ et $C \mapsto D_2 \subset F_0$. La classe d'équivalence linéaire de C_2 est constante puisque Pic F_0 est discret. D'autre part on a d'après (a) $h^0(C_1 + p^-(C_2)) = 4$, et $|C_1 + p^{-1}(C_2)|$ n'a pas de composante fixes; enfin l'application φ_C ne se factorise pas par p. Il y a donc trois cas possibles:

(i) $h^0(C_2) = 1$

(ii) $h^0(C_2) = 2$

(iii) $h^0(C_2) = 3$

(i) C_2 est alors indépendante de $C \in \mathscr{C}^3$, et $p^{-1}(C_2) \subset F$ est envoyée dans un plan par φ_C. Cela entraîne: Pour $\ell_0 \in C_2$, la droite $\langle \varphi_C(\ell), \varphi_C(i\ell) \rangle$ est contenue dans ce plan. Or par construction, cette droite s'identifie à la droite $\mathbb{P}(E^{\vee}_{C(\ell_0)}) \subset \mathbb{P}(Q_C)$; il est aisé de voir que cette droite varie avec $\ell_0 \in C_2$. On en déduit que pour ℓ_0 et ℓ_0' génériques dans C_2 et C générique dans $\mathscr{C}^3$, $\mathbb{P}(E^{\vee}_{C(\ell_0)}) \cap \mathbb{P}(E^{\vee}_{C(\ell_0')})$ est un point p_C qui varie rationnellement avec C. Fixons ℓ_0 et ℓ_0' dans C_2. Soit $Q_{\ell_0} \subset H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2))$, $Q_{\ell_0} = \{Q \in H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2))/Q(p_1) = Q(p_2) = 0$, où $\{p_1, p_2\} = \ell_0 \cap S$; de même pour ℓ_0'. Le point p_C appartient alors à $\mathbb{P}(Q_{\ell_0}) \cap \mathbb{P}(Q_{\ell_0})$ qui est de dimension cinq. Comme $\operatorname{Dim} \mathscr{C}^3 = 6$, l'application $C \mapsto p_C$ a une fibre générique de dimension positive. Mais d'après la description de l'application d'Abel-Jacobi infinitésimale sur $\mathscr{C}^3$ donnée en 2.1., le long de cette fibre l'espace $\Phi_*(T\mathscr{C}^3)$ est contenu dans un hyperplan fixé de $TJ_{(0)}$. Or la fibre générique n'est pas contractée par Φ qui est génériquement de rang maximum sur $\mathscr{C}^3$ (cf. 2.1.), et donc son image par Φ doit être contenue dans une sous variété abélienne propre de J, translatée.

(ii) et (iii) il est évident qu'on peut faire identiquement le même raisonnement en fixant une courbe dans le système linéaire $|C_2|$, indépendante de C, et deux points ℓ_0, ℓ_0' dans cette courbe (toute courbe de $|C_2|$ est envoyée sur un plan par φ_C).

Maintenant si B est générique, J est simple et cela contredit la conclusion de (i). Dans ce cas (b) est montré par l'absurde et comme (a) est vrai on a: $\Phi(\mathscr{C}^3) \subset W$. Comme c'est manifestement une propriété fermée, la proposition 2.3. est vraie pour tout B.

2.4. PROPOSITION. *$\Phi(\mathscr{C}^3)$ est une composante réduite de W.*

Démonstration. On sait que $\Phi(\mathscr{C}^3)$ est de dimension six, contenu dans W_{red} (la sous-variété réduite sous-jacente à W et que l'espace tangent de Zariski à W en $u \in \Phi(\mathscr{C}^3)$ est égal à $\operatorname{Ker}((H^0(\Theta_{|\Theta}) \to H^0(\Theta_{|F_u}))$. Il suffit donc clairement de prouver le lemme suivant, qui implique que $\dim_u W \leqslant 6$, avec égalité si et seulement si W est lisse en u:

2.5. LEMME. *Pour u générique dans $\Phi(\mathscr{C}^3)$, le rang de la restriction: $H^0(\Theta_{|\Theta}) \to H^0(\Theta_{|F_u})$ est au moins 4.*

Démonstration. Nous allons éliminer les possibilités $r = i$, pour $i < 4$.

(i) $r = 0$: cela entraîne que pour $u \in \Phi(\mathscr{C}^3)$, on a $F_u \subset \operatorname{Sing}\Theta$. Mais alors $\dim \operatorname{Sing}\Theta \geqslant 8 = \dim(F + W_1)$. Or ceci n'est pas possible pour B générique, comme le montrent divers arguments de dégénération (cf. [5], [14], [15]).

(ii) $r = 1$, (resp. 2): dans ce cas, l'application de Gauss de Θ est génériquement definie le long de F, et envoie F sur un point (resp. une droite); or l'application de Gauss de Θ est finie; (ii) est donc exclu.

(iii) $r = 3$; $G_{\Theta|F_u}$ est alors à valeur dans le plan $\mathbb{P}((N_W J_{(u)}^{\vee}))$ (cf. 1.6) $G_{\Theta|F_u}$ est donnée par: $G_{\Theta|F_u}(\ell) = \overline{T\Theta}_{(\ell+u)}$ où "$\overline{\ }$" dénote la projection dans $N_W J_{(u)}$.

