Mémoire de DEA
Année 2000-2001
Groupes quantiques: les q-caractères de Frenkel et Reshetikhin pour les représentations de dimension finie des algèbres affines quantifiées

David Hernandez*
sous la direction de Marc Rosso

Résumé

Le but de ce mémoire est la constrution et l'étude des q-caractères pour les représentations de dimension finie des groupes quantiques affines. Après avoir rappelé comment dans les cas semi-simple, affine classiques et dans le cas semi-simple quantique un morphisme de caractères permet de comprendre la théorie des représentations de dimension finie, on remarque l'insuffisance des caractères de type classique pour les algèbres affines quantifiées. Le morphisme de q-caractères χ_q construit à partir de la R-matrice universelle permet pour l'anneau de Grothendieck d'établir $Rep_r(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})) \simeq \mathbb{Z}[X_{i,a}]_{i\in I, a\in\mathbb{C}^*}$. On interprète les monômes de $\chi_q(V)$ en terme de sous-espaces de Jordan des $\Phi_i^{\pm}(u)$, et pour V irréductible on a $\chi_q(V) = m_+(1+\sum M_p')$ avec m_+ monôme dominant et les M_p' produits de $A_{i,c}^{-1}$. On introduit enfin les opérateurs d'écrantage S_i qui vérifient $Im(\chi_q) = \bigcap_{1\leq i\leq n} Ker(S_i)$.

Les q-caractères sont introduits dans l'article de E. Frenkel et N. Reshetikhin [Fre99].

Table des matières

*David.Hernandez@ens.fr

1 Introduction

Dans le chapitre 2 on commence par définir les algèbres enveloppantes des algèbres de Lie et on donne un exemple de structure d'algèbre de hopf sur celles-ci. On explique comment le groupe de Grothendieck d'une algèbre devient un anneau lorsque celle-ci est aussi une bialgèbre.
L'étude particulière des algèbres de Lie semi-simples est motivée par le théorème 3 qui donne entre autre le critère de Cartan. Il en découle une structure agréable de ces algèbres avec la notion de racines ce qui permet de les classifier. On définit le groupe de Weyl. La théorie des représentations de dimension finie est bien comprise grâce en particulier à la notion de module de plus haut poids. On a complète réductibilité des modules de dimension finie, et on peut définir un morphisme d'anneaux injectif $ch : Rep(\mathfrak{g}) \to \mathbb{Z}[y_i^{\pm}]_{1\leq i\leq n}$ qui donne un isomorphisme entre l'anneau de Grothendieck $Rep(\mathfrak{g})$ et $\mathbb{Z}[\Lambda]^W$ les invariants par le groupe de Weyl. On a les formules de Weyl qui permettent de décomposer les produits tensoriels de modules.
On définit ensuite par matrice de Cartan les algèbres de Kac-Moody qui sont une généralisation de dimension infinie des algèbres de Lie semi-simples. De nombreuses propriétés agréables sont conservées. On s'intéresse à la classe des algèbres affines dont on donne la classification. Dans le cas non-tordue on a une deuxième construction en terme d'algèbres de courants ce qui permet de mieux comprendre les racines imaginaires et réelles. On a aussi complète réductibilité des représentations en dimension finie, et un morphisme de caractères analogue au cas semi-simple.

Après avoir évoqué l'origine en mécanique quantique et statistique des groupes quantiques, on donne dans le chapitre 3 la construction abstraite des déformations formelles au sens topologique h-adique ce qui mène pour les déformations formelles d'algèbres enveloppantes à la définition des QUE .
On construit explicitement $\mathcal{U}_q(sl_2)$ avec sa structure d'algèbre de Hopf et on remarque la grande analogie pour les représentations avec la cas classique $\mathcal{U}(sl_2)$. Pour le cas semi-simple général, on définit $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ et l'existence d'un analogue quantique des caractères donne $Rep(\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})) \simeq Rep(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$, avec en particulier des formules de Weyl.
Pour le cas affine $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ admet deux réalisations, la deuxième correspond à la construction de $\hat{\mathfrak{g}}$ avec les algèbres de courants. Cette deuxième réalisation permet de construire des automorphismes de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ et de définir au passage une $\mathbb{Z}$-graduation. Les représentations irréductibles de dimension finie de type 1 sont classifiées par leur plus haut poids qui est un n-uplet de polynômes. Cependant on n'a pas à priori de résultat concernant la complète réductibilité ou les produits tensoriels, ce qui motive ce texte. Dans le cas $\mathcal{U}_q(\hat{sl_2})$ on peut construire explicitement des représentations d'évaluation.

Dans le chapitre 4 on donne un exemple où l'équation de Yang-Baxter intervient en physique statistique avec un modèle de réseau à deux dimensions. La notion de R-matrice apparaît aussi naturellement quand on s'intéresse aux catégories monoïdales tressées. L'existence de R pour une algèbre de Hopf permet de construire des modèles physiques en utilisant la QISM ; on remarque à ce propos comment obtenir des morphismes d'anneaux en utilisant R, ce que nous verrons en détail pour contruire χ_q. La construction d'une R-matrice universelle pour les groupes quantiques se fait par double de Drinfeld : dans le cas semi-simple on obtient bien une algèbre de hopf topologique tressée, mais dans le cas affine il faut compléter le produit tensoriel. La construction de bases à la Poincaré-Birkhoff-Witt utilisant des opérateurs de Lusztig et l'existence d'ordre normal sur les racines permet d'obtenir des formules explicites de la R-matrice universelle. On donne dans le cas affine des propriétés spécifiques aux différents termes de l'écriture $R = R^+_{Re} R_{im} R^-_{Re} K$, en particulier relativement aux sous-algèbres et gradutations de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$.

On démontre dans le chapitre 5 des résultats préliminaires concernant les représentations : dans le cas $\mathcal{U}_q(\hat{sl_2})$, les opérateurs $\Phi^{\pm}(u)$ sont simultanément diagonalisables sur les représentations d'évalutation $W_r(a)$. On donne les valeurs propres ce qui permet de trouver le plus haut poids de $W_r(a)$. Au passage on montre qu'un caractère naïf $tr(\Phi(u)^{\pm})$ inspiré de la théorie classique ne permet pas de distinguer les $W_r(a)$ lorsque $a \in \mathbb{C}^*$ varie. De ce fait nous décrirons plus loin χ_q qui est plus précis.
Dans le cas général on montre l'existence d'une décomposition de Jordan commune aux $\Phi_i(u)^{\pm}$ pour un $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ module de dimension finie de type 1, et on donne la forme des valeurs propres à l'aide de deux n-uplets de polynômes. Cette décomposition est aussi compatible aux $h_{i,m}$ et on calcule leurs valeurs propres.
On étudie le $\mathcal{U}_q(\hat{sl_2})$-module $W = W_1(1) \otimes W_1(q^2)$ et on montre qu'il n'est pas complètement réductible.

On construit l'objet principal de ce texte dans le chapitre 6. On commence par définir le morphisme de q-caractères $\chi_q : Rep(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})) \to \mathbb{Z}[Y_{i,a}^{\pm}]_{i\in I, a\in\mathbb{C}^*}$. Pour ce faire on définit successivement la matrice de transfert t_V, les applications ν_q et h_q et on pose $\chi_q = h_q \circ \nu_q$. Pour montrer que χ_q est un morphisme d'anneaux, il nous faut définir $\hat{t}_V$, $\hat{\nu}_q$, $\hat{h}_q$ qui pourront être appliqués directement à la R-matrice.
Après avoir défini et étudié le sous-anneau $\mathbb{Z}[Y_{i,a}^{\pm}]_{i\in I, a\in\mathbb{C}^*}$ de $\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{h}})[[z]]$, on donne une interprétation importante de $\chi_q(V)$ en terme de sous-espaces de jordan dans la proposition 107. Cette interprétation nécessite dans le cas

général non-irréductible de regarder le comportant agréable de χ_q relatif aux suites de jordan-hölder.
Dans le cas $\mathcal{U}_q(\hat{sl_2})$, on calcule explicitement les q-caractères des $W_r(a)$, et pour le $\mathcal{U}_q(\hat{sl_2})$-module W on vérifie explicitement l'interprétation relative aux sous-espaces de jordan.
On montre ensuite que χ_q n'est pas injective car $Rep(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))$ n'est pas semi-simple. On doit donc se ramener au quotient $Rep_r(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))$ par les suites exactes. L'application induite par χ_q est alors injective. On obtient un isomorphisme : $Rep_r(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})) \simeq \mathbb{Z}[X_{i,a}]_{i\in I,a\in\mathbb{C}^*}$.

Dans le chapitre 7 on définit les opérateurs d'écrantage S_i et on montre dans le cas $\mathcal{U}_q(\hat{sl_2})$ que l'image de χ_q est le noyau de S. Dans le cas général les q-caractères de représentations irréductibles sont de la forme $\chi_q(V) = \prod\limits_k Y_{i_k,a_k}(1+\sum\limits_p M'_p)$ avec les M'_p des monômes en $A^{-1}_{j,c}$. On montre que l'image de χ_q est l'intersection des $Ker(S_i)$; pour ce faire on introduit les R-matrices normalisées $\bar{R}_{V,W}$ et les morphismes d'anneaux τ_J. Un produit tensoriel de représentations irréductibles fondamentales $V_1\otimes ... \otimes V_m$ est réductible si et seulement si pour $i\neq j$ la R-matrice universelle normalisée $\bar{R}_{V_iV_j}(z)$ a un pôle en $\frac{a_j}{a_i}$ où $V_k = V_{s(k)}(a_k)$.

Dans les chapitres 2, 3, 4 les résultats sont énoncés sans démonstration. Dans les chapitres 5, 6 tous les résultats sont démontrés. Dans le chapitre 7 certains résultats sont démontrés, pour d'autres ont donne les grandes lignes d'une démontration.

2 Rappels : théorie classique des algèbres de Lie

2.1 Concepts de base

2.1.1 Algèbres de Lie

Définition 1. *Une algèbre sur un corps k est un espace vectoriel A muni d'une application linéaire :*
$$\cdot : E\otimes E \to E$$
Définition 2. *Une algèbre de Lie est une algèbre $\mathfrak{g}$ telle que l'application linéaire $[,] : \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ vérifie :*
$$\forall x\in\mathfrak{g}, [x,x]=0$$
$$\forall x,y,z\in\mathfrak{g}, [x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0$$
Cette dernière égalité s'appelle l'identité de Jacobi est signifie que pour $x\in\mathfrak{g}$, l'endomorphisme de $\mathfrak{g}$ $\mathrm{ad}(x)$ défini par : $\mathrm{ad}(x)(y) = [x,y]$ pour $y\in\mathfrak{g}$ est une dérivation de $\mathfrak{g}$. L'application $[,]$ est appelé un crochet de Lie. Tout espace vectoriel E peut être muni d'un crochet de Lie en posant $[x,y]=0$ pour x, y dans E. Une telle algèbre de Lie est dite abélienne. On peut munir la somme directe d'une famille d'algèbres de Lie d'une structure d'algèbre de Lie en définissant le crochet composante par composante.

On définit les morphismes d'algèbres comme les applications linéaires qui préservent le produit $\cdot$. On définit de même les morphismes d'algèbres de Lie, et on obtient ainsi une catégorie.

Une algèbre associative peut être munie d'une structure d'algèbre de Lie en posant : $[a,b]=ab-ba$. C'est le cas par exemple pour $\mathrm{End}(E)$ l'algèbre des endomorphismes d'un espace vectoriel E. Une représentation de $\mathfrak{g}$ est un morphisme ρ d'algèbres de Lie de $\mathfrak{g}$ dans $\mathrm{End}(E)$. On dit alors que E est muni d'une structure de module sur $\mathfrak{g}$. On appelle la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ le module $\mathfrak{g}$ sur lui-même défini par $\mathrm{ad} : \mathfrak{g}\to\mathrm{End}(\mathfrak{g})$. Lorsqu'on dispose d'une représentation ρ de dimension finie (c'est à dire que l'espace vectoriel E est de dimension finie) on peut définir une forme bilinéaire sur $\mathfrak{g}$: $\phi(x,y) = \mathrm{Tr}(\rho(x)\rho(y))$ qui est invariante :
$$\forall x,y,z\in\mathfrak{g}, \phi([x,y],z)+\phi(y,[x,z])=0$$
Pour une algèbre de Lie de dimension finie on obtient en considérant la représentation adjointe, la forme de Killing K : $K(x,y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad(x)ad(y)})$.

Un sous-espace vectoriel $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ tel que $[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]\subseteq\mathfrak{h}$ est appelé une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$. Il hérite de la structure d'algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$. Un sous-espace vectoriel $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ tel que $[\mathfrak{g},\mathfrak{h}]\subseteq\mathfrak{h}$ est appelé un idéal de $\mathfrak{g}$. C'est en particulier une sous-algèbre de Lie. On appelle normalisateur d'une sous-algèbre $\mathfrak{h}$ la plus grande sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ dans laquelle $\mathfrak{h}$ est un idéal.

On appelle sous-algèbre dérivée de $\mathfrak{g}$ l'idéal $\mathfrak{g}'=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$. On définit par récurrence la série dérivée d'idéaux de $\mathfrak{g}$ par $\mathfrak{g}^i = [\mathfrak{g}^{i-1},\mathfrak{g}^{i-1}]$ et $\mathfrak{g}^1=\mathfrak{g}'$. On définit par récurrence la série centrale descendante d'idéaux de $\mathfrak{g}$ par $\mathfrak{g}_i = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}_{i-1}]$ et $\mathfrak{g}_1=\mathfrak{g}'$. On a pour tout i : $\mathfrak{g}^i\subseteq\mathfrak{g}_i$.
Définition 3. *Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est dite résoluble si il existe un entier n tel que $\mathfrak{g}^n=0$.*

Définition 4. *Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est dite nilpotente si il existe un entier n tel que $\mathfrak{g}_n = 0$.*

Une algèbre de Lie nilpotente est résoluble. Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ admet un plus grand idéal résoluble $\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ appelé le radical de $\mathfrak{g}$.

Définition 5. *On appelle sous-algèbre de Cartan d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ nilpotente égale à son normalisateur.*

Définition 6. *On appelle sous-algèbre de Borel d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Lie b résoluble égale à son normalisateur.*

Pour une algèbre de Lie de dimension finie $\mathfrak{g}$ sur un corps algébriquement clos, on peut définir pour $x \in \mathfrak{g}$ l'automorphisme d'algèbres de Lie $e^{ad(x)}$. On note G et on appelle groupe des automorphismes intérieurs le sous-groupe des automorphismes de $\mathfrak{g}$ qu'ils engendrent.

Théorème 1. *Le groupe G opère transitivement sur l'ensemble des sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}$. En particulier, elles ont toutes la même dimension.*

2.1.2 Filtrations et graduations

Soit A une algèbre associative et $(G, +)$ un semi-groupe.

Définition 7. *Une G-graduation de l'algèbre A est une décomposition $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ telle que $A_{g_1}.A_{g_2} \subset A_{g_1+g_2}$ pour $g_1, g_2 \in G$.*

Si pour $x \in A$ il existe un $g \in G$ tel que $x \in A_g$, on dit que x est homogène de degré g, et on note $deg(x) = g$. Un sous-espace de A formé d'éléments de A de même degré est dit homogène. Un sous-espace est dit compatible avec la graduation si il est somme directe de sous-espaces homogènes.

Définition 8. *Une filtration de l'algèbre A est une suite croissante $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de sous-espaces de A telle que $A_n.A_m \subset A_{n+m}$ et $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = A$.*

Par exemple une algèbre A munie d'une $\mathbb{N}$-graduation est aussi munie canoniquement d'une filtration, dite associée, en posant $B_n = \bigoplus_{m \leq n} A_m$.

À une algèbre associative A munie d'une filtration $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on associe une algèbre $\mathbb{N}$-graduée :

$$B = A_0 \oplus \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_{n+1}/A_n$$

avec les sous-espaces A_{n+1}/A_n homogènes de degré respectif $n + 1$.

2.1.3 Algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie

Pour une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et une algèbre associative A on a la notion de morphisme d'algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ dans l'algèbre de Lie associée à A. Dans toute la suite, les algèbres A considérées seront associatives et unitaires, c'est à dire munies d'un unique élément neutre pour la loi . noté 1_A. Morphisme d'algèbre signifiera morphisme d'algèbre préservant l'élément neutre. On définit l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$ par la propriété universelle suivante : $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ est une algèbre munie d'un morphisme d'algèbre de Lie $i : \mathfrak{g} \to \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ tel que pour toute algèbre A et tout morphisme d'algèbre de Lie $f : \mathfrak{g} \to A$ il existe un unique morphisme d'algèbre $g : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \to A$ tel que $f = g \circ i$.

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "i"'] & & A \\
& \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

On peut construire $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ comme le quotient de l'algèbre $T\mathfrak{g} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{g}^{\otimes^n}$ par l'idéal engendré par les éléments de la forme : $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$ avec x, y dans $\mathfrak{g}$. On obtient ainsi une algèbre unitaire associative qui hérite de la filtration de $T\mathfrak{g}$ définie par :$(T\mathfrak{g})_n = \bigoplus_{n \geq i} \mathfrak{g}^{\otimes^i}$. Le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt affirme que l'algèbre graduée correspondante n'est autre que l'algèbre symétrique $S\mathfrak{g}$ définie comme le quotient de $T\mathfrak{g}$ par l'idéal engendré par les éléments de la forme $x \otimes y - y \otimes x$ pour x et y dans $\mathfrak{g}$. On en déduit :

Théorème 2. *Si $\mathfrak{g}$ admet une base $(v_i)_{i \in I}$ totalement ordonnée par $<$, les éléments de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ $v_{i_1}...v_{i_n}$ avec $i_1 < ... < i_n$ auxquels on ajoute $1 \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ forment une base de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.*

Il sera utile de remarquer que si $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_2$ sont deux algèbres de Lie, l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ muni du crochet de Lie canonique $[x_1 + x_2, y_1 + y_2] = [x_1, y_1] + [x_2, y_2]$ n'est autre que $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_1) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{g}_2)$. Notons qu'à une représentation $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ d'algèbre de Lie est associée une unique représentation de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, c'est à dire un morphisme d'algèbres $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{End}(V)$.

2.1.4 Algèbres de Hopf

Définition 9. *Une algèbre de Hopf sur un corps k est un espace vectoriel A sur k muni d'applications linéaires :*

$$M : A \otimes A \to A$$

$$\eta : k \to A$$

$$\Delta : A \to A \otimes A$$

$$\epsilon : A \to k$$

$$S : A \to A$$

vérifiant les propriétés suivantes (à identifications canoniques près) :

$(i) M \circ (Id \otimes M) = M \circ (M \otimes Id)$

$(ii) M \circ (Id \otimes \eta) = Id = M \circ (\eta \otimes Id)$

$(iii) (Id \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes Id) \circ \Delta$

$(iv) (\epsilon \otimes Id) \circ \Delta = Id = (Id \otimes \epsilon) \circ \Delta$

$(v)\Delta$ *et* ϵ *sont des morphismes d'algèbres*

$(vi) M \circ (Id \otimes S) \circ \Delta = \eta \circ \epsilon = M \circ (S \otimes Id) \circ \Delta$

Introduisons un peu de terminologie pour interpréter cette définition :
les applications M (multiplication) et η (unitée) vérifiant les propriétés (i) et (ii) font de A une algèbre.
Les applications Δ (comultiplication) et ϵ (counitée ou augmentation) vérifiant les propriétés (iii) et (iv) font de l'espace vectoriel A ce qu'on appelle une coalgèbre coassociative counitaire (on dira simplement coalgèbre dans la suite).
La propriété (v) assure la compatibilité des structures d'algèbre et de coalgèbre. Elle est équivalente à exiger que M et η sont des morphismes de coalgèbres. On dit qu'on a une structure de bialgèbre sur A.
Remarquons que pour une bialgèbre A on a une application linéaire $* : \mathrm{End}(A) \otimes \mathrm{End}(A) \to \mathrm{End}(A)$ définie par : $*(f \otimes g)(x) = (f * g)(x) = M(f \otimes g)\Delta(x)$. Remarquons que $\eta \circ \epsilon$ est un élément unité pour la loi induite sur $\mathrm{End}(A)$. L'application S (antipode) vérifiant la propriété (vi) est un inverse de Id pour $*$: $Id * S = S * Id = \eta \circ \epsilon$.
On notera souvent $M(g \otimes h) = gh$.

Pour ces structures (algèbre, coalgèbre, bialgèbre, algèbre de Hopf) les morphismes sont définis naturellement comme les applications linéaires compatibles.

Définition 10. *On appelle sous-algèbre (respectivement sous-coalgèbre, sous-bialgèbre, sous-algèbre de Hopf) d'une algèbre (respectivement coalgèbre, bialgèbre, algèbre de Hopf) A tout sous-espace vectoriel $B \subset A$ tel que $M(B \otimes B) \subset B$ et $\eta(k) \subset B$ (respectivement $\Delta(B) \subset B \otimes B$, B est une sous-algèbre et une sous-coalgèbre, B est une sous-bialgèbre et $S(B) \subset B$).*

Pour une algèbre de Hopf, l'antipode vérifie :

Proposition 1. $\forall g, h \in A, S(gh) = S(h)S(g)$ *(S est un anti-homomorphisme d'algèbres),* $S(1) = 1$, $\epsilon \circ S = \epsilon$, $T \circ (S \otimes S) \circ \Delta = \Delta \circ S$ *où T est l'endomorphisme de $A \otimes A$ tel que $T(g \otimes h) = h \otimes g$.*

Soit C une coalgèbre et $c \in C$. On a $\Delta(c) = \sum_i c_{1i} \otimes c_{2i}$ où les c_{1i} et les c_{2i} sont des éléments de C. Cette somme sera notée :

$$\Delta(c) = \sum_{(c)} c_{(1)} \otimes c_{(2)}$$

Même si cette écriture n'est pas définie de manière unique, elle est trés utile pour les calculs dans les coalgèbres. De manière analogue on définit : $(\Delta \otimes Id)\Delta(c) = (Id \otimes \Delta)\Delta(c) = \sum_{(c)} c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes c_{(3)}$ et $\Delta_{n-1}(c) = \sum_{(c)} c_{(1)} \otimes ... \otimes c_{(n)}$.

