Math. Ann. 299, 77–103 (1994)

Mathematische
Annalen

Variations de structure de Hodge et zéro-cycles sur les surfaces générales

Claire Voisin*

Département de Mathématique, Université de Paris Sud, Bâtiment 425,
F-91405 Orsay Cedex, France

Reçu le 18 juin 1993

0 Introduction

Dans l'article fondamental [10], Mumford donne un critère cohomologique pour l'équivalence rationnelle des zéro-cycles sur une surface S: Il considère une famille de zéro-cycles $(Z_w)_{w\in W}$ sur S, ou encore un cycle de codimension deux $Z \subset W\times S$, et montre:

Théorème. *Si Z_w est rationnellement équivalent à zéro dans S, $\forall_w \in W$, on a: $\forall\omega \in H^0(K_S)$, la deux forme $[Z](\omega)$ induite sur W est nulle.*

Dans cet article, on propose un critère analogue, mais tenant compte de la variation de structure de Hodge, pour l'équivalence rationnelle des zéro-cycles dans une famille de surfaces. Précisément on montre:

0.1 Théorème. *Soit $(Z_w)_{w\in W}$ une famille de zéro-cycles de degré 0 dans une famille de surfaces $(S_w)_{w\in W}$, i.e. Z_w est un zéro-cycle de degré 0 de S_w. Alors il existe un invariant infinitésimal $\delta Z \in \Lambda^2\Omega_W \otimes \mathscr{H}^{0,2}/\operatorname{Im}\bar{\nabla}_2$, qui s'annule en tout point de W lorsque $\Lambda^2\Omega_W\otimes\mathscr{H}^{0,2}/\operatorname{Im}\bar{\nabla}_2$ est de rang constant et $\forall w \in W$, Z_w est rationnellement équivalent à zéro dans S_w.*

L'invariant δZ est égal à l'invariant de Mumford, lorsque la famille de surfaces $(S_w)_{w\in W}$ est constante. Plus généralement il est la généralisation du critère de Mumford correspondant à la généralisation de la différentielle de l'application d'Abel-Jacobi donnée par "l'invariant infinitésimal des fonctions normales" [9, 6, 13]).

Une relation précise entre ces invariants est en fait décrite dans la proposition 1.14. En supposant que la famille de zéro-cycles $(Z_w)_{w\in W}$ sur la famille de surfaces $(S_w)_{w\in W}$ est supportée sur une famille de courbes $(C_w)_{w\in W} \subset (S_w)_{w\in W}$, on montre comment l'invariant δZ se calcule à l'aide de l'invariant infinitésimal $\delta\nu_Z$ de la

* Avec le support partiel du projet Science "Geometry of Algebraic Varieties, Contract SCI-0398-C(A)

fonction normale ν_Z associée à la famille de zéro-cycles de degré 0 $(Z_w)_{w\in W}$ sur la famille de courbes $(C_w)_{w\in W}$.

Le théorème 0.1 et la proposition 1.14 font l'objet de la première partie, où l'on donne également une description "concrète" de l'invariant δZ (proposition 1.17) dépendant de la géométrie locale, infinitésimale du cycle Z.

Les parties 2 et 3 sont consacrées aux applications de ce critère. On considère les surfaces de degré d dans $\mathbb{P}^3$ et l'on utilise la description de leurs variations de structure de Hodge en termes de multiplication dans les anneaux jacobiens associés [2], qui permet de montrer des énoncés de "non-dégénérescence" très forts pour ces variations de structure de Hodge (théorème de Macaulay [2], lemme des symétriseurs [4]) pour montrer les résultats suivants:

0.2 Théorème 2.1. *Soit $d \geqq 5$; si $S \subset \mathbb{P}^3$ est une surface générale de degré d et $C \overset{j}{\hookrightarrow} S$ est une section plane générale de S, l'application $j_*: JC \to CH_0^0(S)$ a pour noyau l'ensemble des points de torsion de JC.*

0.3 Théorème 3.1. *Soit $S \subset \mathbb{P}^3$ une surface générale de degré d, alors:*

a) *si $d \geqq 6$, pour tout point $p \in S$, il existe au plus un nombre fini de points qui sont rationnellement équivalents à p.*

b) *si $d \geqq 7$, deux points distincts de S ne sont pas rationnellement équivalents.*

Le théorème 3.1 reste probablement vrai si l'on fait $d \geqq 5$ dans a) et $d \geqq 6$ dans b). On s'est contenté d'un énoncé plus faible pour des raisons techniques, l'analyse algébrique des variations de structure de Hodge nécessitant une étude séparée et peut-être délicate dans les cas a) $d = 5$, et b) $d = 6$. Il est cependant très possible que la proposition 3.4 soit encore vraie pour une surface générique dans ces cas particuliers.

Notons que ces énoncés ont par exemple les conséquences géométriques suivantes:

0.4 Corollaire. *Soit S une surface générale de degré d dans $\mathbb{P}^3$; alors pour $d \geqq 5$, S ne contient pas de courbe rationnelle, et pour $d \geqq 6$ S ne contient pas de courbe elliptique.*

En effet une courbe rationnelle dans S rencontrerait une section plane générale de S en au moins deux points p_1, p_2, tels que $p_1 - p_2 \equiv 0$ dans S, et il est facile de voir que la différence de deux points n'est pas un point de torsion dans la jacobienne d'une courbe plane générale de degré supérieur ou égal à 5. Ce qui contredirait 0.2. D'autre part, une courbe elliptique E fournirait un ensemble dénombrable infini de points rationnellement équivalents sur S (si $p \in E$, et η est un point de torsion de JE, $p + \eta$ est rationnellement équivalent à p dans S). Ce qui contredirait 0.3.

En fait, ce résultat a été montré entre autres choses par Xu dans l'article très intéressant [15], et pour $d \geqq 5$.

0.5. Dans une autre direction, le résultat principal de la partie 3 (proposition 3.4) permet de montrer: Soit C une courbe fixée, et soit S une surface générale de degré $d \geqq 7$ dans $\mathbb{P}^3$. Alors il n'existe pas d'application non constante de C dans S.

1 Généralisation du critère de Mumford

1.1. Soit $\pi: \mathcal{S} \to B$ une famille de surfaces algébriques, qui pour simplifier les énoncés seront supposées régulières, propre et lisse au-dessus de B, quasi-projective et lisse. Soit $Z \subset \mathcal{S}$ un cycle algébrique de codimension deux, tel que $Z = \sum n_i Z_i$, où $Z_i \subset \mathscr{S}$ est une sous-variété irréductible de codimension deux, et tel que $\pi|_{Z_i}: Z_i \to B$ soit finie. On suposera que $\sum n_i d^0\pi|_{Z_i} = 0$.

Z admet alors une classe de cohomologie dans $H^2(\Omega^2_{\mathscr{S}})$, qu'on notera α_Z.

1.2. Considérons la suite exacte définissant $\Omega_{\mathscr{S}/B}$:

$$0 \to \pi^*\Omega_B \to \Omega_{\mathscr{S}} \to \Omega_{\mathscr{S}/B} \to 0. \tag{1.2.1}$$

Elle fournit une suite exacte, définissant K:

$$0 \to K \to \Omega^2_{\mathscr{S}} \to \Omega^2_{\mathscr{S}/B} \to 0 \tag{1.2.2}$$

et l'on a alors:

$$0 \to \pi^*\Omega^2_B \to K \to \Omega_{\mathscr{S}/B} \otimes \Omega_B \to 0. \tag{1.2.3}$$

1.3. Soit α^0_Z l'image de α_Z dans $H^0(R^2\pi_*\Omega^2_{\mathscr{S}})$. D'après la suite exacte (1.2.2) et par l'hypothèse de régularité des surfaces S_b, on a une suite exacte:

$$0 \to R^2\pi_*K \to R^2\pi_*\Omega^2_{\mathscr{S}} \to R^2\pi_*\Omega^2_{\mathscr{S}/B} \to 0. \tag{1.3.1}$$

Comme on a $\sum n_i d^0\pi|_{Z_i} = 0$, l'image de α^0_Z dans $H^0(R^2\pi_*\Omega^2_{\mathscr{S}/B})$ est nulle, et donc on a: $\alpha^0_Z \in H^0(R^2\pi_*K)$. On utilise maintenant (1.2.3) et l'hypothèse de régularité pour décrire $R^2\pi_*K$ par la suite exacte:

$$R^1\pi_*\Omega_{\mathscr{S}/B} \otimes \Omega_B \xrightarrow[\psi]{} \Omega^2_B \otimes R^2\pi_*\mathscr{O}_{\mathscr{S}} \to R^2\pi_*K \to 0. \tag{1.3.2}$$

1.4. En termes de variations de structure de Hodge, la flèche $\psi: R^1\pi_*\Omega_{\mathscr{S}/B} \otimes \Omega_B \to \Omega^2_B \otimes R^2\pi_*\mathscr{O}$ a l'interprétation suivante:

Soit $\mathscr{H}^2 = R^2\pi_*\mathbb{C} \otimes \mathscr{O}_B$; $\mathscr{H}^2$ est muni de sa filtration de Hodge $F^i\mathscr{H}^2 \subset F^{i-1}\mathscr{H}^2$, avec: $F^1\mathscr{H}^2/F^2\mathscr{H}^2 \cong R^1\pi_*\Omega_{\mathscr{S}/B}$, et $\mathscr{H}^2/F^1\mathscr{H}^2 \cong R^2\pi_*\mathscr{O}_{\mathscr{S}}$.

La connexion de Gauss-Manin ∇ satisfait la transversalité de Griffiths [8]: $\nabla F^i\mathscr{H}^2 \subset F^{i-1}\mathscr{H}^2 \otimes \Omega_B$ et fournit donc des applications $\mathscr{O}_B$-linéaires:

$$\bar{\nabla}: F^i\mathscr{H}^2/F^{i+1}\mathscr{H}^2 \to (F^{i-1}\mathscr{H}^2/F^i\mathscr{H}^2) \otimes \Omega_B.$$

On a en particulier:

$$\begin{array}{cccccc} \bar{\nabla}: & \mathscr{H}^{1,1} & \longrightarrow & \mathscr{H}^{0,2} & \otimes & \Omega_B \\ & \| & & \| & & \\ & R^1\pi_*\Omega_{\mathscr{S}/B} & \longrightarrow & R^2\pi_*\mathscr{O} & \otimes & \Omega_B, \end{array}$$

et l'on sait [8] que $\bar{\nabla}$ est induite par la suite exacte (1.2.1). D'autre part la flèche $\bar{\nabla}$ donne également: $\bar{\nabla}_2: \mathscr{H}^{1,1} \otimes \Omega_B \to \mathscr{H}^{0,2} \otimes \Omega^2_B$, définie par: $\bar{\nabla}_2(\alpha \otimes \omega) = \bar{\nabla}(\alpha) \wedge \omega$, et ce qui précède implique immédiatement que $\bar{\nabla}_2$ est égale à ψ. On a donc $R^2\pi_*K \cong \mathscr{H}^{0,2} \otimes \Omega^2_B/\operatorname{Im}\bar{\nabla}_2$. Ceci étant noté, on pose la définition suivante:

1.5. Définition.[1] *Soit $Z \subset \mathscr{S}$ un cycle satisfaisant les hypothèses de 1.1; on appelle* **invariant infinitésimal de** Z *et on note* $\delta Z \in H^0(\mathscr{H}^{0,2} \otimes \Omega^2_B/\operatorname{Im}\bar{\nabla}_2)$ *l'image de* $\alpha^0_Z \in H^0(R^2\pi_*K)$ *par l'isomorphisme de* 1.4.1.

[1] Des invariants de ce type ont été utilisés dans [6, 9.III], et de façon plus implicite dans [11]

1.6 *Remarque.* Cet invariant δZ est la généralisation de l'invariant de Mumford au cas d'une famille de surfaces. L'invariant de Mumford pour une famille de zéro-cycles $(Z_b)_{b\in B}$ sur une surface S est l'application $\alpha_Z : H^0(\Omega^2_S) \to H^0(\Omega^2_B)$ induite par la classe de Z. Cette application s'identifie à la composante de $[Z] \in H^2(\Omega^2_{S\times B})$ dans $H^2(\mathcal{O}_S) \otimes H^0(\Omega^2_B)$. Dans le cas où $\mathcal{S}$ est un produit $S \times B$, l'application $\bar{\nabla}$ est nulle et $H^2(\mathcal{O}_S) \otimes H^0(\Omega^2_B)$ est égal à $H^0(R^2\pi_* K)$, avec les notations précédentes.

1.7. L'utilité de cet invariant pour l'étude des zéro-cycles modulo équivalence rationnelle réside dans la proposition suivante:

1.8. Proposition. *Supposons que rang $\bar{\nabla}_2$ soit constant sur B (ou encore que $R^2\pi_* K$ soit localement libre). Si $Z \in \mathcal{S}$ satisfait la condition: $\forall b \in B$, Z_b est rationnellement équivalent à zéro dans S_b, alors $\delta Z = 0$.*

Démonstration. Comme le fibré $R^2\pi_* K$ est libre, il suffit de montrer que $\delta Z \in H^0(R^2\pi_* K)$ s'annule sur un ouvert de Zariski de B. D'autre part, pour un changement de base étale $U \underset{r}{\to} B$, on peut considérer

$$\begin{array}{ccc} Z_U \subset \mathcal{S}_U & \xrightarrow{r} & \mathcal{S} \\ {\scriptstyle \pi_U}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ U & \xrightarrow[r]{} & B, \end{array}$$

et définir $\delta Z_U \in H^0(R^2\pi_{U*} K_U)$. Il est clair d'après 1.4 que $R^2\pi_{U*} K_U = r^*(R^2\pi_* K)$, et comme $\alpha_{Z_U} = r^*\alpha_Z$, que $\delta Z = r^*\delta Z_U$. Enfin, par un raisonnement "standard", on montre que si Z_b est rationnellement équivalent à zéro dans S_b, $\forall b \in B$, il existe un changement de base étale $U \underset{r}{\to} B$ tel que $\alpha_{Z_U} = 0$ dans $H^2(\Omega^2_{\mathcal{S}_U})$. Donc $\delta Z_U = 0$ et $\delta Z = 0$ sur $r(U)$ qui contient un ouvert de Zariski de B.