Mais on vérifie qu'au moins génériquement pour u et ℓ, la droite $TF_{(\ell)} \subset T\Theta_{(\ell+u)}$ doit également se projeter sur un espace de dimension deux dans $N_W J_{(u)}$. On doit donc avoir $\overline{TF}_{(\ell)} = \overline{T\Phi}_{(\ell+u)}$, et comme l'application de Gauss de F est symétrique par rapport à i, on obtient: $G_\Theta(\ell) = G_\Theta(i\ell)$, ou encore: la partie mobile du système $|\Theta_{|\Theta}|_{|F_u}$ provient de F_0. La démonstration de 2.3.b) montre que cela n'est pas possible. La proposition est donc prouvée, pour B générique.

2.6. Le lemme 2.2 et le lemme 2.5 montrent que pour C générique dans $\mathscr{C}^3$ (et B générique), la restriction $H^0(\Theta_{|\Theta}) \to H^0(\Theta_{|F_{\Phi(C)}})$ est surjective, et donc $G_{\Theta|F_u}$ s'identifie à φ_C, qu'à l'aide de 2.3.a), on étudiera dans la section suivante. En particulier les points d'indétermination de φ_C sont les points singuliers de Θ qui sont sur $F_{\Phi(C)}$ et les éléments de $|D_C|$ ont pour équation les dérivées partielles de la fonction θ, restreintes à $F_{\Phi(C)}$.

§3. Singularités des systèmes $|D_C|$

3.1. Donnons d'abord la définition explicite de l'application rationnelle φ_C: $F \to \mathbb{P}(Q_C)$ (cf. 2.3.a) Dem.). Utilisant la description faite en 1.5 et la forme du couple (E_C, q_C) donnée en §2, on obtient facilement: Pour $\ell \in F$, $\varphi_C(\ell) = Q$, où Q est définie par les conditions: $Q \in Q_C$ et $Q(p_1) = Q(p_2) = 0$, où $\{p_1, p_2\} = l_0\ S$, et: $r^*Q/T_{|\ell} = -r^*Q/T_{|C}$. Or, si $\ell \notin D_{iC}$, cette dernière condition se traduit encore par: $\exists a \in \mathbb{C}/r^*Q + aT_{|(iC \cup \ell)} = 0$.

Soit $Q'_C \subset H^0(\mathcal{O}_B(2))$ défini par: $Q'_C = \{Q \in H^0(\mathcal{O}_B(2))/Q_{|iC} = 0\}$; alors Q'_C est isomorphe à Q_C, et l'on peut encore écrire: pour $\ell \notin D_{iC}$, $\varphi_C(\ell) = Q \in \mathbb{P}(Q'_C)$ où Q est uniquement déterminée par la condition $Q_{|\ell} = 0$.

3.2. PROPOSITION. *Si C est générale, $|D_C|$ a 42 points base sur F, qui correspondent aux bisécantes de C.*

Démonstration. On rappelle que φ_C est obtenue par le composé: $F \hookrightarrow \mathbb{P}(E_C) \dashrightarrow \mathbb{P}(Q_C)$, où la flêche en pointillé est associée à l'application génériquement surjective: $Q_C^{\vee} \otimes \mathcal{O}_{F_0} \to E_C$. Les points d'indétermination de φ_C sont donc situés au dessus des points de F_0 où $E_C^{\vee}$ n'est pas un sous-fibré de $Q_C \otimes \mathcal{O}_{F_0}$, c'est à dire, par 2.3.a) au dessus des bisécantes de C_0, et des droites de F_0 passant par l'un de points q_i de l'intersection de C_0 et de S.

En fait, on vérifie facilement que φ_C est bien définie en une simple sécante de C passant par l'un des q_i; en effet, supposons que q_i soit un point de simple tangence de C_0 et de S, et que ℓ_0 rencontre C_0 transversalement au point q_i; soit $\ell \in F$, telle que $p(\ell) = \ell_0$. Il existe une seule quadrique de $\mathbb{P}^3$ contenant C_0 et ℓ_0, et un pinceau de quadriques de B contenant ℓ et iC dont une seule est singulière en q_i; mais en appliquant la première définition de φ_C donnée en 3.1. on voit que $\mathrm{Lim}_{L \to \ell}\varphi_C(L) \in \mathbb{P}(Q'_C)$ doit être singulière en q_i; cette limite est donc unique, et φ_C se prolonge continuement en ℓ.

D'autre part, les bisécantes de C_0 se répartissent en deux ensembles, selon qu'elles se relèvent dans B en une bisécante de C et une bisécante de iC, ou en deux sécantes simples de C et iC. Connaissant la classe de F_0 dans la Grassmannienne des droites de $\mathbb{P}^3$ ([14]), on calcule que C_0 possède 96 bisécantes dans F_0. D'autre part les courbes D_C et D_{iC} se coupent en 180 points dont 72 droites passant par l'un des q_i (qui en général ne sont pas projetées sur une bisécante de C_0); les 108 points restant sont disposés en paires au dessus des bisécantes de C_0 qui ne sont pas relevées en bisécantes de C ou de iC; donc C possède 42 bisécantes. On vérifie facilement que φ_C est en fait bien définie aux points de $D_C \cdot D_{iC}$; par contre, les bisécantes de C sont des points d'indétermination de φ_C; en effet, D_C est singulière aux bisécantes de C, et localement isomorphe à D_{C_0}; sur D_C, on a d'après la seconde définition de φ_C donnée en 3.1., $\varphi_C(\ell) =$ l'unique quadrique contenant C_0 et ℓ_0, où $\ell_0 = p(\ell)$; on vérifie que le prolongement de cette application à la normalisée de D_C en une bisécante donne deux images distinctes aux deux points contre-image du point singulier, à savoir les quadriques contenant C_0 et ℓ_0 et singulières en l'un des points d'intersection de C_0 et ℓ_0, où ℓ_0 est la bisécante correspondante de C_0.