Avec ces notations on peut énoncer simplement les axiomes d'une algèbre de Hopf. Par exemple la compatibilité entre la multiplication et la comultiplication s'écrit :

$$\Delta(gh) = \sum_{(g),(h)} g_{(1)}h_{(1)} \otimes g_{(2)}h_{(2)}$$

Rappelons une motivation importante de la notion de bialgèbre : si on dispose de M_1 et M_2 deux A-modules (pour la structure d'algèbre de A), on peut munir $\mathrm{M}_1 \otimes \mathrm{M}_2$ d'une structure de A-module en posant pour $x \in \mathrm{M}_1$, $y \in \mathrm{M}_2$ et $a \in A$:

$$a.(x \otimes y) = \sum_{(a)} (a_{(1)}.x \otimes a_{(2)}.y)$$

ce qui revient à poser $\pi_{V_1 \otimes V_2} = (\pi_{V_1} \otimes \pi_{V_2})\Delta$.

Proposition 2. *On définit, pour une bialgèbre A, une action linéaire $ad : A \to End(A)$, en posant :*

$$\forall x, y \in A, ad(x)(y) = \sum x_{(1)} y S(x_{(2)})$$

On l'appelle action adjointe de l'algèbre de Hopf A sur elle-même.

Pour une bialgèbre $(A, M, \eta, \Delta, \epsilon)$, on peut définir les applications linéaires $M^{op} = M\tau_{AA} : A \otimes A \to A$ et $\Delta^{op} = \tau_{AA}\Delta : A \to A \otimes A$ avec $\tau_{AA} \in End(A \otimes A)$ telle que $\tau_{AA}(u \otimes v) = v \otimes u$.
On dira qu'une bialgèbre est commutative (respectivement cocommutative) si $M = M^{op}$ (respectivement $\Delta = \Delta^{op}$).
Les structures $A^{op} = (A, M^{op}, \eta, \Delta, \epsilon)$, $A^{cop} = (A, M, \eta, \Delta^{op}, \epsilon)$,$A^{op,cop} = (A, M^{op}, \eta, \Delta^{op}, \epsilon)$ sont des bialgèbres.
Notons que pour une algèbre de Hopf A, l'application $S : A \to A$ est un morphisme de bialgèbres entre A et $A^{op,cop}$.
Si A est une algèbre de Hopf de dimension finie, l'espace vectoriel dual A^* peut être munie d'une structure d'agèbre de Hopf, dite duale. Dans ce qui suit on note avec $*$ le dual d'un espace ou d'une application linéaire. L'application linéaire canonique $\lambda : A^* \otimes A^* \to (A \otimes A)^*$ est un isomorphisme en dimension finie. On pose $M' = \Delta^* \circ \Lambda$, $\eta' = \epsilon^*$, $\Delta' = \lambda^{-1} M^*$, $\epsilon' = \eta^*$ et $S' = S^*$.

Proposition 3. *La structure $(A^*, M', \eta', \Delta', \epsilon')$ est une algèbre de Hopf.*

2.1.5 Représentations et anneaux de Grothendieck

Pour $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie (respectivement A une algèbre), la catégorie $Mod(\mathfrak{g})$ des $\mathfrak{g}$-modules (respectivement $Mod(A)$ des A-modules), munie de la somme directe $\oplus$, est abélienne.

Définition 11. *Soit $\rho : \mathfrak{g} \to End(V)$ (respectivement $\rho : A \to End(V)$) une représentation d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ (respectivement d'une algèbre A).*

On dit qu'elle est irréductible si $V \neq 0$ et si V n'admet pas de sous-espace vectoriel stable non-trivial.

On dit qu'elle est réductible si elle n'est pas irréductible.

On dit qu'elle est complètement réductible si elle peut s'écrire comme somme-directe de représentations irréductibles.

Si tous les $\mathfrak{g}$-modules (respectivement les A-modules) sont complètement réductibles, on dit que la catégorie $Mod(\mathfrak{g})$ (respectivement $Mod(A)$) est semi-simple.

Par la suite on pourra considérer des sous-catégories pleines, comme par exemple celle des représentations de dimension finie, et on utilisera la même terminologie.

Soit A une algèbre de Hopf sur un corps k. On a déjà vu que pour deux A-modules V et W on peut munir canoniquement $V \oplus W$ et $V \otimes W$ d'une structure de A-module. On considère l'ensemble E des classes d'isomorphismes de A-modules. Les opérations $\oplus$ et $\otimes$ sont bien définies sur E. Soit $(\mathbb{Z}[E], +)$ le groupe commutatif libre engendré par E. On note G son quotient par les relations $V + W = V \oplus W$ pour $V, W \in E$. On notera $\oplus$ à la place de $+$ la loi de groupe sur G. L'opération $\otimes$, qui passe au quotient, est bien définie sur G. Les images de E dans G seront appelées encore représentations de A, tandis que les éléments de G de la forme $-V$ avec V une représentation de A seront appelés représentations virtuelles.

Proposition 4. *Le groupe $(G, \oplus)$ muni de la loi $\otimes$ est un anneau avec pour unité l'espace k muni de $\epsilon : A \to k \simeq End(k)$. Cet anneau est appelé anneau de Grothendieck de A et est noté $Rep(A)$.*

Notons que tout élément d'un anneau de Grothendieck s'écrit comme somme d'une représentation et d'une représentation virtuelle.

Comprendre la structure d'un anneau de Grothendieck est une étape importante dans l'étude de la théorie des représentations d'une algèbre de Hopf. On en verra plusieurs exemples.

À la place de E, on peut faire la même construction en prenant des sous-parties de E stables par $\oplus$ et $\otimes$ contenant le représentation unité, par exemple l'ensemble des classes d'isomorphismes de représentations de A

de dimension finie. L'anneau obtenu sera aussi appelé anneau de Grothendieck ; par la suite on précisera la sous-partie de E considérée pour chaque anneau de Grothendieck étudié.

On "oubliera" souvent pour des morphismes concernant des anneaux de Grothendieck d'évoquer la conservation de l'élément unité lorsque c'est évident. Pour définir un morphisme d'anneaux partant d'un anneau de Grothendieck, il suffit de définir l'application sur les représentations, et montrer qu'elle est compatible avec $\oplus$ et $\otimes$ sur celles-ci.

Lorsque la sous-catégorie de $Mod(A)$, dont les objets sont les éléments de $Rep(A)$ qui sont des représentations, est semi-simple, on dit que $Rep(A)$ est semi-simple. Lorsqu'elle n'est pas semi-simple, on introduit le groupe $Rep_r(A)$ définit comme le groupe quotient de $Rep(A)$ par le sous-groupe engendré par les $W - U - V$ où $U, V, W \in Rep(A)$ sont des représentations telles qu'on a une suite exacte de A-modules :

$$0 \to U \to W \to V \to 0$$

Dans certains cas $Rep_r(A)$ hérite de la structure d'anneau de $Rep(A)$, et $Rep_r(A)$ permet de corriger le défaut de complète réductibilité de $Rep(A)$: par exemple tout A-module de dimension finie est dans $Rep_r(A)$ somme de A-modules irréductibles.

2.1.6 L'algèbre de Hopf $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$

Revenons à $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$: définissons $\Delta : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ un morphisme d'algèbres en posant sur la partie génératrice $\mathfrak{g} \cup \{1\}$:

$$\forall g \in \mathfrak{g} \subseteq \mathcal{U}(\mathfrak{g}), \Delta(g) = g \otimes 1 + 1 \otimes g \text{ et } \Delta(1) = 1 \otimes 1$$

Puis $\epsilon : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \to k$ morphisme d'algèbres par :

$$\forall g \in \mathfrak{g} \subseteq \mathcal{U}(\mathfrak{g}), \epsilon(g) = 0 \text{ et } \epsilon(1) = 1$$

Et enfin $S : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ un antihomomorphisme d'algèbres par :

$$\forall g \in \mathfrak{g} \subseteq \mathcal{U}(\mathfrak{g}), S(g) = -g \text{ et } S(1) = 1$$

Proposition 5. *Les lois precédentes définissent une structure d'algèbre de Hopf sur $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.*

La représentation adjointe de l'algèbre de Hopf $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ correspond alors dans sa restriction à $\mathfrak{g}$ à la représentation adjointe des algèbres de Lie : $ad(x)y = xy - yx$.

2.2 Algèbres de Lie semi-simples de dimension finie

A partir de maintenant k sera algébriquement clos de caractéristique nulle. Dans cette section toutes les algèbres de Lie considérées sont de dimension finie.

2.2.1 Définition

Définition 12. *Une algèbre de Lie est dite simple si elle n'est pas abélienne et si elle n'admet pas d'idéaux non-triviaux.*

Un exemple très important est l'algèbre de Lie simple $sl_2(\mathbb{C})$ sur le corps des complexes $\mathbb{C}$:

$$sl_2(\mathbb{C}) = \{\mathrm{M} \in M_2(\mathbb{C}) / \mathrm{Tr}(\mathrm{M}) = 0\}$$

On en a une base comme espace vectoriel : $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Le crochet de Lie induit par la structure d'algèbre de $M_2(\mathbb{C})$ est donné par : $[X, Y] = H$, $[H, X] = 2X$ et $[H, Y] = -2Y$.

Définition 13. *Une algèbre de Lie est dite semi-simple si elle est isomorphe à une somme directe d'algèbres de Lie semi-simples.*

La théorie des algèbres de Lie semi-simple est très belle, ce qui en fait un objet d'étude privilégié parmi les algèbres de Lie de dimension finie. En particulier on sait les classifier complètement. Voici en premier lieu quelques caractérisations :

Théorème 3. *Pour une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ (toujours supposée de dimension finie) on a équivalence entre les assertions suivantes :*

(i) $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie semi-simple.

(ii) Le radical $rad(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$ est réduit à 0.

(iii) $\mathfrak{g}$ n'admet pas d'autre idéal abélien que 0.

(iv) $\mathfrak{g}$ est le quotient d'une algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ par son radical $rad(\mathfrak{h})$.

(v) La forme de Killing de $\mathfrak{g}$ est non-dégénérée.

L'équivalence entre (i) et (v) s'appelle le critère de Cartan. Notons que le centre d'une algèbre de Lie semi-simple est trivial.

On a le résultat fondamental suivant, dû à Weyl :

Théorème 4. *Toute représentation de dimension finie d'une algèbre de Lie semi-simple est complètement réductible.*

C'est le cas en particulier de la représentation adjointe.

2.2.2 Sous-algèbres de Cartan et systèmes de racines

Le corps de base est à présent $k = \mathbb{C}$. Les sous-algèbre de Cartan jouent un rôle fondamental dans la description des algèbres de Lie semi-simples complexes. En voici quelques propriétés remarquables :

Théorème 5. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple. Alors :*

(a) $\mathfrak{g}$ possède des sous-algèbres de Cartan. Notons $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$.

(b) $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre abélienne maximale.

(c) Tout élément de $\mathfrak{h}$ a une image diagonalisable dans toute représentation de dimension finie. (on dit que les éléments de $\mathfrak{h}$ sont semi-simples.)

(d) La restriction à $\mathfrak{h}$ de la forme de Killing de $\mathfrak{g}$ est non-dégénérée.

La dimension commune des sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}$ est appelée rang de $\mathfrak{g}$. Par exemple $sl_2(\mathbb{C})$ est de rang 1 et le sous-espace vectoriel engendré par H est une sous-algèbre de Cartan.

Pour α un élément de $\mathfrak{h}^*$ le dual de $\mathfrak{h}$, on appelle $\mathfrak{g}^\alpha = \{x \in \mathfrak{g}, \forall h \in \mathfrak{h}, [h,x] = \alpha(h)x\}$ le sous-espace propre associé à α. En particulier $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{h}$.

Définition 14. *On appelle racine de $\mathfrak{g}$ tout élément α de $\mathfrak{h}$ tel que $\alpha \neq 0$ et $\mathfrak{g}^\alpha \neq 0$.*

L'ensemble des racines sera noté R. En considérant dans le théorème 5 la représentation de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$ induite par la représentation adjointe, obtient :

Théorème 6. *On a : $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum\limits_{\alpha \in R} \mathfrak{g}^\alpha$.*

Par exemple pour $sl_2(\mathbb{C})$ on a deux racines $\alpha = \epsilon_1 - \epsilon_2$ et $-\alpha = \epsilon_2 - \epsilon_1$ où ϵ_i est la forme linéaire qui à une matrice associe son coefficient de coordonnées (i,i). La décomposition précédente s'écrit :

$$sl_2 = sl_2^0 + sl_2^\alpha + sl_2^{-\alpha} =< H > + < X > + < Y >$$

Rappelons la notion de système de racines complexes d'un espace vectoriel V de dimension finie sur $\mathbb{C}$:

Définition 15. *Une partie A de V est appelée un système de racines si :*

1) A est fini, engendre V et ne contient pas 0.

2) Pour tout $\alpha \in R$, il existe une symétrie $s_\alpha = Id - \alpha^* \otimes \alpha$ (c'est à dire un automorphisme de V de la forme $s_\alpha(x) = x - \alpha^*(x)\alpha$ avec $\alpha^* \in V^*$ telle que $\alpha^*(\alpha) = 2$) qui laisse stable A. On appelle α^* la racine inverse de α.

3) Si $\alpha, \beta \in A$ alors $s_\alpha(\beta) - \beta$ est un multiple entier de α.

On note alors $Q = \sum\limits_{\alpha \in R} \mathbb{Z}\alpha$ le réseau de V engendré par les racines. Deux systèmes de racines (V,A) et (V',A') sont dits isomorphes si il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels entre V et V' transformant A en A'. On introduit la notion de somme directe de systèmes de racines, et de système de racines irréductible qui en découle.

Proposition 6. *L'ensemble A^* des racines inverses α^*, $\alpha \in A$, est un système de racines de V^*, et on a $\alpha^{**} = \alpha$.*

Définition 16. *Un système de racines A est dit réduit si, pour tout $\alpha \in A$, α et $-\alpha$ sont les seules racines proportionelles à α.*

Définition 17. *On appelle base de A une partie $S = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ de A telle que S est une base de V et tout $\beta \in A$ s'écrit comme combinaison linéaire $\beta = \sum_{i=1..n} m_i\alpha_i$ où les m_i sont des entiers de même signe.*

Il est remarquable qu'un système de racines admet toujours une base. Les racines qui sont dans la base sont appelées racines simples. Une telle base S étant fixée, on appelle racines positives les racines avec les m_i tous positifs, et racines négatives les autres ; on note $A = A^+ \sqcup A^-$. On note $Q^+ = \sum_{i=1..n} \mathbb{N}\alpha_i$. On a un ordre partiel sur V en posant : $\alpha < \beta \Longleftrightarrow \beta - \alpha \in Q^+$. On appelle hauteur $ht(\alpha)$ d'une racine positive $\alpha = \sum_{i=1..n} m_i\alpha_i$ l'entier positif : $ht(\alpha) = \sum_{i=1..n} m_i$.

Revenons aux algèbres de Lie semi-simples : en plus des notations déjà introduite, on écrira $(x, y) = K(x, y)$ la forme de Killing sur $\mathfrak{g}$. La dualité déduite de K permet de définir une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée sur $\mathfrak{g}^*$, qu'on notera aussi par $(,)$.

Théorème 7. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple.*

(a) L'ensemble des racines R est un système de racines réduit dans $\mathfrak{h}^*$.

(b) Soit $\alpha \in R$. Alors $\mathfrak{g}^\alpha$ est de dimension 1. On définit $\mathfrak{h}_\alpha = [\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^{-\alpha}]$; c'est un sous-espace de dimension 1 et il existe un unique $H_\alpha \in \mathfrak{h}_\alpha$ tel que $\alpha(H_\alpha) = 2$; c'est la racine inverse de α.

(c) Soit $\alpha \in A$. pour tout élément non nul X_α de $\mathfrak{g}^\alpha$, il existe un unique $Y_\alpha \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$ tel que $[X_\alpha, Y_\alpha] = H_\alpha$. On a $[H_\alpha, X_\alpha] = 2X_\alpha$ et $[H_\alpha, Y_\alpha] = -2Y_\alpha$. La sous-algèbre $s_\alpha = \mathfrak{h}_\alpha \oplus \mathfrak{g}^\alpha \oplus \mathfrak{g}^{-\alpha}$ est isomorphe à $sl_2(\mathbb{C})$.

(d) Si $\alpha, \beta \in R$ et $\alpha + \beta \neq 0$ alors $[\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^\beta] = \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}$.

(e) Les sous-espaces $\mathfrak{g}^\alpha$ et $\mathfrak{g}^\beta$ sont orthogonaux pour K lorsque $\alpha + \beta \neq 0$, les sous-espaces $\mathfrak{g}^\alpha$ et $\mathfrak{g}^{-\alpha}$ sont en dualité. La restriction de K à $\mathfrak{h}$ est non-dégénérée. Elle vaut :

$$\forall H, H' \in \mathfrak{h}, K(H, H') = \sum_{\alpha \in R} \alpha(H)\alpha(H')$$

Ce théorème montre l'importance des l'algèbres de Lie isomorphes à $sl_2(\mathbb{C})$ qui sont des "briques" des algèbres de Lie semi-simples. On choisit une base $S = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ de R, où $n = \dim(\mathfrak{h})$ est le rang de $\mathfrak{g}$.

Proposition 7. *Il existe une unique racine positive $\theta \in R^+$ de hauteur maximale. On l'appelle la racine la plus haute.*

On pose $n = \sum_{\alpha>0} \mathfrak{g}^\alpha$, $n^- = \sum_{\alpha>0} \mathfrak{g}^{-\alpha}$ et $b = \mathfrak{h} + n$.

Proposition 8. *On a $\mathfrak{g} = n^- \oplus \mathfrak{h} \oplus n = n^- \oplus b$. n et n^- sont des sous-algèbres de $\mathfrak{g}$ formées d'éléments nilpotents ; elles sont nilpotentes. b est une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$ et son algèbre dérivée est n.*

2.2.3 Structure et classification des algèbres de Lie semi-simples complexes

Pour $i \in \{1, ..., n\}$ posons $H_i = H_{\alpha_i}$, et choisissons $X_i \in \mathfrak{g}^{\alpha_i}$, $Y_i \in \mathfrak{g}^{-\alpha_i}$ tels que $[X_i, Y_i] = H_i$. Posons pour $i, j \in \{1, ..., n\}$, $n(i, j) = \alpha_j(H_i)$. Si $i \neq j$, $n(i, j)$ est un entier négatif, et $n(i, i) = 2$. La matrice de format $n \times n$ de coefficients $n(i, j)$ est appelée la matrice de Cartan.

Théorème 8. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple.*

(a) n est engendrée (comme sous-algèbre de Lie) par les X_i, n^- par les Y_i, et $\mathfrak{g}$ par les X_i, Y_i (ces générateurs sont dits de Chevalley).

(b) Ces éléments vérifient les relations de Weyl ($1 \leq i, j \leq n$) :

$$[H_i, H_j] = 0$$

$$[X_i, Y_i] = H_i$$

$$[X_i, Y_j] = 0 \textit{ si } i \neq j$$

$$[H_i, X_j] = n(i, j)X_j$$

$$[H_i, Y_j] = -n(i, j)Y_j$$

(c) Ils vérifient aussi les relations de Serre ($1 \leq i,j \leq n$ et $i \neq j$) :

$$ad(X_i)^{-n(i,j)+1}(X_j) = 0$$

$$ad(Y_i)^{-n(i,j)+1}(Y_j) = 0$$

(d) L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ peut être définie par les générateurs X_i, Y_i et les relations de Weyl et de Serre.

(e) La matrice de Cartan est indépendante du choix de $\mathfrak{h}$ et d'une base de R.

(f) Deux algèbres de Lie semi-simples sont isomorphes si et seulement si leurs systèmes de racines sont isomorphes.

(g) Pour tout système de racines réduit R, il existe une algèbre de Lie semi-simple dont le système de racine est isomorphe à R.

(h) une algèbre de Lie semi-simple est simple si et seulement si son système de racines et irréductible.

Ce théorème permet de classifier les algèbres de Lie simples en classifiant les systèmes de racines réduits irréductibles : il y a 4 séries infinies A_n $(n \geq 1)$, B_n $(n \geq 2)$, C_n $(n \geq 3)$, D_n $(n \geq 4)$ et 5 algèbres exceptionelles G_2, F_4, E_6, E_7 et E_8.
Par exemple un représentant de A_n est $sl_{n+1}(\mathbb{C}) = \{\mathrm{M} \in M_{n+1}(\mathbb{C})/\mathrm{Tr(M)} = 0\}$. C'est une algèbre de Lie simple de rang n admettant $\mathfrak{h} = \{\mathrm{M} \in M_{n+1}(\mathbb{C})/$ M est diagonale et $\mathrm{Tr(M)} = 0\}$ comme sous-algèbre de Cartan. On note $\epsilon_i \in \mathfrak{h}^*$ la forme linéaire qui à M associe $M_{i,i}$. Alors l'ensemble des racines est $R = \{\epsilon_i - \epsilon_j / i \neq j\}$ et on peut choisir comme base $S = \{\epsilon_1 - \epsilon_2, ..., \epsilon_n - \epsilon_{n+1}\}$.

Corollaire 1. *Il existe une unique involution ω de l'algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}$ telle que : $\omega(E_i) = -(F_i)$ $(1 \leq i \leq n)$ et $\omega(h) = -h$ pour $h \in \mathfrak{h}$.*

2.2.4 Groupe de Weyl

Définition 18. *Soit R un système de racines dans un espace vectoriel V. On appelle groupe de Weyl de R le sous-groupe W de $GL(V)$ engendré par les symétries s_α où $\alpha \in R$.*

C'est un sous-groupe fini de $GL(V)$ qui permute les racines. En particulier il est fini. Par exemple pour un système de racines de type A_n, W est isomorphe au groupe symétrique d'ordre $n+1$. On appelle forme réduite d'un élément de $w \in W$ une écriture de la forme $w = s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} ... s_{\alpha_l}$ où l est minimal. On appelle alors l'entier l la longueur de w. On pose aussi $\epsilon(w) = (-1)^l$ qui définit un morphisme de groupes : $\epsilon : W \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
Dans le cas du système de racines d'une algèbre de Lie semi-simple, les éléments de W sont orthogonaux pour la forme $(,)$ sur $\mathfrak{h}^*$. Le groupe W est engendré par les s_α avec α racine simple. Toute racine est de la forme $w(\alpha)$ avec $w \in W$ et α racine simple.

2.2.5 Représentations

Soit V un $\mathfrak{g}$-module. On note $V_\lambda = \{v \in V / \forall h \in \mathfrak{h}, h.v = \lambda(h)v\}$ pour $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Si $V_\lambda \neq 0$ on appelle λ un poids de V et V_λ un espace de poids.