On conclut cette section en décrivant plus explicitement l'invariant δZ, d'une part (proposition 1.14) en supposant $Z \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{S}$, où $\mathcal{C} \underset{\pi_C}{\longrightarrow} B$ est une famille de courbes propre et lisse, d'autre part (proposition 1.17) par une formule locale dépendant uniquement de la géométrie de $Z \subset \mathcal{S}$, au premier ordre au-dessus de B.

1.9. On commence par rappeler la notion d'"invariant infinitésimal d'une fonction normale" en l'appliquant au cas des sections d'une famille de jacobiennes de courbes: Soit $\mathcal{C} \underset{\pi}{\to} B$ une famille de courbes propre et lisse au-dessus de B et soit $Z \subset \mathcal{C}$ un diviseur de degré 0 sur les fibres C_b.

On a la famille de jacobiennes $J \to B$, et le faisceau de sections holomorphes de J est décrit par $\mathcal{J} = R^1\pi_*\mathbb{C} \otimes \mathcal{O}_B / \mathcal{H}^{1,0} \oplus R^1\pi_*\mathbb{Z}$. On note $\mathcal{H}^1 = R^1\pi_*\mathbb{C} \otimes \mathcal{O}_B$ et ∇ la connexion de Gauss-Manin. Au cycle Z correspond par l'application d'Abel-Jacobi une section holomorphe de J, soit $\nu_Z \in \mathcal{J}$, telle que $\nu_Z(b) = \mathrm{alb}(Z_b)$. Soit $\bar{\nabla} : \mathcal{H}^{1,0} \to \mathcal{H}^{0,1} \otimes \Omega_B$ l'application $\mathcal{O}_B$-linéaire qui se déduit de $\nabla : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^1 \otimes \Omega_B$, et décrit la variation de structure de Hodge des courbes $(C_b)_{b\in B}$. La section ν_Z admet des relèvements locaux $\tilde{\nu}_Z$ dans $\mathcal{H}^1$, définis modulo $\mathcal{H}^{1,0} \oplus H^1_{\mathbb{Z}}$ (où $H^1_{\mathbb{Z}} = R^1\pi_*\mathbb{Z}$), et l'image $\delta\nu_Z$ de $\nabla\tilde{\nu}_Z$ dans $\mathcal{H}^{0,1} \otimes \Omega_B / \operatorname{Im}\bar{\nabla}$ ne dépend pas du choix du relèvement. On appelle $\delta\nu_Z$ l'invariant infinitésimal de ν_Z. On a alors: (cf. [6]).

1.10 Lemme. *Supposons que $\bar{\nabla}_2 : \mathcal{H}^{1,0} \otimes \Omega_B \to \mathcal{H}^{0,1} \otimes \Lambda^2\Omega_B$ est injective (et $\dim B > 0$). Alors $\delta\nu_Z = 0$ dans $\mathcal{H}^{0,1} \otimes \Omega_B / \operatorname{Im}\bar{\nabla}$ si et seulement si ν_Z admet* *localement un relèvement $\tilde{\nu}_Z \in \mathscr{H}^1$ qui est plat. Un tel relèvement est unique à une section de $H^1_{\mathbb{Z}}$ près.*

En effet, $\delta\nu_Z = 0$ entraîne que ν_Z se relève en $\tilde{\nu}_Z \in \mathscr{H}^1$ telle que $\nabla\tilde{\nu}_Z \in \mathscr{H}^{1,0} \otimes \Omega_B$; mais alors $\bar{\nabla}_2(\nabla\tilde{\nu}_Z) = 0$ par platitude de ∇, et donc $\nabla\tilde{\nu}_Z = 0$ par l'hypothèse "$\bar{\nabla}_2$ injective". L'unité vient de ce que l'hypothèse implique aussi l'injectivité de $\bar{\nabla}: \mathscr{H}^{1,0} \to \mathscr{H}^{0,1} \otimes \Omega_B$, dès que $\dim B > 0$.

1.11. Revenant au cycle $Z \subset \mathscr{C}$ on peut aussi considérer la classe α_Z de Z dans $H^1(\Omega_{\mathscr{C}})$ et regarder son image $\alpha_Z^0 \in H^0(R^1\pi_*\Omega_{\mathscr{C}})$: on a la suite exacte:

$$0 \to \pi^*\Omega_B \to \Omega_{\mathscr{C}} \to \Omega_{\mathscr{C}/B} \to 0, \tag{1.11.1}$$

qui fournit immédiatement:

$$R^0\pi_*\Omega_{\mathscr{C}/B} \xrightarrow{\psi} R^1\pi_*\mathscr{O}_{\mathscr{C}} \otimes \Omega_B \to R^1\pi_*\Omega_{\mathscr{C}} \to R^1\pi_*\Omega_{\mathscr{C}/B} \to 0. \tag{1.11.2}$$

Comme Z est de degré 0 dans les fibres, α_Z^0 s'annule dans $H^0(R^1\pi_*\Omega_{\mathscr{C}/B})$ et donc est un élément de $R^1\pi_*\mathscr{O}_{\mathscr{C}} \otimes \Omega_B/\operatorname{Im}\psi$. Comme en 1.4, on identifie $R^1\pi_*\mathscr{O}_{\mathscr{C}}$ à $\mathscr{H}^{0,1}$, $R^0\pi_*\Omega_{\mathscr{C}/B}$ à $\mathscr{H}^{1,0}$, et ψ à $\bar{\nabla}: \mathscr{H}^{1,0} \to \mathscr{H}^{0,1} \otimes \Omega_B$, de sorte que $\alpha_Z^0 \in \mathscr{H}^{0,1} \otimes \Omega_B/\operatorname{Im}\bar{\nabla}$. On a alors:

1.12 Lemme. *α_Z^0 s'identifie de cette manière à $\delta\nu_Z$ (défini en 1.9).*

Ceci est prouvé dans un contexte un peu différent dans [14].

1.13. Supposons maintenant qu'on a

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{C} & \xhookrightarrow{\;j\;} & \mathscr{S} \\ & {}_{\pi_C}\searrow \quad \swarrow_{\pi_S} & \\ & B & \end{array}$$

et Z un cycle de codimension un dans $\mathscr{C}$, de degré 0 sur les fibres C_b. $j(Z)$ est alors un cycle de codimension deux dans $\mathscr{S}$ de degré 0 sur les fibres S_b. On a l'invariant $\delta\nu_Z$ construit en 1.9 et l'invariant δZ de 1.5. La proposition 1.14 décrit la relation entre $\delta\nu_Z$ et δZ. On introduit d'abord les notations suivantes: Soit $b \in B$; on a le complexe logarithmique $\Omega_{S_b}(\log C_b)$ dont l'hypercohomologie en degré deux calcule $H^2(U_b)$ où $U_b = S_b \backslash C_b$, et dont la filtration naïve induit la filtration de Hodge de $H^2(U_b)$. On a la suite exacte:

$$0 \to H^2(S_b)/[C_b] \to H^2(U_b) \xrightarrow{\text{Res}} H^1(C_b) \to 0 \tag{1.13.1}$$

telle que

$$F^i H^2(U_b) \cap (H^2(S_b)/[C_b]) = F^i(H^2(S_b)/[C_b])$$

$$\text{et} \quad \operatorname{Res} F^i H^2(U_b) = F^{i-1}H^1(C_b).$$

Par la dégénérescence de la suite spectrale de Hodge vers De Rham pour le complexe logarithmique on a:

$$F^1/F^2 H^2(U_b) = H^1(\Omega_{S_b}(\log C_b)). \tag{1.13.2}$$

De même on a: $F^0/F^1(H^2(U_b)) \cong H^2(\mathscr{O}_{S_b})$.

Comme la filtration de Hodge des ouverts $(U_b)_{b\in B}$ satisfait également la propriété de transversalité on a comme en 1.4 les applications

$$\begin{array}{cccc} \bar\nabla^U_{(b)}: & F^1/F^2H^2(U_b) & \longrightarrow & F^0/F^1H^2(U_b)\otimes\Omega_{B(b)} \\ & \| & & \| \\ & H^1(\Omega_{S_b}(\log C_b)) & \longrightarrow & H^2(\mathcal{O}_{S_b})\otimes\Omega_{B(b)}\,. \end{array}$$

Comme la suite exacte (1.13.1) est compatible avec ∇ et avec les filtrations de Hodge, on obtient finalement les diagrammes commutatifs suivants, dont les colonnes sont exactes:

$$\begin{array}{cccc} \bar\nabla^S_2 & : & H^1(\Omega_{S_b})\otimes\Omega_{B(b)} & \longrightarrow & H^2(\mathcal{O}_{S_b})\otimes\Lambda^2\Omega_{B(b)} \\ & & \downarrow & & \| \\ \bar\nabla^U_2 & : & H^1(\Omega_{S_b}(\log C_b))\otimes\Omega_{B(b)} & \longrightarrow & H^2(\mathcal{O}_{S_b})\otimes\Lambda^2\Omega_{B(b)} \\ & & \downarrow{\scriptstyle\mathrm{Res}} & & \\ & & H^1(\mathcal{O}_{C_b})\otimes\Omega_{B(b)} & & \\ & & \downarrow & & \\ & & 0\,, & & \end{array} \tag{1.13.3}$$

$$\begin{array}{cccc} \bar\nabla^U & : & H^0(\Omega^2_S(\log C_b)) & \longrightarrow & H^1(\Omega_{S_b}(\log C_b))\otimes\Omega_{B(b)} \\ & & \downarrow{\scriptstyle\mathrm{Res}} & & \downarrow{\scriptstyle\mathrm{Res}} \\ \bar\nabla^C & : & H^0(\Omega_{C_b}) & \longrightarrow & H^1(\mathcal{O}_{C_b})\otimes\Omega_{B_{(b)}} \\ & & \downarrow & & \\ & & 0\,. & & \end{array} \tag{1.13.4}$$

Notant finalement que $\bar\nabla^U_2\circ\bar\nabla^U=0$, par platitude de ∇^U, on construit l'application suivante:

$$j: H^1(\mathcal{O}_{C_b})\otimes\Omega_{B(b)}/\operatorname{Im}\bar\nabla^C \to H^2(\mathcal{O}_{S_b})\otimes\Lambda^2\Omega_{B(b)}/\operatorname{Im}\bar\nabla^S_2\,. \tag{1.13.5}$$

en posant, pour

$$\eta\in H^1(\mathcal{O}_{C_b})\otimes\Omega_{B(b)}\,,\qquad j(\eta)=\bar\nabla^U_2(\tilde\eta)\ \text{(modulo }\operatorname{Im}\bar\nabla^S_2),$$

où

$$\tilde\eta\in H^1(\Omega_{S_b}((\log C_b))\otimes\Omega_{B(b)}$$

est un relèvement de η. Il reste à voir que cette flèche se factorise bien par $H^1(\mathcal{O}_{C_b})\otimes\Omega_{B(b)}/\operatorname{Im}\bar\nabla^C$: mais cela résulte immédiatement de l'exactitude verticale de (1.13.4) et de $\bar\nabla^U_2\circ\bar\nabla^U=0$.

Pour alléger les notations, on s'est placé en un point $b\in B$, mais toute cette construction peut aussi bien se faire en famille, fournissant une application $\mathcal{O}_B$-linéaire:

$$j:\mathcal{H}^{0,1}_C\otimes\Omega_B/\operatorname{Im}\bar\nabla^C \to \mathcal{H}^{0,2}_{\mathcal{S}}\otimes\Lambda^2\Omega_B/\operatorname{Im}\bar\nabla^S_2\,. \tag{1.13.6}$$

La comparaison de $\delta\nu_Z$ et de δZ est alors donnée par:

1.14 Proposition. *On a* $\delta Z = j(\delta\nu_Z)$.

Démonstration. On introduit le complexe logarithmique $\Omega^{\cdot}_{\mathscr{S}}(\log \mathscr{C})$; on a la suite exacte:

(1.14.1) $$0 \to \Omega^2_{\mathscr{S}} \to \Omega^2_{\mathscr{S}}(\log \mathscr{C}) \xrightarrow{\mathrm{Res}} \Omega_{\mathscr{C}} \to 0\,,$$

avec un cobord associé $j_*: H^1(\Omega_{\mathscr{C}}) \to H^2(\Omega^2_{\mathscr{S}})$. Les classes $\alpha_Z^{\mathscr{C}} \in H^1(\Omega_{\mathscr{C}})$ et $\alpha_Z^{\mathscr{S}} \in H^2(\Omega^2_{\mathscr{S}})$ sont liées par la relation: $\alpha_Z^{\mathscr{S}} = j_*\alpha_Z^{\mathscr{C}}$. On reprend les suites exactes (1.2.2) et (1.11.1): on considère également les analogues de (1.2.2) et (1.2.3) pour le complexe logarithmique:

(1.14.2) $$0 \to K(\log \mathscr{C}) \to \Omega^2_{\mathscr{S}}(\log \mathscr{C}) \to \Omega^2_{\mathscr{S}/B}(\log \mathscr{C}) \to 0\,.$$

(1.14.3) $$0 \to \pi^*\Omega^2_B \to K(\log \mathscr{C}) \to \Omega_{\mathscr{S}/B}(\log \mathscr{C}) \otimes \pi^*\Omega_B \to 0\,.$$

On a alors le diagramme commutatif exact suivant:

(1.14.4) $$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & K(\log \mathscr{C}) & \longrightarrow & \pi^*_{\mathscr{C}}\Omega_B & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \Omega^2_{\mathscr{S}} & \longrightarrow & \Omega^2_{\mathscr{S}}(\log \mathscr{C}) & \longrightarrow & \Omega_{\mathscr{C}} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \Omega^2_{\mathscr{S}/B} & \longrightarrow & \Omega^2_{\mathscr{S}/B}(\log \mathscr{C}) & \longrightarrow & \Omega_{\mathscr{C}/B} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

où les secondes flèches horizontales sont données par le résidu. La première ligne de ce diagramme fournit une flèche

(1.14.5) $$f: R^1\pi_*\mathscr{O}_{\mathscr{C}} \otimes \Omega_B \to R^2\pi_*K$$

qui se factorise en fait par $R^1\pi_*\mathscr{O}_{\mathscr{C}} \otimes \Omega_B/\psi(R^0\pi_*\Omega_{\mathscr{C}/B})$, puisque $R^1\pi_*(\Omega^2_{\mathscr{S}/B}) = 0$.