3.3. Proposition. *La singularité de Θ en un point $\Phi(C) + \Phi(\ell)$, où $C \in \mathscr{C}^3$ et ℓ est une bisécante de C, est quadratique, (lorsque C est générique et que la conclusion 2.6. est satisfaite en C).*

Démonstration. D'après 2.6., les éléments de $|D_C|$ ont pour équation les dérivées partielles de la fonction θ, restreintes à $F_{\Phi(C)}$; il suffit donc de vérifier qu'il existe une courbe lisse en ℓ dans le système $|D_C|$: On utilise la seconde représentation de φ_C donnée en 3.1; soit $P \subset \mathbb{P}(Q'_C)$ un plan: la section correspondante $F_P = \varphi_C^{-1}(P)$ de D_C est la courbe des droites contenues dans l'une des quadriques paramétrée par P, moins la courbe D_{iC} (qui ne passe pas par ℓ). Si C est générique, il existe une quadrique Q de B, lisse, contenant iC et ℓ; soit alors $P \subset \mathbb{P}(Q'_C)$ un plan passant par Q et coupant transversalement en Q le pinceau des quadriques contenant iC et ℓ. L'espace tangent à F_P en ℓ est: $TF_{P(\ell)} = \gamma^{-1}(\mathrm{Im}\,\delta)$ où γ est l'injection: $TF_{(\ell)} = H^0(N_\ell B) \subset H^0(N_Q B_{|\ell})$, $(H^0(N_\ell Q) = 0)$, et δ est l'injection naturelle: $TP_{(Q)} \subset H^0(N_Q B_{|\ell}) = H^0(\mathscr{O}_\ell(2))$:

$$\begin{array}{ccc} H^0(N_\ell B) & \xrightarrow{\gamma} & H^0(N_Q B_{|\ell}) = H^0(\mathscr{O}_\ell(2)) \\ \| & & \uparrow{\scriptstyle\delta} \\ TF_{(\ell)} & & TP_{(Q)} \end{array}$$

Mais $\operatorname{Im}\delta$ est égale à la restriction de Q'_C à ℓ, et est un pinceau qui ne sépare pas les deux points d'intersection de C et ℓ, tandis que $\operatorname{Im}\gamma$ sépare ces deux points d'intersection (comme on le montre facilement: il faut étudier les deux possibilités $N_\ell B \simeq \mathcal{O}_\ell \oplus \mathcal{O}_\ell$, et $N_\ell B \simeq \mathcal{O}_\ell(-1) \oplus \mathcal{O}_\ell(1)$ et choisir Q générique dans le pinceau contenant iC et ℓ). Donc $\operatorname{Im}\gamma \neq \operatorname{Im}\delta$, et comme ces deux espaces sont de dimension deux dans $H^0(\mathcal{O}_\ell(2))$ on a bien $\dim TF_{P(\ell)} = 1$, soit F_P lisse en ℓ.

3.4. Corollaire. *Le prolongement de φ_C à l'éclatement de F au point ℓ, bisécante de C, envoie la droite exceptionnelle sur le pinceau des quadriques contenant C_0 et ℓ_0.*

Cela résulte en effet du lemme précédent et de 3.2 dém., à condition d'utiliser l'isomorphisme $Q'_C \simeq Q_C$, (3.1.).

Si l'on rassemble les résultats de la section 2, et l'analyse précédente on obtient:

3.5. Proposition. *Si B est générique, et C est générique dans $\mathscr{C}^3$, pour $\ell \in F$ bisécante de C, on a: $\Phi(C) + \Phi(\ell)$ est un point singulier quadratique de Θ.*

En d'autres termes, si $\mathscr{C} \subset \mathscr{C}^3 \times F$ est l'ensemble des couples (C, ℓ) tels que ℓ est une bisécante de C, on a: $\Phi(\mathscr{C}) \subset \operatorname{Sing}^2(\Theta)$. On réfère à l'appendice pour le cas du double solide quelconque.

§4. Une composante de $\operatorname{Sing}^2\Theta$. Une courbe $C \cup \ell$ de $\mathscr{C}$ est envoyée isomorphiquement par r sur son image $C_0 \cup \ell_0$ dans $\mathbb{P}^3$. Or la réunion d'une courbe rationnelle de degré trois et d'une droite bisécante, dans $\mathbb{P}^3$, est une courbe elliptique intersection complète de deux quadriques. En d'autres termes:

4.1. On a $\mathscr{C} \subset \mathscr{C}^{2,2}$, où $\mathscr{C}^{2,2}$ dénote la famille des courbes de B projetées isomorphiquement par r sur l'intersection complète de deux quadriques dans $\mathbb{P}^3$.