Proposition 9. *Soit V un $\mathfrak{g}$-module.*

(a) Pour $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ et $\alpha \in R$, $\mathfrak{g}_\alpha V_\lambda \subseteq V_{\lambda+\alpha}$.

(b) La somme $V' = \sum_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} V_\lambda$ est un sous $\mathfrak{g}$-module de V.

(c) Si la dimension de V est finie, $V = V'$.

Nous allons étudier un exemple important de module vérifiant (c) :

Définition 19. *Un vecteur $v \in V$ est dit de plus haut poids si c'est un vecteur de poids et $n.v = 0$.*

Définition 20. *Un module V est dit de plus-haut poids si il est engendré par un vecteur de plus haut poids v. Le poids de v est alors appelé plus haut poids de V.*

La terminologie est justifiée par les résultats suivants :

Théorème 9. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple.*

(a) Soit V un module de plus haut poids λ et de vecteur $v \in V$. Alors V est engendré par les $Y_{\beta_1}^{i_1} Y_{\beta_2}^{i_2} ... Y_{\beta_m}^{i_m} v$ avec les $i_k \in \mathbb{N}$ et les $\beta_k \in Q^+$. On a $V = V'$. Les poids μ de V sont inférieurs à λ (pour l'ordre partiel introduit précédemment). En particulier, λ est l'unique plus haut poids de V. Les espaces de poids sont de dimension finie

et la dimension de V_λ est 1. Le module V est indécomposable (il ne peut pas être écrit comme somme directe de modules non-triviaux) et possède un unique sous-module maximal.

(b) Si V et W sont deux modules irréductibles de plus même plus haut poids λ, ils sont isomorphes.

(c) Pour $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, il existe un module de plus haut poids λ irréductible.

On note $V(\lambda)$ "le" module irréductible de plus haut poids λ.

Théorème 10. *Le module $V(\lambda)$ est de dimension finie si et seulement si $\lambda(H_i)$ est un entier positif pour $i \in \{1, ..., n\}$. Dans ce cas on dit que λ est un poids dominant.*

L'ensemble des poids dominants est noté Λ^+. On appelle espace des poids le réseau Λ formé des éléments de $\mathfrak{h}^*$ prenant des valeurs entières sur les H_i. Il contient Q. Notons que Q et Λ sont stables pour l'action du groupe de Weyl.

Proposition 10. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple.*

(a) Un $\mathfrak{g}$-module est de dimension finie si et seulement si il est somme directe d'un nombre fini de modules de plus haut poids irréductibles de dimension finie.

(b) Les poids d'un $\mathfrak{g}$-module de dimension finie sont dans Λ.

(c) Les $\mathfrak{g}$-modules de plus haut poids irréductibles de dimension finie sont les objets irréductibles de la catégorie des $\mathfrak{g}$-modules de dimension finie.

Ce dernier résultat donne une classification des $\mathfrak{g}$-module de dimension finie. En particulier la catégorie $Mod_f(\mathfrak{g})$ des $\mathfrak{g}$-modules de dimension finie est semi-simple.

Par exemple pour $\mathfrak{g} = sl_{n+1}(\mathbb{C})$ l'espace des poids est $\Lambda = \sum_{i=1..n+1} \mathbb{Z}\epsilon_i$ et l'ensemble des poids dominants est $\Lambda^+ = \sum_{i=1..n+1} \mathbb{N}\epsilon_i$. On peut aussi considérer $\Lambda_i = \sum_{j=1..i} \epsilon_i$ pour $1 \leq i \leq n$ (remarquer qu'on a la relation $\sum_{i=1..n+1} \epsilon_i = 0$). On a alors : $\Lambda = \sum_{i=1..n} \mathbb{Z}\Lambda_i$. En fait la base $(\Lambda_i)_{1\leq i \leq n}$ de $\mathfrak{h}^*$ n'est autre que la base duale de la base $(H_i)_{1\leq i\leq n}$ de $\mathfrak{h}$ (pour la dualité abstraite). On les appelle les poids fondamentaux.

De manière générale pour $\mathfrak{g}$ on définit la base, dite des poids fondamentaux, $(\omega_i)_i$ de $\mathfrak{h}^*$ comme la base duale de $(H_i)_i$. Le réseau de $\mathfrak{h}^*$ engendré par les poids fondamentaux est Λ. Par exemple pour les racines simples $\alpha_i \in \Lambda$ on a : $\alpha_i = \sum_{j=1..n} a_{ij}\omega_j$ (car pour $1 \leq k \leq n$ on a $\alpha_i(H_k) = a_{ik} = \sum_{j=1..n} a_{ij}\omega_j(H_k)$).

Dans le cas $\mathfrak{g} = sl_2(\mathbb{C})$, $Q = \mathbb{Z}\alpha_1 = 2\mathbb{Z}\epsilon_1$, $\Lambda = \mathbb{Z}\epsilon_1$ et $\Lambda^+ = \mathbb{N}\epsilon_1$. Pour tout $n \geq 1$, il y a, à isomorphisme unique près, un unique module irréductible de dimension $n+1$ qui est le module irréductible de plus haut poids $n\epsilon_1$. On le note $V(n)$. Il admet une base $(v_i)_{0\leq i\leq n}$ telle que : $H.v_i = (n-2i)v_i$, $Y.v_i = (i+1)v_{i+1}$ et $X.v_i = (n-i+1)v_{i-1}$ où on convient que $v_i = 0$ pour $-1 \geq i$ et $i \geq n+1$. Avec ces notation v_0 est un vecteur de plus haut poids de $V(n)$.

Revenons au cas général.

Définition 21. *Un $\mathfrak{g}$-module V est dit intégrable si V est somme de ses sous-espaces de poids, ses poids sont dans Λ, et la dimension du sous-module engendré par tout vecteur de V est finie. Dans ce cas on note $m_V(\lambda)$ et on appelle multiplicité du poids $\lambda \in \Lambda$ la dimension du sous-espace de poids λ.*

Par exemple un $\mathfrak{g}$-module de dimension finie est intégrable.

Proposition 11. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple.*

a) Un $\mathfrak{g}$-module V est intégrable si et seulement il est isomorphe à une somme directe de module de plus haut poids de dimension finie $V(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda^+$.

b) Les objets irréductibles de la catégorie des $\mathfrak{g}$-modules intégrables sont les $V(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda^+$.

2.2.6 Caractères et description de l'anneau de Grothendieck $Rep(\mathfrak{g})$

On étudie à présent le comportement des $\mathfrak{g}$-modules relativement au produit tensoriel. Définissons le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}[\Lambda]$ le $\mathbb{Z}$-module libre de base indexée par Λ qu'on notera $(e(\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$. On définit aussi $\mathbb{Z}[[\lambda]]$ comme le $\mathbb{Z}$-module des séries formelles engendrées pas les $e(\lambda)$. On peut munir $\mathbb{Z}[\Lambda]$ d'une structure d'anneau en posant $e(\lambda)e(\mu) = e(\lambda + \mu)$. On définit l'anneau $\mathbb{Z}[y_i^{\pm 1}]_{1\leq i\leq n}$ comme le sous-anneau du corps des fractions rationnelles $\mathbb{Q}(y_i)_{1\leq i\leq n}$ engendré par les éléments y_i, y_i^{-1} $(1 \leq i \leq n)$. Remarquer que l'anneau $\mathbb{Z}[\Lambda]$ est isomorphe à $\mathbb{Z}[y_i^{\pm 1}]_{1\leq i\leq n}$ en envoyant $e(\omega_i)$ (respectivement $e(-\omega_i)$) sur y_i (respectivement $-y_i$).

Définition 22. *On appelle caractère d'un $\mathfrak{g}$-module intégrable V l'élément de $\mathbb{Z}[[\Lambda]]$: $ch_V = \sum_{\lambda\in\Lambda} m_V(\lambda)e(\lambda)$. Si V est de dimension finie, ch_V est considéré comme un élément de $\mathbb{Z}[\Lambda]$.*

Proposition 12. *Deux $\mathfrak{g}$-modules de dimension finie sont isomorphes si et seulement si leurs caractères sont égaux.*

Proposition 13. *Si V et W sont deux $\mathfrak{g}$-modules de dimension finie, $V \otimes W$ et $V \otimes W$ le sont aussi , et : $ch_{V \oplus W} = ch_V + ch_W$ et $ch_{V \otimes W} = ch_V.ch_W$.*

On note $Rep(\mathfrak{g})$ l'anneau de Grothendieck construit à partir des représentations de dimension finie de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

Corollaire 2. *Il existe un unique morphisme d'anneaux :*

$$ch : Rep(\mathfrak{g}) \to \mathbb{Z}[y_i^{\pm 1}]_{1 \leq i \leq n}$$

tel que pour V un $\mathfrak{g}$-module de dimension finie on a $ch(V) = ch_V$. Ce morphisme d'anneaux est injectif.

Remarquons que le groupe de Weyl W agit naturellement sur $\mathbb{Z}[[\Lambda]]$ et sur $\mathbb{Z}[\Lambda]$ par $w.e(\lambda) = e(w.\lambda)$.

Proposition 14. *Pour tout $\mathfrak{g}$-module intégrable V et tout $w \in W$, on a : $w.ch_V = ch_V$*

On dit que le groupe de Weyl conserve la multiplicité des poids et que les ch_V sont W-invariants. Notons $\mathbb{Z}[\Lambda]^W$ le sous-anneau de $\mathbb{Z}[\Lambda]$ formé des éléments W-invariants. L'application caractère est ainsi un homorphisme d'anneaux injectif de l'anneau de Grothendieck $Rep(\mathfrak{g})$ vers $\mathbb{Z}[\Lambda]^W$.

Proposition 15. *Soit $T_i = ch_{V(\omega_i)} \in \mathbb{Z}[\Lambda]^W$ le caractère du $i^{ème}$ module fondamental de $\mathfrak{g}$ (c'est à dire du module de plus haut poids le $i^{ème}$ poids fondamental de $\mathfrak{g}$). Alors les éléments T_i $(1 \leq i \leq n)$ sont algébriquement indépendants (dans la $\mathbb{Z}$-algèbre $\mathbb{Z}[\Lambda]$) et engendrent $\mathbb{Z}[\Lambda]^W$:*

$$\mathbb{Z}[\Lambda]^W \simeq \mathbb{Z}[T_1, ..., T_n]$$

On obtient une description de $Rep(\mathfrak{g})$:

Théorème 11. *L'application définie par ch induit un isomorphisme de l'anneau de Grothendieck $Rep(\mathfrak{g})$ sur l'anneau commutatif $\mathbb{Z}[\Lambda]^W \simeq \mathbb{Z}[T_1, ..., T_n]$:*

$$ch : Rep(\mathfrak{g}) \simeq \mathbb{Z}[T_1, ..., T_n]$$

Le résultat suivant donne le caractère des objets irréductibles de $Rep(\mathfrak{g})$:

Théorème 12. *Soit λ un poids dominant et $V(\lambda)$ un $\mathfrak{g}$-module irréductible de plus haut poids λ. On a alors la formule de Weyl :*

$$ch_{V(\lambda)} = \frac{\sum\limits_{w \in W} \epsilon(w) e(w(\lambda + \rho) - \rho)}{\prod\limits_{\alpha \in R_+} (1 - e(-\alpha))} = \frac{\sum\limits_{w \in W} \epsilon(w) e(w(\lambda + \rho) - \rho)}{\sum\limits_{w \in W} \epsilon(w) e(w(\rho))}$$

où $\rho \in \Lambda^+$ désigne la demi-somme des racines positives (qui sont en nombre fini).

Par exemple pour le $sl_2(\mathbb{C})$-module de plus haut-poids $V_n = V(n\epsilon_1)$ $(n \geq 1)$, on a $\rho = \frac{\alpha_1}{2} = \epsilon_1$, et :

$$ch_{V_n} = e(n\epsilon_1) + e((n-2)\epsilon_1) + ... + e(-n\epsilon_1) = \frac{e(\frac{n+1}{2}\alpha_1) - e(-\frac{n+1}{2}\alpha_1)}{e(\frac{\alpha_1}{2}) - e(\frac{-\alpha_1}{2})}$$

Corollaire 3. *Soit λ un poids dominant et $V(\lambda)$ un $\mathfrak{g}$-module irréductible de plus haut poids λ. On a alors la formule de la dimension de Weyl :*

$$dim(V(\lambda)) = \prod_{\alpha \in R_+} \frac{(\lambda + \rho, \alpha)}{(\rho, \alpha)}$$

La formule de Weyl permet en utilisant le fait que ch est un isomorphisme d'anneaux de donner la décomposition du produit tensoriel de deux $\mathfrak{g}$-modules de dimension finie (dont on connait la décomposition) en somme directe de $\mathfrak{g}$-modules de dimension finie irréductibles, c'est à dire pour $V_1 = \sum\limits_{\lambda \in \Lambda^+} c_{1,\lambda} V(\lambda)$ et $V_2 \sum\limits_{\lambda \in \Lambda^+} c_{2,\lambda} V(\lambda)$, avec les $c_{1,\lambda}, c_{2,\lambda} \in \mathbb{N}$, déterminer les $c_{1 \otimes 2,\lambda} \in \mathbb{N}$ tels que $V_1 \otimes V_2 = \sum\limits_{\lambda \in \Lambda^+} c_{1 \otimes 2,\lambda} V(\lambda)$.

2.3 Algèbres de Kac-Moody affines

On cherche à généraliser les algèbres de Lie simples complexes (ici algèbre de Lie simple ou semi-simple signifiera toujours de dimension finie) en une classe d'algèbres de Lie de dimension infinie avec des propriétés analogues à ces dernières.

2.3.1 Définition générale des algèbres de Kac-Moody affines

Définition 23. *Une matrice de Cartan de format l est une matrice A à coefficients entiers, de format $l \times l$, indécomposable telle que :*

$$A_{i,i} = 2$$
$$A_{i,j} \leq 0 \text{ si } i \neq j$$
$$A_{i,j} = 0 \Longleftrightarrow A_{j,i} = 0$$
$$det(A) > 0$$

On a vu que toute algèbre de Lie simple a une matrice "de Cartan" de ce type (d'où la terminologie), et qu'à toute matrice de Cartan irréductible on peut associer de manière unique une algèbre de Lie simple définie par les générateurs de Chevalley et les relations de Weyl-Serre. La matrice de Cartan pour l'algèbre de Lie obtenue est celle utilisée pour la construction.

Définition 24. *Une matrice de Cartan généralisée de format l est une matrice A à coefficients entiers, de format $l \times l$, indécomposable telle que :*

$$A_{i,i} = 2$$
$$A_{i,j} \leq 0 \text{ si } i \neq j$$
$$A_{i,j} = 0 \Longleftrightarrow A_{j,i} = 0$$

Si on suppose que les mineurs principaux de A sont strictement positifs, on dit que A est finie.
Si on suppose que les mineurs principaux propres de A sont strictement positifs, et $det(A) = 0$ on dit que A est affine.

En fait les matrices de Cartan généralisées finies sont exactement les matrices de Cartan. Remarquer qu'une matrice de Cartan affine de format l est de rang $l-1$. On a une autre caractérisation des matrices de Cartan affines :

Proposition 16. *Une matrice de Cartan généralisée A est affine si et seulement si il existe une matrice diagonale inversible D, telle que DA est symétrique semi-definie positive (c'est à dire avec des mineurs principaux propres strictement positifs).*

Nous allons donner la définition des algèbres de Kac-Moody dans les cas affines et finis :

Définition 25. *On appelle réalisation d'une matrice de Cartan de format l de type fini A un triplet $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^*)$ avec $\mathfrak{h}$ espace vectoriel de dimension l, $\Pi = \{\alpha_1, ..., \alpha_l\} \subset \mathfrak{h}^*$, $\Pi^\vee = \{H_1, ..., H_l\} \subset \mathfrak{h}$ tels que les parties Π et $\Pi^\vee$ sont linéairement indépendantes, et $\alpha_i(H_j) = A_{i,j}$ pour tous i, j.*

Définition 26. *On appelle réalisation d'une matrice de Cartan de format l affine A un triplet $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^*)$ avec $\mathfrak{h}$ espace vectoriel de dimension $l+1$, $\Pi = \{\alpha_1, ..., \alpha_l\} \subset \mathfrak{h}^*$, $\Pi^\vee = \{H_1, ..., H_l\} \subset \mathfrak{h}$ tels que les parties Π et $\Pi^\vee$ sont linéairement indépendantes, et $\alpha_i(H_j) = A_{i,j}$ pour tous i, j.*

Il est facile de définir la notion de morphismes et d'isomorphismes entre réalisations.

Proposition 17. *Il existe une réalisation de A affine (respectivement de type fini) unique ìsomorphisme près. Deux matrices de Cartan affines (respectivement de type fini) A et B ont la même réalisation si et seulement si on peut obtenir B à partir de A par permutation des indices.*

Définition 27. *Pour A matrice de Cartan généralisée de type fini ou affine, on définit l'algèbre de Kac-Moody $\mathfrak{g}(A)$ associée à A par $\mathfrak{h}$, X_i, Y_i $(1 \leq i \leq n)$ et les relations de Weyl-Serre :*

$$[h, h'] = 0 \text{ pour } h, h' \in \mathfrak{h}$$
$$[X_i, Y_i] = H_i$$
$$[X_i, Y_j] = 0 \text{ si } i \neq j$$
$$[h, X_i] = \alpha_i(h) X_j \text{ pour } h \in \mathfrak{h}$$
$$[h, Y_i] = -\alpha_i(h) Y_j \text{ pour } h \in \mathfrak{h}$$
$$ad(X_i)^{-A_{i,j}+1}(X_j) = 0 \text{ si } i \neq j$$
$$ad(Y_i)^{-A_{i,j}+1}(Y_j) = 0 \text{ si } i \neq j$$

Pour $\lambda = m_1\alpha_1 + ... + m_n\alpha_n \in Q = \sum_{i=1..n} \mathbb{Z}\alpha_i$, on pose : $H_\lambda = m_1 H_1 + ... + m_n H_n \in \mathfrak{h}$.

Proposition 18. *Soit A une matrice de Cartan généralisée finie ou affine. Alors $\mathfrak{g}(A)$ est de dimension finie si et seulement si A est finie. C'est dans ce cas une algèbre de Lie simple. Dans le cas contraire, on dit que l'algèbre de Lie de dimension infinie $\mathfrak{g}(A)$ est une algèbre de Lie affine.*

On peut classifier complètement les algèbres de Lie affines :

-les algèbres affines non-tordues : 4 séries infinies $A_l^{(1)}$ $(l \geq 2)$, $B_l^{(1)}$ $(l \geq 3)$, $C_l^{(1)}$ $(l \geq 2)$, $D_l^{(1)}$ $(l \geq 4)$ et 6 algèbres exceptionnelles A_1^1, G_2^1, F_4^1, E_6^1, E_7^1 et E_8^1.

-les algèbres affines tordues : 4 séries infinies $A_{2l}^{(2)}$ $(l \geq 2)$, $A_{2l-1}^{(2)}$ $(l \geq 3)$, $D_{l+1}^{(2)}$ $(l \geq 2)$ et 3 algèbres exceptionnelles $A_2^{(2)}$, $E_6^{(2)}$ et $D_4^{(3)}$.

Pour une matrice A de Cartan affine de format $n \times n$, on appelle n l'ordre de $\mathfrak{g}(A)$ et $n-1$ le rang de $\mathfrak{g}(A)$.

2.3.2 Structure des algèbres de Lie affines

Soit $\mathfrak{g}(A) = \mathfrak{g}$ une algèbre de Lie affine de rang n. Quitte à permuter les indices de A, on peut supposer que la matrice $\mathring{A}$ obtenue en supprimant la première ligne et la première colonne est une matrice de Cartan de type fini. On supposera à partir de maintenant que c'est la cas. On renumérote les lignes et les colonnes de manière à les énumérer de 0 à n. On note $(X_i)_{0 \leq i \leq n}$, $(Y_i)_{0 \leq i \leq n}$, $(\alpha_i)_{0 \leq i \leq n}$ et $(H_i)_{0 \leq i \leq n}$ les éléments définis précédemment. Soit $\mathring{\mathfrak{g}}$ la sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ engendrée par les X_i et Y_i pour $1 \leq i \leq n$. C'est une algèbre de Lie de dimension finie simple complexe de matrice de Cartan $\mathring{A}$. Elle s'appelle l'algèbre de Lie semi-simple sous-jacente à $\mathfrak{g}$. Sa sous-algèbre de Cartan est $\mathring{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \cap \mathring{\mathfrak{g}}$, son dual est $\mathring{\mathfrak{h}}^* = \underset{i=1..n}{\oplus} \mathbb{C}\alpha_i$, et $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ en est un système de racines simples.

On définit : n^+ (respectivement n^-) la sous algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ engendrée par les X_i (respectivement par les Y_i).

Proposition 19. *On a la décomposition triangulaire : $\mathfrak{g}(A) = n^- \oplus \mathfrak{h} \oplus n^+$. $\mathfrak{h}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}(A)$ de dimension finie égale à $n+2$. Les sous-espaces vectoriels n^+ et n^- sont de dimension infinie.*

On appelle $\{\alpha_0, ..., \alpha_n\}$ la base des racines, les éléments α_i les racines simples. On note $Q = \sum_{i=0..n} \mathbb{Z}\alpha_i$ et $Q_+ = \sum_{i=0..n} \mathbb{N}\alpha_i$. On appelle Q le réseau des racines. On introduit un ordre partiel sur $\mathfrak{h}^*$ en posant $\lambda > \mu \Longleftrightarrow \lambda - \mu \in Q_+$.

Pour $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ notons $\mathfrak{g}(A)_\alpha = \{x \in \mathfrak{g}(A) / \forall h \in \mathfrak{h}, [h,x] = \alpha(h)x\}$ le sous-espace poids α.

Proposition 20. *On a la décomposition :*

$$\mathfrak{g}(A) = (\bigoplus_{\alpha \in Q_+, \alpha \neq 0} \mathfrak{g}(A)_{-\alpha}) \bigoplus \mathfrak{h} \bigoplus (\bigoplus_{\alpha \in Q_+, \alpha \neq 0} \mathfrak{g}(A)_\alpha)$$

De plus les $\mathfrak{g}_\alpha$ sont de dimension finie, et $\mathfrak{g}(A)_\alpha \subset n^+$ (respectivement $\mathfrak{g}(A)_\alpha \subset n^-$) pour $\alpha \in Q_+ - \{0\}$ (respectivement $\alpha \in -Q_+ - \{0\}$).