La seconde ligne fournit $j_*: R^1\pi_*\Omega_{\mathscr{C}} \to R^2\pi_*\Omega^2_{\mathscr{S}}$ qui rend commutatif le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} j_*: H^1(\Omega_{\mathscr{C}}) & \longrightarrow & H^2(\Omega^2_{\mathscr{S}}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ j_*: H^0(R^1\pi_*\Omega_{\mathscr{C}}) & \longrightarrow & H^0(R^2\pi_*\Omega^2_{\mathscr{S}})\,. \end{array}$$

De $\alpha_Z^S = j_*\alpha_Z^C$, on déduit $\alpha_Z^{S,0} = j_*(\alpha_Z^{C,0})$, et par la commutativité de (1.14.4) et par le fait que $\alpha_Z^{C,0}$ s'annule dans $H^0(R^1\pi_*\Omega_{\mathscr{C}/B})$ on trouve: $\alpha_Z^{S,0} = f(\alpha_Z^{C,0})$ dans $R^2\pi_*K$.

Il reste alors à vérifier que la flèche f de (1.14.5) s'identifie à la flèche j de (1.13.6), ce qui résulte pratiquement des définitions, et des identifications

$$R^2\pi_* K = \Omega_B^2 \otimes \mathscr{H}_S^{0,2} / \operatorname{Im} \bar{\nabla}_2^S ,$$
$$R^1\pi_* \mathscr{O}_{\mathscr{C}} \otimes \Omega_B / \psi(R^0\pi_* \Omega_{\mathscr{C}/B}) = \Omega_B \otimes \mathscr{H}_{\mathscr{C}}^{0,1} / \operatorname{Im} \bar{\nabla}^C .$$

1.15. Pour conclure cette section, on donne enfin une description explicite de $\delta Z(b)$, $b \in B$, en supposant que $Z(b)$ est une combinaison de cycles lisses au-dessus de B, ou encore qu'au-dessus d'un voisinage (pour la topologie usuelle) V de b dans B on peut écrire $Z = \sum n_i Z_i$ où les Z_i sont les images de sections $\sigma_i : B \to \mathscr{S}$.

On a $\delta Z_{(b)} \in H^2(K_{|S_b}) = \operatorname{Ker} H^2(\Omega^2_{\mathscr{S}|S_b}) \to H^2(K_{S_b})$. D'autre part, comme $\det(\Omega_{\mathscr{S}|S_b}) = K_{S_b} \otimes \pi^* K_B$ on a, par dualité de Serre: $H^2(\Omega^2_{\mathscr{S}|S_b}) = H^0(\Omega^N_{\mathscr{S}|S_b} \otimes \pi^* K_B^{-1})^*$, où $N = \dim B$. Sous cet isomorphisme l'application $H^2(\Omega^2_{\mathscr{S}|S_b}) \to H^2(K_{S_b}) \cong \mathbb{C}$ correspond à l'inclusion de $\mathbb{C} = H^0(\mathscr{O}_{S_b}) \cong H^0(\pi^* K_B^{-1} \otimes \pi^* \Omega^N_{B|S_b}) \subset H^0(K_B^{-1} \otimes \Omega^N_{\mathscr{S}|S_b})$. On a donc aussi:

$$H^2(K_{|S_b}) = (H^0(\pi^* K_B^{-1} \otimes \Omega^N_{\mathscr{S}|S_b}) / H^0(\mathscr{O}_{S_b}))^* .$$

Comme élément de $(H^0(\pi^* K_B^{-1} \otimes \Omega^N_{\mathscr{S}|S_b}) / H^0(\mathscr{O}_{S_b}))^*$, δZ est maintenant décrit par la proposition suivante:

1.16 Proposition. *On a* $\delta Z_{(b)} = \sum n_i \sigma^*_{i(b)}$, *pour* $Z_{|V} = \sum_i n_i \sigma_i(V)$, *avec* $\sum n_i = 0$, σ_i *des sections de* $\mathscr{S}_V \xrightarrow[\pi]{} V$.

Dans l'expression de droite, σ_i^* est définie sur $H^0(\Omega^N_{\mathscr{S}} \otimes \pi^* K^{-1}_{B|S_b})$ et est obtenue par le composé:

$$H^0(\Omega^N_{\mathscr{S}} \otimes \pi^* K^{-1}_{B|S_b}) \to H^0(\Omega^N_{Z_i} \otimes \pi^* K^{-1}_{B|Z_i(b)}) \underset{\sigma_{i*}}{\cong} \mathbb{C} . \tag{1.16.1}$$

Cependant la somme $\sum n_i \sigma_i^*$ se factorise par $H^0(\Omega^N_{\mathscr{S}} \otimes \pi^* K^{-1}_{B|S_b}) / H^0(\mathscr{O}_{S_b})$ puisque $\sum n_i = 0$.

Démonstration. Quitte à restreindre B, on peut construire une famille de courbes lisses

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[rr, hook, "j"] \arrow[dr, "\pi_C"'] & & \mathscr{S} \arrow[dl, "\pi_S"] \\ & B & \end{tikzcd} ,$$

telle que Z soit supporté sur $\mathscr{C}$. On montre d'abord que l'application

$$j_* : H^1(\Omega_{\mathscr{C}|C_b}) \to H^2(\Omega^2_{\mathscr{S}|S_b})$$

a pour duale l'application de restriction:

$$j^* : H^0(\Omega^N_{\mathscr{S}} \otimes \pi_S^* K^{-1}_{B|S_b}) \to H^0(\Omega^N_{\mathscr{C}} \otimes \pi_C^* K^{-1}_{B|C_b})$$

ce qui est facile en utilisant la description de j_* comme cobord associé à la suite exacte:

$$0 \to \Omega^2_{\mathscr{S}|S_b} \to \Omega^2_{\mathscr{S}}(\log \mathscr{C})_{|S_b} \xrightarrow{\text{Res}} \Omega_{\mathscr{C}|C_b} \to 0 .$$

De la même façon soit $|Z| \underset{k}{\hookrightarrow} \mathscr{C}$, où $|Z|$ est le support de Z, et k est l'inclusion du diviseur lisse au-dessus de V dans $\mathscr{C}$. Alors la classe $[Z]_b \in H^1(\Omega_{\mathscr{C}|C_b})$ est égale à $k_*(\sum n_i 1_{Z_i(b)})$ par l'application $k_*: H^0(\mathscr{O}_{|Z_b|}) \to H^1(\Omega_{\mathscr{C}|C_b})$ obtenue comme cobord associé à la suite exacte:

$$0 \to \Omega_{\mathscr{C}|C_b} \to \Omega_{\mathscr{C}}(\log |Z|)_{|C_b} \xrightarrow{\mathrm{Res}} \mathscr{O}_{|Z_b| \to 0}.$$

Encore une fois, il est facile de voir que le dual de k_* n'est autre que la restriction $H^0(\Omega^N_{\mathscr{C}} \otimes \pi^*_C K^{-1}_{B|S_b}) \to H^0(\Omega^N_{|Z|} \otimes \pi^*_Z K^{-1}_{B||Z_b|}$ qui est canoniquement isomorphe à $H^0(\mathscr{O}_{|Z_b|})$. On en déduit immédiatement que vu comme un élément de $H^0(\Omega^N_{\mathscr{S}} \otimes \pi^* K^{-1}_{B|S_b})^*$, δZ est égal à $\sum n_i \sigma_i^*$.

2 Application aux paires (C, S)[2]

On montre dans cette section, en utilisant les invariants $\delta \nu_Z, \delta Z$ de 1.5, 1.9 le théorème suivant:

2.1 Théorème. *Soit $d \geqq 5$; alors si $S \subset \mathbb{P}^3$ est une surface générale de degré d et $C \underset{j}{\hookrightarrow} S$ est une section plane générale de S, l'application $j_*: CH^0_0(C) = JC \to CH^0_0(S)$ a pour noyau la torsion de JC.*

2.2 *Remarque.* On sait que les points de torsion de JC sont annulés par j_*, puisque d'après Roitman [12], $CH^0_0(S)$ est sans torsion.

2.3 *Remarque.* Le théorème est faux pour $d = 4$. En effet, on sait qu'une surface S de degré 4 (surface K3) générique contient des courbes rationnelles (obtenues comme membres de $|\mathscr{O}_S(k)|$, $k > 0$, avec beaucoup de points singuliers). Si C est une section plane générique de S, et Δ est une courbe rationnelle de S, $\Delta \in |\mathscr{O}_S(k)|$, $C \cap \Delta = \{p_1, \ldots, p_{4k}\}$, et $\forall i, j \leqq 4k$, $i \neq j$, $p_i - p_j$ est rationnellement équivalent à zéro dans S. Mais d'autre part il est facile de montrer qu'une courbe plane de degré 4 générique, i.e. une courbe de genre trois générique, satisfait:

$$\forall p, \quad q \in C, \quad p \neq q, \quad p - q$$

n'est pas un point de torsion dans $\operatorname{Pic}^0 C = JC$.

2.4. On commence la, preuve du théorème en introduisant les objets suivants: Comme espace des modules des paires (C, S), $C \subset S$, on prend le quotient B de $\mathbb{P}(H^0(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(d)))$ par le groupe $G' \subset \mathbb{P}G\ell(4)$ des automorphismes préservant $\mathbb{P}^2 \supset \mathbb{P}^3$, i.e.,

$$G' = \{g \in \mathbb{P}G\ell(4) / g(\mathbb{P}^2) = \mathbb{P}^2\}.$$

Sur un ouvert de ce quotient, il existe une courbe universelle $\mathscr{C}$, une surface $\mathscr{S}$, et une inclusion $j: \mathscr{C} \subset \mathscr{S}$ au-dessus de B, soit

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[rr, hook, "j"] \arrow[dr, "\pi_C"'] & & \mathscr{S} \arrow[dl, "\pi_S"] \\ & B & \end{tikzcd}.$$

[2] Cette section est essentiellement une synthèse de [6] et [11]. Cependant, on travaille ici avec des paires (C, S) dont les deux membres varient, et les hypothèses d'annulation sont différentes de celles de [11]

Enfin on a la fibration $J \xrightarrow[\pi]{} B$ en jacobiennes, paramétrant les diviseurs de degré 0 modulo équivalence rationnelle dans les fibres de π_C. Pour chaque point $b \in B$, on a la flèche: $j_{b*}: J_b = J(C_b) \to CH_0^0(S_b)$. On sait que l'ensemble $\{L \in J / j_{b*}(L) = 0$ dans $CH_0^0(S_b)$, où $b = \pi(L)\}$ est une union dénombrable d'ensembles algébriques, et on en déduit immédiatement:

2.5 Lemme. *Soit $C \overset{}{\underset{j}{\hookrightarrow}} S$ une paire générale, correspondant à un point général $b \in B$. Soit $z \in \operatorname{Ker} j_*$. Alors il existe une application dominante génériquement finie $B' \xrightarrow[\alpha]{} B$, et un cycle $Z \subset \mathscr{C}_{B'}$, tel que:*
(i) $\ni b' \in B' / \alpha(b') = b$ *et* $Z_{b'} = z$;
(ii) $\forall b \in B'$, $j_{b*}(Z_b) = 0$ *dans* $CH_0^0(S_b)$, *où* $S_b = S_{\alpha(b)}$.

2.6. On considère alors la situation

$$\begin{tikzcd} Z \subset \mathscr{C}_{B'} \arrow[rr, hook] \arrow[dr, "\pi'_C"'] & & \mathscr{S}_{B'} \arrow[dl, "\pi'_S"] \\ & B' & \end{tikzcd}.$$

On veut montrer que $\forall b' \in B'$, $Z_{b'}$ est un point de torsion de $J(C_{b'})$, et on applique pour cela les résultats de la première partie dont on reprend les notations. On a le fibré $R^2\pi'_{S*}K$ sur B', et on se place sur l'ouvert de B' sur lequel il est de rang constant (en fait il suffit pour cela de se placer sur l'ouvert de B' sur lequel α est étale, par [4]). On notera encore cet ouvert B'.

(2.6.1) D'après la proposition 1.8, on a:

$$\forall b \in B', \qquad \delta Z(b) = 0 \quad \text{dans} \quad R^2\pi'_{S*}(K)_{(b)} = \Lambda^2\Omega_{B'(b)} \otimes H^2(\mathscr{O}_{S_b}) / \operatorname{Im} \bar{\nabla}^S_{2(b)}.$$

(2.6.2) D'après la proposition 1.14, on a $\delta Z = j(\delta\nu_Z)$ où $\delta\nu_Z$ est l'invariant infinitésimal de la fonction normale associée au cycle $Z \subset \mathscr{C}_{B'}$, et j est construite en 1.13. On va alors montrer:

2.7 Proposition. *$\forall b \in B'$, l'application $j(b)$:*

$$H^1(\mathscr{O}_{C_b}) \otimes \Omega_{B'(b)} / \operatorname{Im} \bar{\nabla}^C_{(b)} \to H^2(\mathscr{O}_{S_b}) \otimes \Lambda^2\Omega_{B'(b)} / \operatorname{Im} \bar{\nabla}^S_2(b)$$

est injective.

Démonstration. Rappelons d'abord la construction de $j_{(b)}$: On a le diagramme commutatif suivant dont les colonnes sont exactes:

$$(2.7.1) \qquad \begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & \\ & (H^1(\Omega_{S_b})/[C_b]) \otimes \Omega_{B(b)} \arrow[r, "\bar{\nabla}^S_2"] \arrow[d] & H^2(\mathscr{O}_{S_b}) \otimes \Lambda^2\Omega_{B'(b)} \arrow[d, equal] \\ K^0(K_{S_b}(C)) \arrow[r, "\bar{\nabla}^U"] \arrow[d, "\mathrm{Res}"'] & H^1(\Omega_{S_b}(\log C_b)) \otimes \Omega_{B'(b)} \arrow[r, "\bar{\nabla}^U_2"] \arrow[d, "\mathrm{Res}"] & H^2(\mathscr{O}_{S_b}) \otimes \Lambda^2\Omega_{B'(b)} \\ H^0(\Omega_{C_b}) \arrow[r, "\bar{\nabla}^C"] \arrow[d] & H^1(\mathscr{O}_{C_b}) \otimes \Omega_{B'(b)} \arrow[d] & \\ 0 & 0. & \end{tikzcd}$$

L'application j est alors définie par $j(\eta) = \bar{\nabla}^U_2(\tilde{\eta})$, pour $\eta \in H^1(\mathscr{O}_{C_b}) \otimes \Omega_{B'(b)}$, et $\tilde{\eta} \in H^1(\Omega_{S_b}(\log C_b)) \otimes \Omega_{B'(b)}$ tel que $\operatorname{Res} \tilde{\eta} = \eta$.

