Spectre des systèmes quantiques et représentations linéaires

Journée à Nancy,
David Hernandez

Université Paris Diderot-Paris 7
Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche

11 décembre 2013

Un peu de physique

- Motivation principale : systèmes physiques statistiques classiques ou quantiques.

Un peu de physique

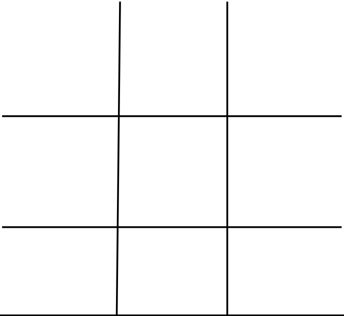
- Motivation principale : systèmes physiques statistiques classiques ou quantiques.
- Exemple historique : modèle de la glace (Pauling, 1935). "Modèle à 6 sommets".

Un peu de physique

- Motivation principale : systèmes physiques statistiques classiques ou quantiques.
- Exemple historique : modèle de la glace (Pauling, 1935). "Modèle à 6 sommets".
- Version quantique : modèle XXZ (modèle de Heisenberg) : chaîne de spin d'électrons.

Un peu de physique

- Motivation principale : systèmes physiques statistiques classiques ou quantiques.
- Exemple historique : modèle de la glace (Pauling, 1935). "Modèle à 6 sommets".
- Version quantique : modèle XXZ (modèle de Heisenberg) : chaîne de spin d'électrons.
- Support : un réseau où chaque sommet est relié à 4 autres sommets.

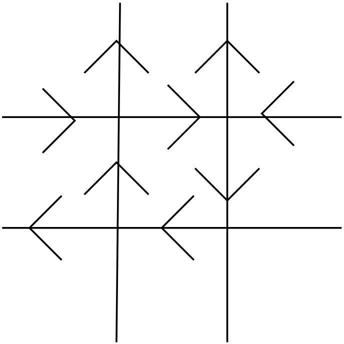


Un peu de physique

- Etat du système : orientation des arêtes telle que de chaque sommet part exactement 2 flèches.

Un peu de physique

- Etat du système : orientation des arêtes telle que de chaque sommet part exactement 2 flèches.
- Exemple :



Un peu de physique

- Les données physiques du système dépendent de sa fonction de partition :

$$\mathcal{Z}.$$

Un peu de physique

- Les données physiques du système dépendent de sa fonction de partition :
$$\mathcal{Z}.$$

- BAXTER (1971) : la fonction de partition peut être obtenue à partir de la matrice de transfert $\mathcal{T}$.

Un peu de physique

- Les données physiques du système dépendent de sa fonction de partition :
$$\mathcal{Z}.$$

- BAXTER (1971) : la fonction de partition peut être obtenue à partir de la matrice de transfert $\mathcal{T}$.

- $$\mathcal{Z} = \mathrm{Tr}(\mathcal{T}) = \sum_i \lambda_i$$

  λ_i : valeurs propres de $\mathcal{T}$.

Un peu de physique

- Les données physiques du système dépendent de sa fonction de partition :
$$\mathcal{Z}.$$

- BAXTER (1971) : la fonction de partition peut être obtenue à partir de la matrice de transfert $\mathcal{T}$.

- $$\mathcal{Z} = \mathrm{Tr}(\mathcal{T}) = \sum_i \lambda_i$$
  λ_i : valeurs propres de $\mathcal{T}$.

- Spectre du système = Spectre de $\mathcal{T} = \{\lambda_i\}_i$.

Un peu de physique

- BAXTER : Méthode de la matrice de transfert, calcul explicite du spectre du système XXZ $->$ calcul explicite de $\mathcal{Z}$.

Un peu de physique

- BAXTER : Méthode de la matrice de transfert, calcul explicite du spectre du système XXZ $->$ calcul explicite de $\mathcal{Z}$.
- Observation fondamentale : Le spectre a une forme remarquable :

Un peu de physique

- BAXTER : Méthode de la matrice de transfert, calcul explicite du spectre du système XXZ $->$ calcul explicite de $\mathcal{Z}$.
- Observation fondamentale : Le spectre a une forme remarquable :

$$\lambda_i = A(z)\frac{Q(zq^{-2})}{Q(z)} + B(z)\frac{Q(zq^2)}{Q(z)}.$$

Un peu de physique

- BAXTER : Méthode de la matrice de transfert, calcul explicite du spectre du système $XXZ \; - >$ calcul explicite de $\mathcal{Z}$.
- Observation fondamentale : Le spectre a une forme remarquable :

$$\lambda_i = A(z)\frac{Q(zq^{-2})}{Q(z)} + B(z)\frac{Q(zq^2)}{Q(z)}.$$

q : paramètre "quantique" du modèle, z : paramètre spectral du modèle.
A, B : fonctions universelles indépendantes de la valeur propre.
Q : **Polynôme** qui dépend de la valeur propre.