Remarquer que : $\mathfrak{g}(A)_{\alpha_i} = \mathbb{C}e_i$ et $\mathfrak{g}(A)_{-\alpha_i} = \mathbb{C}f_i$.

Définition 28. *On dit que $\alpha \in Q - \{0\}$ est une racine si $\mathfrak{g}(A)_\alpha \neq 0$. Dans ce cas on appelle multiplicité de α l'entier non nul $mult(\alpha)$ égal à la dimension de $\mathfrak{g}(A)_\alpha$.*

L'ensemble des racines (respectivement positives, négatives) est noté Δ (respectivement Δ_+, Δ_-).

Proposition 21. *On a $\Delta = \Delta_+ \sqcup \Delta_-$ et $\Delta_+ = -\Delta_-$.*

Pour $0 \leq i \leq n$, on définit l'endomorphisme r_i de $\mathfrak{h}^*$ par : $r_i(\lambda) = \lambda - \lambda(H_i)\alpha_i$. Le sous-groupe W de $GL(\mathfrak{h}^*)$ engendré par les r_i est appelé le groupe de Weyl de $\mathfrak{g}(A)$.

Définition 29. *Une racine $\alpha \in \Delta$ est dite réelle si il existe $w \in W$ tel que $w(\alpha)$ est une racine simple. On note Δ^{Re} (respectivement Δ_+^{Re}) l'ensemble des racines réelles (respectivement des racines réelles positives). Les autres racines sont dites imaginaires, et de manière analogue on note Δ^{im} et Δ_+^{im}.*

Proposition 22. *Il existe un unique $(n+1)$-uplet d'entiers positifs premiers dans leur ensemble $\{a_0, ..., a_n\}$ tels que $Au = 0$ où $u = (a_0, ..., a_n)^t$.*

Un tel $(n+1)$-uplet associé à A^t est noté $\{a_0^\vee, ..., a_n^\vee\}$. Soit $\delta = \sum_{i=0..n} a_i\alpha_i \in \mathfrak{h}^*$, et $K = \sum_{i=0..n} a_i^\vee \alpha_i^\vee \in \mathfrak{h}$.

Proposition 23. *On a : $\Delta^{im} = \{\delta, 2\delta, ...\} \sqcup \{-\delta, -2\delta, ...\}$ et $\Delta_+^{im} = \{\delta, 2\delta, ...\}$.*

Proposition 24. *Le centre de $\mathfrak{g}(A)$ est la droite vectorielle engendrée par K.*
En particulier le centre de $\mathfrak{g}$ est inclus dans $\mathfrak{h}$. Rappelons que le centre d'une algèbre semi-simple est trivial.

Soit $d \in \mathfrak{h}$ tel que $\alpha_i(d) = 0$ pour $1 \leq i \leq n$ et $\alpha_0(d) = 1$ (d est définit à un multiple de K près).

Proposition 25. *On a :* $\mathfrak{h} = \overset{\circ}{\mathfrak{h}} \oplus (\mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}d)$.
Soit alors $\Lambda_0 \in \mathfrak{h}^*$ tel que $\Lambda_0(H_i) = 0$ pour $1 \leq i \leq n$, $\Lambda_0(H_0) = 1$ et $\Lambda_0(d) = 0$.

Proposition 26. *On a :* $\mathfrak{h}^* = \overset{\circ}{\mathfrak{h}}{}^* \oplus (\mathbb{C}\delta \oplus \mathbb{C}\Lambda_0)$.

2.3.3 Cas des algèbres affines non-tordues : construction comme extension des algèbres de courants

Dans ce cas on peut construire $\mathfrak{g}$ à partir de l'algèbre de Lie simple sous-jacente $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$.
Soit donc $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$ une algèbre de Lie simple muni de sa forme de Killing $(,)$. Soit X_l le type de $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$ (voir la classification des algèbres de Lie semi-simples). Soit $\mathcal{L} = \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ l'algèbre des polynômes de Laurent en t. Soit $\mathcal{L}(\overset{\circ}{\mathfrak{g}}) = \mathcal{L} \otimes \overset{\circ}{\mathfrak{g}}$. On peut munir $\mathcal{L}(\overset{\circ}{\mathfrak{g}})$ d'une structure d'algèbre de Lie en posant :

$$[P \otimes x, Q \otimes y]_0 = PQ \otimes [x,y] \text{ pour } P, Q \in \mathcal{L} \text{ et } x, y \in \overset{\circ}{\mathfrak{g}}$$

L'algèbre de Lie obtenue est appelée algèbre des lacets. Elle s'identifie à l'algèbre des fonctions polynômiales du cercle unité de $\mathbb{C}$ dans $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$. Définissons la forme bilinéaire ψ sur $\mathcal{L}(\overset{\circ}{\mathfrak{g}})$ par :

$$\psi(P \otimes x, Q \otimes y) = \mathrm{Res}(\frac{dP}{dt}Q)(x,y)$$

Ici Res désigne la forme linéaire sur $\mathcal{L}$ qui à $P = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} c_k t^k$ (la suite des c_k étant presque nulle) associe c_{-1}.

Proposition 27. *L'application bilinéaire ψ est un 2-cocycle, c'est à dire que pour $a, b, c \in \mathcal{L}(\overset{\circ}{\mathfrak{g}})$:*

$$\psi(a,b) = -\psi(b,a)$$

$$\psi([a,b],c) + \psi(b,c],a) + \psi([c,a],b) = 0$$

En conséquence on peut définir une extension centrale $\widetilde{\mathcal{L}}(\overset{\circ}{\mathfrak{g}}) = \mathcal{L}(\overset{\circ}{\mathfrak{g}}) \oplus \mathbb{C}K$ de $\mathcal{L}(\overset{\circ}{\mathfrak{g}})$ en posant :

$$[a + \lambda K, b + \mu K] = [a,b]_0 + \psi(a,b)K \text{ pour } a, b \in \mathcal{L}(\overset{\circ}{\mathfrak{g}}) \text{ et } \lambda, \mu \in \mathbb{C}$$

Proposition 28. *On peut définir une extension semi-directe*

$$\hat{\mathcal{L}}(\overset{\circ}{\mathfrak{g}}) = \widetilde{\mathcal{L}}(\overset{\circ}{\mathfrak{g}}) \oplus \mathbb{C}d = \mathcal{L}(\overset{\circ}{\mathfrak{g}}) \oplus \mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}d$$

de $\widetilde{\mathcal{L}}(\overset{\circ}{\mathfrak{g}})$ en posant pour $x, y \in \overset{\circ}{\mathfrak{g}}$ et $\lambda, \lambda_1, \mu, \mu_1 \in \mathbb{C}$:

$$[t^m \otimes x + \lambda K + \mu d, t^n \otimes y + \lambda_1 K + \mu_1 d] = t^{m+n} \otimes [x,y]_0 + \mu n t^n \otimes y - \mu_1 m t^m \otimes x + m\delta_{m+n,0}(x,y)K$$

avec δ le symbole de Kronecker.

Notons $\mathfrak{g}$ cette dernière algèbre. Soient $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ une base de racines simples de $\overset{\circ}{\mathfrak{h}}{}^*$, et $x_1, ..., x_n$, $y_1, ..., y_n$ les générateurs de Chevalley de $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$ associés. Soit θ la plus haute racine de $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$. Comme $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}_\theta$ est de dimension 1, on peut choisir un unique $x_0 \in \overset{\circ}{\mathfrak{g}}_\theta$ tel que $(x_0, \omega(x_0)) = -\frac{2}{(\theta,\theta)}$. Posons aussi $y_0 = -\omega(f_0)$. Définissons les éléments de $\mathfrak{g}$ suivants : $X_0 = t \otimes x_0$, $Y_0 = t^{-1} \otimes y_0$, $X_i = 1 \otimes x_i$ et $Y_i = 1 \otimes y_i$ $(1 \leq i \leq n)$. Les éléments X_i, Y_i $(0 \leq i \leq n)$, K, d et les $h \in \overset{\circ}{\mathfrak{h}}$ ont les propriétés de leurs analogues du thérorème 8, ce qui permet de construire un isomorphisme et d'énoncer le théorème qui justifie la construction précédente :

Théorème 13. *L'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \hat{\mathcal{L}}(\overset{\circ}{\mathfrak{g}})$ est affine de type $X_l^{(1)}$.*
En particulier on peut définir pour $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie affine non-tordue et $a \in \mathbb{C}^*$ un morphisme dit d'évaluation : $\phi_a : \mathfrak{g} \to \overset{\circ}{\mathfrak{g}}$ par : $\phi_a(P \otimes x + z_1 K + z_2 d) = P(a)x$.

Prolongeons les $\lambda \in \overset{\circ}{\mathfrak{h}}{}^*$ en une forme linéaire sur $\mathfrak{g}$ en posant $\lambda(K) = \lambda(d) = 0$. On définit (comme dans la section précédente) $\delta \in \mathfrak{h}^*$ telle que δ est nulle sur $\overset{\circ}{\mathfrak{h}} \oplus \mathbb{C}K$ et $\delta(d) = 1$, et $\Lambda_0 \in \mathfrak{h}^*$ telle que Λ_0 est nulle sur $\overset{\circ}{\mathfrak{h}} \oplus \mathbb{C}d$ et $\Lambda_0(K) = 1$. On a $\mathfrak{h}^* = \bigoplus\limits_{i=1..n} \mathbb{C}\alpha_i \bigoplus \mathbb{C}\delta \bigoplus \mathbb{C}\Lambda_0$. Notons R l'ensemble des racines (vues dans $\mathfrak{h}^*$) de $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$ et R_+ l'ensemble de celles qui sont positives.

Proposition 29. *On a :*

$$\Delta = \{j\delta + \gamma / j \in \mathbb{Z}, \gamma \in R\} \cup \{j\delta / j \in \mathbb{Z} - \{0\}\}$$
$$\Delta_+ = \{j\delta + \gamma / j > 0, \gamma \in R\} \cup \{j\delta / j > 0\} \cup \{\gamma / \gamma \in R_+\}$$
$$\Delta^{Re} = \{j\delta + \gamma / j \in \mathbb{Z}, \gamma \in R\}$$
$$\Delta^{Re}_+ = \{j\delta + \gamma / j > 0, \gamma \in R\} \cup \{\gamma / \gamma \in R_+\}$$
$$\Delta^{Im} = \{j\delta / j \in \mathbb{Z} - \{0\}\}$$
$$\Delta^{Im}_+ = \{j\delta / j > 0\}$$

On a la décomposition en sous-espaces de poids : $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus (\underset{\alpha\in\Delta}{\oplus} \mathfrak{g}_\alpha)$*, avec :*

$$\mathfrak{g}_{j\delta+\gamma} = t^j \otimes \mathring{\mathfrak{g}}_\gamma \text{ pour } j \in \mathbb{Z} \text{ et } \gamma \in R$$

$$\mathfrak{g}_{j\delta} = t^j \otimes \mathring{\mathfrak{h}} \text{ pour } j \in \mathbb{Z} - \{0\}$$

En particulier le sous-espace de poids d'une racine rélle est de dimension 1 (les racines réelles sont non-dégénérées) tandis que le sous-espace de poids d'une racine imaginaire est de dimension $n = rang(\mathring{\mathfrak{g}})$ *(les racines imaginaires sont dégénérées si* $n > 1$*).*

Remarquons que la décomposition triangulaire $\mathfrak{g} = n_- \oplus \mathfrak{h} \oplus n_-$ peut être indentifiée : $n_- = t^{-1}\mathbb{C}[t] \otimes \mathring{\mathfrak{g}} + 1 \otimes \mathring{n}_-$ et $n_+ = t\mathbb{C}[t] \otimes \mathring{\mathfrak{g}} + 1 \otimes \mathring{n}_+$.

On définit une forme bilinéaire non dégénérée sur $\mathfrak{g}$ qui prolonge la forme $(,)$ de $\mathring{\mathfrak{g}}$ (forme de Killing que l'on suppose à présent normalisée par $(\theta, \theta) = 2$) par :

$$(P \otimes x, Q \otimes y) = Res(t^{-1}PQ)(x, y)$$

$$(\mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}d, \mathbb{C}[t, t^{-1}] \otimes \mathring{\mathfrak{g}}) = 0$$
$$(K, K) = (d, d) = 0$$
$$(K, d) = 1$$

Proposition 30. *La forme bilinéaire* $(,)$ *est invariante pour le crochet de* $\mathfrak{g}$ *et est non-dégénérée. Sa restriction à* $\mathfrak{h}$ *est non-dégénérée également.*

On dispose ainsi d'un isomorphisme : $\nu : \mathfrak{h} \mapsto \mathfrak{h}^*$ et d'une forme bilináire non-dégénérée sur $\mathfrak{h}^*$ qu'on notera encore $(,)$.

2.3.4 Groupe de Weyl

Pour $i \in \{0, ..., n\}$, on définit l'endomorphisme r_i de $\mathfrak{h}^*$ par $r_i(\lambda) = \lambda - \lambda(H_i)\alpha_i$. Le sous-groupe W de $GL(\mathfrak{h}^*)$ engendré par les r_i est appelé le groupe de Weyl de $\mathfrak{g}$.

Proposition 31. *La forme bilinéaire* $(,)$ *sur* $\mathfrak{h}^*$ *est invariante par* W

Proposition 32. *Le sous-groupe* $\mathring{W}$ *de* W *engendré par les* r_i *pour* $1 \leq i \leq n$ *est isomorphe au groupe de Weyl de* $\mathring{\mathfrak{g}}$*. En particulier il est fini.*

Rappelons que par définition les racines réelles de $\mathfrak{g}$ sont les racines des orbites de racines simples $\alpha_0, ..., \alpha_n$ sous W. Ainsi pour une racine réelle $\alpha = w(\alpha_i)$, on peut définir $r_\alpha = w r_i w^{-1} \in W$. Remarquons aussi que W laisse fixe les racines imaginaires. De plus $\mathring{W}$ laisse fixe Λ_0.

Définition 30. *Pour* $\alpha \in \mathring{\mathfrak{h}}^*$*, on définit l'endomorphisme* t_α *de l'espace vectoriel* $\mathfrak{h}^*$ *en posant pour* $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ *:*

$$t_\alpha(\lambda) = \lambda + \lambda(K)\alpha - ((\lambda, \alpha) + \frac{1}{2}(\alpha, \alpha)\lambda(K))\delta$$

On se restreint à la partie $M = \nu(\mathbb{Z}(W.H_\theta))$ et on considère $T = \{t_\alpha / \alpha \in M\}$. Alors T est un sous-groupe distingué de W, appelé le groupe des translations, et on a :

Proposition 33. *Le groupe* W *est produit semi-direct de* $\mathring{W}$ *et de* T*.*

2.3.5 Représentations

Une réussite importante de la théorie des algèbres de Kac-Moody est qu'une grande partie de la théorie des représentations des algèbres de Lie semi-simples a sa contrepartie. Dans la suite l'expression "par analogie" signifiera par analogie avec la théorie des représentations des algèbres de Lie semi-simples.

Pour un $\mathfrak{g}$-module V, on notera $x.v$ l'image de $v \in V$ sous l'action de $x \in \mathfrak{g}$ et $x^N.v$ lorsqu'on l'itère N fois.

Définition 31. *Un $x \in \mathfrak{g}$ est dit localement nilpotent sur un $\mathfrak{g}$-module V si : $\forall v \in V, \exists N \in \mathbb{N}, x^N.v = 0$.*
Par analogie, un $\mathfrak{g}$-module V est dit $\mathfrak{h}$-diagonalisable si $V = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} V_\lambda$. On dit que V_λ est un sous-espace de poids λ si $V_\lambda \neq 0$.
Un $\mathfrak{g}$-module V est dit intégrable si il est $\mathfrak{h}$-diagonalisable et si les X_i, Y_i $(0 \leq i \leq n)$ sont localement nilpotents.

Par exemple le représentation adjointe est intégrable. On considère une autre classe de modules :

Définition 32. *On dit qu'un $\mathfrak{g}$-module V est un objet de la catégorie O si il est $\mathfrak{h}$-diagonalisable, avec des espaces de poids de dimension finie, et si il existe un nombre fini d'éléments $\lambda_1, ..., \lambda_s \in \mathfrak{h}^*$ tels que les poids de V soient dans $\bigcup_{i=1..s} D(\lambda_i)$ où pour $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, $D(\lambda) = \{\mu \in \mathfrak{h}^* / \mu \leq \lambda\}$. Un morphisme entre deux objets de la catégorie O est un morphisme de $\mathfrak{g}$-modules.*

Par exemple un $\mathfrak{g}$-module de dimension finie est un objet intégrable de la catégorie O.

On définit par analogie avec la définition 19 ce qu'est un vecteur de plus haut poids et avec la définition 20 ce qu'est un module de plus haut poids. Tout module de plus haut poids est un objet de la catégorie O.

Proposition 34. *Pour $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ il existe un unique (à isomorphisme unique près) module irréductible $L(\lambda)$ qui est de plus haut poids λ. C'est un objet de la catégorie O, et les objets irréductibles de la catégorie O sont exactement les $L(\lambda)$ avec $\lambda \in \mathfrak{h}^*$.*

Définissons par analogie le réseau des poids : $\Lambda = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* / \lambda(H_i) \in \mathbb{Z} \text{ pour } 0 \leq i \leq n\}$ et l'ensemble des poids dominants : $\Lambda^+ = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* / \lambda(H_i) \in \mathbb{N} \text{ pour } 0 \leq i \leq n\}$.

Proposition 35. *Soit $V(\lambda)$ le module irréductible de plus haut poids $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Alors $V(\lambda)$ est intégrable si et seulement si $\lambda \in \Lambda^+$.*

2.3.6 Caractères, complète réductibilité et classification des représentations de dimension finie

Par analogie avec la définition 22, pour un module V de la catégorie O, on définit le caractère formel de V en posant :

$$ch_V = \sum_{\lambda \in \Lambda} m_V(\lambda) e(\lambda)$$

C'est un élément de l'algèbre E des séries formelles $\sum_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} c_\lambda e(\lambda)$ avec $c_\lambda \in \mathbb{C}$ et $c_\lambda = 0$ si λ n'est pas dans une réunion finie d'ensemble de la forme $D(\mu)$ (par analogie la multiplication est définit de manière unique sur E en posant $e(\lambda)e(\mu) = e(\lambda + \mu)$).

Proposition 36. *Si V et W sont deux objets de la catégorie O, alors $V \oplus W$ (respectivement $V \otimes W$) muni de sa structure canonique de $\mathfrak{g}$-module est un objet de la catégorie O, et : $ch_{V \oplus W} = ch_V + ch_W$ (respectivement $ch_{V \otimes W} = ch_V . ch_W$).*

Proposition 37. *Si V est un $\mathfrak{g}$-module intégrable, les poids de V sont invariants par W et la multiplicité est conservée. En particulier pour V un objet intégrable de la catégorie O, on a $w.ch_V = ch_V$ pour $w \in W$.*

On dit que les ch_W sont W-invariants, et qu'ils appartiennent à E^W. Deux $\mathfrak{g}$-modules de dimension finie sont isomorphes si et seulement si ils ont même caractère. On note $Rep(\mathfrak{g})$ l'anneau de Grothendieck construit à partir des représentations de dimension finie de $\mathfrak{g}$. L'application ch induit un morphisme injectif de l'anneau de Grothendieck $Rep(\mathfrak{g})$ sur E^W.

Théorème 14. *Soit $\lambda \in \Lambda^+$. On a alors la formule de Weyl :*

$$ch_{V(\lambda)} = \frac{\sum_{w \in W} \epsilon(w) e(w(\lambda + \rho) - \rho)}{\prod_{\alpha \in \Delta_+} (1 - e(-\alpha))^{mult(\alpha)}} = \frac{\sum_{w \in W} \epsilon(w) e(w(\lambda + \rho) - \rho)}{\sum_{w \in W} \epsilon(w) e(w(\rho))}$$

où $mult(\alpha) = dim(\mathfrak{g}_\alpha)$ (appelé la multiplicité de α) et $\rho \in \Lambda^+$ est choisi tel que $\rho(H_i) = 1$ pour $0 \leq i \leq n$.

Remarquer que si α est une racine réelle, $\text{mult}(\alpha) = 1$ et si α est une racine imaginaire, $\text{mult}(\alpha) = n$. En particulier la formule est bien analogue à celle du cas semi-simple dans le théorème 12 où toutes les racines sont "réelles" de multiplicité 1. La forme linéaire $\rho \in \Lambda^+$ n'est pas définie de manière unique. En fait on ne peut pas définir ρ comme dans le cas semi-simple car il y a ici une infinité de racines positives (mêmes réelles). Cependant on a bien un analogue car dans le cas semi-simple la demi somme des racines positives ρ vérifie également $\rho(H_i) = 1$ (pour $1 \leq i \leq n$).

Corollaire 4. *Soit λ un poids dominant et $V(\lambda)$ un $\mathfrak{g}$-module irréductible de plus haut poids λ. On a alors la formule de la dimension de Weyl :*

$$dim(V(\lambda)) = \prod_{\alpha \in \Delta_+} \frac{(\lambda + \rho, \alpha)}{(\rho, \alpha)}$$

On a un théorème de complète réductibilité :

Théorème 15. *Tout $\mathfrak{g}$-module de la catégorie O est intégrable si et seulement si il est isomorphe à une somme directe de modules $V(\lambda)$ avec $\lambda \in \Lambda^+$.*

Corollaire 5. *Tout $\mathfrak{g}$-module de dimension finie est somme directe finie de $\mathfrak{g}$-modules irréductibles de dimension finie.*

En particulier la catégorie $Mod_f(\mathfrak{g})$ associée à $Rep(\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ est semi-simple.

Cependant, contrairement au cas des algèbres de Lie semi-simples, il existe des $\mathfrak{g}$-modules intégrables de la catégorie O qui ne sont pas de dimension finie ; et ce qui précède ne permet pas de connaître les objets irréductibles de la catégorie des $\mathfrak{g}$-modules de dimension finie. Grâce aux morphismes d'évalutation ϕ_a, on a tout de même un résultat : pour tout $\mathring{\mathfrak{g}}$-module de dimension finie irréductible $V(\lambda)$ (avec λ poids dominant de $\mathring{\mathfrak{g}}$) et $a \in \mathbb{C}^*$ on définit par $\phi_a : \mathfrak{g} \to \mathring{\mathfrak{g}}$ un $\mathfrak{g}$-module $V_\lambda(a)$. Les $V_\lambda(a)$ sont alors des $\mathfrak{g}$-modules irréductibles de dimension finie. Ensuite pour $n \in \mathbb{N}$, $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ des poids dominants de $\mathring{\mathfrak{g}}$ et $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{C}^n$, on considère le $\mathfrak{g}$-module de dimension finie $V_{\lambda_1}(a_1) \otimes ... \otimes V_{\lambda_n}(a_n)$.