On va d'abord (proposition 2.8) traduire le diagramme (2.7.1) en termes d'anneaux jacobiens associés à la paire (C, S). On introduit pour cela quelques notations: Soit $X_0, \dots, X_3$ des coordonnées sur $\mathbb{P}^3$, telles que $\mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^3$ est défini par l'équation $X_3 = 0$. Soit F une équation définissant S_b. Soit $S^{\cdot} = \bigoplus S^k$ l'anneau de polynômes sur $\mathbb{P}^3$. Soit J'_F l'idéal engendré par $\partial F/\partial X_i$, $i \leqq 2$ et $X_3 \partial F/\partial X_3$, et soit $R'^{\cdot}_F$ l'anneau jacobien correspondant: $R'^{\cdot}_F = S^{\cdot}/J'_F$. Il est immédiat de vérifier que $R'^d \cong TB_{\alpha(b)} \cong TB'_{(b)}$ (on se place en un point où α est étale).

D'autre part on utilisera aussi l'anneau jacobien usuel $R^{\cdot}_F = S^{\cdot}/J_F$ où J_F est engendré par les $\partial F/\partial X_i$, $0 \leqq i \leqq 3$, ainsi que l'anneau jacobien de $F_0 := F_{|\mathbb{P}^2}$, qu'on notera $R^{\cdot}_{F_0} := S^{\cdot}_0/J_{F_0}$, $S^{\cdot}_0$ étant l'anneau de polynômes sur $\mathbb{P}^2$.

On a une suite exacte:

$$0 \to R^{\cdot}_F \xrightarrow{X_3} R'^{\cdot+1}_F \to R^{\cdot+1}_{F_0} \to 0\,. \tag{2.7.2}$$

On a aussi l'application quotient $R'^{\cdot}_F \to R^{\cdot}_F$. On sait d'après [2, 7], que les applications

$$\begin{array}{rcccl} \bar{\nabla}^S & : & H^1(\Omega_{S_b})/[C_b] & \longrightarrow & \Omega_{B'(b)} \otimes H^2(\mathscr{O}_{S_b})\,, \\ \bar{\nabla}^C & : & H^0(\Omega_{C_b}) & \longrightarrow & \Omega_{B'(b)} \otimes H^1(\mathscr{O}_{C_b})\,, \end{array} \tag{2.7.3}$$

s'identifient aux applications données par la multiplication dans les anneaux jacobiens de S et C respectivement, composées avec les projections $R'_F \to R_F$, $R'_F \to R_{F_0}$, c'est-à-dire:

$$\begin{array}{rcccccl} \mu^F & : & R_F^{2d-4} & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(R_F^d, R_F^{3d-4}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(R_F'^d, R_F^{3d-4}) \\ \mu^{F_0} & : & R_{F_0}^{d-3} & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(R_{F_0}^d, R_{F_0}^{2d-3}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(R_F'^d, R_{F_0}^{2d-3})\,. \end{array} \tag{2.7.4}$$

Ceci se complète par la proposition suivante:

2.8 Proposition. *Il existe des isomorphismes:*

$$H^0(K_{S_b}(C_b)) \cong R_F'^{d-3}\,, \qquad H^1(\Omega_{S_b}(\log C_b)) \cong R_F'^{2d-3}\,, \qquad H^2(\mathscr{O}_{S_b}) \cong R_F'^{3d-3}$$

tels que

$$\begin{array}{rcccl} \bar{\nabla}^U & : & H^1(\Omega_{S_b}(\log C_b)) & \to & \Omega_{B'(b)} \otimes H^2(\mathscr{O}_{S_b}) \qquad \textit{et} \\ \bar{\nabla}^U & : & H^0(K_{S_b}(C_b)) & \to & \Omega_{B'(b)} \otimes H^1(\Omega_{S_b}(\log C_b)) \end{array} \tag{2.8.1}$$

s'identifient respectivement aux multiplications:

$$\begin{array}{rcccl} \mu'^F & : & R_F'^{2d-3} & \to & \mathrm{Hom}(R_F'^d, R_F'^{3d-3}) \quad \textit{et} \\ \mu'F & : & R_F'^{d-3} & \to & \mathrm{Hom}(R_F'^d, R_F'^{2d-3})\,. \end{array}$$

De plus les diagrammes commutatifs:

$$\begin{array}{rcccc} & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \\ \bar{\nabla}^S & : & H^1(\Omega_{S_b})/[C_b] & \longrightarrow & \Omega_{B'(b)} \otimes H^2(\mathscr{O}_{S_b}) \\ & & \downarrow & & \| \\ \bar{\nabla}^U & : & H^1(\Omega_{S_b}(\log C_b)) & \longrightarrow & \Omega_{B'(b)} \otimes H^2(\mathscr{O}_{S_b}) \\ & & \downarrow & & \\ & & H^1(\mathscr{O}_{C_b}) & & \\ & & \downarrow & & \\ & & 0\,. & & \end{array} \tag{2.8.2}$$

et

$$
(2.8.3)\qquad
\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
\bar{\nabla}^S & : & H^0(K_{S_b}) \arrow[r] \arrow[d] & \Omega_{B'(b)} \otimes (H^1(\Omega_{S_b})/[C_b]) \arrow[d] \\
\bar{\nabla}^U & : & H^0(K_{S_b}(C_b)) \arrow[r] \arrow[d] & \Omega_{B'(b)} \otimes H^1(\Omega_{S_b}(\log C_b)) \arrow[d] \\
\bar{\nabla}^C & : & H^0(\Omega_{C_b}) \arrow[r] \arrow[d] & \Omega_{B'(b)} \otimes H^1(\mathscr{O}_{C_b}) \arrow[d] \\
 & & 0 & 0
\end{tikzcd}
$$

s'identifient via (2.7.3), (2.7.4), (2.8.1) et (2.7.2) aux diagrammes suivants:

$$
(2.8.4)\qquad
\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
\mu^F & : & R_F^{2d-4} \arrow[r] \arrow[d, "X_3"] & \mathrm{Hom}(R'^d_F, R_F^{3d-4}) \arrow[d, "X_3"] \\
\mu'^F & : & R'^{2d-3}_F \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(R'^d_F, R'^{3d-3}_F) \\
 & & R^{2d-3}_{F_0} \arrow[d] & \\
 & & 0 &
\end{tikzcd}
$$

$$
(2.8.5)\qquad
\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
\mu^F & : & R_F^{d-4} \arrow[r] \arrow[d, "X_3"] & \mathrm{Hom}(R'^d_F, R_F^{2d-4}) \arrow[d, "X_3"] \\
\mu'^F & : & R'^{d-3}_F \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(R'^d_F, R'^{2d-3}_F) \arrow[d] \\
\mu^{F_0} & : & R^{d-3}_{F_0} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(R'^d_F, R^{2d-3}_{F_0}) \arrow[d] \\
 & & 0 & 0\,.
\end{tikzcd}
$$

La preuve de cette proposition sera donnée à la fin de cette section. On termine maintenant la preuve de la proposition 2.7.

2.9. Le diagramme (2.7.1) se réécrit maintenant sous la forme:

$$
\text{(2.9.1)}\qquad
\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & \\
 & & R_F^{2d-4} \otimes R_F'^{d*} \arrow[r, "\delta"'] \arrow[d, "X_3"] & R_F^{3d-4} \otimes \Lambda^2 R_F'^{d*} \arrow[d, "X_3", "\wr"'] \\
(*) & R_F'^{d-3} \arrow[r] \arrow[d] & R_F'^{2d-3} \otimes R_F'^{d*} \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"] & R_F'^{3d-3} \otimes \Lambda^2 R_F'^{d*} \\
 & R_{F_0}^{d-3} \arrow[r, "\gamma"'] \arrow[d] & R_{F_0}^{2d-3} \otimes R_F'^{d*} \arrow[d] & \\
 & 0 & 0\,, &
\end{tikzcd}
$$

et d'après le début de 2.7, $j: R_{F_0}^{2d-3} \otimes R_F'^{d*} / \operatorname{Im}\gamma \to R_F^{3d-4} \otimes \Lambda^2 R_F'^{d*} / \operatorname{Im}\delta$ est obtenue par "chasse au diagramme" dans (2.9.1).

Il est alors immédiate, par l'exactitude des colonnes de (2.9.1), de vérifier que l'injectivité de j est impliquée par:

2.10 Lemme. *Pour $d \geqq 5$ la ligne du milieu* $(*)$ *de* (2.9.1) *est exacte au milieu.*

Preuve du lemme. On copie la preuve du "symmetrizer lemma" de Green et Donagi [4]:

Comme J'_F est engendré par la suite régulière $(\partial F/\partial X_i)$, $i \leqq 2$, $X_3 \partial F/\partial X_3$, on a les isomorphismes:

$$
\text{(2.10.1)}\qquad
\begin{aligned}
(R_F'^{d-3})^* &\cong R_F'^{3d-4}\,,\\
(R_F'^{2d-3})^* &\cong R_F'^{2d-4}\,,\\
(R_F'^{3d-3})^* &\cong R_F'^{d-4}\,,
\end{aligned}
$$

obtenus grâce à un isomorphisme $R_F'^{4d-7} \cong \mathbb{C}$.

Alors $(*)$ se dualise en:

$$
(**)\qquad R_F'^{d-4} \otimes \Lambda^2 R_F'^{d} \xrightarrow[g]{} R_F'^{2d-4} \otimes R_F'^{d} \xrightarrow[h]{} R_F'^{3d-4}\,.
$$

Utilisant le diagramme suivant, où π_2 et π_3 sont surjectives:

$$
\text{(2.10.2)}\qquad
\begin{tikzcd}
 & S^{d-4} \otimes \Lambda^2 S^d \arrow[r, "G"] \arrow[d] & S^{2d-4} \otimes S^d \arrow[r, "H"] \arrow[d, "\pi_2"] & S^{3d-4} \arrow[d, "\pi_3"] \\
(**) & R_F'^{d-4} \otimes \Lambda^2 R_F'^{d} \arrow[r, "g"'] & R_F'^{2d-4} \otimes R_F'^{d} \arrow[r, "h"'] & R_F'^{3d-4}\,,
\end{tikzcd}
$$

l'exactitude au milieu de $(**)$ résulte alors du fait que J'_F est engendré par ses éléments de degré $d(H(\operatorname{Ker}\pi_2) = \operatorname{Ker}\pi_3)$ et de l'exactitude de la ligne du haut, dès que $d \geqq 5$ (cf. [4]).

2.11 *Fin de la preuve du théorème 2.1.* On reprend les notations de 2.5. On a donc $Z \subset \mathscr{C}_{B'} \underset{j}{\subset} \mathscr{S}_{B'}$ avec $j_*(Z_b) = 0$ dans $CH_0^0(S_b)$, $\forall b \in B'$, et on veut montrer que Z_b

est un point de torsion dans $J(C_b)$, $\forall b \in B'$. D'après (2.6.1) et la proposition 2.7, on sait que $\delta\nu_Z$ est nul en tout point de B'. On a d'abord:

2.12 Lemme. *La flèche* $\bar{\nabla}_2^C : \mathscr{H}^{1,0} \otimes \Omega_{B'} \to \mathscr{H}^{0,1} \otimes \Lambda^2 \Omega_{B'}$ *est injective sur* B', *où* $\mathscr{H}^{1,0}$ *et* $\mathscr{H}^{0,1}$ *sont définis en* 1.11.

Démonstration. Soit B'' l'espace des modules des courbes planes de degré d et soit $\varphi: B' \to B''$ l'application naturelle, qui est une submersion en tout point de B'. La variation de structure de Hodge de $\mathscr{C}_{B'} \to B'$ provient de B'' i.e. on a le diagramme suivant:

$$\begin{array}{cccccc} {}^t\bar{\nabla}_{B'} & : & (\varphi^* \mathscr{H}^{1,0}_{B''}) \otimes T_{B'} & \longrightarrow & \varphi^* \mathscr{H}^{0,1}_{B''} \\ & & \downarrow \varphi_* & & \| \\ {}^t\bar{\nabla}_{B''} & : & \varphi^* \mathscr{H}^{1,0}_{B''} \otimes \varphi^* T_{B''} & \longrightarrow & \varphi^* \mathscr{H}^{0,1}_{B''}, \end{array}$$

avec $\varphi^* \mathscr{H}^{1,0}_{B''} = \mathscr{H}^{1,0}_{B'}$, $\varphi^* \mathscr{H}^{0,1}_{B''} = \mathscr{H}^{0,1}_{B'}$. Il en résulte facilement qu'il suffit de prouver que le lemme est vrai pour B'', et que $\bar{\nabla}_{B''} : \mathscr{H}^{1,0} \to \mathscr{H}^{0,1} \otimes \Omega_{B''}$ est injective.

Le dernier point est bien connu. Pour le premier, on identifie en un point b'' de B'', correspondant à une courbe plane d'équation F_0, l'application $\bar{\nabla}_{2,B''} : \mathscr{H}^{1,0}_{b''} \otimes \Omega_{B''(b'')} \to \mathscr{H}^{0,1}_{B''} \otimes \Lambda^2 \Omega_{B''(b'')}$ à l'application construite à l'aide de la multiplication:

$$S_0^{d-3} \otimes R_{F_0}^{d*} \to R_{F_0}^{2d-3} \otimes \Lambda^2 R_{F_0}^{d*}. \tag{2.12.1}$$

L'injectivité de (2.12.1) résulte alors du "symmetrizer lemma" [4], et du fait que $R_{F_0}^{3d-3} = 0$.

Comme on a $\delta\nu_Z = 0$, et l'injectivité de $\bar{\nabla}_2^C$, on en déduit d'après 1.10, que la section ν_Z de $\mathscr{T}$ admet localement des relèvements plats dans le fibré $\mathscr{H}^1 \to B'$, uniques à des sections de $H^1_{\mathbb{Z}}$ près. Un argument de monodromie comme dans [5] montre alors que ces relèvements plats sont en fait dans $H^1_{\mathbb{Q}}$, c'est-à-dire que ν_Z est une section de torsion de $\mathscr{T}$. Le théorème 2.1 est donc prouvé.

2.13 *Remarque.* On pourrait se demander si l'invariant de Mumford ne suffirait pas dans ce cas. On pourrait par exemple essayer de faire le même construction en fixant la surface S, et en faisant varier la courbe de C. Mais dans ce cas la proposition 2.7 n'est plus vraie, ce qui montre l'utilité de l'invariant plus fort δZ.

