Sur une conjecture de Griffiths et Harris

Claire Voisin
Département de Mathématiques, Bâtiment 425
Université de Paris–Sud
91405 ORSAY Cedex

0.– Dans [4], Griffiths et Harris proposaient l'éventail suivant de conjectures concernant les courbes contenues dans une hypersurface générale de $\mathbb{P}^4$ de degré $d \geq 6$ (i.e. de fibré canonique ample).

i) on a : d divise $\deg(C)$
ii) l'image de l'application d'Abel–Jacobi : $\varphi_X : \mathrm{Hom}^2(X)/\mathrm{Rat}^2(X) \longrightarrow J^2(X)$ est réduite à zéro
iii) le groupe $\mathrm{Hom}^2(X)/\mathrm{Alg}^2(X)$ est trivial
iv) le groupe $\mathrm{Alg}^2(X)/\mathrm{Rat}^2(X)$ est trivial
v) si C est lisse, C est intersection complète $X \cap \Sigma$, de X et d'une surface Σ de $\mathbb{P}^4$.

Mark Green a expliqué dans son exposé les progrès récents concernant ii); cette note se propose de montrer que v) est faux, ainsi d'ailleurs que l'énoncé v′) suivant, qui est plus faible;

v′) la suite exacte normale de $C \subset X \subset \mathbb{P}^4$ est scindée.

Je remercie le C.I.R.M. et l'Université de Trento pour l'excellent accueil qui nous a été fait lors de ce congrès, ainsi que C. Ciliberto et E. Ballico pour m'avoir autorisée à inclure ces remarques dans leurs "proceedings".

1.– Contre–exemple à v)

1.1.– On supposera $d > 2$, le cas $d = 2$ étant trivial, puisque toute quadrique contient une droite.

Soit $X \subset \mathbb{P}^n$, $n \geq 4$, une hypersurface lisse de degré d, et soit $C \subset X$ une courbe lisse; supposons qu'il existe une surface $\Sigma \subset \mathbb{P}^n$ telle que C soit l'intersection complète de X et de Σ. Comme C est lisse, Σ est lisse le long de C, de sorte que $\mathrm{Sing}\,\Sigma$ est constitué de points isolés non situés sur C. Soit $\tau : \tilde{\Sigma} \longrightarrow \Sigma$ une désingularisation de Σ. On a une inclusion naturelle $C \subset \tilde{\Sigma}$, et C est un membre du système linéaire $|\tau^* \mathcal{O}_\Sigma(d)|$ sur $\tilde{\Sigma}$. La classe de C dans $H^2(\tilde{\Sigma}, \mathbb{Z})$ est donc divisible par d, ce qui entraîne :

$-\ d$ divise $(C^2)_{\tilde{\Sigma}}$

$-\ d$ divise $(K_{\tilde{\Sigma}}\,.\,C)_{\tilde{\Sigma}}$

la formule d'adjontion donne alors :

1.2.– d divise $\deg(K_C)$.

1.3.– Considérons maintenant la courbe à point double ordinaire D constituée de deux sections planes lisses $P_1 \cap X = C_1$, $P_2 \cap X = C_2$ de X, se rencontrant transversalement en un point p. Une telle courbe existe car $n \geq 4$.

On a, pour $i = 1,2$:

a) d divise $\deg(C_i)$

b) d divise $\deg(K_{C_i})$.

D'après b) on a alors : $\deg(K_D) = \deg(K_{C_1}) + \deg(K_{C_2}) + 2 \equiv 2$ (modulo d). Soit alors S une surface lisse intersection complète $X \cap X_1 \cap .. \cap X_{n-3}$, contenant D, et soit $D' \subset S$ un membre lisse du système linéaire $|\, m\, H + D|$ sur S; (D' existe pour m suffisamment grand).

On a :

$$\begin{aligned} \deg(K_{D'}) &= D'^2 + K_S\,.\,D' = (D+mH)^2 + (K_S\,.\,D+mH) \\ &= \deg(K_D) + 2m\deg(D) + m^2 H^2 + m\, K_S\,.\,H \end{aligned}$$

les deux derniers termes sont divisibles par d; d'après a) $\deg(D)$ l'est également, d'où : $\deg\,(K_{D'}) \equiv 2$ (modulo d).

Comme $d > 2$, D' ne satisfait pas la condition 1.2, et fournit un contrexemple à v).