Théorème 16. *Le $\mathfrak{g}$-module de dimension finie $V_{\lambda_1}(a_1) \otimes ... \otimes V_{\lambda_n}(a_n)$ est irréductible si et seulement si les a_i sont distincts deux à deux. De plus tout $\mathfrak{g}$-module irréductible de dimension finie est de cette forme, et tout $\mathfrak{g}$-module de dimension finie se décompose en une somme directe finie de $\mathfrak{g}$-modules de cette forme.*

On peut aussi obtenir la décomposition du produit tensoriel de $\mathfrak{g}$-modules de dimension finie en somme de $\mathfrak{g}$-modules irréductibles.

3 Quantification des algèbres de Lie : groupes quantiques

3.1 Origines des groupes quantiques

La théorie des groupes quantiques prend sa source dans la physique quantique et en particulier dans la QISM (Quantum Inverse Scattering Method). La compréhension en termes algébriques de techniques utilisées en physique a mené à la découverte d'une classe d'algèbres de Hopf appelées groupes quantiques.
Une partie d'entre elles sont obtenues par déformation de l'algèbre universelle enveloppante d'une algèbre de Lie semi-simple, affine ou plus généralement de Kac-Moody. Dans ce cas on introduit un paramètre $q \in \mathbb{C}^*$ dit de quantification. A $q = 1$, on parle de théories classiques pour lesquelles on retrouve les théories des algèbres de Lie semi-simples, affines.. classiques. Pour $q \neq 1$, on parle de quantification. On pose souvent $q = e^{-\frac{h}{2}}$ et on appelle h la constante de Planck. Pour $h = 0$ on est dans un cas classique, et pour $h \neq 0$ dans un cas quantique. Ceci correspond physiquement à l'approximation implicite de la mécanique classique de Newton et d'Einstein concistant à négliger les effets quantiques en supposant la constante de Planck nulle.
Il est remarquable que les groupes quantiques donnent des exemples d'algèbres de Hopf ni commutatives, ni cocomutatives. En fait la non-commutativité quantique provient du fait que l'espace des observables en mécanique classique (algèbre de fonctions réelles sur une variété) est une algèbre commutative, alors qu'en mécanique quantique (algèbre d'opérateurs linéaires autoadjoints sur un espace de Hilbert) ne l'est pas. Les théories de représentations des groupes quantiques sont trés riches (c'est en partie l'objet de ce mémoire). Chaque représentation d'un groupe quantique peut être interprétée comme un système physique. Il est aussi remarquable qu'on peut définir la R-matrice universelle d'un groupe quantique, dont on verra le lien direct avec la mécanique statistique dans la prochaine partie. Notons que les groupes quantiques ont aussi de nombreuses applications internes aux mathématiques (théorie des noeuds, des représentations des algèbres de Lie...)

3.2 Déformations formelles

3.2.1 Algèbres produits

Soit $(A_m)_{m\geq 0}$ une famille de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels. On considère l'ensemble $\mathfrak{A} = \prod_{m\geq 0} A_m$ muni de sa struture de $\mathbb{C}$-espace vectoriel naturelle. Pour $x = (x_m)_{m\geq 0} \in \mathfrak{A}$, on note $x = \sum_{m\geq 0} z^m x_m$. On suppose que pour $m, m' \geq 0$, il existe une application linéaire :

$$f_{m,m'} : A_m \otimes A_{m'} \to A_{m+m'}$$

On suppose que pour $m, m', m'' \geq 0$, les endomorphismes $A_m \otimes A_{m'} \otimes A_{m''} \to A_{m+m'+m'}$ suivants vérifient :

$$f_{m+m',m''} \circ (f_{m,m'} \otimes id) = f_{m,m'+m''} \circ (id \otimes f_{m',m''})$$

Proposition 38. *Sous ces conditions le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathfrak{A}$ est muni d'une unique structure d'algèbre associative, telle que :*

$$(\sum_{m\geq 0} x_m z^m).(\sum_{m\geq 0} y_m z^m) = \sum_{m\geq 0} z^m \sum_{m'+m''=m} f_{m',m''}(x_{m'} \otimes y_{m''})$$

On dit alors que $\mathfrak{A}$ est une algèbre produit.

Soient $\mathfrak{A} = (\prod_{m\geq 0} A_m, (f_{m,m'})_{m,m'\geq 0})$ et $\mathfrak{B} = (\prod_{m\geq 0} B_m, (g_{m,m'})_{m,m'\geq 0})$ deux algèbres produits telles qu'il existe pour $m \geq 0$ une application linéaire $\phi_m : A_m \to B_m$. Alors il existe une unique application linéaire $\Phi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ telle que :

$$\Phi(\sum_{m\geq 0} x_m z^m) = \sum_{m\geq 0} \phi_m(x_m) z^m$$

On notera $\Phi = (\tilde{\phi_m})$.

Proposition 39. *On suppose de plus que pour $m, m' \geq 0$:*

$$\phi_{m+m'} \circ f_{m,m'} = (g_m \otimes g_{m'}) \circ (\phi_m \otimes \phi_{m'})$$

alors Φ est un morphisme d'algèbres.

3.2.2 Topologie h-adique, modules topologiquement libres et produit tensoriel topologique

Soit k un corps. On note $k[[h]]$ ou $\tilde{k}$ (respectivement $X[[h]]$ ou $\tilde{X}$ avec X un k-espace vectoriel) l'algèbre (respectivement l'espace) des séries formelles à coefficients dans $\mathbb{C}$ (respectivement X). On obtient une structure de $\tilde{k}$-module sur $\tilde{X}$ en posant :

$$(\sum_p \lambda_p h^p).(\sum_q x_q h^q) = \sum_n (\sum_{p+q=n} \lambda_p x_q) h^n \text{ pour } \lambda_p \in k,\ x_q \in X$$

On a alors un isomorphisme canonique de k-espaces vectoriels entre X et $\tilde{X}/h\tilde{X}$.

On définit une topologie sur $\tilde{k}$ (respectivement sur un $\tilde{k}$-module V) en choisissant les voisinages de 0 de la forme $h^n\tilde{k}$ (respectivement h^nV). On l'appelle la topologie h-adique. Elle est métrique : pour $f \neq g \in \tilde{k}$ on pose $d(f,g) = 2^{-\omega(f-g)}$ avec $\omega(f-g)$ le plus petit grand positif tel que $f-g$ n'est pas dans $h^{\omega(f-g)}\tilde{k}$ et $f-g \in h^m\tilde{k}$ pour $m < \omega(f-g)$.

Définition 33. *Un $\tilde{k}$-module de la forme (ou isomorphe à un $\tilde{k}$-module de la forme) $\tilde{X}$ avec X un k-espace vectoriel est dit topologiquement libre.*

Définition 34. *Une partie d'un $\tilde{k}$-module V est une base topologique de V si elle est libre est dense dans V pour la topologie h-adique.*

Par exemple un $\tilde{k}$-module topologiquement libre $\tilde{V}$ admet une base topologique $(h^k v_i)_{i\in I, k\in\mathbb{N}}$ où $(v_i)_{i\in I}$ est une base du k-espace vectoriel V.

Définition 35. *Le produit tensoriel topologique $M\tilde{\otimes}N$ de deux $\tilde{k}$-modules M et N est le complété de $M \otimes_{\tilde{k}} N$ pour la topologie métrique h-adique.*

Remarquer que $M\tilde{\otimes}N$ est toujours canoniquement un $\tilde{k}$-module.

Proposition 40. *Pour deux $\tilde{k}$-modules topologiquement libres $\tilde{V}$ et $\tilde{W}$ on a :*

$$\tilde{V}\tilde{\otimes}\tilde{W} = \varprojlim (\tilde{V} \otimes_{\tilde{k}} \tilde{W})/h^{n+1}.(\tilde{V} \otimes_{\tilde{k}} \tilde{W})$$

En d'autres termes, les éléments de $\tilde{V}\tilde{\otimes}\tilde{W}$ sont les séries de terme général dans $M \otimes_{\tilde{k}} N$ tendant vers 0 pour la topologie h-adique.

Proposition 41. *Les propriétés du produit tensoriel algébrique sont conservées : associativité ($(M\tilde{\otimes}N)\tilde{\otimes}P \simeq M\tilde{\otimes}(N\tilde{\otimes}P)$), commutativité ($M\tilde{\otimes}N \simeq N\tilde{\otimes}M$), unité ($M\tilde{\otimes}\tilde{k} \simeq \tilde{k}\tilde{\otimes}M \simeq M$) et fonctorialité (pour $f : M \to N$ et $g : M' \to N'$ des morphismes de $\tilde{k}$-modules, on a un morphisme $f\tilde{\otimes}g : M\tilde{\otimes}N \to M'\tilde{\otimes}N'$).*

Proposition 42. *Si $M = \tilde{V}$ et $N = \tilde{W}$ sont des $\tilde{k}$-modules topologiquement libres, alors le $\tilde{k}$-module $M\tilde{\otimes}N$ est topologiquement libre, et :*

$$M\tilde{\otimes}N = (V \otimes_k W)\tilde{}$$

Remarquer que de manière générale on n'a pas d'identification entre $(V \otimes W)\tilde{}$ et $\tilde{V} \otimes_{\tilde{k}} \tilde{W}$ (c'est le cas si V et W sont de dimension finie). En fait $\tilde{V} \otimes_{\tilde{k}} \tilde{W}$ s'injecte toujours dans sa complétion $(V \otimes W)\tilde{}$.

3.2.3 Algèbres topologiques et déformations formelles d'algèbres

Définition 36. *Une algèbre topologique est un triplet (A, M, η) avec A un $\tilde{k}$-module, $M : A\tilde{\otimes}A \to A$ et $\eta : \tilde{k} \to A$ des applications $\tilde{k}$-linéaires avec $M \circ (M\tilde{\otimes}id_A) = M \circ (id_A\tilde{\otimes}M)$ et $M \circ (\eta\tilde{\otimes}id_A) = id_A = M \circ (id_A\tilde{\otimes}\eta)$.*

On définit naturellement les morphismes d'algèbres topologiques. Remarquer qu'on a une structure de k-algèbre induite sur A/hA.
Par exemple, notons que pour une k-algèbre unitaire A, on peut munir $\tilde{A}$ d'une structure de $\tilde{k}$-algèbre dite canonique en posant :

$$(\sum_p a_p h^p).(\sum_q a_q h^q) = \sum_n (\sum_{p+q=n} a_p.b_q) h^n \text{ pour } a_p, b_q \in A$$

Un autre exemple important que nous utiliserons par la suite pour la construction de groupes quantiques est la donnée d'une algèbre topologique par générateurs et relations : on considère d'abord pour un ensemble X l'algèbre topologique topologiquement libre engendrée par X : $\tilde{k} < X >= (k < X >)[[h]]$.

Définition 37. *Soit X un ensemble et R un sous-ensemble de $\tilde{k} < X >$. L'algèbre topologique engendrée par X et les relations R est le quotient de $\tilde{k} < X >$ par la complétion h-adique de l'idéal bilatère engendré par R.*

Définition 38. *On appelle déformation formelle d'une k-algèbre unitaire (A, M, η) une structure d'algèbre topologique $(\tilde{A}, \tilde{M}, \tilde{\eta})$ sur le $\tilde{k}$-module $\tilde{A}$ telle que l'application canonique $\tilde{A} \to \tilde{A}/h\tilde{A}$ soit un isomorphisme de k-algèbres.*

La structure d'algèbre canonique de $\tilde{A}$ définit une déformation formelle dite constante.

Définition 39. *Deux déformations formelles $(\tilde{A}, \tilde{M}, \tilde{\eta})$ et $(\tilde{A}, \tilde{M}', \tilde{\eta}')$ sont dites équivalentes si il existe un isomorphisme $\tilde{u}$ d'algèbres topologiques de l'une sur l'autre induisant l'identité sur $\tilde{A}/h\tilde{A}$.*

Une déformation formelle équivalente à la déformation formelle constante est dite triviale. Voici un exemple particulièrement important dans notre propos :

Théorème 17. *Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie semi-simple sur $\mathbb{C}$, toute déformation formelle de son algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ est triviale.*

3.2.4 Représentations d'une déformation formelle d'algèbre

Soit $(\tilde{A}, \tilde{M}, \tilde{\eta})$ une déformation formelle d'algèbre. On appelle représentation de $\tilde{A}$ un couple $(\tilde{V}, \tilde{\pi})$ avec V espace vectoriel sur k et $\tilde{\pi}$ un morphisme de $\tilde{k}$-algèbres topologiques de $\tilde{A}$ dans $(\mathrm{End}_k(V))\tilde{}$ (qui s'identifie canoniquement à $\mathrm{End}_{\tilde{k}}(\tilde{V})$). La dimension de V est alors appelée le rang de la représentation. On définit de manière évidente les sommes directes de représentations, les classes d'isomorphisme de représentations.
Par exemple, soit $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie semi-simple sur $\mathbb{C}$, $(\tilde{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}, \tilde{M}, \tilde{\eta})$ une déformation formelle de son algèbre enveloppante, $\mathrm{Rep}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de représentations de dimension finie de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, $\mathrm{Rep}(\tilde{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}, \tilde{M}, \tilde{\eta})$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de représentations de rang fini de $(\tilde{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}, \tilde{M}, \tilde{\eta})$.
On définit une application canonique de $\mathrm{Rep}(\tilde{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}, \tilde{M}, \tilde{\eta})$ sur $\mathrm{Rep}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$ en considérant pour une représentation $\tilde{V}$ de $\tilde{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}$ l'espace vectoriel $\tilde{V}/h\tilde{V}$.

Théorème 18. *L'application canonique de $Rep(\tilde{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}, \tilde{M}, \tilde{\eta})$ sur $Rep(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$ est une bijection qui respecte les sommes directes et les inclusions.*

Nous retrouverons ce résultat un peu plus tard dans le théorème 23.

3.2.5 Déformations formelles d'algèbres de Hopf

Définition 40. *Une bialgèbre topologique est un cinquplet* $(A, M, \eta, \Delta, \epsilon)$ *avec* (A, M, η) *une algèbre topologique,* $\Delta : A \to A\tilde{\otimes}A$ *et* $\epsilon : A \to \tilde{k}$ *des morphismes d'algèbres topologiques avec* $(\Delta\tilde{\otimes}id_A) \circ \Delta = (id_A\tilde{\otimes}\Delta) \circ \Delta$ *et* $(\epsilon\tilde{\otimes}id_A) \circ \Delta = id_A = (id_A\tilde{\otimes}\epsilon) \circ \Delta$.

On définit naturellement les morphismes de bialgèbres topologiques. Remarquer qu'on a une structure de k-bialgèbre induite sur A/hA.

Définition 41. *On appelle déformation formelle d'une* k*-bialgèbre* $(A, M, \eta, \Delta, \epsilon)$ *une structure de bialgèbre topologique* $(\tilde{A}, \tilde{M}, \tilde{\eta}, \tilde{\Delta}, \tilde{\epsilon})$ *sur le* $\tilde{k}$*-module* $\tilde{A}$ *telle que* $(\tilde{A}, \tilde{M}, \tilde{\eta})$ *soit une déformation formelle de la* k*-algèbre* (A, M, η) *et l'application canonique* $\tilde{A} \to \tilde{A}/h\tilde{A}$ *soit un isomorphisme de* k*-bialgèbres.*

Pour deux représentations $(\tilde{V}, \tilde{\pi})$, $(\tilde{W}, \tilde{\rho})$ de $\tilde{A}$ on peut définir la représentation produit tensoriel $\tilde{V}\tilde{\otimes}\tilde{W}$ à l'aide de $\tilde{\Delta}$. (Remarquer que si V ou W n'est pas de rang fini, il faut tenir compte des problèmes d'identification des produits tensoriels. La plus grande partie de ce mémoire portera sur des représentations de dimension finie). Dans le cas semi-simple, la correspondance entre $\mathrm{Rep}(\widetilde{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}, \tilde{M})$ et $\mathrm{Rep}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$ respecte les produits tensoriels.

Théorème 19. *Soit* A *une algèbre de Hopf. Alors toute déformation de la bialgèbre* A *est équivalente à une autre déformation qui est une algèbre de Hopf topologique (c'est à dire une bialgèbre topologique avec* $\tilde{S} : \tilde{A} \to \tilde{A}$*) une application* $\tilde{k}$*-linéaire vérifiant les propriétés analogues à celles des algèbres de Hopf).*

On appelle une telle déformation une déformation formelle de l'algèbre de Hopf A.

Définition 42. *Une algèbre universelle enveloppante quantifiée (ou groupe quantique ou QUE) est une déformation formelle d'une algèbre de Hopf* $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ *avec* $\mathfrak{g}$ *une* $\mathbb{C}$*-algèbre de Lie.*

En particulier un groupe quantique est un $\mathbb{C}[[h]]$-module topologiquement libre. La "variable" h est appelée paramètre de quantification ou constante de Planck. En fait par la suite on considèrera plutôt des $\mathbb{C}[q, q^{-1}]$-algèbres en "remplaçant" le paramètre de quantification h par un autre $q = e^{-\frac{h}{2}}$. Ceci sera plus aisé car certains problèmes topologiques (en particulier pour le produit tensoriel complété) ne seront plus qu'algébriques. Par exemple la "limite classique" sera à $q = 1$, ce qui correspond à $h = 0$. On considèrera aussi des "spécialisations" à $q_0 \in \mathbb{C}^*$ de la $\mathbb{C}[q, q^{-1}]$-algèbre $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ en "fixant" q : la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})/(q - q_0)\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$. On se limitera souvent au cas où q_0 n'est pas une racine de l'unité ; dans les exemples suivant on commence par construire les spécialisations (qui sont des objets algébriquement plus élémentaires) avant les déformations formelles.

3.3 Etude du cas particulier $\mathcal{U}_q(sl_2)$

3.3.1 Définition du groupe quantique associé à $\mathcal{U}(sl_2)$

Définition 43. *Soit* $q \in \mathbb{C}$ *un complexe non-nul qui n'est pas une racine de l'unité. On définit l'algèbre unitaire associative* $\mathcal{U}_q(sl_2)$ *par les générateurs* E, F, K, K^{-1} *et les relations :*

$$KK^{-1} = 1 = K^{-1}K$$

$$KEK^{-1} = q^2E$$

$$KFK^{-1} = q^{-2}F$$

$$EF - FE = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}}$$

On a un analogue du théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt :

Théorème 20. *Les* $F^sK^nE^r$ *avec* $r, s, n \in \mathbb{Z}$ *et* $r, s \geq 0$ *forment une base de* $\mathcal{U}_q(sl_2)$.

On note $\mathcal{U}_q(sl_2)^+$ (respectivement $\mathcal{U}_q(sl_2)^-$, $\mathcal{U}_q(sl_2)^0$) la sous-algèbre de $\mathcal{U}_q(sl_2)$ engendrée par E (respectivement par F, par K et K^{-1}).

Proposition 43. *On a l'isomorphisme d'espaces vectoriels :* $\mathcal{U}_q(sl_2) \simeq \mathcal{U}_q(sl_2)^- \otimes \mathcal{U}_q(sl_2)^0 \otimes \mathcal{U}_q(sl_2)^+$.

Remarquons qu'on peut définir avec les mêmes générateurs et relations la $\mathbb{C}[q, q^{-1}]$ algèbre $\mathcal{U}_q(sl_2)$ (ici q est une indéterminée). Afin de faire les liens avec la notion de déformation formelle, on considère une nouvelle indéterminée h et on "remplace" q par $e^{-\frac{h}{2}}$ et K par $e^{-\frac{h}{2}H}$.

Définition 44. *On définit* $\mathcal{U}_h(sl_2)$ *comme la* $\mathbb{C}[[h]]$*-algèbre topologique engendrée par les générateurs* E, F, H *et les relations :*

$$HE - EH = 2E$$

$$HF - FH = -2F$$
$$EF - FE = \frac{e^{-h\frac{H}{2}} - e^{h\frac{H}{2}}}{e^{-\frac{h}{2}} - e^{\frac{h}{2}}}$$

Rappelons que l'algèbre unitaire associative $\mathcal{U}(sl_2)$ est définie par les générateurs E, F, H et les relations $HE - EH = 2E$, $HF - FH = -2F$, $EF - FE = H$. On voit que pour "$h = 0$" (ou "$q = 1$") les relations de $\mathcal{U}_h(sl_2)$ donnent celles de $\mathcal{U}(sl_2)$.

Proposition 44. *La $\mathbb{C}[[h]]$-algèbre topologique $\mathcal{U}_h(sl_2)$ est une déformation formelle de la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathcal{U}(sl_2)$.*

En fait on a :

$$\mathcal{U}_q(sl_2) = \mathcal{U}(sl_2)[[e^{\pm\frac{h}{2}}]] \subset \mathcal{U}(sl_2)[[h]] = \mathcal{U}_h(sl_2)$$

et on aura des inclusions semblables pour toutes les algèbres enveloppantes quantifiées qu'on considérera.

En fait on peut "spécialiser" $\mathcal{U}_h(sl_2)$ à $q_0 \in \mathbb{C}^*$ en considérant $\mathcal{U}'_{q_0}(sl_2) = \mathcal{U}_h(sl_2)/(q_0 - e^{\frac{h}{2}})\mathcal{U}_h(sl_2)$. On a effectivement $\mathcal{U}_{q_0}(sl_2) \subset \mathcal{U}'_{q_0}(sl_2)$ mais pas égalité. Par exemple on a $e^{-\frac{h}{4}H} = q_0^{\frac{1}{2}H} \in U'_{q_0}(sl_2)$ qui correspondrait à $K^{\frac{1}{2}}$ dans $U_{q_0}(sl_2)$.

3.3.2 L'algèbre de Hopf $\mathcal{U}_q(sl_2)$

Revenons à la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathcal{U}_q(sl_2)$ (q non racine de l'unitée) que nous allons munir d'une structure d'algèbre de Hopf.