4.2. La famille $\mathscr{C}_0^{2,2}$ est facile à décrire: en effet, soit $E_0 \in \mathscr{C}_0^{2,2}$; alors le revêtement double ramifié $r_{|r^{-1}(E_0)}$ est scindé, ce qui signifie: $\exists s \in H^0(\mathcal{O}_E(2))$, telle que $S_{|E} = s^2$, (où S est l'équation de la surface discriminante).

Comme $E_0 \subset \mathbb{P}^3$ est projectivement normale, il existe $Q \in H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2))$, telle que $Q_{|E_0} = s$; enfin l'idéal de E_0 est engendré par Q_1 et Q_2, avec $E_0 = Q_1 \cap Q_2$; la relation $S_{|E} = s^2$ s'écrit donc: $\exists P_1, P_2 \in H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2))$, tels que: $S = Q^2 + P_1Q_1 + P_2Q_2$.

L'introduction de la famille $\mathscr{C}^{2,2}$ est justifiée par le lemme suivant:

4.3. Lemme. $\Phi(\mathscr{C}^{2,2}) = \Phi(\mathscr{C})$.

Démonstration. On sait que $\dim \mathscr{C} = 6$ (d'après §3, $\mathscr{C}$ admet une projection finie sur $\mathscr{C}^3$, qui est de dimension 6 par lemme 2.1.); on calculera en 4.6. que $\dim \mathscr{C}^{2,2} = 8$. Or, un élément E de $\mathscr{C}^{2,2}$ admet au moins une famille rationnelle de dimension 2 de déformations dans B: en effet pour toute quadrique Q lisse de $\mathbb{P}^3$, contenant E_0, telle que $\tilde{Q} = r^{-1}(Q)$ soit lisse, $\tilde{Q}$ est une surface $K3$ contenant la courbe elliptique E; E admet donc une famille rationnelle de dimension un de déformations dans $\tilde{Q} \cdot D'$ autre part, Q varie dans le pinceau des quadriques contenant E_0, et cela fournit manifestement la famille de dimension 2 annoncée.

Un argument facile d'amplitude de la classe de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}^{2,2}$ montre alors que tout élément de $\mathscr{C}^{2,2}$, se déforme rationnellement dans B sur un élément de $\mathscr{C}$. Comme des cycles rationnellement équivalents dans B ont la même image par Φ, le lemme suit.

4.4. La conclusion 3.5. se réécrit donc: $\Phi(\mathscr{C}^{2,2}) \subset \operatorname{Sing}\Theta$, et pour E génerique dans $\mathscr{C}^{2,2}$, $\Phi(E) \in \operatorname{Sing}^2\Theta$. Le reste de cette section est consacré à la preuve de la proposition suivante:

4.5. PROPOSITION. *$\Phi(\mathscr{C}^{2,2})$ est une composante de $\operatorname{Sing}^2\Theta$, de codimension cinq dans J.*

On obtiendra par ailleurs explicitement les cônes tangents à Θ le long de $\Phi(\mathscr{C}^{2,2})$. On notera dans la suite $Z = \Phi(\mathscr{C}^{2,2})$.

4.6. LEMME. (a) $\dim \mathscr{C}^{2,2} = 8$, *et* $\dim Z = 5$.

(b) *si $E \in \mathscr{C}^{2,2}$, le noyau de l'application d'Abel-Jacobi infinitésimale Φ^*: $H^0(\Omega_J) \to \Omega\mathscr{C}^{2,2}_{(E)}$ est engendré par $Q, P_1, P_2, \underline{Q_1}, Q_2$ où l'on utilise l'isomorphisme $H^0(\Omega_J) \simeq H^0(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(2))$* (*cf.* 0.1.b)), *et où $\bar{Q}, P_i, Q_i$ sont comme en* 4.2.

Démonstration. (b) on reprend le diagramme de 0.1.c); les chiffres figurant sous la seconde ligne représentent les dimensions des espaces correspondants, qui sont très faciles à calculer car $E \subset Y$ est l'intersection complète des trois quadriques: r^*Q_1, rQ_2 et $T + r^*Q$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \langle T \rangle \arrow[r] \arrow[d] & H^0(K_B \otimes N_B Y) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & H^1(\Omega_B^2) \arrow[r] \arrow[d, "\Phi^*"'] & 0 \\
 & H^0(K_B \otimes N_E Y) \arrow[r, "\gamma"'] & H^0(K_B \otimes N_B Y_{|E}) \arrow[r] & H^1(N_E B \otimes K_B) \arrow[r] & H^1(N_E Y \otimes K_B) \\
 & 3 & 8 & & 3
\end{tikzcd}$$

On a alors: $\operatorname{Ker}\Phi^* = \alpha(\beta^{-1}(\operatorname{Im}\gamma))$