2.14 *Preuve de la proposition 2.8.* On considère le complexe $\Omega^{\cdot}_{\mathbb{P}^3}(\log \mathbb{P}^2)(*S)$ des formes sur $\mathbb{P}^3$ à pôles logarithmiques le long de $\mathbb{P}^2$ et pôles arbitraires mais finis le long de S. Il est quasi-isomorphe à $\Omega^{\cdot}_{\mathbb{P}^3}(\log(S \cup \mathbb{P}^2))$ et la filtration naïve sur le dernier complexe correspond à la filtration par l'ordre du pôle sur le premier, i.e. la filtration de Hodge sur $\mathbb{H}^{\cdot}(\Omega^{\cdot}_{\mathbb{P}^3}(\log(S \cup \mathbb{P}^2)))$ (cf. [3]) correspond à la filtration induite par $F^k \Omega^{\ell}_{\mathbb{P}^3}(\log \mathbb{P}^2)(*S) = \Omega^{\ell}_{\mathbb{P}^3}(\log \mathbb{P}^2(\ell - k + 1)S))$ pour $\ell \geqq k - 1$, $\Omega^{\ell}_{\mathbb{P}^3}(\log \mathbb{P}^2)$ sinon (cf. [3]).

On montre alors: Pour $\ell \geqq 0$, $i \neq 0$, $H^i(\Omega^k_{\mathbb{P}^3}(\log \mathbb{P}^2)(\ell S)) = 0$. Pour cela on utilise la suite exacte (pour $k > 0$):

$$0 \to \Omega^k_{\mathbb{P}^3}(\ell S) \to \Omega^k_{\mathbb{P}^3}(\log \mathbb{P}^2)(\ell S) \to \Omega^{k-1}_{\mathbb{P}^2}(\ell C) \to 0$$

où $C = \mathbb{P}^2 \cap S$, et on applique le théorème d'annulation de Bott à $\mathbb{P}^3$ et $\mathbb{P}^2$, lorsque $\ell \neq 0$ ou $k \neq i$. Si $\ell = 0$ et $k = i$ on a $H^{i-1}(\Omega^{i-1}_{\mathbb{P}^2}) \underset{\partial}{\cong} H^i(\Omega^i_{\mathbb{P}^3})$, et donc le résultat est encore vrai dans ce cas.

On en déduit que $\mathbb{H}^{\cdot}(\Omega^{\cdot}_{\mathbb{P}^3}(\log S \cup \mathbb{P}^2))$ est aussi égal à la cohomologie du complexe $H^0(\Omega^{\cdot}_{\mathbb{P}^3}(\log \mathbb{P}^2)(*S))$ avec la filtration par l'ordre du pôle décrite ci-dessus. En particulier $\mathbb{H}^3(\Omega^{\cdot}_{\mathbb{P}^3}(\log S \cup \mathbb{P}^2)) = \dfrac{H^0(K_{\mathbb{P}^3}(\log \mathbb{P}^2)(3S))}{dH^0((\Omega^2_{\mathbb{P}^3}(\log \mathbb{P}^2)(2S))}$ car on a $F^0\mathbb{H}^3(\Omega^{\cdot}_{\mathbb{P}^3}(\log S \cup \mathbb{P}^2)) = F^1\mathbb{H}^3(\Omega^{\cdot}_{\mathbb{P}^3}(\log S \cup \mathbb{P}^2))$ du fait que $\mathbb{H}^3(\Omega^{\cdot}_{\mathbb{P}^3}(\log \mathbb{P}^2)) = 0$, et la filtration de Hodge est décrite par

$$\begin{aligned}
F^3\mathbb{H}^3 &= H^0(K_{\mathbb{P}^3}(\log \mathbb{P}^2)(S))/dH^0(\Omega^2_{\mathbb{P}^3}(\log \mathbb{P}^2)) \cong H^0(K_{\mathbb{P}^3}(\mathbb{P}^2 \cup S)),\\
F^2\mathbb{H}^3 &= H^0(K_{\mathbb{P}^3}(\log \mathbb{P}^2)(2S))/dH^0(\Omega^2_{\mathbb{P}^3}(\log \mathbb{P}^2)(S)),\\
F^1\mathbb{H}^3 &= \mathbb{H}^3.
\end{aligned}$$

Finalement on note que le résidu fournit un isomorphisme: $H^3(V) \xrightarrow{\text{Res}} H^2(U)$, où $V = \mathbb{P}^3 \backslash S \cup \mathbb{P}^2$ et $U = S \backslash C$, et que d'après [3], on a un isomorphisme $H^3(V) \cong \mathbb{H}^3(\Omega^{\cdot}_{\mathbb{P}^3}(\log S \cup \mathbb{P}^2))$.

Enfin, pour compléter la description algébrique des quotients $F^iH^2(U)/F^{i+1}H^2(U)$, il faut vérifier comme dans [7] le résultat suivant:

(2.14.1) Soit $\varphi \in H^0(K_{\mathbb{P}^3}(\log \mathbb{P}^2)(kS)) \cong S^{kd-3}$; alors $\varphi = d\gamma + \psi$, pour

$$\gamma \in H^0(\Omega^2_{\mathbb{P}^3}(\log \mathbb{P}^2)((k-1)S)) \quad \text{et} \quad \psi \in H^0(K_{\mathbb{P}^3}(\log \mathbb{P}^2)((k-1)S))$$

si et seulement si $\varphi \in J'^{kd-3}_F$, où F est l'équation de S et J'_F est défini en 2.7. La preuve de (2.14.1) se fait par un calcul explicite: On a $\Omega^2_{\mathbb{P}^3}(\log \mathbb{P}^2) \cong T^{\mathbb{P}^2}_{\mathbb{P}^3}(-3)$ où $T^{\mathbb{P}^2}_{\mathbb{P}^3} = \operatorname{Ker}(T_{\mathbb{P}^3} \to N_{\mathbb{P}^2})$. Les sections de $T^{\mathbb{P}^2}_{\mathbb{P}^3}$ sont engendrées par les $X_j\partial/\partial X_i$, $i \leqq 2$, et $X_3\partial/\partial X_3$.

Les sections de $\Omega^2_{\mathbb{P}^3}(\log \mathbb{P}^2)((k-1)S)$ sont alors données par les produits intérieurs $\operatorname{int}\chi(\Omega)$, où

$$\chi \in H^0(T^{\mathbb{P}^2}_{\mathbb{P}^3}(-3)(k-1)S) \quad \text{et} \quad \Omega = (1/X_3)\left(\sum_0^3 (-1)^i X_i dX_0 \ldots d\hat{X}_i \ldots dX_3\right)$$

est la section canonique de $K_{\mathbb{P}^3}(\log \mathbb{P}^2(3))$.

On peut écrire $\chi = \dfrac{1}{F^{k-1}}\left(\sum_0^2 P_i\partial/\partial X_3 + QX_3\partial/\partial X_3\right)$ avec $d^0P_i = (k-1)d-2$, $d^0Q = (k-1)d-3$. On vérifie comme dans [7] que pour $\chi = \dfrac{1}{F^{k-1}}P\partial/\partial X_i$, $d^0P = (k-1)d-2, i \leqq 2$, on a $d\Omega_\chi = C(k,i)\dfrac{P}{F^k}(\partial F/\partial X_i)\Omega$, modulo des termes ayant un pôle d'ordre $\leqq k-1$ en F, où $\Omega_\chi = \operatorname{int}_\chi(\Omega)$ et $C(k,i)$ est une constante non nulle dépendant de k et de i. De même, pour $\chi = \dfrac{1}{F^{k-1}}PX_3\partial/\partial X_3$, $d^0P = (k-1)d-3$ on a $d(\Omega_\chi) = C(k)\dfrac{PX_3}{F^k}\partial F/\partial X_3\Omega$, modulo des termes d'ordre $\leqq (k-1)$ en F, avec $C(k) \neq 0$.

On en déduit immédiatement (2.14.1).

On procède finalement comme dans [2], pour montrer que les applications $\bar{\nabla}^U$ sont calculées à l'aide du produit dans l'anneau R'_F.

Cela résulte de la construction de $\bar{\nabla}^U$ comme quotient de la connexion de Gauss-Manin ∇^U sur $\mathscr{H}_U^2$: Comme l'application de résidu $\operatorname{Res} \mathscr{H}_V^3 \to \mathscr{H}_U^2$ est plate sur la base B [ici $\mathscr{H}_V^3$ est le fibré plat de fibre $H^3(V_b, \mathbb{C})$ et $\mathscr{H}_U^2$ est le fibré plat de fibre $H^2(U_b, \mathbb{C})$], ∇^U s'identifie à ∇^V via l'isomorphisme Res. Etant donné une variation $F \mapsto F + tG$ de F, on considère des sections de $F^i \mathscr{H}_V^3$, $i \leqq 3$ de la forme $\omega_t = \text{classe}\left(\dfrac{R}{F_t^{4-i}}, \Omega\right)$, où R est un polynôme fixé. Il est facile de voir que $\nabla^V_{\partial/\partial t}\omega_t = \text{classe}(d/dt(\omega_t)) = \text{classe}\left(-(4-i)\dfrac{GR}{F^{4-i+1}}\,\Omega\right)$, ce qui montre bien qu'à un coefficient près l'application $\bar{\nabla}^V(G) = F^i/F^{i+1}H^3(V) \to F^{i-1}/F^i H^3(V)$ s'identifie à la multiplication par G.

L'énoncé de la compatibilité résulte immédiatement de la comparaison de ce qui précède avec la construction analogue de Griffiths [7], sur laquelle celle que l'on a décrite est calquée.

3 Application à l'équivalence rationnelle des points

Cette section est consacrée à la peuve du théorème suivant.

3.1 Théorème. *Soit S une hypersurface générale de degré d de $\mathbb{P}^3$, alors:*

a) *Si $d \geqq 6$, $\forall p \in S$, il existe au plus un nombre fini de points $q \in S$ rationnellement équivalents à p. Ce nombre est de plus borné indépendamment de p, S.*

b) *Si $d \geqq 7$, $\forall p \neq q$, $p, q \in S$, p n'est pas rationnellement équivalent à q.*

Notons que par une application immédiate du théorème de Mumford, on a dès que K_S est très ample: Pour $p \in S$, point général, il n'existe pas de point $q \neq p$, tel que q est rationnellement équivalent à p. Le théorème étudie cette propriété pour tout $p \in S$.

Les hypothèses sur le degré ne sont probablement pas optimales, mais on a les contre-exemples suivants en petit degré:

3.2 *Contre-exemples.* a) Pour $d = 4$, une surface S de degré 4 générale contient une courbe rationnelle ce qui entraîne l'existence d'une infinité de points rationnellement équivalents dans S, et montre que 3.1.a) n'est pas vrai pour $d = 4$.

b) Pour $d = 5$, une surface générale S de degré 5 admet un nombre fini $n > 1$ de droites Δ_i tangentes à l'ordre 5 à S, i.e. telles que $\Delta_i . S = 5p_i$ pour un point $p_i \in S$. Les n points P_i sont alors rationnellement équivalents dans S, ce qui montre que 3.1.b) est faux pour $d = 5$.

3.3. Pour commencer la démonstration du théorème 3.1 on utilise les résultats de la section 1, et plus spécialement les propositions 1.8 et 1.17 pour montrer que le théorème 3.1 est une conséquence de l'énoncé suivant:

3.4 Proposition. *Soit S une surface lisse de degré dans $\mathbb{P}^3$, et soit*

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{S} & \xrightarrow[\pi]{} & B \\ \uparrow & & \uparrow \\ S & \longrightarrow & \{0\} \end{array}$$

une famille universelle locale de déformations de S. Alors on a:

a) *Si $d \geqq 6$, $\Omega^N_{\mathscr{S}} \otimes \pi^* K^{-1}_{B\,|\,S}$ est engendré par ses sections globales, où $N = \dim B$.*

b) *Si $d \geqq 7$, $\Omega^N_{\mathscr{S}} \otimes \pi^* K^{-1}_{B\,|\,S}$ est très ample.*

3.5. Preuve de proposition 3.4 $\Rightarrow$ théorème 3.1.

(3.5.1) Soit S une surface générale de degré d et p, q deux points distincts de S rationnellement équivalents. Comme l'équivalence rationnelle des points dans les fibres de $\pi : \mathscr{S} \to B$ est décrite par une dénombrable d'ensembles algébriques, on en déduit qu'il existe une variété W quasi projective lisse et un morphisme étale r de W sur un ouvert de Zariski de l'espace des modules $U = \mathbb{P}(H^0(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(d)))/\mathbb{P}G\ell(4)$ et deux sections σ_p et σ_q de la surface universelle $\mathscr{S}_W \xrightarrow[\pi]{} W$ (on peut supposer que $\mathscr{S}_W$ existe) telles que: $\forall w \in W$, $\sigma_p(w)$ est rationnellement équivalent à $\sigma_q(w)$ dans S_w. On peut supposer que $\bar{\nabla}_2$ est de rang constant sur W (en fait c'est vrai partout sur $U \backslash U_{\text{sing}}$ par le "symmetrizer lemma"), et donc la proposition 1.8 s'applique à $Z = \sigma_p(W) - \sigma_q(W)$. On a donc

$$\forall w \in W\,, \qquad \delta Z(w) = 0$$

dans

$$H^2(K_{|S_w}) = H^2(\mathscr{O}_{S_w}) \otimes \Lambda^2 \Omega_{W(w)} / \operatorname{Im} \bar{\nabla}_2\,.$$

En utilisant la proposition 1.17, on obtient maintenant:

(3.5.2) $\forall \varphi \in H^0(\Omega^N_{\mathscr{S}_W} \otimes \pi^* K^{-1}_{W\,|\,S_w})$, $\quad \sigma_p^* \varphi = \sigma_q^* \varphi \quad$ dans $\quad \Omega^N_{W(w)} \otimes K_W^{-1} \cong \mathbb{C}$.

Ici $N = \dim B = \dim U = \dim W$ et $\Omega^N_{\mathscr{S}_W\,|\,S_W} \cong \Omega^N_{\mathscr{S}\,|\,S_w}$, puisque W est localement isomorphe à B. Soit $G_w \xrightarrow[\chi]{} S_w$ la grassmannienne des sous-espaces de codimension 2 de $T\mathscr{S}_{W\,|\,S_w}$. D'après la proposition 3.4, pour $d \geqq 6$, on a une application bien définie $g : G \to \mathbb{P}(H^0(\Omega^N_{\mathscr{S}_w\,|\,S_w} \otimes \pi^* K_B^{-1}))$, qui donne l'immersion de Plücker sur chaque fibre de χ. Si $d \geqq 7$, 3.4.b) montre que g est injective, ce qui contredit (3.5.2) et prouve que (3.5.1) n'est possible que si $d \geqq 6$. Donc 3.1.b) est prouvé.