Proposition 45. *Il existe une unique structure de $\mathbb{C}$-algèbre de Hopf (respectivement de $\mathbb{C}[q, q^{-1}]$-algèbre de Hopf) sur $\mathcal{U}_q(sl_2)$ telle que :*

$$\Delta(E) = E \otimes 1 + K \otimes E \ , \ \Delta(F) = F \otimes K^{-1} + 1 \otimes F \ , \ \Delta(K) = K \otimes K$$
$$\epsilon(E) = \epsilon(F) = 0 \ \textit{et} \ \epsilon(K) = 1$$
$$S(E) = -K^{-1}E \ , \ S(F) = -FK \ , \ S(K) = K^{-1}$$

On peut munir de même $\mathcal{U}_h(sl_2)$ d'une structure d'algèbre de Hopf topologique (le coproduit Δ est alors à valeurs dans une completion h-adique de $\mathcal{U}_h(sl_2) \otimes_{\mathbb{C}[[h]]} \mathcal{U}_h(sl_2)$) en posant :

$$\Delta(E) = E \otimes 1 + e^{-h\frac{H}{2}} \otimes E \ , \ \Delta(F) = F \otimes e^{h\frac{H}{2}} + 1 \otimes F \ , \ \Delta(H) = H \otimes H$$
$$\epsilon(E) = \epsilon(F) = \epsilon H = 0$$
$$S(E) = -e^{h\frac{H}{2}}E \ , \ S(F) = -Fe^{-h\frac{H}{2}} \ , \ S(H) = -H$$

Proposition 46. *La $\mathbb{C}[[h]]$-algèbre topologique $\mathcal{U}_h(sl_2)$ munie de Δ, ϵ et S est une déformation formelle de l'algèbre de Hopf $\mathcal{U}(sl_2)$.*

3.3.3 Représentations de $\mathcal{U}_q(sl_2)$

Intéressons nous à présent aux représentations de $\mathcal{U}_q(sl_2)$ lorsque q n'est pas une racine de l'unité. On va voir que de nombreux résultats vrais pour $\mathcal{U}(sl_2)$ se généralisent. Il est utile d'introduire la notations suivantes : $[m]_q = \frac{q^m - q^{-m}}{q - q^{-1}}$ pour $m \in \mathbb{Z}$, $[m]_q! = [m]_q[m-1]_q...[1]_q$ pour $m \in \mathbb{N}$ et $\begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}_q = \frac{[m]_q!}{[m-j]_q![j]_q!}$ pour $0 \leq j \leq m$. Ce sont des éléments de $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$. Pour M un $\mathcal{U}_q(sl_2)$-module et $\lambda \in \mathbb{C}$, on notera $M_\lambda = \{m \in M / Km = \lambda m\}$ l'espace de poids λ (lorsque $m_\lambda \neq 0$).

Proposition 47. *Un $\mathcal{U}_q(sl_2)$-module M de dimension finie est somme directe de ses sous-espaces de poids. Les poids de M sont de la forme q^a ou $-q^{-a}$ avec $a \in \mathbb{Z}$.*

On a de plus la classification suivante :

Théorème 21. *Pour tout $N \geq 0$ il existe un $\mathcal{U}_q(sl_2)$-module simple $L_+(N)$ de base m_0, m_1,..., m_N (on convient $m_j = 0$ pour $j > N$ et $j < 0$) tel que pour tous $i \in \{0..N\}$:*

$$Km_i = q^{N-2i}m_i$$
$$Fm_i = m_{i+1}$$

$$Em_i = [i]_q[N+1-i]_q m_{i-1}$$

Pour tout $N \geq 0$ il existe un $\mathcal{U}_q(sl_2)$-module simple $L_-(N)$ de base m'_0, m'_1,..., m'_N (on convient $m'_j = 0$ pour $j > N$ et $j < 0$) tel que pour tous $i \in \{0..N\}$:

$$Km'_i = -q^{N-2i}m'_i$$

$$Fm'_i = m'_{i+1}$$

$$Em'_i = -[i]_q[N+1-i]_q m'_{i-1}$$

Tout $\mathcal{U}_q(sl_2)$-module simple de dimension $N+1$ est isomorphe à $L_+(N)$ ou à $L_-(N)$. Tout $\mathcal{U}_q(sl_2)$-module de dimension finie est isomorphe à une somme directe de modules de la forme $L_+(N)$ ou $L_-(N)$.

Ainsi la catégorie $Mod_f(\mathcal{U}_q(sl_2))$ des $\mathcal{U}_q(sl_2)$-modules de dimension finie est semi-simple.

3.4 Quantification des algèbres de Lie semi-simples

3.4.1 Définition du groupe quantique associé à $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$

On suppose que $q \in \mathbb{C}^*$ n'est pas une racine de l'unité. On se donne une algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}$ avec les notations de la première partie. La matrice de Cartan de $\mathfrak{g}$ est $A = (a_{ij})$. On normalise $(,)$ afin que $(\alpha, \alpha) = 2$ pour les racines α les plus courtes. On note $b_{ij} = (\alpha_i, \alpha_j)$, $r_i = \frac{b_{ii}}{2}$ et $q_i = q^{r_i}$ pour $1 \leq i, j \leq n$.

Définition 45. *La $\mathbb{C}$-algèbre $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ est définie par les générateurs E_i, F_i, K_i, K_i^{-1} $(1 \leq i \leq n)$ et les relations pour $1 \leq i, j \leq n$:*

$$K_iK_i^{-1} = 1 = K_i^{-1}K_i$$

$$K_iE_j = q^{b_{ij}}E_jK_i$$

$$K_iF_j = q^{-b_{ij}}F_jK_i$$

$$E_iF_j - F_jE_i = \delta_{ij}\frac{K_i - K_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}}$$

$$\sum_{s=0..1-a_{ij}} (-1)^s \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ s \end{bmatrix}_{q_i} E_i^{1-a_{ij}-s}E_jE_i^s = 0 \text{ si } i \neq j$$

$$\sum_{s=0..1-a_{ij}} (-1)^s \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ s \end{bmatrix}_{q_i} F_i^{1-a_{ij}-s}F_jF_i^s = 0 \text{ si } i \neq j$$

On note $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})^+$ (respectivement $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})^-$, $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})^0$) la sous-algèbre de $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ engendrée par les E_i (respectivement par les F_i, par les K_i et K_i^{-1}).

Proposition 48. *On a l'isomorphisme d'espaces vectoriels : $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}) \simeq \mathcal{U}_q(\mathfrak{g})^- \otimes \mathcal{U}_q(\mathfrak{g})^0 \otimes \mathcal{U}_q(\mathfrak{g})^+$.*

Remarquons que pour $1 \leq i \leq n$ la sous-algèbre de $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ engendrée par E_i, F_i, K_i, K_i^{-1} est isomorphe à $\mathcal{U}_{q_i}(sl_2)$.

En suivant la démarche de la section précédente, on peut définir avec les mêmes générateurs et relations la $\mathbb{C}[q, q^{-1}]$-algèbre $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ (ici q est une indéterminée). On considère aussi une nouvelle indéterminée h et on "remplace" q par $e^{-\frac{h}{2}}$ et K_i par $e^{-\frac{h}{2}\frac{b_{ii}}{2}H_i}$:

Définition 46. *On définit $\mathcal{U}_h(\mathfrak{g})$ comme la $\mathbb{C}[[h]]$-algèbre topologique engendrée par les générateurs E_i, F_i, H_i $(1 \leq i \leq n)$ et les relations pour $1 \leq i, j \leq n$:*

$$H_iH_j - H_jH_i = 0$$

$$H_iE_j - E_jH_i = a_{ij}E_i$$

$$H_iF_j - F_jH_i = -a_{ij}F_i$$

$$E_iF_j - F_jE_i = \delta_{ij}\frac{e^{-\frac{h}{2}\frac{b_{ii}}{2}H_i} - e^{\frac{h}{2}\frac{b_{ii}}{2}H_i}}{e^{-\frac{h}{2}\frac{b_{ii}}{2}} - e^{\frac{h}{2}\frac{b_{ii}}{2}}}$$

$$\sum_{s=0..1-a_{ij}} (-1)^s \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ s \end{bmatrix}_{e^{-\frac{h}{2}\frac{b_{ii}}{2}}} E_i^{1-a_{ij}-s}E_jE_i^s = 0 \text{ si } i \neq j$$

$$\sum_{s=0..1-a_{ij}} (-1)^s \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ s \end{bmatrix}_{e^{-\frac{h}{2}\frac{b_{ii}}{2}}} F_i^{1-a_{ij}-s}F_jF_i^s = 0 \text{ si } i \neq j$$

On voit que pour "$h=0$" (ou "$q=1$") les relations de $\mathcal{U}_h(\mathfrak{g})$ donnent celles de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

Proposition 49. *La $\mathbb{C}[[h]]$-algèbre topologique $\mathcal{U}_h(\mathfrak{g})$ est une déformation formelle de la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.*

En fait on peut "spécialiser" $\mathcal{U}_h(\mathfrak{g})$ à $q_0 \in \mathbb{C}^*$ en considérant $U'_{q_0}(\mathfrak{g}) = \mathcal{U}_h(\mathfrak{g})/(q_0 - e^{\frac{h}{2}})\mathcal{U}_h(\mathfrak{g})$. On a effectivement $U_{q_0}(\mathfrak{g}) \subset U'_{q_0}(\mathfrak{g})$ mais pas égalité. Par exemple on a $e^{-\frac{h}{4}H_1} = q_0^{\frac{1}{2}H_1} \in U'_{q_0}(sl_2)$ qui correspondrait à $K_1^{\frac{1}{2}}$ dans $U_{q_0}(\mathfrak{g})$.

3.4.2 L'algèbre de Hopf $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$

Revenons à la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ (q non racine de l'unitée) que nous allons munir d'une structure d'algèbre de Hopf.

Proposition 50. *Il existe une unique structure de $\mathbb{C}$-algèbre de Hopf (respectivement de $\mathbb{C}[q,q^{-1}]$-algèbre de Hopf) sur $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ telle que pour $1 \leq i \leq n$:*

$$\Delta(E_i) = E_i \otimes 1 + K_i \otimes E_i \ , \ \Delta(F_i) = F_i \otimes K_i^{-1} + 1 \otimes F_i \ , \ \Delta(K_i) = K_i \otimes K_i$$

$$\epsilon(E_i) = \epsilon(F_i) = 0 \ \textit{et} \ \epsilon(K_i) = 1$$

$$S(E_i) = -K_i^{-1}E_i \ , \ S(F_i) = -F_iK_i \ , \ S(K_i) = K_i^{-1}$$

On peut munir de même $\mathcal{U}_h(\mathfrak{g})$ d'une structure d'algèbre de Hopf topologique (le coproduit Δ est alors à valeurs dans une complétion h-adique de $\mathcal{U}_h(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{C}[[h]]} \mathcal{U}_h(\mathfrak{g})$) en posant :

$$\Delta(E_i) = E_i \otimes + e^{-h\frac{b_{ii}}{2}\frac{H_i}{2}} \otimes E_i \ , \ \Delta(F_i) = F_i \otimes e^{h\frac{b_{ii}}{2}\frac{H_i}{2}} + 1 \otimes F_i \ , \ \Delta(H_i) = H_i \otimes H_i$$

$$\epsilon(E_i) = \epsilon(F_i) = 0 \ , \ \epsilon(H_i) = 1$$

$$S(E_i) = -e^{h\frac{b_{ii}}{2}\frac{H_i}{2}}E_i \ , \ S(F_i) = -F_ie^{-h\frac{b_{ii}}{2}\frac{H_i}{2}} \ , \ S(H_i) = -H_i$$

Proposition 51. *La $\mathbb{C}[[h]]$-algèbre topologique $\mathcal{U}_h(\mathfrak{g})$ munie de Δ, ϵ et S est une déformation formelle de l'algèbre de Hopf $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.*

3.4.3 Représentations de $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$

Etudions à présent les représentations de $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ lorsque q n'est pas une racine de l'unité. On va voir que de nombreux résultats connus pour $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ se généralisent.

On note Q_2^* le groupe des homomorphismes de Q dans $\{-1,1\}$. Pour M un $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$-module, $\lambda \in \Lambda$ et $\sigma \in Q_2^*$, on notera $M_{\lambda,\sigma} = \{m \in M / \forall i \in \{1,...,n\}, K_im = \sigma(\alpha_i)q^{(\lambda,\alpha_i)}m\}$ un espace de poids. On note aussi : $M_\sigma = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_{\lambda,\sigma}$.

Proposition 52. *Un $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$-module M de dimension finie est somme directe de ses sous-espaces de poids :*

$$M = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda,\sigma\in Q_2^*} M_{\lambda,\sigma} = \bigoplus_{\sigma\in Q_2^*} M_\sigma$$

Un module M de dimension finie est dit de type σ si $M = M_\sigma$. On obtient ainsi la catégorie des $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$-modules de dimension finie de type σ qui est une sous-catégorie pleine de la catégorie des $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$-modules de dimension finie. En particulier un $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$-module est dit de type 1 si il est de type σ avec σ l'application constante égale à 1. Dans le cas des $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$-modules de type 1 on note M_λ à la place de $M_{\lambda,1}$.

Proposition 53. *La catégorie des $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$-modules de dimension finie est somme directe des catégories des $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$-modules de dimension finie de type σ. Ces dernières sont équivalentes les unes aux autres. De plus la catégorie des $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$-modules de dimension finie de type 1 est stable par produit tensoriel.*

On va donc à partir de maintenant se restreindre à l'étude des $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$-modules de dimension finie de type 1. On définit de manière analogue à la définition 20 la notion de vecteur de plus haut poids et à la définition 19 de module de plus haut poids.

Théorème 22. *Soit $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ une algèbre semi-simple quantifiée.*

a) Pour tout $\lambda \in \Lambda$ et $\sigma \in Q_2^*$ il existe un unique (à isomorphisme unique près) $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$-module irréductible de plus haut poids (λ,σ). On le note $L(\lambda,\sigma)$ et $L(\lambda) = L(\lambda,1)$.

b) Les $L(\lambda,\sigma)$ sont sommes directes de leurs sous-espaces de poids qui sont de dimension finie. Le $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$-module $L(\lambda)$ est de dimension finie si et seulement λ est dominant.

c) Tout $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$-module de dimension finie de type 1 irréductible est isomorphe à un $L(\lambda)$ avec λ un poids dominant.

3.4.4 Caractères, description de l'anneau de Grothendieck $Rep(\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}))$ et complète réductibilité

Pour deux $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$-modules de dimension finie de type 1, V et W, les $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$-modules de dimension finie $V \oplus W$ et $V \otimes W$ sont de type 1. On note $Rep(\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}))$ l'anneau de Grothendieck construit à partir de l'ensemble des classes d'isomorphismes de $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$-modules de dimension finie de type 1.
Comme pour les $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-modules de dimension finie, on définit une application $\chi : \mathrm{Rep}(\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})) \to \mathbb{Z}[\Lambda] \simeq \mathbb{Z}[y_i^{\pm 1}]_{1 \leq i \leq n}$ appelée caractère formel tel que pour un $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$-module M de dimension finie de type 1 on a :

$$\chi(M) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \dim(M_\lambda) e(\lambda)$$

Proposition 54. *L'application χ est un morphisme d'anneaux :*

$$\chi : Rep(\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})) \to \mathbb{Z}[y_i^{\pm 1}]_{1 \leq i \leq n}$$

Remarquer qu'on peut définir $\chi(L(\lambda)) \in \mathbb{Z}[[\Lambda]]$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. Regardons l'action du groupe de Weyl W de $\mathfrak{g}$:

Proposition 55. *Pour tout $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$-module de dimension finie V et tout $w \in W$, on a : $w.\chi(V) = \chi(V)$*

Les $\chi(V)$ sont W-invariants (ils appartiennent à $\mathbb{Z}[\Lambda]^W$). De plus :

Théorème 23. *L'application induite par χ définit un isomorphisme d'anneaux de l'anneau de Grothendieck $Rep(\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}))$ sur $\mathbb{Z}[\Lambda]^W$.*

En particulier on a d'après le théorème 11 :

Corollaire 6. *On a les isomorphismes d'anneaux :*

$$Rep(\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})) \simeq Rep(\mathfrak{g}) \simeq \mathbb{Z}[\Lambda]^W \simeq \mathbb{Z}[T_1, ..., T_n]$$

La catégorie associée à l'anneau $Rep(\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}))$ est semi-simple et tout $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$-module de dimension finie est complètement réductible.

Pour être plus précis :

Proposition 56. *Soit $\lambda \in \Lambda$ (respectivement $\lambda \in \Lambda^+$) et les modules qui lui sont associés : $V(\lambda)$ ($\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-module) et $L(\lambda)$ ($\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$-module). On a alors l'égalité dans $\mathbb{Z}[[\Lambda]]$ (respectivement dans $\mathbb{Z}[\Lambda]$) : $\chi(L(\lambda)) = ch_{V(\lambda)}$.*

En particulier on a comme dans le théorème 12 les formules de Weyl pour $\lambda \in \Lambda^+$:

$$\chi(L(\lambda)) = \frac{\sum_{w \in W} \epsilon(w) e(w(\lambda + \rho) - \rho)}{\prod_{\alpha \in R_+} (1 - e(-\alpha))} = \frac{\sum_{w \in W} \epsilon(w) e(w(\lambda + \rho) - \rho)}{\sum_{w \in W} \epsilon(w) e(w(\rho))}$$

$$\dim(L(\lambda)) = \prod_{\alpha \in R_+} \frac{(\lambda + \rho, \alpha)}{(\rho, \alpha)}$$

3.5 Quantification des algèbres de Lie affines

3.5.1 Définition du groupe quantique associé à $\mathcal{U}(\hat{\mathfrak{g}})$

On suppose que $q \in \mathbb{C}^*$ n'est pas une racine de l'unité. On se donne une algèbre de Lie affine $\hat{\mathfrak{g}}$ avec les notations correpondantes introduites précédemment. On note $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie semi-simple sous-jacente. La matrice de Cartan (affine) de $\hat{\mathfrak{g}}$ est notée $A = (a_{ij})_{0 \leq i,j \leq n}$. La matrice de Cartan de $\mathfrak{g}$ est notée $C = (c_{ij})_{1 \leq i \leq j \leq n}$. On normalise $(,)$ afin que $(\alpha, \alpha) = 2$ pour les racines α les plus courtes. On note $b_{ij} = (\alpha_i, \alpha_j)$ et $q_i = q^{\frac{b_{ii}}{2}}$ pour $0 \leq i, j \leq n$.

Définition 47. *La $\mathbb{C}$-algèbre $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ est définie par les générateurs E_i, F_i, K_i, K_i^{-1} ($0 \leq i \leq n$) et les relations pour $0 \leq i, j \leq n$:*

$$K_i K_i^{-1} = 1 = K_i^{-1} K_i$$

$$K_i E_j = q^{b_{ij}} E_j K_i$$

$$K_i F_j = q^{-b_{ij}} F_j K_i$$

$$E_iF_j - F_jE_i = \delta_{ij}\frac{K_i - K_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}}$$

$$\sum_{s=0..1-a_{ij}} (-1)^s \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ s \end{bmatrix}_{q_i} E_i^{1-a_{ij}-s} E_j E_i^s = 0 \text{ si } i \neq j$$

$$\sum_{s=0..1-a_{ij}} (-1)^s \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ s \end{bmatrix}_{q_i} F_i^{1-a_{ij}-s} F_j F_i^s = 0 \text{ si } i \neq j$$

Proposition 57. *La sous-algèbre de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ engendrée par les E_i, F_i, K_i, K_i^{-1} avec $1 \leq i \leq n$ est isomorphe à l'algèbre $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ avec $\mathfrak{g}$ semi-simple la sous-algèbre sous-jacente à $\hat{\mathfrak{g}}$.*

En suivant la démarche de la section précédente, on peut définir avec les mêmes générateurs et relations la $\mathbb{C}[q, q^{-1}]$ algèbre $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ (ici q est une indéterminée). On considère aussi une nouvelle indéterminée h et on "remplace" q par $e^{-\frac{h}{2}}$ et K_i par $e^{-\frac{h}{2}\frac{b_{ii}}{2}H_i}$. On obtient ainsi la $\mathbb{C}[[h]]$-algèbre topologique $\mathcal{U}_h(\hat{\mathfrak{g}})$ qui est une déformation formelle de la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathcal{U}(\hat{\mathfrak{g}})$. En fait on peut "spécialiser" $\mathcal{U}_h(\hat{\mathfrak{g}})$ à $q_0 \in \mathbb{C}^*$ en condidérant $U'_{q_0}(\hat{\mathfrak{g}}) = \mathcal{U}_h(\hat{\mathfrak{g}})/(q_0 - e^{\frac{h}{2}})\mathcal{U}_h(\hat{\mathfrak{g}})$. On a effectivement $U_{q_0}(\hat{\mathfrak{g}}) \subset U'_{q_0}(\hat{\mathfrak{g}})$ mais pas égalité. Par exemple on a $e^{-\frac{h}{4}H_1} = q_0^{\frac{1}{2}H_1} \in U'_{q_0}(\hat{\mathfrak{g}})$ qui correspondrait à $K_1^{\frac{1}{2}}$ dans $U_{q_0}(\hat{\mathfrak{g}})$.
On peut munir d'une structure de $\mathbb{C}$-algèbre de Hopf (respectivement de $\mathbb{C}[q, q^{-1}]$-algèbre de Hopf) la $\mathbb{C}$-algèbre (respectivement la $\mathbb{C}[q, q^{-1}]$-algèbre) $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ avec pour $0 \leq i \leq n$:

$$\Delta(E_i) = E_i \otimes 1 + K_i \otimes E \ ,\ \Delta(F_i) = F_i \otimes K_i^{-1} + 1 \otimes F_i \ ,\ \Delta(K_i) = K_i \otimes K_i$$

$$\epsilon(E_i) = \epsilon(F_i) = 0 \ ,\ \epsilon(K_i) = 1$$

$$S(E_i) = -K_i^{-1}E_i \ ,\ S(F_i) = -F_iK_i \ ,\ S(K_i) = K_i^{-1}$$

On peut munir de même $\mathcal{U}_h(\hat{\mathfrak{g}})$ d'une structure d'algèbre de Hopf topologique (le coproduit Δ est alors à valeurs dans une complétion h-adique de $\mathcal{U}_h(\hat{\mathfrak{g}}) \otimes_{\mathbb{C}[[h]]} \mathcal{U}_h(\hat{\mathfrak{g}})$) en posant :

$$\Delta(E_i) = E_i \otimes 1 + e^{-h\frac{b_{ii}}{2}\frac{H_i}{2}} \otimes E_i \ ,\ \Delta(F_i) = F_i \otimes e^{h\frac{b_{ii}}{2}\frac{H_i}{2}} + 1 \otimes F_i \ ,\ \Delta(H_i) = H_i \otimes H_i$$

$$\epsilon(E_i) = \epsilon(F_i) = \epsilon(H_i) = 0$$

$$S(E_i) = -e^{h\frac{b_{ii}}{2}\frac{H_i}{2}}E_i \ ,\ S(F_i) = -F_ie^{-h\frac{b_{ii}}{2}\frac{H_i}{2}} \ ,\ S(H_i) = -H_i$$

On obtient ainsi une déformation formelle de l'algèbre de Hopf $\mathcal{U}(\hat{\mathfrak{g}})$.