$\operatorname{Im}\gamma$ est engendré par les dérivées de l'équation de B dans Y, par rapport aux générateurs de $H^0(K_B \otimes N_E Y)$; l'équation de B dans Y est $T^2 - r^*S$, avec $S = Q^2 + P_1Q_1 + P_2Q_2$. On obtient donc formellement: $d(T^2 - r^*S) = 2T\,dT - 2r^*Q\,d(r^*Q) - r^*P_1\,d(r^*Q_1) - r^*P_2\,d(r^*Q_2) +$ (termes s'annulant sur E); comme on a sur E: $T = -r^*Q$, ceci s'écrit encore: $-2r^*Q\,d(T + r^*Q) - r^*P_1\,d(r^*Q_1) - r^*P_2\,d(r^*Q_2)$; or $d(T + r^*Q)$, $d(r^*Q_1)$ et $d(r^*Q_2)$, forment une base (trivialisante) de $H^0(N_E Y^\vee(2))$; on en déduit que $\operatorname{Im}\gamma$ est engendré par Q, P_1 et $P_2 \in H^0(\mathscr{O}_E(2))$. Comme $\operatorname{Ker}\beta$ est engendré par $r^*(Q_1)$, r^*Q_2 et $T + r^*Q$, et que α s'identifie à la projection modulo T, on obtient bien: $\operatorname{Ker}\Phi^* = \langle Q, P_1, P_2, Q_1, Q_2 \rangle$.

(a) si les quadriques Q, P_1, P_2, Q_1, Q_2 ne sont pas linéairement indépendantes, on voit que S peut s'écrire sous la forme $P_1'Q_1' + P_2'Q_2'$ où P_i', Q_i' sont des quadriques; donc S contient une intersection complète de deux quadriques; une telle courbe se meut dans un pinceau dans S, et sur ce pinceau l'espace engendré par P_1', Q_1', P_2', Q_2' reste constant; il y a un nombre fini de tels pinceaux dans S, et donc un nombre fini d'espaces de la forme $\langle P_1', Q_1', P_2', Q_2' \rangle$ tels que $S = P_1'Q_1' + P_2'Q_2'$; or, comme on voit aisément que l'application d'Abel Jacobi est non triviale sur $\mathscr{C}^{2,2}$, l'application d'Abel Jacobi infinitésimale varie sur $\mathscr{C}^{2,2}$, et donc en général $\operatorname{Ker} \phi^*$ ne peut pas coïncider avec l'un de ces espaces. On a donc alors: $\dim \operatorname{Ker} \Phi^* = 5$, $\operatorname{rang} \gamma = 3$ et $\dim H^0(N_E B) = 8$; cela entraîne alors $H^1(N_E B) = 0$, et donc, $\mathscr{C}^{2,2}$ est en général lisse de dimension 8, et $\operatorname{codim} \Phi(\mathscr{C}^{2,2}) = 5$, ou encore $\dim Z = 5$.

Nous allons calculer le rang du cône tangent à Θ (une quadrique dans $\mathbb{P}(TJ_{(0)})$) en un point générique de Z. Pour ce faire, nous rappelons que le résultat principal de la §2 s'énonce de la façon suivante: $\Phi(\mathscr{C}^3) + \Phi(F) \subset \Theta$, et pour $C \in \mathscr{C}^3$ générique, l'application de Gauss G_Θ, restreinte à $F_{\Phi(C)}$ est donnée par φ_C. Le principal résultat que nous utiliserons est le corollaire 3.4., qui décrit le comportement de φ_C au voisinage des points d'indétermination de φ_C, ou encore celui de $G_{\Theta|F_{\Phi(C)}}$ au voisinage d'un point singulier $\Phi(C) + \Phi(\ell)$ de Θ, où ℓ est une bisécante de C: on en rappelle ici l'énoncé:

3.4. Corollaire. *Soit $C \in \mathscr{C}^3$, et ℓ une bisécante de C. Le prolongement de φ_C à l'éclatement de F au point ℓ envoie la droite exceptionnelle sur le pinceau des quadriques contenant $C_0 \cup \ell_0$ (φ_C ètant à valeur dans $\mathbb{P}(Q_C) \subset \mathbb{P}(H^0(\Omega_J))$).*

On peut alors prouver:

4.7. Proposition. *Si E est un point générique de $\mathscr{C}^{2,2}$, $\Phi(E) \in Z$ est un point de* $\operatorname{Sing}^2\Theta$ *et le rang du cône tangent à Θ en $\Phi(E)$ est au moins cinq.*

En fait, comme $Z \subset \operatorname{Sing}\Theta$ est de codimension cinq, on a nécessairement l'égalité.

Démonstration. On sait déjà par 4.4 que $\Phi(E)$ est un point singulier quadratique de Θ. (cf. Appendice pour le passage du cas générique au cas quelconque.) On va évaluer le rang de la quadrique duale du cône tangent à Θ en $\Phi(E)$; cette quadrique contient les limites: $\operatorname{Lim}_{u \to \Phi(E)} G_\Theta(u)$, où $u \in \Theta_{\text{reg}}$; en particulier, elle contient les limites $\operatorname{Lim}_{u \to \Phi(E)} G_\Theta(u)$, où $u \in \Phi(F) + \Phi(\mathscr{C}^3)$. D'autre part, par le lemme 4.3, il existe $C \in \mathscr{C}^3$, et $\ell \in F$ une bisécante de C, telles que $\Phi(E) = \Phi(C) + \Phi(\ell)$. La quadrique duale contient donc les limites: $\operatorname{Lim}_{\ell' \to \ell} \varphi_C(\ell')$, puisque φ_C est égale à $G_{\Theta|F_{\Phi(C)}}$; d'après le corollaire 3.4, on a donc: pour $C \cup \ell \in \mathscr{C}$, telle que $\Phi(C) + \Phi(\ell) = \Phi(E)$, la quadrique duale contient le pinceau des quadriques de $\mathbb{P}^3$ contenant $C_0 \cup \ell_0$, où $C_0 = p(C)$ et $\ell_0 = p(\ell)$. (Encore une fois, les quadriques de $\mathbb{P}^3$ sont identifiées à des hyperplans dans $TJ_{(0)}$.)