Un peu de physique

- BAXTER : Méthode de la matrice de transfert, calcul explicite du spectre du système XXZ $->$ calcul explicite de $\mathcal{Z}$.
- Observation fondamentale : Le spectre a une forme remarquable :

$$\lambda_i = A(z)\frac{Q(zq^{-2})}{Q(z)} + B(z)\frac{Q(zq^2)}{Q(z)}.$$

q : paramètre "quantique" du modèle, z : paramètre spectral du modèle.
A, B : fonctions universelles indépendantes de la valeur propre.
Q : **Polynôme** qui dépend de la valeur propre.

- Relation de Baxter, Q : polynômes de Baxter.

Une conjecture

- Systèmes quantiques plus généraux : calcul explicite du spectre trop difficile.

Une conjecture

- Systèmes quantiques plus généraux : calcul explicite du spectre trop difficile.
- Questions naturelles : est-ce que le spectre a une forme analogue en général ?
  Peut-il être exprimé à l'aide de polynômes de Baxter ?

Une conjecture

- Systèmes quantiques plus généraux : calcul explicite du spectre trop difficile.
- Questions naturelles : est-ce que le spectre a une forme analogue en général ?
  Peut-il être exprimé à l'aide de polynômes de Baxter ?
- Conjecture précise : FRENKEL-RESHETIKHIN (1998) : un analogue de la relation de Baxter existe en général et fait intervenir des polynômes.

Une conjecture

- Systèmes quantiques plus généraux : calcul explicite du spectre trop difficile.
- Questions naturelles : est-ce que le spectre a une forme analogue en général ?
  Peut-il être exprimé à l'aide de polynômes de Baxter ?
- Conjecture précise : FRENKEL-RESHETIKHIN (1998) : un analogue de la relation de Baxter existe en général et fait intervenir des polynômes.
- Pas d'espoir de la montrer avec un calcul explicite et direct comme dans le cas du modèle XXZ.

Une conjecture

- Systèmes quantiques plus généraux : calcul explicite du spectre trop difficile.
- Questions naturelles : est-ce que le spectre a une forme analogue en général ?
  Peut-il être exprimé à l'aide de polynômes de Baxter ?
- Conjecture précise : FRENKEL-RESHETIKHIN (1998) : un analogue de la relation de Baxter existe en général et fait intervenir des polynômes.
- Pas d'espoir de la montrer avec un calcul explicite et direct comme dans le cas du modèle XXZ.
- Point de vue mathématique : théorie des représentations et groupes quantiques.

Point de vue des groupes quantiques

- Nouveau point de vue : théorie des groupes quantiques (DRINFELD et JIMBO 1988)

Point de vue des groupes quantiques

- Nouveau point de vue : théorie des groupes quantiques (DRINFELD et JIMBO 1988)
- La matrice de transfert $\mathcal{T}$ est obtenue à partir de
  (1) la $\mathcal{R}$-matrice universelle,
  (2) une représentation linéaire.

Point de vue des groupes quantiques

- Nouveau point de vue : théorie des groupes quantiques (DRINFELD et JIMBO 1988)
- La matrice de transfert $\mathcal{T}$ est obtenue à partir de
  (1) la $\mathcal{R}$-matrice universelle,
  (2) une représentation linéaire.
- Ces deux objects algébriques sont obtenus à partir d'un groupe quantique $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$.

Point de vue des groupes quantiques

- Nouveau point de vue : théorie des groupes quantiques (DRINFELD et JIMBO 1988)
- La matrice de transfert $\mathcal{T}$ est obtenue à partir de
  (1) la $\mathcal{R}$-matrice universelle,
  (2) une représentation linéaire.
- Ces deux objects algébriques sont obtenus à partir d'un groupe quantique $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$.
- $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}) \to \mathcal{R}$-matrices, représentation $\to \mathcal{T} \to$ Spectre $\to \mathcal{Z}$.

R-matrice universelle

- Une R-matrice $\mathcal{R}(u)$ est une solution l'équation de Yang-Baxter.