3.5.2 La "nouvelle" réalisation de Drinfeld de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$

Dans le cas d'une algèbre affine non-tordue $\hat{\mathfrak{g}}$, on a une autre réalisation de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$, qui est analogue à la réalisation de $\hat{\mathfrak{g}}$ en terme d'algèbre de courants. A partir de maintenant toutes les algèbres affines considérées seront non-tordues.

Théorème 24. *La $\mathbb{C}$-algèbre $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ a une autre réalisation comme algèbre engendrée par les $x_{i,m}^{\pm}$ ($1 \leq i \leq n$, $m \in \mathbb{Z}$), $k_i^{\pm}$ ($1 \leq i \leq n$), $h_{i,m}$ ($1 \leq i \leq n$, $m \in \mathbb{Z}^*$) et les éléments centraux $c^{\pm\frac{1}{2}}$, et les relations :*

$$k_ik_j = k_jk_i$$

$$k_ih_{j,m} = h_{j,m}k_i$$

$$k_ix_{j,m}^{\pm}k_i^{-1} = q^{\pm b_{ij}}x_{j,m}^{\pm}$$

$$[h_{i,m}, x_{j,m'}^{\pm}] = \pm\frac{1}{m}[mb_{ij}]_q c^{\mp\frac{|m|}{2}} x_{j,m+m'}^{\pm}$$

$$x_{i,m+1}^{\pm}x_{j,m'}^{\pm} - q^{\pm b_{ij}}x_{j,m'}^{\pm}x_{i,m+1}^{\pm} = q^{\pm b_{ij}}x_{i,m}^{\pm}x_{j,m'+1}^{\pm} - x_{j,m'+1}^{\pm}x_{i,m}^{\pm}$$

$$[h_{i,m}, h_{j,m'}] = \delta_{m,-m'}\frac{1}{m}[mb_{ij}]_q\frac{c^m - c^{-m}}{q_j - q_j^{-1}}$$

$$[x_{i,m}^{+}, x_{j,m'}^{-}] = \delta_{ij}\frac{c^{\frac{m-m'}{2}}\phi_{i,m+m'}^{+} - c^{-\frac{m-m'}{2}}\phi_{i,m+m'}^{-}}{q_i - q_i^{-1}}$$

$$\sum_{\pi\in\Sigma_s}\sum_{k=0..s}(-1)^k\begin{bmatrix}s\\k\end{bmatrix}_{q_i}x^{\pm}_{i,m_{\pi(1)}}...x^{\pm}_{i,m_{\pi(k)}}x^{\pm}_{j,m'}x^{\pm}_{i,m_{\pi(k+1)}}...x^{\pm}_{i,m_{\pi(s)}}=0$$

cette dernière relation devant être vérifiée pour $i\neq j$, $s=1-a_{ij}$ et toute suite d'entiers $m_1,...,m_s$. Le symbole σ_s désigne le groupe symétrique de rang s. Les $\phi^{\pm}_{i,m}\in\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ sont définis pour $1\leq i\leq n$ et $m\in\mathbb{Z}$ de manière unique en identifiant les coefficients des séries formelles d'indéterminée u respectivement dans $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})[[u]]$ et $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})[[u^{-1}]]$:

$$\sum_{m=0..\infty}\phi^+_{i,m}u^m=k_ie^{(q-q^{-1})\sum\limits_{m'=1..\infty}h_{i,m'}u^{m'}}$$

$$\sum_{m=0..\infty}\phi^-_{i,-m}u^{-m}=k_i^{-1}e^{-(q-q^{-1})\sum\limits_{m'=1..\infty}h_{i,-m'}u^{-m'}}$$

et en posant $\phi^+_{i,m}=0$ pour $m<0$ et $\phi^-_{i,m}=0$ pour $m>0$.

D'un point de vue classique et de manière intuitive, "on peut penser à" $x^+_{i,m}$ comme $e_i\otimes t^m$, à $x^-_{i,m}$ comme $f_i\otimes t^m$, à $k_i^{\pm}$ comme "associé" à $h_i\otimes 1$, à $h_{i,m}$ comme "associé" à $h_i\otimes t^m$, et à $c^{\frac{1}{2}}$ comme "associé à" K. On peut expliciter un isomorphisme de $\mathbb{C}(q)$-algèbres entre les deux réalisations :

$$f(K_i)=k_i\ ,\ f(E_i)=x^+_{i,0}\ ,\ f(F_i)=x^-_{i,0}\text{ si }1\leq i\leq n$$

$$f(K_0)=ck_\theta^{-1}\ ,\ f(E_0)=\mu w^-_{i_1}...w^-_{i_k}(x^-_{j,1})k_\theta^{-1}\ ,\ f(F_0)=\lambda w^+_{i_1}k_\theta w^+_{i_1}...w^+_{i_k}(x^+_{j,-1})$$

avec $\theta=\sum\limits_{i=1..n}m_i\alpha_i$ ($m_i\in\mathbb{Z}$) la plus haute racine de $\mathfrak{g}$, $k_\theta=\prod\limits_{i=1..n}k_i^{m_i}$, $\lambda\in\mathbb{C}^*$, $1\leq i_1,...i_k,j\leq n$ tel que dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, le vecteur de racine θ vérifie :

$$X_\theta=\lambda[X_{i_1},[X_{i_2},...,[X_{i_k},X_j]]...]$$

les $w_i^{\pm}:\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})\to\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ définis par :

$$w_i^{\pm}(a)=x^{\pm}_{i,0}a-k_i^{\pm}qk_i^{\mp}x^{\pm}_{i,0}$$

et enfin $\mu\in\mathbb{C}(q)$ tel que $[E_0,F_0]=\frac{K_0-K_0^{-1}}{q_\theta-q_\theta^{-1}}$ avec $q_\theta=q_1^{m_1}..q_n^{m_n}$.

3.5.3 Des automorphismes de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$

Proposition 58. *Pour tout $(n+1)$-uplet $\sigma=(\sigma_0,...,\sigma_n)\in\{\pm1\}^{n+1}$, il existe un unique automorphisme a_σ de la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ tel que sur les générateurs de la réalisation de la définition 47, on a :*

$$a_\sigma(K_i)=\sigma_iK_i\ ,\ a_\sigma(E_i)=\sigma_iE_i\ ,\ a_\sigma(F_i)=F_i$$

On dispose par cette construction de 2^{n+1} automorphismes.

Proposition 59. *Il existe un unique automorphisme b de la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ tel que sur les générateurs de la nouvelle réalisation du théorème 24, on a :*

$$b(c^{\pm\frac{1}{2}})=-c^{\pm\frac{1}{2}}\ ,\ b(x^{\pm}_{i,m})=(-1)^mx^{\pm}_{i,m}\ ,\ b(k_i)=k_i\ ,\ b(h_{i,m})=h_{i,m}$$

Proposition 60. *Pour $z\in\mathbb{C}^*$ il existe un unique automorphisme τ_z de l'algèbre de Hopf $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ tel que sur les générateurs de la nouvelle réalisation du théorème 24, on a :*

$$\tau_z(x^{\pm}_{i,m})=z^mx^{\pm}_{i,m}\ ,\ \tau_z(\phi^{\pm}_{i,m})=z^m\phi^{\pm}_{i,m}\ ,\ \tau_z(c^{\frac{1}{2}})=c^{\frac{1}{2}}\ ,\ \tau_z(k_i)=k_i$$

Avec les mêmes relations on obtient un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres $\tau_z:\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})\to\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})[z,z^{-1}]$. On garde la même notation τ_z tant qu'il n'y a pas de confusion possible.

Comme $\tau_z(\phi^+_{i,r})=z^r\phi^+_{i,r}$ et τ_z est un automorphisme on a :

$$\phi_i^+=\sum_{m=0..\infty}\phi^+_{i,m}u^m=k_ie^{(q-q^{-1})\sum\limits_{m'=1..\infty}h_{i,m'}u^{m'}}$$

$$k_i^{-1}\tau_z(\phi_i^+)=e^{(q-q^{-1})\sum\limits_{m'=1..\infty}\tau_z(h_{i,m'})u^{m'}}=e^{(q-q^{-1})\sum\limits_{m'=1..\infty}h_{i,m'}z^{m'}u^{m'}}$$

En développant en u cette dernière égalité on a les termes de degré m à gauche de la forme :

$$((q-q^{-1})\tau_z(h_{i,m}) + \text{terme ne dépendant que des } \tau_z(h_{i,m'}) \text{ avec } m' < m)u^m$$

et à droite de la forme :

$$((q-q^{-1})z^m h_{i,m} + \text{terme ne dépendant que des } h_{i,m'}z^{m'} \text{ avec } m' < m)u^m$$

Ensuite on obtient par récurrence sur $m > 0$, et de manière analogue pour $m < 0$:

Proposition 61. *Pour $i \in I$ et $m \in \mathbb{Z}^*$, on a $\tau_z(h_{i,m}) = z^m h_{i,m}$.*

L'application $\tau_z : \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}) \to \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})[z, z^{-1}]$ étant définie sur les générateurs de la nouvelle réalisation du théorème 24 et étant compatible avec les relations de cette réalisation, on obtient :

Proposition 62. *On a une décomposition :*

$$\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}) = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} (\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))_m$$

avec pour $m \in \mathbb{Z}$, $(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))_m = \{x \in \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}) / \tau_z(x) = z^m x\}$.

On peut de même définir un morphisme d'algèbres topologiques $\tau_z : \mathcal{U}_h(\hat{\mathfrak{g}}) \to \mathcal{U}_h(\hat{\mathfrak{g}})$, et on obtient une décomposition :

$$\mathcal{U}_h(\hat{\mathfrak{g}}) = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} (\mathcal{U}_h(\hat{\mathfrak{g}}))_m$$

3.5.4 Représentations de dimension finie de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$

On ne peut pas définir en général de morphisme d'évalutation $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}) \to \mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ comme dans le cas classique. La description des représentations de dimension finie va être plus délicate. De plus on n'aura pas d'analogie aussi forte entre les représentations "classiques" et "quantiques" que dans le cas semi-simple.

Définition 48. *Une représentation V de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ est dite de type 1 si $c^{\frac{1}{2}}$ agit par l'identité sur V et si V est somme directe de ses sous-espaces de poids : $V_\lambda = \{v \in V / \forall i \in \{1, ..., n\}, k_i.v = q^{(\lambda,\alpha_i)}v\}$ avec $\lambda \in \Lambda$ (Λ étant le réseau des poids de $\mathfrak{g}$).*

Proposition 63. *Toute représentation de dimension finie irréductible de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ peut être obtenue en tordant une représentation de type 1 par un automorphisme de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ qui est un produit d'automorphismes a_σ et b.*

Ici la représentation V_l de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ obtenue en tordant la représentation V par l'automorphisme l de la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ est définie par la nouvelle action de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ sur V : $u.'v = l(u).v$.

Comme dans le cas semi-simple, on peut se restreindre à l'étude des représentations de dimension finie de type 1 qui sont stables par $\oplus$, $\otimes$ et par passage au quotient. On note alors $Rep(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))$ l'anneau de Grothendieck construit à partir des classes d'isomorphismes de représentations de dimension finie de type 1 de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$.

Proposition 64. *Toute représentation V de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ de type 1 donne par l'homomorphisme canonique de la proposition 57 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}) \to \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ un $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$-module de type 1. On obtient ainsi un morphisme d'anneaux res dit de restriction :*

$$res : Rep(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})) \to Rep(\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}))$$

Définition 49. *Pour $v \in V$ un vecteur d'une représentation de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ de type 1 : on dit que v est un vecteur de poids si il est non nul et si il appartient à un sous-espace de poids V_λ pour un $\lambda \in \Lambda$.*
On dit que v est un vecteur de plus haut poids de V si c'est un vecteur de poids, si $x_{i,m}^+.v = 0$ pour $1 \leq i \leq n$ et $m \in \mathbb{Z}$, et si il existe une famille de complexes $(\psi_{i,m}^\pm)_{1\leq i\leq n, m\in\mathbb{Z}}$ telle que : $\phi_{i,m}^\pm.v = \psi_{i,m}^\pm v$.
Une représentation V de type 1 est dite de plus haut poids si elle admet un vecteur de plus haut poids $v \in V$ tel que $V = \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}).v$. Dans ce cas la famille $(\psi_{i,m}^\pm)_{1\leq i\leq n, m\in\mathbb{Z}}$ est appelée un plus haut poids de V.

Proposition 65. *Toute représentation de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ de dimension finie irréductible de type 1 est de plus haut poids. Le plus haut poids est alors défini de manière unique.*

3.5.5 Classification des représentations irréductibles de dimension finie de type 1

Pour $1 \leq i \leq n$ on définit les séries formelles $\Phi_i^+(u) \in \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})[[u]]$ et $\Phi_i^-(u) \in \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})[[u^{-1}]]$ par :

$$\Phi_i^\pm(u) = \sum_{m=0..\infty} \phi_{i,m}^\pm u^{\pm m}$$

Si V est irréductible de type 1 est de plus haut poids $(\psi_{i,m}^{\pm})_{1\leq i\leq n, m\in\mathbb{Z}}$, on définit pour $1 \leq i \leq n$ les séries formelles à coefficients complexes $\Psi_i^+ \in \mathbb{C}[[u]]$ et $\Psi_i^- \in \mathbb{C}[[u^{-1}]]$ par :

$$\Psi_i^{\pm}(u) = \sum_{m=0..\infty} \psi_{i,m}^{\pm} u^{\pm m}$$

En définissant de manière naturelle l'action de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})[[u]]$ sur $V[[u]]$ (respectivement de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})[[u^{-1}]]$ sur $V[[u^{-1}]]$) on a pour un vecteur de plus haut poids $v \in V$: $\Phi_i^+(u).v = \Psi_i^+(u)v$ (respectivement $\Phi_i^-(u).v = \Psi_i^-(u)v$). On interprète $\Psi_i^{\pm}(u)$ comme "une valeur propre" de l'opérateur $\Phi_i^{\pm}(u)$.

Théorème 25. *Soit V une représentation de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ de dimension finie irréductible de type 1 de plus haut poids $(\psi_{i,m}^{\pm})_{1\leq i\leq n, m\in\mathbb{Z}}$. Alors il existe un unique n-uplet $P = (P_i)_{1\leq i\leq n} \in (\mathbb{C}[u])^n$ de polynômes de terme constant égal à 1 tel qu'on a les égalités respectivement dans $\mathbb{C}[[u]]$ et $\mathbb{C}[[u^{-1}]]$:*

$$\psi_i^+(u) = q_i^{deg(P_i)} \frac{P_i(uq_i^{-1})}{P_i(uq_i)} \text{ et } \psi_i^-(u) = q_i^{deg(P_i)} \frac{P_i(uq_i^{-1})}{P_i(uq_i)}$$

De plus à tout n-uplet $P = (P_i)_{1\leq i\leq n} \in (\mathbb{C}[u])^n$ de polynômes unitaires de terme constant non nul on peut associer une unique classe d'isomorphisme de représentations de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ de dimension finie irréductible de type 1 avec un plus haut poids vérifiant les égalités précédentes. L'application $P \mapsto V(P)$ ainsi définie est une bijection.

On notera $V(P)$ un représentant de cette classe d'isomorphismes.
En particulier pour $1 \leq i \leq N$ et $z \in \mathbb{C}^*$, on définit la représentation $V_i(z)$ comme la représentation de dimension finie irréductible de type 1 $V_i(z) = V(P_z^{(i)})$ associée au n-uplet $P_z^{(i)} = (P_1, ..., P_n)$ avec $P_j(u) = 1$ si $j \neq i$ et $P_i(u) = 1 - zu$. On notera alors $v_{i,z} \in V_i(z)$ un vecteur de plus haut poids de $V_i(z)$.

Proposition 66. *Pour P un n-uplet de polynômes de terme constant égal à 1, le $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$-module $V(P)$ est un $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$-module de plus haut poids $\lambda = \sum_{i\in I} deg(P_i)\omega_i$, la multiplicité de ce poids étant 1.*

Pour un n-uplet de polynômes de terme constant égal à 1 $P = (P_i)_{1\leq i\leq n}$ et $z \in \mathbb{C}^*$, on note P^z le n-uplet de polynômes de terme constant égal à 1 avec $P_i^z(u) = z^{-deq(P_i)}P_i(uz)$.

Proposition 67. *Pour P un n-uplet de polynômes de terme constant égal à 1 et $z \in \mathbb{C}^*$, la représentation $V(P^z)$ est isomorphe à la représentation obtenue en tordant la représentation $V(P)$ par l'automorphisme τ_z de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$.*

Pour deux n-uplet $P = (P_i)_{1\leq i\leq n}$ et $Q = (Q_i)_{1\leq i\leq n}$ de polynômes de terme constant égal à 1, on note $P \otimes Q$ le n-uplet $(P_iQ_i)_{1\leq i\leq n}$ de polynômes de terme constant égal à 1.

Proposition 68. *Soient P et Q deux n-uplet de polynômes de terme constant égal à 1 et v_P, v_Q des vecteurs de plus haut poids respectivement de $V(P)$ et de $V(Q)$. Alors le $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$-module $V(P \otimes Q)$ est isomorphe à un quotient du sous $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$-module de $V(P) \otimes V(Q)$ engendré par $v_P \otimes v_Q$.*

Corollaire 7. *Tout $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$-module V de dimension finie de type 1 irréductible est isomorphe à un quotient du sous-module engendré par $v_{i_1,a_1} \otimes ... \otimes v_{i_m,a_m}$ d'un module de la forme $V_{i_1}(z_1) \otimes ... \otimes V_{i_m}(z_m)$. De plus les paramètres $(i_1, a_1), ..., (i_m, a_m)$ sont déterminés uniquement par V à permutation près et V est déterminée à isomorphisme près par la donnée des $(i_1, a_1), ..., (i_m, a_m)$. En particulier les $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$-modules V de type 1 de dimension 1 sont les $V_i(z)$ ($i \in I, z \in \mathbb{C}^*$).*

La description précédente ne permet pas, contrairement au cas classique, de décrire le produit tensoriel de représentations de dimension finie. De plus, comme on va le voir dans la partie suivante, en définissant une application caractère de manière "classique" (c'est à dire par analogie avec les sections précédentes), on ne parvient pas à l'utiliser de manière aussi efficace que dans le cas semi-simple. C'est pourquoi nous donnerons plus loin la définition des q-caractères χ_q.

3.5.6 Représentations de $\mathcal{U}_q(\hat{sl}_2)$

Dans le cas $\mathcal{U}_q(\hat{sl}_2)$, on a $n = 1$, et les générateurs de la réalisation décrite dans le théorème 24 seront notés simplement $x_m^{\pm}$ ($m \in \mathbb{Z}$), $k^{\pm}$, h_m ($m \in \mathbb{Z}^*$), $c^{\pm\frac{1}{2}}$ et $\phi_m^{\pm}$ ($m \in \mathbb{Z}$).

L'étude des représentations est facilitée par l'existence d'analogues quantiques des morphismes d'évaluation :

Proposition 69. *Pour $a \in \mathbb{C}^*$, il existe un unique morphisme d'algèbres $ev_a : \mathcal{U}_q(\hat{sl}_2) \to \mathcal{U}_q(sl_2)$ tel que :*

$$ev_a(E_0) = q^{-1}aF \ , \ ev_a(F_0) = qa^{-1}E \ , \ ev_a(E_1) = E \ , \ ev_a(F_1) = F_1 \ , \ ev_a(K_0) = K^{-1} \ , \ ev_a(K_1) = K$$

avec $E, F, K^{\pm}$ les générateurs de $\mathcal{U}_q(sl_2)$ de la définition 43, et $E_0, E_1, F_0, F_1, K_0^{\pm}, K_1^{\pm}$ les générateurs de $\mathcal{U}_q(\hat{sl}_2)$ de la définition 47.

On a alors pour $m \in \mathbb{Z}$:

$$ev_a(x_m^+) = q^{-m}a^m K^m E \ , \ ev_a(x_m^-) = q^{-m}a^m K^m \ , \ ev_a(c^{\frac{1}{2}}) = 1 \ , \ ev_a(K) = K$$

Ce résultat permet de munir un $\mathcal{U}_q(sl_2)$-module (V, π_V) d'une structure de $\mathcal{U}_q(\hat{sl}_2)$-module $(V, \pi_V \circ ev_a)$ pour chaque $a \in \mathbb{C}^*$. De plus :

Proposition 70. *Pour $a \in \mathbb{C}^*$, un $\mathcal{U}_q(sl_2)$-module de type 1 est muni par ev_a d'une structure de $\mathcal{U}_q(\hat{sl}_2)$-module de type 1. On en déduit un morphisme de groupes : $evr_a : Rep(\mathcal{U}_q(sl_2)) \to Rep(\mathcal{U}_q(\hat{sl}_2))$ qui transforme une représentation en une représentation.*

Définition 50. *Pour $a \in \mathbb{C}^*$ et $r \in \mathbb{N}^*$, on définit la représentation $L_r(a) \in Rep(\mathcal{U}_q(\hat{sl}_2))$ comme l'image $L_r(a) = evr_a(L_+(r))$ de la représentation $L_+(r) \in Rep(\mathcal{U}_q(sl_2))$ du théorème 21 par l'application evr_a de la proposition 70.*

Proposition 71. *L'espace vectoriel sous-jacent à $L_r(a)$ est de dimension $r+1$. Il existe une base $(v_0, ..., v_r)$ telle que pour $m \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq i \leq r$ on a :*

$$x_m^+.v_i = a^m q^{m(r-2i+1)}[r-i+1]_q v_{i-1} \ , \ x_m^-.v_i = a^m q^{m(r-2i-1)}[i+1]_q v_{i+1} \ , \ k^{\pm}.v_i = q^{\pm(r-2i)}v_i$$

en notant $v_{-1} = v_{r+1} = 0$.

Corollaire 8. *Pour $r \in \mathbb{N}^*$, les représentations $L_r(a)$, $a \in \mathbb{C}^*$ sont distinctes et irréductibles.*

On reviendra plus loin sur l'étude de ces représentations.