Par ailleurs, on sait que la dimension de $\mathscr{C}$ est six, tandis que la dimension de $Z = \Phi(\mathscr{C})$ est cinq; la fibre générale $\Phi^{-1}(\Phi(C) + \Phi(\ell))$ de $\Phi_{|\mathscr{C}}$ doit donc être une courbe, que l'on notera $f_{C+\ell}$. D'autre part si E est générique, on a certainement $\Phi(E) \neq \Phi(iE)$ et donc $iC' \cup i\ell' \notin f_{C+\ell}$, pour $C' \cup \ell' \in f_{C+\ell}$. L'application qui à $C' \cup \ell' \in f_{C+\ell}$ associe le pinceau des quadriques contenant $C_0' \cup \ell_0'$ est donc une immersion et la quadrique duale possède une courbe de droites isomorphe à $f_{C+\ell}$. Mais $f_{C+\ell}$ n'est pas une courbe rationnelle; en effet, $f_{C+\ell}$ admet une projection finie sur une courbe de $\mathscr{C}^3$, et comme Φ est génériquement de rang maximum sur $\mathscr{C}^3$, $\mathscr{C}^3$ n'est pas balayée par des courbes rationnelles; Comme E est générique, $C \cup \ell$ est générique et donc C est générique, et il n'existe pas de courbe rationnelle dans $\mathscr{C}^3$ passant par C. Maintenant la quadrique duale contient une famille non-rationnelle de dimension un de droites et donc est au moins de dimension trois; le rang du cône tangent est donc au moins cinq et la proposition 4.6. est démontrée.

4.8. COROLLAIRES. (a) (*Prop.* 4.5.) *Z est une composante de* $\operatorname{Sing}^2\Theta$.

En effet, on a $\operatorname{codim} Z = 5$, et $Z \subset \operatorname{Sing}^2\Theta$. D'autre part, si le rang du cône tangent en un point singulier quadratique de Θ est au moins cinq on a $\operatorname{codim} \operatorname{Sing} \Theta \geqslant 5$ en ce point. D'où la conclusion.

(b) Le double solide n'est pas rationnel (cf. Appendice).

En effet, le critère de Clemens-Griffiths ([6]) assure que le double solide B n'est pas rationnel si sa jacobienne intermédiaire n'est pas un produit de jacobiennes de courbes. Mais pour un tel produit les composantes de $\operatorname{Sing}\Theta$ sont de codimension inférieure ou égale à quatre.

4.9. Nous concluons cette section en donnant les équations des cônes tangents à Θ le long de Z Le résultat évoque de façon frappante l'analogue pour les jacobiennes de courbes, i.e., les quadriques de rang quatre contenant la courbe dans le plongement canonique, et aussi le résultat principal de [2]. Le résultat est le suivant: (Prop. 4.10).

Soit E un point générique de $\mathscr{C}^{2,2}$; on rappelle qu'à E sont associées les quadriques Q, P_1, P_2, Q_1, Q_2 telles que l'on ait l'égalité: $S = Q^2 + P_1Q_1 + P_2Q_2$ et que $r(E) = E_0 = Q_1 \cap Q_2$. Si E est générique ces cinq quadriques sont indépendantes (4.6.a) Dem.). Modulo l'identification $H^0(\Omega_J) \simeq \Omega J_{(0)} \simeq H^0(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(2))$, l'expression $Q^2 + P_1Q_1 + P_2Q_2$ peut être interprétée comme l'équation d'une quadrique dans $\mathbb{P}(TJ_{(0)})$. On a alors:

4.10. PROPOSITION. *$Q^2 + P_1Q_1 + P_2Q_2$ est l'équation du cône tangent à Θ au point $\Phi(E)$.*

Avant de donner la preuve de la proposition 4.10, nous montrerons le lemme 4.11 suivant: on rappelle que l'espace tangent à Z au point $\Phi(E)$ est défini par les équations Q, P_1, Q_1, P_2, Q_2, interprétées comme éléments de $H^0(\Omega_J)$ (lemme 4.6.b). La quadrique définie par $Q^2 + P_1Q_1 + P_2Q_2$ peut donc être considérée comme une quadrique lisse de dimension trois dans l'espace projectif $\mathbb{P}(N_Z J_{(\Phi(E))})$. On notera cette quadrique R_E. On a d'autre part, par lemme 4.6, $\dim \mathscr{C}^{2,2} = 8$ et $\dim Z = 5$, de sorte que la fibre $\Phi^{-1}(\Phi(E)) \subset \mathscr{C}^{2,2}$ est en général de dimension trois: on a:

4.11. LEMME. *Soit G_E la famille des droites de R_E* ($\dim G_E = 3$). *Alors G_E s'identifie à la composante de $\Phi^{-1}(\Phi(E))$ qui passe par E.*

Démonstration. Les deux variétés ont même dimension. Il suffit donc de construire une immersion $G_E \hookrightarrow \mathscr{C}^{2,2}$, d'image contenant E, car G_E étant rationnelle sera alors contenue dans la fibre de Φ en E. En fait il suffit de construire une immersion $G_E \hookrightarrow \mathscr{C}_0^{2,2}$, car l'application p: $\mathscr{C}^{2,2} \to \mathscr{C}^{2,2}$ est essentiellement non-ramifiée, et G_E ètant simplement connexe, cette immersion se relévera dans $\mathscr{C}^{2,2}$. Cette immersion est donnée comme suit. Soit $\Delta \in G_E$; il existe un unique plan P de $\mathbb{P}(N_Z J_{(\Phi(E))})$ partout tangent à R_E le long de Δ. Soient Q_1', Q_2' des équations de P, et Q' une forme linéaire dont la restriction à P donne l'équation de $\Delta \subset P$; il existe des formes linéaires P_1', P_2', telles que l'équation de R_E s'écrive: $Q'^2 + P_1'Q_1' + P_2'Q_2'$; réinterprètant P_i', Q_i', Q' comme des quadriques sur $\mathbb{P}^3$, on alors: $S = Q'^2 + P_1'Q_1' + P_2'Q_2'$, et la courbe de $\mathbb{P}^3$ définie par $Q_1' = Q_2' = 0$ est dans $\mathscr{C}_0^{2,2}$ (cf. 4.2). Il est clair que l'immersion ainsi construite passe par E_0, et que le revêtement p n'est pas ramifié au-dessus de $G_E \subset \mathscr{C}_0^{2,2}$.

Preuve de la proposition 4.10.

On sait par Prop. 4.7 que le cône tangent C_E à Θ en $\Phi(E)$ est une quadrique de rang cinq et de sommet $TZ_{(\Phi(E))}$, comme R_E, et donc les quadriques duales R_E^* et C_E^* sont des quadriques lisses de rang cinq dans l'espace projectif $\mathbb{P}(\langle Q, P_1, P_2, Q_1, Q_2\rangle) = \mathbb{P}(N_Z J^{\vee}_{(\Phi(E))})$. Il suffit évidemment de montrer que R_E^* et C_E^* sont égales.

Par ailleurs, on peut supposer que $E = C \cup \ell \in \mathscr{C}$. Soit $f_{C+\ell}$ la fibre de $\Phi_{|\mathscr{C}}$ passant par E (cf. 4.7); la composante connexe de $f_{C+\ell}$ qui passe par E est contenue dans la composante connexe de la fibre de $\Phi_{|\mathscr{C}^{2,2}}$ qui passe par E, donc dans l'image de G_E (lemme 4.11). Or on sait par 4.7 que pour $C' \cup \ell' \in f_{C+\ell}$, la quadrique C_E^* contient le pinceau des quadriques contenant $C_0' \cup \ell_0'$; mais il est évident par la construction de l'immersion $G_E \hookrightarrow \mathscr{C}^{2,2}$, que pour toute courbe E' dans l'image de G_E, R_E^* contient également le pinceau des quadriques contenant $E_0' = r(E)$.

Donc R_E^* et C_E^* ont en commun une famille de dimension un de droites isomorphe à une composante de $f_{C+\ell}$; or par le même argument qu'en 4.7 $f_{C+\ell}$ n'a pas en général de composante rationnelle; il est facile de voir que si deux quadriques lisses de $\mathbb{P}^4$ ont en commun une famille non rationnelle de droites, elles sont égales; donc on a bien $R_E^* = C_E^*$.

4.12. Une relation de la forme $S = Q^2 + P_1Q_1 + P_2Q_2$, où Q, P_i, Q_i sont des quadriques de $\mathbb{P}^3$, peut encore s'interpréter de la façon suivante: soit $\mathbb{P}^9 = \mathbb{P}(H^0(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(2)))$; soit V: $\mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^9$ le plongement de Veronese. Alors $Q^2 + P_1Q_1 + P_2Q_2$ définit une quadrique de rang cinq (si Q, P_i, Q_i sont indépendantes) dans $\mathbb{P}^9$ dont la trace sur $V(\mathbb{P}^3)$ est S.

Il est clair que toute relation de cette forme correspond à un élément (non unique) de $\mathscr{C}_0^{2,2}$; le contenu de la proposition 4.11 peut donc se résumer comme suit:

4.13. Les cônes tangents à Θ le long de $Z \setminus \operatorname{Sing} Z$ sont les quadriques de rang cinq dans $\mathbb{P}^9 = \mathbb{P}(TJ_{(0)}) = \mathbb{P}(H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2))^\vee)$ qui découpent S sur le plongement de Veronese $V(\mathbb{P}^3)$.