R-matrice universelle

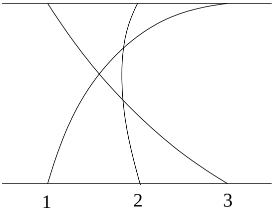
- Une R-matrice $\mathcal{R}(u)$ est une solution l'équation de Yang-Baxter.

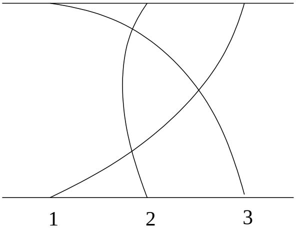
$$\mathcal{R}_{12}(u)\mathcal{R}_{13}(uv)\mathcal{R}_{23}(v) = \mathcal{R}_{23}(v)\mathcal{R}_{13}(uv)\mathcal{R}_{12}(u).$$

R-matrice universelle

- Une R-matrice $\mathcal{R}(u)$ est une solution l'équation de Yang-Baxter.

$$\mathcal{R}_{12}(u)\mathcal{R}_{13}(uv)\mathcal{R}_{23}(v) = \mathcal{R}_{23}(v)\mathcal{R}_{13}(uv)\mathcal{R}_{12}(u).$$





R-matrice universelle

- Exemple :

$$\mathcal{R}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{q(u-1)}{u-q^2} & \frac{1-q^2}{u-q^2} & 0 \\ 0 & \frac{u(1-q^2)}{u-q^2} & \frac{q(u-1)}{u-q^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

R-matrice universelle

- Exemple :

$$\mathcal{R}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{q(u-1)}{u-q^2} & \frac{1-q^2}{u-q^2} & 0 \\ 0 & \frac{u(1-q^2)}{u-q^2} & \frac{q(u-1)}{u-q^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(C'est la R-matrice associée au modèle XXZ)

Groupes quantiques

- Drinfeld, Jimbo : les R-matrices peuvent être obtenues à partir des groupes quantiques.

Groupes quantiques

- Drinfeld, Jimbo : les R-matrices peuvent être obtenues à partir des groupes quantiques.
- $\mathfrak{g}$: algèbre simple complexe de dimension finie.

Groupes quantiques

- Drinfeld, Jimbo : les R-matrices peuvent être obtenues à partir des groupes quantiques.
- $\mathfrak{g}$: algèbre simple complexe de dimension finie.
- $\mathfrak{g}$: espace vectoriel avec un "crochet de Lie" $[,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, $[a, b] \in \mathfrak{g}$ pour $a, b \in \mathfrak{g}$.

Groupes quantiques

- Drinfeld, Jimbo : les R-matrices peuvent être obtenues à partir des groupes quantiques.
- $\mathfrak{g}$: algèbre simple complexe de dimension finie.
- $\mathfrak{g}$: espace vectoriel avec un "crochet de Lie" $[,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, $[a, b] \in \mathfrak{g}$ pour $a, b \in \mathfrak{g}$.
- Exemple : $\mathfrak{g} = sl_2(\mathbb{C})$ (matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $a + d = 0$), $[A, B] = AB - BA$.

Groupes quantiques

- Drinfeld, Jimbo : les R-matrices peuvent être obtenues à partir des groupes quantiques.
- $\mathfrak{g}$: algèbre simple complexe de dimension finie.
- $\mathfrak{g}$: espace vectoriel avec un "crochet de Lie" $[,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, $[a, b] \in \mathfrak{g}$ pour $a, b \in \mathfrak{g}$.
- Exemple : $\mathfrak{g} = sl_2(\mathbb{C})$ (matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $a + d = 0$), $[A, B] = AB - BA$.
- Groupes quantique $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$: algèbre (de Hopf).

Groupes quantiques

- Drinfeld, Jimbo : les R-matrices peuvent être obtenues à partir des groupes quantiques.
- $\mathfrak{g}$: algèbre simple complexe de dimension finie.
- $\mathfrak{g}$: espace vectoriel avec un "crochet de Lie" $[,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, $[a, b] \in \mathfrak{g}$ pour $a, b \in \mathfrak{g}$.
- Exemple : $\mathfrak{g} = sl_2(\mathbb{C})$ (matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $a + d = 0$), $[A, B] = AB - BA$.
- Groupes quantique $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$: algèbre (de Hopf).
- Dépend de $q = e^h \in \mathbb{C}^*$: paramètre (h : constante de Planck).