Si $d = 6$, on procède de la façon suivante: Soit $p \in S_w$ et soit $T \in G_{w(p)} := \chi^{-1}(p)$, tel que $\pi_* : T \to TW_{(w)}$ soit un isomorphisme. Supposons que l'on ait montré (pour S générale):

(3.5.3) Pour un tel T, la fibre $g^{-1}(g(T))$ est finie. Il est alors clair que l'on peut borner indépendamment de S et de T le cardinal de la fibre $g^{-1}(g(t))$ [par exemple par le degré D de $g^* \mathscr{O}(1)$ sur G_w].

Soit S générale, et $p, q_1, \ldots, q_N \in S$ des points distincts, avec p rationnellement équivalent à q_i, $i = 1, \ldots, N$. On peut alors construire W comme en 3.5.1, et des sections σ_p, σ_{p_i} de $\mathscr{S}_W$, telles que (3.5.1), (3.5.2) soient satisfaites pour tout i. Pour $w \in W$, le sous-espace $T = \sigma_{p_*}(TW_{(w_i)}) \subset T\mathscr{S}_{W(\sigma_p(w))}$ satisfait la condition: $\pi_{*\,|\,T}$ est un isomorphisme, et d'après (3.5.2), les sous-espaces $\sigma_{q_i *}(TW_{(w)})$ sont dans $g^{-1}(g(T))$. Comme les $\sigma_{q_i}(w)$ sont génériquement distincts, on a donc $N \leqq D$, ce qui montre bien: Pour S générale, et pour tout $p \in S$, il existe au plus D points de S rationnellement équivalents à p. Donc 3.1.a) est démontré.

Il reste à montrer (3.5.3). Soit $F = g^{-1}(g(T))$; alors comme g est une immersion sur les fibres de χ, F est immergée dans S, via χ. D'autre part comme la section de $\Omega^N_{\mathscr{S}_w} \otimes \pi^* K^{-1}_{W\,|\,S_w}$ donnée par $\Omega^N_W \otimes K^{-1}_{W|_w} \overset{\pi^*}{\hookrightarrow} \Omega^N_{\mathscr{S}_W} K^{-1}_{W\,|\,S_w}$ ne s'annule pas en T, elle ne s'annule nulle part sur F, et donc on a sur F un scindage de la suite exacte

$$0 \to \pi^* \Omega_{W \mid S_w} \to \Omega_{\mathscr{S}_W \mid S_w} \to \Omega_{\mathscr{S}/W \mid S_w} \to 0,$$

fourni par l'inclusion du sous-fibré tautologique $E_F \subset T_{\mathscr{S}_w \mid F}$.

Ceci implique que l'application de restriction: $H^1(T_{S_w}) \to H^1(T_{S_w \mid F})$ est nulle. Donc $F \neq S_w$ et si F n'est pas finie, F est une courbe, qui, comme S_w est générale, est membre de $|\mathscr{O}_{S_w}(k)|$ pour un $k > 0$ (théorème de Noether-Lefschetz). Mais alors on aurait $H^1(T_{S_w}(-k)) \stackrel{\sigma_F}{\twoheadrightarrow} H^1(T_{S_w})$, ce qui n'est pas possible pour des raisons de dimension. L'hypothèse $\dim F > 0$ est donc absurde et (3.5.3) est prouvé.

Pour conclure la preuve du théorème, il faut maintenant montrer la proposition 3.4.

3.6. Ecrivons d'abord les suites exactes:

(3.6.1) $$0 \to K' \to \Omega^N_{\mathscr{S}} \otimes \pi^* K^{-1}_{B \mid S} \to (\Omega^2_{\mathscr{S}/B} \otimes \pi^* \Lambda^2 T_B)_{|S} \to 0.$$

(3.6.2) $$0 \to \mathscr{O}_S \to K' \to (\Omega_{\mathscr{S}/B} \otimes \pi^* TB)_{|S} \to 0.$$

Par (3.6.2) $H^0(K') = H^0(\mathscr{O}_S) = \mathbb{C}$ et par (3.6.1) $H^0(\Omega^N_{\mathscr{S}} \otimes \pi^* K^{-1}_{B \mid S})/H^0(K') \cong \operatorname{Ker} \bar{\nabla}^*_2$, où:

(3.6.3) $$\bar{\nabla}^*_2 : H^0(K_S) \otimes \Lambda^2 T_B \to H^1(\Omega_S) \otimes TB$$

est définie par:

$$\bar{\nabla}^*_2(\omega \otimes U \wedge V) = \bar{\nabla}_U(\omega) \otimes V - \bar{\nabla}_V(\omega) \otimes U.$$

En fait $\bar{\nabla}^*_2$ est à valeurs dans $H^1(\Omega_S)^0 \otimes TB$, où $H^1(\Omega_S)$ est la partie primitive de $H^1(\Omega_S)$.

En utilisant les isomorphismes de [2]:

(3.6.4) $$TB_{(0)} \cong R^d, \qquad H^1(\Omega_S)^0 \cong R^{2d-4} \quad \text{et} \quad H^0(K_S) \cong R^{d-4} \cong S^{d-4},$$

où $S^{\cdot}$ est l'anneau de polynômes sur $\mathbb{P}^3$, F est une équation pour F et $R^{\cdot} = R_F$ est l'anneau jacobien de F, $\bar{\nabla}^*_2$ s'identifie à (cf. [2, 7]):

$$\bar{\mu} : H^0(K_S) \otimes \Lambda^2 R^d \to R^{2d-4} \otimes R^d, \quad \text{où}$$
$$\bar{\mu}(\omega \otimes U \wedge V) = \omega U \otimes V - \omega V \otimes U.$$

3.7. Pour $p \in S$, il est clair que le composé:

$$r_p : \operatorname{Ker} \bar{\mu} \subset H^0(K_S) \otimes \Lambda^2 R^d \to H^0(K_{S \mid p}) \otimes \Lambda^2 R^d,$$

s'identifie au composé qu'on notera de la même manière:

$$r_p : H^0(\Omega^N_{\mathscr{S}} \otimes \pi^* K^{-1}_{B \mid S})/H^0(K') \to H^0(\Omega^2_{\mathscr{S}/B} \otimes \pi^* \Lambda^2 T_B) \to H^0(K_{S \mid p}) \otimes \Lambda^2 TB.$$

On doit donc d'abord montrer:

3.8 Lemme. a) *Si $d \geqq 6$, et pour tout point p de S on a: $r_p : \operatorname{Ker} \bar{\mu} \to H^0(K_{S \mid p}) \otimes \Lambda^2 R^d$ est surjective.*

b) *Si $d \geqq 7$, et pour tout $Z \subset S$ sous schéma de dimension zéro et de longueur deux on a:*

$$r_Z : \operatorname{Ker} \bar{\mu} \to H^0(K_{S \mid Z}) \otimes \Lambda^2 R^d$$

est surjective.

Démonstration. Pour cela on considère l'application suivante:

(3.8.1) $$\mu: S^{d-4} \otimes \Lambda^2 S^d \to S^{2d-4} \otimes S^d$$
$$\text{définie par } \mu(A \otimes B \wedge C) = AB \otimes C - AC \otimes B\,.$$

Par les projections naturelles $S^{\cdot} \to R^{\cdot}$ on a bien sûr une flèche φ: $\operatorname{Ker}\mu \to \operatorname{Ker}\bar{\mu}$, et des diagrammes commutatifs:

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Ker}\mu \arrow[r, "R_p"] \arrow[d, "\psi"] & H^0(\mathcal{O}_p(d-4)) \otimes \Lambda^2 S^d \arrow[d] \\ \operatorname{Ker}\bar{\mu} \arrow[r, "r_p"] & H^0(\mathcal{O}_p(d-4)) \otimes \Lambda^2 R^d\,, \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Ker}\mu \arrow[r, "R_Z"] \arrow[d, "\psi"] & H^0(\mathcal{O}_Z(d-4)) \otimes \Lambda^2 S^d \arrow[d] \\ \operatorname{Ker}\bar{\mu} \arrow[r, "r_Z"'] & H^0(\mathcal{O}_Z(d-4)) \otimes \Lambda^2 R^d\,. \end{tikzcd}$$

Maintenant on a:

3.9. Sous-lemme. a) *Si $d \geqq 6$, on a pour tout $p \in \mathbb{P}^3$*

$$R_p(\operatorname{Ker}\mu) = H^0(\mathcal{O}_p(d-4)) \otimes \Lambda^2 H_p^d = \operatorname{Ker}\mu_p\,,$$

où $H_p^d \subset S^d$ est l'hyperplan défini par p, et

$$\mu_p: H^0(\mathcal{O}_p(d-4)) \otimes \Lambda^2 S^d \to H^0(\mathcal{O}_p(2d-4)) \otimes S^d$$

est définie comme en (3.8.1).

b) *Si $d \geqq 7$, on a pour tout Z sous-schéma de $\mathbb{P}^3$ de dimension zéro et de longueur deux,*

$$R^Z(\operatorname{Ker}\mu) = \operatorname{Ker}(\mu_Z: H^0(\mathcal{O}_Z(d-4)) \otimes \Lambda^2 S^d \to H^0(\mathcal{O}_Z(d-4)) \otimes S^d)$$

où μ_Z est définie comme en (3.8.1).

Démonstration. a) Considérons d'abord l'application naturelle:

$$\alpha: \Lambda^3 S^{d-4} \hookrightarrow S^{d-4} \otimes \Lambda^2 S^{d-4}\,;$$

clairement si $P \in S^4$ et $\eta = \sum A_i \otimes B_i \wedge C_i \in \operatorname{Im}\alpha$, on a: $\sum A_i \otimes PB_i \wedge PC_i \in \operatorname{Ker}\mu$. D'autre part on vérifie immédiatement que la restriction de $\alpha(\Lambda^3 S^{d-4})$ à p est égale à $H^0(\mathcal{O}_p(d-4)) \otimes \Lambda^2 H_p^{d-4}$. On utilise maintenant le lemme suivant:

(3.9.1) Si $d-4 \geqq 2$ l'application naturelle $\Lambda^2 H_p^{d-4} \otimes S^2 S^k \to \Lambda^2 H_p^{d-4+k}$ est surjective pour $k \geqq 0$.

Ceci montre l'inclusion $H^0(\mathcal{O}_p(d-4)) \otimes \Lambda^2 H_p^d \subset R_p(\operatorname{Ker}\mu)$, l'inclusion dans l'autre sens étant évidente.

b) Supposons pour simplifier que Z est constitué de deux points distincts p et q. Soit $X_p, X_q \in S^1$ telles que

$$X_p(p) \neq 0\,, \qquad X_q(q) \neq 0\,,$$

et

$$X_p(q) = X_q(p) = 0\,.$$

On utilise maintenant $\alpha: \Lambda^3 S^{d-5} \hookrightarrow S^{d-5} \otimes \Lambda^2 S^{d-5}$. Pour $P \in S^5$, et $\eta = \sum A_i \otimes B_i \wedge C_i \in \operatorname{Im} \alpha$ on a clairement $\sum X_p A_i \otimes PB_i \wedge PC_i \in \operatorname{Ker} \mu$. On en déduit immédiatement par (2.9.1) (dans le cas b) on a $d \geqq 7$, donc $d-5 \geqq 2$) que $R_Z(\operatorname{Ker} \mu)$ contient $X_p H^0(\mathcal{O}_p(d-5)) \otimes \Lambda^2 H_p^d \oplus X_q H^0(\mathcal{O}_q(d-5)) \otimes \Lambda^2 H_q^d$. Il est facile de voir que ceci est égal à $\operatorname{Ker} \mu_Z$ et donc b) est démontré.

Le sous-lemme 3.9 entraîne le lemme 3.8, à cause de la surjectivité de la projection $\Lambda^2 H_p^d \to \Lambda^2 R^d$ pour tout $p \in \mathbb{P}^3$. On utilisera dans la suite le corollaire suivant du sous-lemme 3.9:

3.10 Corollaire. a) *si $d \geqq 6$ la suite suivante est exacte au milieu, pour tout point $p \in \mathbb{P}^3$:*

$$H_p^{d-4} \otimes \Lambda^2 S^d \xrightarrow[\mu_H]{} H_p^{2d-4} \otimes S^d \to H_p^{3d-4}.$$

b) *Si $d \geqq 7$, la suite suivante est exacte au milieu, pour tout $Z \subset \mathbb{P}^3$ sous-schéma de dimension zéro et longueur deux:*

$$K_Z^{d-4} \otimes \Lambda^2 S^d \xrightarrow[\mu_Z]{} K_Z^{2d-4} \otimes S^d \to K_Z^{3d-4},$$

où K_Z^k est le sous-espace de codimension deux de S^k défini par Z.

Démonstration. Cela résulte de l'exactitude au milieu de la suite

$$S^{d-4} \otimes \Lambda^2 S^d \xrightarrow[\mu]{} S^{2d-4} \otimes S^d \to S^{3d-4}$$

(cf. [4]), du diagramme commutatif aux colonnes exactes:

$$\begin{array}{ccccc}
0 & & 0 & & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
H_p^{d-4} \otimes \Lambda^2 S^d & \xrightarrow[\mu_H]{} & H_p^{2d-4} \otimes S^d & \longrightarrow & H_p^{3d-4} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
S^{d-4} \otimes \Lambda^2 S^d & \xrightarrow[\mu]{} & S^{2d-4} \otimes S^d & \longrightarrow & S^{3d-4} \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
H^0(\mathcal{O}_p(d-4)) \otimes \Lambda^2 S^d & \xrightarrow[\mu_p]{} & H^0(\mathcal{O}_p(2d-4)) \otimes S^d & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
0 & & 0 & &
\end{array}$$

(et de son analogue avec Z à la place de p) et de la surjectivité de $\operatorname{Ker} \mu \to \operatorname{Ker} \mu_p$ pour $d \geqq 6$, de $\operatorname{Ker} \mu \to \operatorname{Ker} \mu_Z$ pour $d \geqq 7$, donnée par le sous-lemme 3.9.