2.– Contre–exemple à v′)

2.1.– On supposera désormais (pour simplifier) que $n = 4$.

Reprenons la courbe $D = C_1 \cup_p C_2$ du paragraphe 1.

On va montrer les faits suivants :

(A) la suite exacte normale de $D \subset X \subset \mathbb{P}^4$ n'est pas scindée.

(B) Soit $S = X \cap X'$, une surface lisse contenant D, avec $\deg X' = k$ suffisamment grand; soit D' une courbe lisse du système linéaire $|\, mH + D|$ sur S, avec m suffisamment grand; alors la suite exacte normale de $D' \subset X \subset \mathbb{P}^4$ n'est pas scindée.

2.2. **Lemme** : (A) $\Longrightarrow$ (B).

Démonstration : On notera $e_D \in H^1(N_D X(-d))$ la classe de l'extension $0 \longrightarrow N_D X \longrightarrow N_D \mathbb{P}^4 \longrightarrow \mathcal{O}_D(d) \longrightarrow 0$, et pour toute hypersurface X' telle que $X' \cap X = S$, on notera $F_D^{X'} \in H^1(N_D S(-d))$ la classe de l'extension : $0 \longrightarrow N_D S \longrightarrow N_D X' \longrightarrow \mathcal{O}_D(d) \longrightarrow 0$
– mêmes notations pour D'.

Considérons la suite exacte : $0 \longrightarrow N_D S \longrightarrow N_D X \longrightarrow \mathcal{O}_D(k) \longrightarrow 0$; elle fournit une flèche $\alpha : H^1(N_D S(-d)) \longrightarrow H^1(N_D X(-d))$, telle que $\alpha(F_D^{X'}) = e_D$.

i) Supposons S fixée, et soit m tel que $H^1(\mathcal{O}_S(-D)(k-d-m)) = 0$: cela entraîne : $H^0(\mathcal{O}_S(k-d)) \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow H^0(\mathcal{O}_{D'}(k-d))$, pour toute courbe D' dans le système linéaire $|mH + D|$ sur S. On en déduit immédiatement : si $e_{D'} = 0$, il existe une hypersurface X'' de degré k, telle que $X \cap X'' = S$, et $F_{D'}^{X''} = 0$.

ii) Considérons la suite exacte : $0 \longrightarrow \mathcal{O}_S(-d) \longrightarrow \mathcal{O}_S(D'(-d)) \longrightarrow \mathrm{N}_{D'}S(-d) \longrightarrow 0$. Elle fournit une flèche $\delta_{D'} : H^1(N_{D'}S(-d)) \longrightarrow H^2(\mathcal{O}_S(-d))$; on a par ailleurs l'application naturelle donnée par le cup–produit :

$$\beta : H^2(\mathcal{O}_S(-d)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H^0(\mathcal{O}_S(d)), H^2(\mathcal{O}_S));$$

on vérifie facilement que β est injective, dès que $K_S \geq 0$.

Il est alors bien connu que l'image $\beta \circ \delta_{D'}(F_{D'}^{X''}) \in \mathrm{Hom}(H^0(\mathcal{O}_S(d)), H^2(\mathcal{O}_S))$ s'identifie au composé : $H^0(\mathcal{O}_S(d) \longrightarrow H^1(T_S) \xrightarrow{[\lambda_{D'}]} H^2(\mathcal{O}_S)$, où $[\lambda_{D'}]$ est le cup–produit par la classe $\lambda_{D'} \in H^1(\Omega_S)$ de D', et la flèche $H^0(\mathcal{O}_S(d)) \longrightarrow H^1(T_S)$ provient de la suite exacte :

$$0 \longrightarrow T_S \longrightarrow T_{X''|S} \longrightarrow \mathcal{O}_S(d) \longrightarrow 0.$$

Il est alors facile de vérifier que $[\lambda_{D'}]$ ne dépend que de la "classe de cohomologie primitive" de D', i.e. $[\lambda_{D'}] = [\lambda_{D''}]$ si $\lambda_{D'} = \lambda_{D''} + n\lambda_H$, $n \in \mathbb{Z}$.
On en déduit que $[\lambda_{D'}] = [\lambda_D]$.

iii) Choisissons alors k, (et S), tels que l'on ait : $H^1(\mathcal{O}_S(D(-d))) = 0$ (il est facile de voir que cette condition est satisfaite pour k assez grand).