Il n'est pas difficile de voir que $S \subset \mathbb{P}^9$ est l'intersection de ces quadriques de rang cinq: en conclusion, on obtient:

4.14. PROPOSITION. *L'intersection des cônes tangents à Θ le long de Z est la surface S, plongée dans $\mathbb{P}^9$ par le système $|\mathcal{O}_S(2)|$.*

Comme expliqué en introduction, cela fournit un théorème de Torelli constructif pour le double solide générique, pour lequel on sait distinguer Z parmi les éventuelles autres composantes de $\operatorname{Sing}\Theta$ de codimension cinq dans J.

Appendice. Un certain nombre d'énoncés n'ont été prouvés ici que pour le double solide générique; on ne cherchera pas à étendre les étapes du raisonnement, mais plutôt à montrer que certaines conclusions, dont l'énoncé de non-rationalité, restent vraies pour tout double solide lisse. Bien que la surface F devienne singulière lorsque la surface S contient une droite, l'application d'Abel-Jacobi est définie pour tout B sur les familles F, $\mathscr{C}^{2,2}$, $\mathscr{C}^3$. Pour étendre l'énoncé de non rationalité à tous les doubles solides, il suffit de montrer que le diviseur Θ a toujours une composante Z de singularités de codimension cinq dans J. Il est clair par continuité que $Z = \Phi(\mathscr{C}^{2,2}) \subset \operatorname{Sing}\Theta$ reste vrai partout, car le calcul de la dimension de Z et de celle de $\mathscr{C}^{2,2}$ ne font pas intervenir d'hypothèses de généricité de B, ni le fait que S ne contienne pas de droites. Si l'on peut prouver que la singularité de Θ le long de Z est génériquement quadratique, pour tout double solide, le calcul de cône tangent (4.10) reste valable par continuité, et comme il est génériquement de rang cinq sur Z (pour tout B d'après 4.6), Z est bien une composante de $\operatorname{Sing}\Theta$.

Enfin, pour prouver que la singularité de Θ le long de Z est génériquement quadratique, (pour tout B), on a simplement recours au même argument qu'en 3.3. Les courbes F_P décrites en 3.3 restent, par continuité, définies par des dérivées partielles de la fonction θ, restreintes à des translatés de F contenus dans Θ, à condition que ces dérivées ne viennent pas toutes à s'annuler sur les translatés $F_{\Phi(C)}$ (qui sont contenus dans Θ, pour tout B, pour $C \in \mathscr{C}^3$). Laissant cette dernière éventualité de côté momentanément, la preuve de la non-singularité générique de ces courbes F_P en une bisécante de $C \in \mathscr{C}^3$, marche comme en 3.3, ce qui donne la conclusion cherchée.

Enfin, si les dérivées partielles de θ s'annulent le long des translatés $F_{(C)}$, pour $C \in \mathscr{C}^3$, on a $\Phi(F) + \Phi(\mathscr{C}^3) \subset \operatorname{Sing}\Theta$. Donc $\operatorname{Dim}\operatorname{Sing}\Theta \geqslant 8$. Si la jacobienne intermédiaire est un produit de jacobiennes de courbes, elle doit être au moins un produit de deux jacobiennes, et son diviseur Θ doit être réductible; il est facile d'exclure cette possibilité.

Bibliographie

1. A. Beauville, *Variétés de Prym et jacobienne intermédiaires*, Ann. de l'ENS 4eme série **10** (1977), 309–391.
2. ______, *Les singularités du diviseur thêta de la jacobienne intermédiaire de l'hypersurface cubique de P^4*, Lecture Notes in Math. **947**, Springer Verlag, 1981.
3. S. Bloch and J. P. Murre, *On the Chow group of certain types of Fano threefolds*, Compo. Math. **39** (1979), 47–105.
4. C. H. Clemens, *Degenerations techniques in the study of threefolds*, Lecture Notes in Math. **947**, Springer Verlag, 1981.
5. ______, *Double solid*, Advances in Mathematics **47** (1983), 107–231.
6. C. H. Clemens and P. Griffiths, *The intermediate jacobian of the cubic threefold*, Ann. of Math. **95** (1972), 281–356.
7. R. Donagi, *Generic Torelli and variational Schottky topics in transcendantal algebraic geometry*, Ann. of Math Studies **106**, Princeton University Press, 1984.
8. R. Donagi and R. Smith, *The structure of the Prym map*, Acta Math. (1981), 25–102.
9. P. Griffiths, *Some transcendantal methods in the study of algebraic cycles*, Lecture Notes in Math. **185**, Springer Verlag, 1971.
10. ______, *On the periods of certain rational integrals I, II*, Ann. of Math. **90** (1969), 460–541.
11. J. P. Murre, *Applications of algebraic K-theory to the study of algebraic cycles*, Lecture Notes in Math. **1124**, Springer Verlag, 1983.
12. A. N. Tjurin, *Five lectures on three-dimensional varieties*, Russian Math. Surveys **27** (1972).
13. ______, *The geometry of the Poincare theta divisor of a Prym variety*, Math. USSR Izvestija **8** (1975), 951–986.
14. G. E. Welters, *Abel-Jacobi isogenies for certain types of Fano threefolds*, Mathematical Central Tract **141**, Amsterdam, 1981.
15. D. Mumford, *On the Kodaïra Dimension of the Siegel Modular Variety*, Lecture Notes in Math. n° 997, Open Problems, Springer Verlag (1983).

Mathématique, Bâtiment 425, Université de Paris-Sud, 91405 Orsay Cedex, France