3.11. Pour terminer la preuve de la proposition 3.4 il faut compléter la description algébrique des restrictions:

(3.11.1) $$H^0(\Omega_{\mathscr{S}}^N \otimes \pi^* K_{B|S}^{-1}) \to H^0(\Omega_{\mathscr{S}}^N \otimes \pi^* K_{B|p}^{-1}), \qquad p \in S$$

et

(3.11.2) $$H^0(\Omega_{\mathscr{S}}^N \otimes \pi^* K_{B|S}^{-1}) \to H^0(\Omega_{\mathscr{S}}^N \otimes \pi^* K_{B|Z}^{-1}), \qquad Z \subset S$$

de longueur deux.

On notera L le quotient de $\Omega^N_{\mathscr{S}} \otimes \pi^* K^{-1}_{B\,|\,S}$ par $\mathscr{O}_S \cong \pi^* \Omega^N_B \otimes K^{-1}_{B\,|\,S}$. On a les isomorphismes:

(3.11.3) $$H^0(\Omega^N_{\mathscr{S}} \otimes \pi^* K^{-1}_{B\,|\,S})/\mathbb{C} \cong H^0(L) \underset{(3.6.3)}{\cong} \operatorname{Ker} \bar{\nabla}^*_2 \underset{(3.6.4)}{\cong} \operatorname{Ker} \bar{\mu}\,.$$

L s'écrit comme une extension: [cf. (3.6.1), (3.6.2)].

(3.11.4) $$0 \to \Omega_{\mathscr{S}/B} \otimes \pi^* TB_{|S} \to L \to \Omega^2_{\mathscr{S}/B} \otimes \pi^* \Lambda^2 TB_{|S} = 0\,.$$

D'après 3.7, et le lemme 3.8 on a:

3.12 Lemme. a) *Pour $d \geqq 6$, $\forall p \in S$, le composé*

$$r_p : H^0(L) \to H^0(\Omega^2_{\mathscr{S}/B} \otimes \pi^* \Lambda^2 TB_{|S}) \to H^0(K_{S\,|\,p}) \otimes \Lambda^2 TB$$

est surjectif.

b) *Pour $d \geqq 7$, $\forall Z \subset S$ sous-schéma de dimension zéro et de longueur deux, le composé*

$$r_Z : H^0(L) \to H^0(\Omega^2_{\mathscr{S}/B} \otimes \pi^* \Lambda^2 TB_{|S}) \to H^0(K_{S\,|\,Z} \otimes \Lambda^2 TB$$

est surjectif.

Il est clair que le noyau de r_p (respectivement r_Z) s'identifie à:

(3.12.1) $$\operatorname{Ker}(\bar{\mu}_p : H^{d-4}_p \otimes \Lambda^2 R^d \to R^{2d-4} \otimes R^d)$$

(respectivement à

$$\operatorname{Ker}(\bar{\mu}_Z : K^{d-4}_Z \otimes \Lambda^2 R^d \to R^{2d-4} \otimes R^d)\,.)$$

Les lemmes suivants (3.13 et 3.15) décrivent les restrictions

$$r'_p : \operatorname{Ker} r_p \to H^0(\Omega_{S\,|\,p}) \otimes TB\,, \quad \text{et} \quad r'_Z : \operatorname{Ker} r_Z \to H^0(\Omega_{S\,|\,Z}) \otimes TB$$

3.13 Lemme. *Soit $J^{2d-4}_p \subset H^{2d-4}_p$ (respectivement $J^{2d-4}_Z \subset K^{2d-4}_Z$). Le sous-espace défini par le diagramme commutatif suivant:*

(3.13.1) $$\begin{array}{ccc} J^{2d-4}_p & \hookrightarrow & H^{2d-4}_p \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^0(T\mathbb{P}^3_{|S}(d-4) \otimes I_p) & \hookrightarrow & H^0(\mathscr{O}_S(2d-4) \otimes I_p)\,, \end{array}$$

(respectivement

$$\begin{array}{ccc} J^{2d-4}_Z & \hookrightarrow & K^{2d-4}_Z \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^0(T\mathbb{P}^3_{|S}(d-4) \otimes I_Z) & \hookrightarrow & H^0(\mathscr{O}_S(2d-4) \otimes I_Z))\,, \end{array}$$

et soit R^{2d-4}_p (respectivement R^{2d-4}_Z) le quotient H^{2d-4}_p / J^{2d-4}_p (resp. K^{2d-4}_Z / J^{2d-4}_Z), alors on a:

(3.13.2) $$R^{2d-4}_p \cong H^1(\Omega_S \otimes I_p)^\circ \quad \textit{(respectivement } R^{2d-4}_Z \cong H^1(\Omega_S \otimes I_Z)^\circ)$$

où la notation "$\circ$" désigne la partie primitive de $H^1(\Omega_S \otimes I_p)$ (resp. $H^1(\Omega_S \otimes I_Z)$) i.e. l'image réciproque de $H^1(\Omega_S)^\circ$ par les applications:

(3.13.3) $$H^1(\Omega_s \otimes I_p) \to H^1(\Omega_S) \quad [\text{resp. } H^1(\Omega_S \otimes I_Z) \to H^1(\Omega_S)]\,.$$

Ces dernières applications s'identifient via (3.6.4), (3.13.2) *aux applications quotients:*

$$R_p^{2d-4} \to R^{2d-4}, \quad \text{et} \quad R_Z^{2d-4} \to R^{2d-4}.$$

Démonstration. On écrit la suite exacte:

$$0 \to \mathscr{O}_S(-d) \to \Omega_{\mathbb{P}^3 \mid S} \to \Omega_S \to 0,$$

qui donne aussi

$$0 \to \Omega_S \to \Omega^2_{\mathbb{P}^3}(d)_{|S} \to K_S(d) \to 0,$$

et on note l'isomorphisme $\Omega^2_{\mathbb{P}^3}(d)_{|S} \cong T\mathbb{P}^3(d-4)_{|S}$. En tensorisant cette suite exacte par I_p (respectivement I_Z) on obtient immédiatement les énoncés du lemme, compte tenu de

$$H^1(\Omega^2_{\mathbb{P}^3 \mid S}(d) \otimes I_p) \cong H^1(\Omega^2_{\mathbb{P}^3 \mid S}(d) \otimes I_Z) \cong H^1(\Omega^2_{\mathbb{P}^3 \mid S}(d)) \cong H^2(\Omega^2_{\mathbb{P}^3}),$$

et du fait que les isomorphismes de (3.6.4) sont obtenus de la même façon.

3.14. Notons maintenant que les flèches de multiplication:

$$S^d \otimes H_p^{d-4} \to H_p^{2d-4}, \qquad S^d \otimes K_Z^{d-4} \to K_Z^{2d-4}$$

induisent:

$$J^d \otimes H_p^{d-4} \to J_p^d, \qquad J^d \otimes K_Z^{d-4} \to J_Z^{2d-4}$$

et on a donc:

(3.14.1) $$R^d \otimes H_p^{d-4} \to R_p^{2d-4}, \qquad R^d \otimes K_Z^{d-4} \to R_Z^{2d-4},$$

d'où comme en (3.6.4) des flèches:

(3.14.2) $$\begin{aligned} \bar{\mu}'_p &: H_p^{d-4} \otimes \Lambda^2 R^d \to R_p^{2d-4} \otimes R^d, \\ \bar{\mu}'_Z &: K_Z^{d-4} \otimes \Lambda^2 R^d \to R_Z^{2d-4} \otimes R^d. \end{aligned}$$

On a alors:

3.15 Lemme. *Les restrictions*

$$r'_p : \operatorname{Ker} r_p \to H^0(\Omega_{S \mid p}) \otimes TB$$

(respectivement $r'_Z : \mathrm{Ker}\, \mathrm{r}_Z \mapsto \mathrm{H}^0(\Omega_{\mathrm{S} \mid \mathrm{Z}}) \otimes \mathrm{TB}$) *s'identifient via les isomorphismes de* (3.12.1) *et* (3.13.2) *aux applications*

(3.15.1) $$\bar{\mu}'_p : \operatorname{Ker} \bar{\mu}_p \to \operatorname{Ker}(R_p^{2d-4} \otimes R^d \to R^{2d-4} \otimes R^d)$$

(resp.

$$\bar{\mu}'_Z : \operatorname{Ker} \bar{\mu}_Z \to \operatorname{Ker}(R_p^{2d-4} \otimes R^d) \to R^{2d-4} \otimes R^d).)$$

Démonstration. On peut construire une inclusion

$$\begin{tikzcd} \mathscr{S} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{P}^3 \times B \arrow[dl] \\ B & \end{tikzcd}$$

en choisissant au voisinage de 0 un relèvement $B \to \mathbb{P}(H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(d))$, qui induit aussi un relèvement $TB \cong R^d \to H^0(\mathcal{O}_S(d))$.

On a alors une suite exacte:

$$0 \to \mathcal{O}_S(-d) \to \Omega_{\mathbb{P}^3|S} \oplus \pi^*\Omega_{\mathcal{S}|S} \to \Omega_{\mathcal{S}|S} \to 0$$

qui fournit:

$$\begin{aligned} 0 \to \Omega_{\mathcal{S}}^N \otimes \pi^* K_{B|S}^{-1} &\to (\Omega_{\mathbb{P}^3|S} \oplus \pi^*\Omega_{B|S})^{N+1} \otimes \pi^* K_B^{-1} \otimes \mathcal{O}_S(d) \\ &\to \Omega_{\mathcal{S}}^{N+1} \otimes \pi^* K_B^{-1} \otimes \mathcal{O}_S(d) \to 0\,. \end{aligned}$$

Soit:

$$\begin{aligned} 0 \to \Omega_{\mathcal{S}}^N \otimes \pi^* K_{B|S}^{-1} &\to \Omega_{\mathbb{P}^3|S}(d) \oplus \Omega_{\mathbb{P}^3|S}^2(d) \otimes TB \oplus \mathcal{O}_S(d-4) \otimes \Lambda^2 TB \\ &\to \Omega_{\mathcal{S}}^{N+1} \otimes K_B^{-1} \otimes \mathcal{O}_S(d) \to 0\,. \end{aligned}$$

Dans cette suite exacte l'inclusion de $\mathcal{O}_S$ dans $\Omega_{\mathcal{S}}^N \otimes \pi^* K_{B|S}^{-1}$ est envoyée sur l'inclusion de $\mathcal{O}_S$ dans $\Omega_{\mathbb{P}^3|S}(d)$ et on a donc aussi:

$$\begin{array}{l} 0 \to L \to \Omega_S(d) \oplus \Omega_{\mathbb{P}^3|S}^2(d) \otimes TB \oplus \mathcal{O}_S(d-4) \otimes \Lambda^2 TB \to \Omega_{\mathcal{S}}^{N+1} \otimes \pi^* K_B^{-1} \otimes \mathcal{O}_S(d) \to 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \| \\ \qquad\qquad\qquad\qquad T_{\mathbb{P}^3|S}(d-4) \otimes TB\,. \end{array} \tag{3.15.2}$$

Finalement on a aussi une suite exacte:

$$0 \to \Omega_S(d) \to \Omega_{\mathcal{S}}^{N+1} \otimes \pi^* K_B^{-1} \otimes \mathcal{O}_S(d) \to \mathcal{O}_S(2d-4) \otimes TB \to 0\,. \tag{3.15.3}$$

L'isomorphisme $H^0(L) \cong \operatorname{Ker} \bar{\mu}$ est décrit concrètement de la façon suivante: On a par (3.15.2):

$$\begin{aligned} H^0(L) \cong \operatorname{Ker}[H^0(\Omega_S(d)) &\oplus H^0(\Omega_{\mathbb{P}^3|S}^2(d)) \otimes TB \oplus H^0(\mathcal{O}_S(d-4)) \otimes \Lambda^2 TB \\ &\to H^0(\Omega_{\mathcal{S}}^{N+1} \otimes \pi^* K_B^{-1} \otimes \mathcal{O}_S(d))]\,. \end{aligned}$$

Soit $\alpha \in \operatorname{Ker} \bar{\mu}: H^0(K_S) \otimes \Lambda^2 TB \to R^{2d-4} \otimes TB$ et soit $\tilde{\alpha} \in H^0(K_S) \otimes \Lambda^2 H^0(\mathcal{O}_S(d))$ l'élément correspondant à α par le relèvement $TB \to H^0(\mathcal{O}_S(d))$. Alors $\mu(\tilde{\alpha}) \in J_{|S}^{2d-4} \otimes TB \cong H^0(T\mathbb{P}_{|S}^3(d-4)) \otimes TB$. Soit $\chi \in H^0(T\mathbb{P}_{|S}^3(d-4)) \otimes T_B$ l'élément ainsi obtenu. L'image de $-\chi \oplus \alpha$ dans $H^0(\Omega_{\mathcal{S}}^{N+1} \otimes \pi^* K_B^{-1} \otimes \mathcal{O}_S(d))$ est alors en fait dans $H^0(\Omega_S(d))$ et donc il existe un unique $\eta \in H^0(\Omega_S(d))$ tel que

$$\begin{aligned} \eta \oplus -\chi \oplus \alpha \in \operatorname{Ker}[H^0(\Omega_S(d)) &\oplus H^0(\Omega_{\mathbb{P}^3|S}^2(d)) \otimes TB \oplus H^0(\mathcal{O}_S(d-4)) \otimes \Lambda^2 TB \\ &\to H^0(\Omega_{\mathcal{S}}^{N+1} \otimes \pi^* K_B^{-1} \otimes \mathcal{O}_S(d))] \cong H^0(L)\,. \end{aligned}$$

La description de $r'_p: \operatorname{Ker} \bar{\mu}_p \cong \operatorname{Ker} r_p \to H^0(\Omega_{S|p} \otimes TB)$ et de $r'_Z: \operatorname{Ker} \bar{\mu}_Z \cong \operatorname{Ker} r_Z \to H^0(\Omega_{S|Z} \otimes TB)$ est alors facile: avec les notations précédentes si

$$\alpha \in \operatorname{Ker}(\bar{\mu}_p: H_p^{d-4} \otimes \Lambda^2 TB \to R^{2d-4} \otimes TB)\,,$$

alors $\tilde{\alpha} \in H_p^{d-4} \otimes \Lambda^2 H^0(\mathcal{O}_S(d))$ et son image par μ_p dans $H^0(\mathcal{O}_S(2d-4) \otimes I_p) \otimes H^0(\mathcal{O}_S(d))$ est dans $J_{|S}^{2d-4} \cap I_p \otimes TB$. L'élément χ de $H^0(T\mathbb{P}_{|S}^3(d-4) \otimes TB)$ correspondant a donc une restriction $\chi_{|p}$ qui est dans le noyau de $\Omega_{\mathbb{P}^3}^2(d)_{|p} \otimes TB \to$

$K_S(d)_{|p} \otimes TB$, et donc on peut identifier $\chi_{|p}$ à un élément de $\Omega_{S\,|\,p} \otimes TB$. On a alors $\chi_{|p} = r'_p(\alpha)$. On a évidemment la description analogue pour $r'_Z(\alpha)$. Il est facile de montrer que cette description coïncide avec celle de (3.15.1), en reprenant la définition de $\bar{\mu}'_p$ et $\bar{\mu}'_Z$.