Groupes quantiques

- Drinfeld, Jimbo : les R-matrices peuvent être obtenues à partir des groupes quantiques.
- $\mathfrak{g}$: algèbre simple complexe de dimension finie.
- $\mathfrak{g}$: espace vectoriel avec un "crochet de Lie" $[,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, $[a, b] \in \mathfrak{g}$ pour $a, b \in \mathfrak{g}$.
- Exemple : $\mathfrak{g} = sl_2(\mathbb{C})$ (matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $a + d = 0$), $[A, B] = AB - BA$.
- Groupes quantique $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$: algèbre (de Hopf).
- Dépend de $q = e^h \in \mathbb{C}^*$: paramètre (h : constante de Planck).
- "q-déformation de $\mathfrak{g}$"

Groupes quantiques

- Drinfeld, Jimbo : les R-matrices peuvent être obtenues à partir des groupes quantiques.
- $\mathfrak{g}$: algèbre simple complexe de dimension finie.
- $\mathfrak{g}$: espace vectoriel avec un "crochet de Lie" $[,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, $[a, b] \in \mathfrak{g}$ pour $a, b \in \mathfrak{g}$.
- Exemple : $\mathfrak{g} = sl_2(\mathbb{C})$ (matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $a + d = 0$), $[A, B] = AB - BA$.
- Groupes quantique $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$: algèbre (de Hopf).
- Dépend de $q = e^h \in \mathbb{C}^*$: paramètre (h : constante de Planck).
- "q-déformation de $\mathfrak{g}$"
- Limite classique : $h = 0$, $q = 1$, $\mathcal{U}_1(\mathfrak{g}) = \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$.

Groupes quantiques affines

- Plus précisément : on utilise $\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t^{\pm 1}]$ algèbre affine.

Groupes quantiques affines

- Plus précisément : on utilise $\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t^{\pm 1}]$ algèbre affine.
- Groupe quantique *affine* $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$.

Groupes quantiques affines

- Plus précisément : on utilise $\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t^{\pm 1}]$ algèbre affine.
- Groupe quantique *affine* $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$.
- Pour le système XXZ : $\mathcal{U}_q(\hat{sl}_2)$.

Groupes quantiques affines

- Plus précisément : on utilise $\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t^{\pm 1}]$ algèbre affine.
- Groupe quantique *affine* $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$.
- Pour le système XXZ : $\mathcal{U}_q(\hat{sl}_2)$.
- $$\begin{tikzcd}
 & \hat{\mathfrak{g}} \arrow[dr, dashed, "\text{Quantification}"] & \\
\mathfrak{g} \arrow[ur, dashed, "\text{Affinisation}"] \arrow[dr, dashed, "\text{Quantification}"'] & & \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}) \\
 & \mathcal{U}_q(\mathfrak{g}) &
\end{tikzcd}$$

Groupes quantiques affines

- Plus précisément : on utilise $\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t^{\pm 1}]$ algèbre affine.
- Groupe quantique *affine* $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$.
- Pour le système XXZ : $\mathcal{U}_q(\hat{sl}_2)$.
- $$\begin{tikzcd}
 & \hat{\mathfrak{g}} \arrow[dr, dashed, "\text{Quantification}"] & \\
\mathfrak{g} \arrow[ur, dashed, "\text{Affinisation}"] \arrow[dr, dashed, "\text{Quantification}"'] & & \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}) \\
 & \mathcal{U}_q(\mathfrak{g}) \arrow[ur, dashed, "\text{Affinisation quantique}"'] &
\end{tikzcd}$$
- Diagramme "commutatif" (théorème de Drinfeld).

Représentations linéaires

- Une représentation d'une algèbre $\mathcal{A}$ est un morphisme d'algèbre
$$\rho_V : \mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{End}(V)$$
avec V espace vectoriel.

Représentations linéaires

- Une représentation d'une algèbre $\mathcal{A}$ est un morphisme d'algèbre
$$\rho_V : \mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{End}(V)$$
avec V espace vectoriel.
- Vaste domaine des mathématiques : théorie des représentations.

Représentations linéaires

- Une représentation d'une algèbre $\mathcal{A}$ est un morphisme d'algèbre
$$\rho_V : \mathcal{A} \to \mathrm{End}(V)$$
avec V espace vectoriel.
- Vaste domaine des mathématiques : théorie des représentations.
- Théorie des représentations de $\mathcal{A} = \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ très riche, beaucoup de questions ouvertes (dimension ?).

Représentations linéaires

- Matrice de transfert : obtenue à partir d'une R-matrice et d'une représentation (V, ρ_V) *de dimension finie* de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$.