iv) Supposons par l'absurde que $e_{D'} = 0$, où D' est lisse et choisie comme en i) : il existe alors X'', telle que $F_{D'}^{X''} = 0$. On en déduit que $\beta \circ \delta_{D'}(F_{D'}^{X''}) = 0$, et, d'après ii) que $[\lambda_{D'}] = 0$. Toujours d'après ii), il vient $[\lambda_D] = 0$, d'où $\beta \circ \delta_D(F_D^{X''}) = 0$. Or le choix de k, fait en iii), entraîne que δ_D est injective. Comme β est également injective, on en déduit $F_D^{X''} = 0$, et immédiatement $e_D = 0$, ce qui contredit (A).

2.3.– **Preuve de (A)** : la suite exacte normale de $D \subset X \subset \mathbb{P}^4$ s'écrit : $0 \longrightarrow N_D X \longrightarrow N_D \mathbb{P}^4 \longrightarrow \mathcal{O}_D(d) \longrightarrow 0$; il est clair qu'il suffit de prouver : $h^0(N_D \mathbb{P}^4(-d)) = 0$.

Considérons les suites exactes suivantes : (cf. [6]).

$$(E_1) \qquad 0 \longrightarrow N_D\mathbb{P}^4(-d) \longrightarrow N_D\mathbb{P}^4(-d)_{|C_1} \oplus N_D\mathbb{P}^4(-d)_{|C_2} \longrightarrow N_D\mathbb{P}^4(-d)_{|P} \longrightarrow 0$$

$$(E_2) \qquad 0 \longrightarrow N_{C_1}\mathbb{P}^4(-d) \longrightarrow N_D\mathbb{P}^4(-d)_{|C_1} \longrightarrow \mathbb{C}_P \longrightarrow 0.$$

On a : $h^0(N_{C_1}\mathbb{P}^4(-d)) = 1 = h^0(N_{C_2}\mathbb{P}^4(-d))$.

Il suffit donc de montrer :

i) $H^0(N_D\mathbb{P}^4(-d)_{|C_i}) \simeq H^0(N_{C_i}\mathbb{P}^4(-d))$

et

ii) $H^0(N_{C_1}\mathbb{P}^4(-d)) \oplus H^0(N_{C_2}\mathbb{P}^4(-d)) \hookrightarrow H^0(N_D\mathbb{P}^4(-d)_{|P})$.

i) Par Riemann–Roch et par dualité, $H^0(N_D\mathbb{P}^4(-d)_{|C_i}) = H^0(N_{C_i}\mathbb{P}^4(-d))$ si et seulement si l'inclusion $H^0(N_D\mathbb{P}^{4*}(-d)\otimes K_{C_i}) \hookrightarrow H^0(N_{C_i}\mathbb{P}^{4*}(d)\otimes K_{C_i})$ est stricte; or, pour $d \geq 3$, le faisceau $N_{C_i}\mathbb{P}^{4*}(d)\otimes K_{C_i}$ est engendré par ses sections globales. La conclusion est donc immédiate, au vu de la suite exacte duale de (E_2).

ii La section de $H^0(N_{C_i}\mathbb{P}^4(-d))$ provient de la section canonique de $N_{C_i}P_i(-d)$ pour $i = 1,2$. L'assertion résulte immédiatement du fait que les espaces tangents de P_1 et P_2 sont transversaux au point p, et la description locale de $N_D\mathbb{P}^4$.

2.4.– **Remarque** : Il est naturel de penser qu'une courbe du type $C_1 \cup_p C_2$ fournisse des contrexemples à v) et v′); en effet considérons la surface réduite $P = P_1 \cup_p P_2$, union des plans P_1 et P_2 se coupant transversalement au point p. Alors son intersection schématique avec X n'est pas la courbe réduite $C_1 \cup_p C_2$, mais possède un point immergé, de sorte que D n'est qu'ensemblistement l'intersection $P \cap X$.

3.– Concernant les autres points de la conjecture de Griffiths et Harris, on peut faire la remarque (peut–être évidente) suivante :

3.1. **Lemme** : ii) $\Longrightarrow$ i).

Démonstration : Supposons qu'une hypersurface X générale contienne une courbe de degré m, et que l'application d'Abel Jacobi φ_X soit nulle.