Les lemmes 3.15, 3.12 et le corollaire 3.10 entraînent maintenant:

3.16 Lemme. a) *Pour $d \geqq 6$, L est engendré par ses sections globales.* b) *Pour $d \geqq 7$, L est très ample.*

Démonstration. D'après le lemme 3.12, il suffit de montrer la surjectivité de

$$r'_p \colon \operatorname{Ker} r_p \to H^0(\Omega_{S\,|\,p}) \otimes TB$$

dans le cas a) et de $r'_Z \colon \operatorname{Ker} r_Z \to H^0(\Omega_{S\,|\,Z}) \otimes TB$ dans le cas b).

D'après le lemme 3.15, ces flèches s'identifient à:

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad \bar{\mu}'_p \colon \operatorname{Ker} \bar{\mu}_p \to \operatorname{Ker}[R_p^{2d-4} \otimes R^d \to R^{2d-4} \otimes R^d]\,, \\ &\text{b)} \quad \bar{\mu}'_p \colon \operatorname{Ker} \bar{\mu}_Z \to \operatorname{Ker}[R_Z^{2d-4} \otimes R^d \to R^{2d-4} \otimes R^d]\,. \end{aligned}$$

Considérons les diagrammes suivants:

$$
\begin{tikzcd}
 & & H_p^{d-4}\otimes\Lambda^2S^d \arrow[r]\arrow[d] & H_p^{2d-4}\otimes S^d \arrow[r,"\nu"]\arrow[d,"\beta"] & H_p^{3d-4}\arrow[dd,"\gamma"] \\
\text{a)}\ \bar{\mu}'_p & : & H_p^{d-4}\otimes\Lambda^2R^d \arrow[r]\arrow[d,equal] & R_p^{2d-4}\otimes R^d \arrow[d,"\alpha"] & \\
\bar{\mu}_p & : & H_p^{d-4}\otimes\Lambda^2R^d \arrow[r] & R^{2d-4}\otimes R^d \arrow[r] & R^{3d-4}
\end{tikzcd}
$$

(3.16.1)

$$
\begin{tikzcd}
 & & K_Z^{d-4}\otimes\Lambda^2S^d \arrow[r]\arrow[d] & K_Z^{2d-4}\otimes S^d \arrow[r,"\nu"]\arrow[d,"\beta"] & K_Z^{3d-4}\arrow[dd,"\gamma"] \\
\text{b)}\ \bar{\mu}'_Z & : & K_Z^{d-4}\otimes\Lambda^2R^d \arrow[r]\arrow[d,equal] & R_Z^{2d-4}\otimes R^d \arrow[d,"\alpha"] & \\
\bar{\mu}_Z & : & K_Z^{d-4}\otimes\Lambda^2R^d \arrow[r] & R^{2d-4}\otimes R^d \arrow[r] & R^{3d-4}\,.
\end{tikzcd}
$$

Par le corollaire 3.10 on a l'exactitude de la ligne du haut dans a) et b) et donc pour obtenir a) $\bar{\mu}'_p(\operatorname{Ker} \bar{\mu}_p) = \operatorname{Ker} \alpha$, et b) $\bar{\mu}'_Z(\operatorname{Ker} \bar{\mu}_Z) = \operatorname{Ker} \alpha$ il suffit de montrer:

(3.16.2) $$\nu(\operatorname{Ker} \beta) = \operatorname{Ker} \gamma \quad \text{dans les deux cas}\,.$$

Or $\operatorname{Ker} \beta$ contient $H_p^{2d-4} \otimes J^d$ dans le cas a) et $K_Z^{2d-4} \otimes J^d$ dans le cas b) tandis que $\operatorname{Ker} \gamma = J^{3d-4} \cap H_p^{3d-4}$ dans le cas a), $\operatorname{Ker} \gamma = J^{3d-4} \cap K_Z^{3d-4}$ dans le cas b). Il suffit donc de montrer:

(3.16.3) $$\begin{aligned} J^{3d-4} \cap H_p^{3d-4} &= H_p^{2d-3} \cdot J^{d-1}\,, \\ J^{3d-4} \cap K_Z^{3d-4} &= K_Z^{2d-3} \cdot J^{d-1}\,. \end{aligned}$$

Ceci se montre facilement en utilisant la résolution de Koszul associée à la suite régulière J^{d-1}, l'hypothèse numérique nécessaire étant: $d \geqq 4$. Le lemme 3.16 est donc prouvé. Comme on a une suite exacte:

$$(*) \qquad 0 \to \mathcal{O} \to \Omega^N_{\mathcal{S}} \otimes \pi^* K^{-1}_{B\,|\,S} \to L \to 0,$$

il est clair que 3.16.a) entraîne 3.4.a) [on a $H^1(\mathcal{O}_S) = 0$], c'est-à-dire: $\Omega^N_{\mathcal{S}} \otimes \pi^* K^{-1}_{B\,|\,S}$ est engendré par ses sections globales pour $d \geqq 6$.

Pour obtenir 3.4.b) (c'est-à-dire $\Omega^N_{\mathcal{S}} \otimes \pi^* K^{-1}_{B\,|\,S}$ est très ample pour $d \geqq 7$) il suffit maintenant de montrer:

3.17 Lemme. *Soit $d \geqq 7$ et $T \subset S$ un sous-schéma fini de longueur deux. Alors la flèche $\delta : H^0(L \otimes I_Z) \to H^1(I_Z)$ induite par $(*)$ est non nulle.*

Démonstration. D'après le lemme 3.15, $H^0(L \otimes I_Z)$ s'identifie à

$$\operatorname{Ker}(\bar{\mu}'_Z : K_Z^{d-4} \otimes \Lambda^2 R^d \to R_Z^{2d-4} \otimes R^d).$$

On va maintenant décrire la flèche $\delta : H^0(L \otimes I_Z) \to H^1(I_Z)$.

Pour cela considérons le diagramme:

$$(3.17.1) \qquad \begin{array}{ccccccc} \mu_Z & : & K_Z^{d-4} \otimes \Lambda^2 S^d & \longrightarrow & K_Z^{2d-4} \otimes S^d & \xrightarrow{\nu} & K_Z^{3d-4} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \mu''_Z & : & K_Z^{d-4} \otimes \Lambda^2 S^d & \longrightarrow & R_Z^{2d-4} \otimes S^d & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \bar{\mu}'_Z & : & K_Z^{d-4} \otimes \Lambda^2 R^d & \longrightarrow & R_Z^{2d-4} \otimes R^d, & & \end{array}$$

où μ''_Z est composé de μ_Z et de la projection $K_Z^{2d-4} \to R_Z^{2d-4}$. On vérifie aisément qu'un élément α de $\operatorname{Ker} \bar{\mu}'_Z$ se relève en un élément $\tilde{\alpha}$ de $\operatorname{Ker} \mu''_Z$. Alors $\mu_Z(\tilde{\alpha}) \in J_Z^{2d-4} \otimes S^d$, où l'on a par définition $J_Z^{2d-4}{}_{|S} \cong H^0(T\mathbb{P}^3_{|S} \otimes I_Z(d-4))$. Considérons l'image β de $\mu_Z(\tilde{\alpha})$ dans $H^0(T\mathbb{P}^3_{|S} \otimes I_Z(2d-4))$, par le composé:

$$(3.17.2) \qquad \begin{aligned} J_Z^{2d-4} \otimes S^d &\to H^0(T\mathbb{P}^3_{|S} \otimes I_Z(d-4)) \otimes H^0(\mathcal{O}_S(d)) \\ &\to H^0(T\mathbb{P}^3_{|S} \otimes I_Z(2d-4)). \end{aligned}$$

Comme $\mu_Z(\tilde{\alpha})$ va sur 0 dans $J_Z^{3d-4} \subset K_Z^{3d-4}$ [cf. suite du haut dans (3.17.1)], on a

$$\beta \in \operatorname{Ker} H^0(T\mathbb{P}^3_{|S} \otimes I_Z(2d-4)) \to H^0(\mathcal{O}_S(3d-4))$$

soit encore

$$\beta \in H^0(T_S \otimes I_Z(2d-4)) \cong H^0(\Omega_S \otimes I_Z(d)).$$

Finalement, en utilisant la suite exacte:

$$(3.17.3) \qquad 0 \to I_Z \to \Omega_{\mathbb{P}^3\,|\,S}(d) \otimes I_Z \to \Omega_S(d) \otimes I_Z \to 0$$

on voit que β a une image γ dans $H^1(I_Z)$.

On peut montrer en utilisant la description de $\Omega^N_{\mathscr{S}} \otimes \pi^* K^{-1}_{B\,|\,S}$ donnée dans la preuve de 1.15 que $\gamma = \delta(\alpha)$.

Pour montrer la surjectivité de δ, il reste alors à vérifier les points suivants:

(3.17.4) *Fait 1*. Le cobord $H^0(\Omega_S(d) \otimes I_Z) \to H^1(I_Z)$ est surjectif. [Cela résulte de: $H^1(\Omega_{\mathbb{P}^3}(d)_{|S} \otimes I_Z) = 0$.]

(3.17.5) *Fait 2*. L'application

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} \mu''_Z &\to H^0(\Omega_S(d) \otimes I_Z) \\ \tilde{\alpha} &\to \beta \end{aligned}$$

construite ci-dessus est surjective.

Démonstration. En utilisant le corollaire 3.10, on voit que $\operatorname{Ker} J^{2d-4}_Z \otimes S^d \to J^{3d-4}_Z$ est contenu dans l'image de μ_Z; il suffit donc de vérifier que l'application de (3.17.2):

$$\operatorname{Ker}[J^{2d-4}_Z \otimes S^d \to J^{3d-4}_Z] \to \operatorname{Ker}[H^0(T\mathbb{P}^3_{|S} \otimes I_Z(2d-4)) \to H^0(I_Z(3d-4))]$$

est surjective.

Mais cela résulte immédiatement de la surjectivité de la multiplication:

$$H^0(T\mathbb{P}^3_{|S}(d-4) \otimes I_Z) \otimes H^0(\mathscr{O}_S(d)) \to H^0(T\mathbb{P}^3_{|S}(2d-4) \otimes I_Z)\,,$$

qui résulte elle-même facilement de la suite exacte d'Euler.

La preuve de la proposition 3.4 est donc terminée. Comme on l'a mentionné dans l'introduction, il est vraisemblable que le théorème 3.1 puisse être amélioré en faisant $d \geqq 5$ dans le cas a), $d \geqq 6$ dans le cas b).

Précisément l'énoncé suivant semble plausible:

3.18 Conjecture. La proposition 3.4 reste vraie avec $d \geqq 5$ dans le cas a), $d \geqq 6$ dans le cas b), au moins pour une surface générique.

Remerciements. Ce travail est grandement inspiré par les articles [5] et [11], où est largement illustrée la justesse du principe développé dans [9] selon lequel la théorie des cycles algébriques peut dans une certaine mesure être abordée d'un point de vue purement algébro-géométrique par la théorie des variations de structure de Hodge. C'est avec plaisir que je reconnais l'influence de ces travaux; je désire également remercier l'IHES pour le cadre chaleureux et stimulant dans lequel ma recherche s'est effectuée cette année.

Références

1. Bloch, S., Srinivas, V.: Remarks on correspondences and algebraic cycles. Am. J. Math. **105**, 1235–1253 (1983)
2. Carlson, J., Griffiths, P.: Infinitesimal variations of Hodge structures and the global Torelli problem. Dans: Géometrie Algébrique, Angers, pp. 51–76. Beauville, A. (éd.) The Netherlands, Rockville, MD: Sijthoff & Noordhoff 1980
3. Deligne, P.: Théorie de Hodge. II. Publ. Math., Inst. Hautes Études Sci. **40** (1972)
4. Donagi, R., Green, M.: A new proof of the symmetrizer lemma and a stronger weak Torelli theorem for projective hypersurfaces. J. Differ. Geom. **20**, 459–461 (1984)
5. Green, M.L.: Koszul cohomology and the geometry of projective varieties. II. J. Differ. Geom. **20**, 279–289 (1984)
6. Green, M.L.: Griffiths' infinitesimal invariant and the Abel-Jacobi map. J. Differ. Geom. **29**, 545–555 (1989)

7. Griffiths, P.: On the periods of certain rational integrals. I, II. Ann. Math. **90**, 460–541 (1969)
8. Griffiths, P.: Periods of integrals on algebraic manifolds. I, II. Am. J. Math. **90**, 568–626, 805–865 (1968)
9. IVHS: Infinitesimal variations of Hodge structure. Compos. Math. **50** (1983)
I. Carlson, J., Green, M., Griffiths, P., Harris, J.: Infinitesimal variations of Hodge structure, 109–205
II. Griffiths, P., Harris, J.: Infinitesimal invariant of Hodge classes, 207–265
III. Griffiths, P.: Determinantal varieties and the infinitesimal invariant of normal functions, pp. 267–324
10. Mumford, D.: Rational equivalence of 0-cycles on surfaces. J. Math. Kyoto Univ. **9**, 195–204 (1968)
11. Nori, M.V.: Algebraic cycles and Hodge theoretic connectivity. Invent. Math. **111**(2), 349–373 (1993)
12. Roitman, A.A.: The torsion of the group of 0-cycles modulo rational equivalence. Ann. Math. **111**, 553–569 (1980)
13. Voisin, C.: Une remarque sur l'invariant infinitésimal des fonctions normales. C.R. Acad. Sci., Paris, Sér. I **307**, 157–160 (1988)
14. Voisin, C.: Sur les zéro cycles de certaines hypersurfaces munies d'un automorphisme. Ann. Sc. Norm. Super. Pisa **29**, 473–492 (1993)
15. Xu, G.: Subvarieties of general hypersurfaces in projective space. (Preprint 1992)