Représentations linéaires

- Matrice de transfert : obtenue à partir d'une R-matrice et d'une représentation (V, ρ_V) *de dimension finie* de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$.
- Par trace partielle :

$$\mathcal{T} = ((Tr \circ \rho_V) \otimes \mathrm{Id})(\mathcal{R}(z)) \in \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})(z).$$

Représentations linéaires

- Matrice de transfert : obtenue à partir d'une R-matrice et d'une représentation (V, ρ_V) *de dimension finie* de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$.
- Par trace partielle :

$$\mathcal{T} = ((Tr \circ \rho_V) \otimes \mathrm{Id})(\mathcal{R}(z)) \in \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})(z).$$

- BAZHANOV-LUKYANOV-ZAMOLODCHIKOV (1999) pour le système XXZ : les polynômes de Baxter eux-mêmes peuvent être obtenus à partir d'une représention *de dimension infinie* (L, ρ_L) de $\mathcal{U}_q(\hat{sl}_2)$.

Représentations linéaires

- Matrice de transfert : obtenue à partir d'une R-matrice et d'une représentation (V, ρ_V) *de dimension finie* de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$.
- Par trace partielle :

$$\mathcal{T} = ((Tr \circ \rho_V) \otimes \mathrm{Id})(\mathcal{R}(z)) \in \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})(z).$$

- BAZHANOV-LUKYANOV-ZAMOLODCHIKOV (1999) pour le système XXZ : les polynômes de Baxter eux-mêmes peuvent être obtenus à partir d'une représention *de dimension infinie* (L, ρ_L) de $\mathcal{U}_q(\hat{sl}_2)$.
- $Q(z)$ "valeur propre" de $\mathcal{T}_L = ((Tr \circ \rho_L) \otimes \mathrm{Id})(\mathcal{R}(z))$.

Représentations linéaires

- Matrice de transfert : obtenue à partir d'une R-matrice et d'une représentation (V, ρ_V) *de dimension finie* de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$.
- Par trace partielle :

$$\mathcal{T} = ((Tr \circ \rho_V) \otimes \mathrm{Id})(\mathcal{R}(z)) \in \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})(z).$$

- BAZHANOV-LUKYANOV-ZAMOLODCHIKOV (1999) pour le système XXZ : les polynômes de Baxter eux-mêmes peuvent être obtenus à partir d'une représention *de dimension infinie* (L, ρ_L) de $\mathcal{U}_q(\hat{sl}_2)$.
- $Q(z)$ "valeur propre" de $\mathcal{T}_L = ((Tr \circ \rho_L) \otimes \mathrm{Id})(\mathcal{R}(z))$. L : Représentation préfondamentale construite explicitement "à la main".

Spectre des systèmes quantiques

- H.-JIMBO (2011) : nouvelle construction des représentations préfondamentales L qui fonctionne *en général*

Spectre des systèmes quantiques

- H.-JIMBO (2011) : nouvelle construction des représentations préfondamentales L qui fonctionne *en général* (opérateurs d'entrelacements, q-caractères, asymptotique des représentations).

Spectre des systèmes quantiques

- H.-JIMBO (2011) : nouvelle construction des représentations préfondamentales L qui fonctionne *en général* (opérateurs d'entrelacements, q-caractères, asymptotique des représentations).
- FRENKEL-H. (2013) : elles satisfont en général une relation de Baxter (dans l'anneau de Grothendieck de la catégorie).

Spectre des systèmes quantiques

- H.-JIMBO (2011) : nouvelle construction des représentations préfondamentales L qui fonctionne *en général* (opérateurs d'entrelacements, q-caractères, asymptotique des représentations).
- FRENKEL-H. (2013) : elles satisfont en général une relation de Baxter (dans l'anneau de Grothendieck de la catégorie).
- Conséquence :
  Théorème (FRENKEL-H. 2013) La conjecture générale sur le spectre de ces systèmes quantique est vraie.

Spectre des systèmes quantiques

- H.-JIMBO (2011) : nouvelle construction des représentations préfondamentales L qui fonctionne *en général* (opérateurs d'entrelacements, q-caractères, asymptotique des représentations).
- FRENKEL-H. (2013) : elles satisfont en général une relation de Baxter (dans l'anneau de Grothendieck de la catégorie).
- Conséquence :
  Théorème (FRENKEL-H. 2013) La conjecture générale sur le spectre de ces systèmes quantique est vraie.
- Exemple (système quantique associé à sl_3) : spectre

$$A(z)\frac{P_1(zq^{-2})}{P_1(z)} + B(z)\frac{P_1(zq^2)P_2(zq^{-1})}{P_1(z)P_2(zq)} + C(z)\frac{P_2(zq^3)}{P_2(zq)}.$$