Il existe une variété irréductible W munie d'une application propre $p : W \longrightarrow \mathscr{X}$, $\mathscr{X} = \mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^4, \mathcal{O}(d)))$, telle que la fibre de p en X paramètre des courbes de degré m contenues dans X; deux telles courbes sont homologues et pour X générale, on a : $\forall\, C, C' \in p^{-1}(X)$, $\varphi_X(C - C') = 0$; en fait, ceci reste vrai pour tout X lisse : En effet, si H dénote une section plane de X, on a, pour X générique, $\varphi_X(dC - mH) = 0$, $\forall\, C \in p^{-1}(X)$. Par irréductibilité de W, ceci reste vrai pour tout $X \in \mathscr{X}$ Donc $\varphi_X(C - C')$ est un point de torsion, constant sur les composantes connexes de $p^{-1}(X) \times p^{-1}(X)$. Mais la normalité de $\mathscr{X}$ et l'irréductibilité de W entraînent que si $W \longrightarrow W_1 \longrightarrow X$ est la factorisation de Stein de p, chaque composante irréductible du produit $W_1 \times_{\mathscr{X}} W_1$ domine $\mathscr{X}$. Ce qui entraîne facilement le résultat

Fixons une droite Δ de $\mathbb{P}^4$, et notons $\mathscr{X}_\Delta$ la famille des hypersurfaces de degré d contenant Δ. Notons $W_\Delta = p^{-1}(\mathscr{X}_\Delta)$; on a alors une fonction normale ν_Δ définie comme suit sur $\mathscr{X}_\Delta$: soit X lisse $\in \mathscr{X}_\Delta$ et soit $C \in p^{-1}(X)$; alors $\deg(m\Delta - C) = 0$ et l'on peut poser $\nu_\Delta(X) = \varphi_X(m\Delta - C)$.

Or il est connu que le groupe des fonctions normales sur $\mathscr{X}_\Delta$ est cyclique engendré par la fonction normale ν_Δ^H définie par : $\nu_\Delta^H(X) = \varphi_X(d\Delta - H)$ (il suffit de généraliser l'argument de [4], § 3). On en déduit qu'il existe un entier k tel que : $\forall\, X$ lisse $\in \mathscr{X}_\Delta$, $\Phi_X(m\Delta - C) = k\,\varphi_X(d\Delta - H)$, pour $C \in p^{-1}(X)$.

Comme Δ se déforme continuement sur Δ' on a en fait $k = k'$; sur $\mathscr{X}_\Delta \cap \mathscr{X}_{\Delta'}$ il vient donc : $(m-kd)\Phi_X(\Delta-\Delta') = 0$. Mais d'après Griffiths [3], si X est générale dans $\mathscr{X}_\Delta \cap \mathscr{X}_{\Delta'}$, $\Phi_X(\Delta-\Delta') \in J(X)$ n'est pas un point de torsion. Donc $m - kd = 0$, ce qui prouve i).

4.– **Conclusion** : En paragraphe 1 on a dégagé la condition 1.2 nécessaire pour qu'une courbe C soit complète intersection $X \cap \Sigma$ de X et d'une surface Σ de $\mathbb{P}^4$. Si d divise le degré de C, cette condition est automatiquement satisfaite lorsque C est sous–canonique (i.e. $\exists\ m/K_C = \mathcal{O}_C(m)$). De même, il semble difficile de construire par des procédés analogues à celui décrit en paragraphes 1 et 2, des courbes sous–canoniques qui n'ont pas la suite exacte normale scindée. Il n'est donc pas exclu que v), v′) soient vrais pour les courbes sous–canoniques.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. Ellingsrud, L. Gruson, C. Peskine, S.A. Stomme.– On the normal bundle of curves on smooth projective surfaces, Invent. Math. 80, 181–184 (1985).

[2] M. Green.– Griffiths' infinitesimal invariant and the Abel Jacobi map, preprint.

[3] P. Griffiths.– On the periods of certain rational integrals I, II, Ann. Math. 90 (1969) 460–541.

[4] P. Griffiths, J. Harris.– On the Noether–Lefschetz theorem and some remarks on codimension two cycles, Math. Ann. 271, 31–51, (1985).

[5] J. Harris, K. Hulek.– On the normal bundle of curves on complete intersection surfaces, Math. Ann. 264, 129–135, (1983).

[6] R. Hartshorne, A. Hirschowitz.– Smoothing algebraic space curves, dans *Algebraic geometry*, Sitjes, (1983), Lecture Notes in Math. N° 1124.