Théorème 26. *Tout $\mathcal{U}_q(\hat{sl}_2)$-module V irréductible est de la forme $V = L_{r_1}(b_1) \otimes ... \otimes L_{r_m}(b_m)$ pour un $m \in \mathbb{N}$ et deux m-uplets $(r_1, ..., r_m) \in \mathbb{N^*}^m$, $(b_1, ..., b_m) \in \mathbb{C^*}^m$. De plus, si on considère $P(u) = \prod_{j=1..M}(1 - ua_j)$ le polynôme de terme constant égal à 1 du théorème 25 tel que $V = V(P)$, l'écriture précédente peut être choisie pour que $P = \prod_{i=1..m} P_i$, avec P_i polynôme tel que $L_{r_i}(b_i) = V(P_i)$.*

4 R-matrice universelle

4.1 Motivations en physique

4.1.1 Modèles de mécanique statistique sur réseau

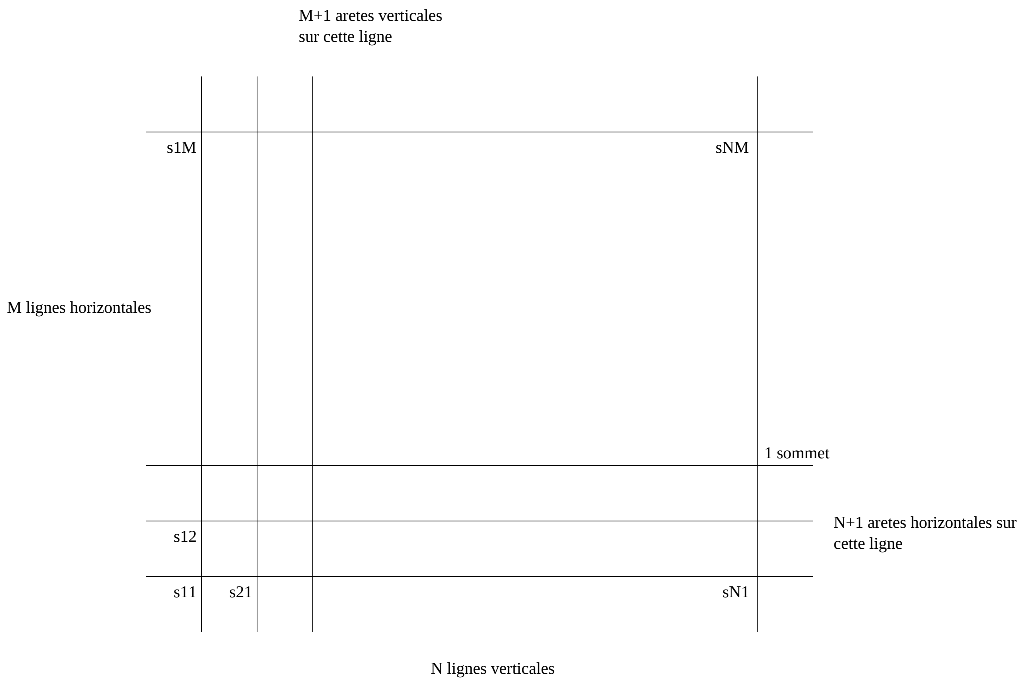

Fig. 1 : Réseau de format $N \times M$

On considère un réseau carré de format $N \times M$: il est formé d'un ensemble S de NM sommets, d'un ensemble A_v de $M(N+1)$ arêtes verticales et d'un ensemble A_h de $N(M+1)$ arêtes horizontales.

On suppose que c'est un système physique pour lequel chaque arête verticale peut prendre un état dans un ensemble E_v et chaque arête horizontale peut prendre un état dans un ensemble E_h. On suppose que E_v et E_h sont finis. Une configuration du système est donc une paire de deux applications $\sigma_v : A_v \to E_v$ et $\sigma_h : A_h \to E_h$. L'ensemble des configurations est noté Ω.

Afin de se donner une loi de probabilité sur Ω on se donne une fonction énergie $E : \Omega \to \mathbb{R}$. L'énergie rend compte des interactions entre les différentes arêtes du système. Selon le principe de Boltzmann, la probabilité pour le système de se trouver dans la configuration $\omega \in \Omega$ est proportionnelle à $e^{-\beta E(\omega)}$. Ici β est une constante (c'est à dire imposée par le milieu extérieur) inversement proportionnelle à la température. Ceci amène à introduire le facteur de renormalisation appelé fonction de partition :

$$Z = \sum_{\omega \in \Omega} e^{-\beta E(\omega)}$$

On obtient alors la probabilité de se trouver dans la configuration $\omega \in \Omega$:

$$p(\omega) = \frac{e^{-\beta E(\omega)}}{Z}$$

La fonction de partition permet également de calculer de nombreuses grandeurs physiques du système, comme par exemple l'énegie moyenne $U = -\frac{1}{Z\beta}\frac{\partial Z}{\partial \beta}$, l'énergie libre $F = -\frac{1}{\beta} ln(Z)$... Calculer Z est donc essentiel à l'étude statistique du système.

4.1.2 Hypothèse de localité

Une hypothèse usuelle en mécanique statistique est la localité : seules les arêtes ayant un sommet commun interagissent. On peut donc considérer qu'à chaque sommet $s \in S$ est associée une énergie élémentaire $E(s, \omega, \lambda) \in \mathbb{R}$, dépendant du sommet s, de la configuration ω et éventuellement d'autres paramètres physiques du système modélisés par la variable λ, appelée paramètre spectral. Ces énergies élémentaires sont choisies pour que :

$$E(\omega) = \sum_{s \in S} E(s, \omega, \lambda)$$

Dans ce cas la localité peut s'exprimer par le fait que $\omega \mapsto E(s, \omega, \lambda)$ ne dépend que de l'état des arêtes adjacentes à s, soit :

$$E(s, \omega, \lambda) = E(s, a, a', b, b', \lambda)$$

avec a, a', b, b' les états respectifs des arêtes adjacentes à s :

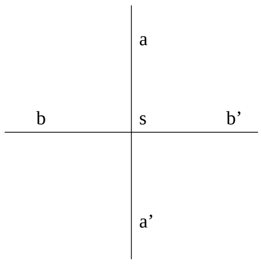

Fig. 2 : Sommet s avec 4 arêtes adjacentes dans des états respectifs a, a', b, b'

On définit alors le poids de Boltzmann de ce sommet :

$$w_s(\omega, \lambda) = w_s(b, a, b', a', \lambda) = e^{-\beta E(s,\omega,\lambda)} = e^{-\beta E(s,a,a',b,b',\lambda)}$$

et la matrice des poids de Boltzmann $L(s, \lambda)$ de format $card(E_h)card(E_v) \times card(E_h)card(E_v)$ en posant pour $(b, a, b', a') \in E_h \times E_v \times E_h \times E_v$:

$$L(s, \lambda)_{(b,a;b',a')} = w_s(b, a, b', a', \lambda)$$

On peut réécrire la fonction de partition :

$$Z = \sum_{\omega \in \Omega} \prod_{s \in S} w_s(\omega, \lambda)$$

4.1.3 Hypothèse de périodicité

On suppose que les conditions aux limites sont périodiques (ce qui simplifie les calculs, qui sont analogues dans le cas général). L'hypothèse de périodicité revient à supposer que le réseau se trouve sur un tore. On définit un système de coordonnées sur les arêtes comme indiqué sur la figure :

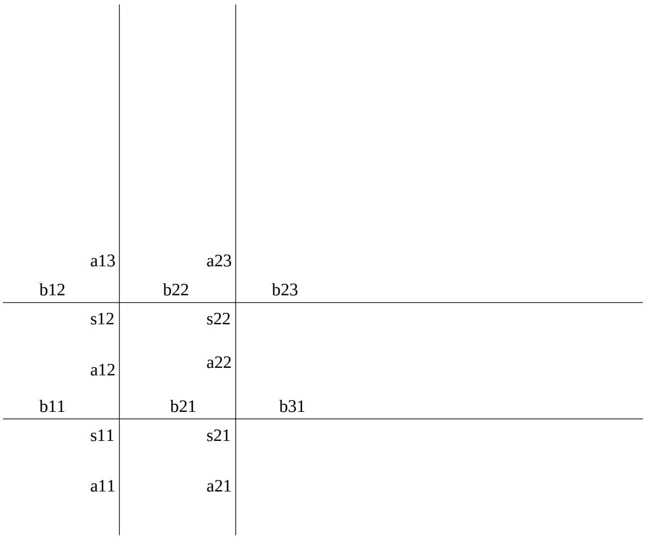

Fig. 3 : Définition de coordonnées sur le réseau

La condition de périodicité signifie qu'on se limite aux configurations pour lesquelles :

$$b_{1,j} = b_{N+1,j} \text{ pour } 1 \leq j \leq M$$

$$a_{i,1} = a_{i,M+1} \text{ pour } 1 \leq i \leq N$$

Les autre configurations ont une probabilité nulle, c'est à dire une énergie associée infinie.

4.1.4 Calcul de la fonction de partition

Pour calculer Z on va travailler ligne par ligne :

Fig. 4 : Ligne formée de $N+1$ arêtes horizontales dans des états $b_1, ..., b_{N+1}$ et de N sommets $s_1, ..., s_N$

Pour cette ligne on introduit le terme :

$$w(a_1, ..., a_n, a'_1, ..., a'_n, \lambda) = \sum_{b_1, b_2, ..., b_N \in E_h} \prod_{i=1..N} w_{s_i}(b_i, a_i, b_{i+1}, a'_i, \lambda) \text{ avec } b_{N+1} = b_1$$

Pour ce nouveau terme, la variable λ contient aussi l'information relative à la spécificité du poids w_{s_i} de chaque sommet de la ligne. On a donc un paramètre spectral par ligne, on les notera $(\lambda_1, ..., \lambda_N)$. On peut alors calculer Z :

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{a_{1,1}, ..., a_{N,1} \in E_v} \prod_{a_{1,2}, ..., a_{N,2} \in E_v} \prod_{a_{1,3}, ..., a_{N,3} \in E_v} \cdots \prod_{a_{1,M}, ..., a_{N,M} \in E_v} \\ & w(a_{1,1}, ..., a_{N,1}, a_{1,2}, ..., a_{N,2}, \lambda_1) w(a_{1,2}, ..., a_{N,2}, a_{1,3}, ..., a_{N,3}, \lambda_2) \\ & ... w(a_{1,M}, ..., a_{N,M}, a_{1,1}, ..., a_{N,1}, \lambda_M) \\ &= tr(T(\lambda_1) ... T(\lambda_M)) \end{aligned}$$

où $T(\lambda)$ est la matrice de format $card(E_v)^N \times card(E_v)^N$ avec pour $(a_1, ..., a_N; a'_1, ..., a'_N) \in E_v^N \times E_v^N$:

$$T(\lambda)_{(a_1, ..., a_N; a'_1, ..., a'_N)} = w(a_1, ..., a_N, a'_1, ..., a'_N, \lambda)$$

Une telle matrice est appelée une matrice de transfert du système.

4.1.5 Commutativité des matrices de transfert

En pratique, une condition usuelle pour l'étude de tels systèmes consiste à supposer que les matrices $T(\lambda)$ sont simultanément diagonalisables. Ceci permet en particulier de calculer plus aisément la trace du produit matriciel $T(\lambda_1)...T(\lambda_M)$. On demande en particulier que pour tout couple (λ, λ') de paramètres spectraux :

$$[T(\lambda), T(\lambda')] = 0$$

Les matrices de poids de Boltzmann $L(\lambda)$ (ici λ est aussi un paramètre spectral dépendant des sommets, des poids...) peuvent être interprétées comme des endomorphismes de $H \otimes V$ ou de $V \otimes H$ où H (respectivement V) est l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de base indéxée par E_h (respectivement par E_v).

Proposition 72. *Une condition suffisante* (1) *sur les matrices de poids de Boltzmann $L(\lambda)$ pour que les matrices de transferts commutent est l'existence pour tout couple (λ, λ') de paramètres spectraux d'un endomorphisme inversible $R(\lambda, \lambda')$ de $H \otimes H$ tel qu'on ait dans $End(H \otimes V \otimes H)$ la formule suivante :*

$$R(\lambda, \lambda')(L(\lambda) \otimes Id_H)(Id_H \otimes L(\lambda')) = (Id_H \otimes L(\lambda'))(L(\lambda) \otimes Id_H)R(\lambda, \lambda')$$

où on note encore $R(\lambda, \lambda')$ l'image canonique de $R(\lambda, \lambda')$ dans $End(H \otimes V \otimes H)$.

4.1.6 Equation de Yang-Baxter

Pour un $R(\lambda, \lambda')$ comme dans la proposition 72, on définit

$$R_{12}(\lambda, \lambda'), R_{23}(\lambda, \lambda'), R_{13}(\lambda, \lambda') \in End(H \otimes H \otimes H)$$

par :

$$R_{12}(\lambda, \lambda') = R(\lambda, \lambda') \otimes Id_H$$
$$R_{23}(\lambda, \lambda') = Id_H \otimes R(\lambda, \lambda')$$
$$R_{13}(\lambda, \lambda') = P_{23}R_{12}(\lambda, \lambda')P_{23}$$

avec $P_{23} \in End(H \otimes H \otimes H)$ tel que $P_{23}(u \otimes v \otimes w) = u \otimes w \otimes v$.

Proposition 73. *Si la condition* (1) *de la proposition 72 est vérifiée, on a les égalités suivantes dans $End((V \otimes H)^{\otimes 3})$:*

$$\begin{aligned} &X(L(\lambda) \otimes Id_{V\otimes H} \otimes Id_{V\otimes H})(Id_{V\otimes H} \otimes L(\lambda') \otimes Id_{V\otimes H})(Id_{V\otimes H} \otimes Id_{V\otimes H} \otimes L(\lambda'')) \\ &= (Id_{V\otimes H} \otimes Id_{V\otimes H} \otimes L(\lambda''))(Id_{V\otimes H} \otimes L(\lambda') \otimes Id_{V\otimes H})(L(\lambda) \otimes Id_{V\otimes H} \otimes Id_{V\otimes H})X \end{aligned}$$

avec X égal à l'image canonique X_1 de $R_{12}(\lambda, \lambda')R_{13}(\lambda, \lambda'')R_{23}(\lambda', \lambda'')$ dans $End((V \otimes H)^{\otimes 3})$ (respectivement X_2 de $R_{23}(\lambda', \lambda'')R_{13}(\lambda, \lambda'')R_{12}(\lambda, \lambda')$).

En particulier on obtient des conditions sur les $R(\lambda, \lambda')$ du type (les $R(\lambda, \lambda')$ étant inversibles) :

$$X_2^{-1}X_1A = AX_2^{-1}X_1$$

avec $A = (L(\lambda) \otimes Id_{V\otimes H} \otimes Id_{V\otimes H})(Id_{V\otimes H} \otimes L(\lambda') \otimes Id_{V\otimes H})(Id_{V\otimes H} \otimes Id_{V\otimes H} \otimes L(\lambda''))$. Ces conditions sont automatiquement vérifiées si on a $X_1 = X_2$, soit :

$$R_{12}(\lambda, \lambda')R_{13}(\lambda, \lambda'')R_{23}(\lambda', \lambda'') = R_{23}(\lambda', \lambda'')R_{13}(\lambda, \lambda'')R_{12}(\lambda, \lambda')$$

On l'appelle équation de Yang-Baxter avec paramètres spectraux. Dans cette partie on présente des résultats relatifs à l'existence (dans un sens à préciser) d'une solution de l'équation de Yang-Baxter pour les groupes quantiques.

4.2 Motivations mathématiques et définition

4.2.1 Rappels sur les groupes de tresses

Pour $n \geq 3$ le groupe symétrique S_n peut être décrit par les générateurs $\sigma_i = (i, i+1)$ $(1 \leq i \leq n-1)$ et les relations :

$$\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \text{ si } 1 \leq i, j \leq n-1 \text{ et } | i-j | > 1$$

$$\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} \text{ si } 1 \leq i \leq n-2$$
$$\sigma_i^2 = 1 \text{ si } 1 \leq i \leq n-1$$

Alors pour $n \geq 3$ le groupe de tresses B_n est le groupe défini par les générateurs $\sigma_1, ..., \sigma_{n-1}$ et les relations décrivant S_n exceptées les $n-1$ relations $\sigma_i^2 = 1$. On dit B_n est le groupe de tresses associé au groupe S_n.

De manière plus générale :

Proposition 74. *Le groupe de Weyl W d'une algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}$ de matrice de Cartan A peut être décrit par les générateurs r_i ($1 \leq i \leq n$) et les relations ($1 \leq i,j \leq n$) :*

$$r_i^2 = 1$$
$$r_ir_j = r_jr_i \text{ si } a_{ij}a_{ji} = 0$$
$$r_ir_jr_i = r_jr_ir_j \text{ si } a_{ij}a_{ji} = 1$$
$$(r_ir_j)^2 = (r_jr_i)^2 \text{ si } a_{ij}a_{ji} = 2$$
$$(r_ir_j)^3 = (r_jr_i)^3 \text{ si } a_{ij}a_{ji} = 3$$

On définit le groupe de tresses B associé à W par les générateurs $r_1, ..., r_n$ et les relations décrivant W exceptées les n relations $r_i^2 = 1$.

4.2.2 R-matrices d'un espace vectoriel

Définition 51. *Soit V un espace vectoriel sur un corps k et c un automorphisme linéaire de $V \otimes V$. On dit que c est une R-matrice de V si on a l'égalité suivante dans le groupe des automorphismes de $V \otimes V \otimes V$:*

$$(c \otimes Id_V)(Id_V \otimes c)(c \otimes Id_V) = (Id_V \otimes c)(c \otimes Id_V)(Id_V \otimes c)$$

Un exemple simple est l'automorphisme $\tau_{V,V}$ de $V \otimes V$ défini par $\tau_{V,V}(v_1 \otimes v_2) = v_2 \otimes v_1$ pour $v_1, v_2 \in V$. Une R-matrice permet notamment d'exhiber des représentations des groupes de tresses B_n : soit c un automorphisme linéaire de $V \otimes V$. On définit alors les automorphismes c_i ($1 \leq i \leq n-1$) de $V^{\otimes n}$ par :

$$c_1 = c \otimes Id_{V^{\otimes(n-2)}}$$
$$c_i = Id_{V^{\otimes(i-1)}} \otimes c \otimes Id_{V^{\otimes(n-i-1)}} \text{ pour } 1 < i < n-1$$
$$c_{n-1} = Id_{V^{\otimes(n-2)}} \otimes c$$

Proposition 75. *Si c est une R-matrice de V, alors pour $n \geq 3$ il existe une unique représentation de groupe $\rho_n : B_n \to Aut(V^{\otimes n})$ telle que $\rho_n(\sigma_i) = c_i$ pour $1 \leq i \leq n-1$.*

4.2.3 Bialgèbres tressées

Rappelons que pour une bialgèbre A, la catégorie $Mod(A)$ des A-modules est une catégorie monoïdale stricte, c'est à dire qu'elle peut être munie d'un foncteur $\otimes : Mod(A) \times Mod(A) \to Mod(A)$ (pour un A-module M l'action de A sur $M \otimes M$ est définie par $a(u \otimes v) = \sum_{(a)} a_{(1)}u \otimes a_{(2)}v$) et d'un A module 1 (en fait k) tel que pour des A-modules U, V, W et des morphismes de A-modules f, g, h on a :

$$(U \otimes V) \otimes W \simeq U \otimes (V \otimes W)$$
$$V \otimes 1 \simeq V \simeq 1 \otimes V$$
$$(f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h)$$
$$f \otimes id = f = id \otimes f$$

Définition 52. *Une catégorie monoïdale stricte $(C, \otimes)$ est dite tressée si elle est munie d'une famille d'isomorphismes :*

$$c_{V,W} = V \otimes W \to W \otimes V$$

pour V et W objets de C, vérifiant :

$$(g \otimes f)c_{V,W} = c_{V',W'}(f \otimes g)$$
$$c_{U \otimes V,W} = (c_{U,W} \otimes id_V)(id_U \otimes c_{V,W})$$
$$c_{U,V \otimes W} = (id_V \otimes c_{U,W})(c_{U,V} \otimes id_W)$$

pour U, V, W, V', W' des objets de C et $f : V \to V'$, $g : W \to W'$ des morphismes.

Proposition 76. *Soit A une bialgèbre telle que la catégorie monoïdale stricte $Mod(A)$ est tressée. Alors pour tout A-module V l'endomorphisme $c_{V,V}$ de V est une R-matrice de V.*

Trouver une condition sur une bialgèbre A pour que la catégorie monoïdale stricte $Mod(A)$ soit tressée mène à la notion de R-matrice universelle.

4.2.4 Définition d'une R-matrice universelle et premières propriétés

Théorème 27. *Soit A une bialgèbre de dimension finie. La catégorie monoïdale stricte $(Mod(A), \otimes)$ est tressée si et seulement si il existe un élément inversible R de $A \otimes A$ tel que :*

$$\forall x \in A, \tau_{A,A}\Delta(x) = R\Delta(x)R^{-1}$$

$$(\Delta \otimes id_A)(R) = R_{13}R_{23} \text{ et } (id_A \otimes \Delta)(R) = R_{13}R_{12}$$

avec $R_{12} = R \otimes 1$, $R_{23} = 1 \otimes R$ et $R_{13} = (\tau_{A,A} \otimes id_A)(1 \otimes R)$.

Dans ce cas les isomorphismes naturels $c^R_{V,W} : V \otimes W \to: W \otimes V$ sont donnés par $c^R_{V,W}(v \otimes w) = \tau_{V,W}(R(v \otimes w))$.

Définition 53. *Une bialgèbre A est dite tressée si $(Mod(A), \otimes)$ est tressée. On appelle alors R une R-matrice universelle de A.*

Remarquons qu'une bialgèbre cocomutative (c'est à dire telle que $\Delta = \tau\Delta$) est toujours tressée avec pour R-matrice universelle : $R = 1 \otimes 1$.

Notons aussi que tout A-module M d'une bialgèbre tressée est muni d'une R-matrice $c_{M,M} : M \otimes M \to M \otimes M$.

Proposition 77. *Soit A une bialgèbre tressée et R une R-matrice universelle de A. Alors R vérifie l'équation :*

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}$$

On dit que R vérifie l'équation de Yang-Baxter.

Proposition 78. *Soit A une bialgèbre tressée et R une R-matrice universelle de A. Alors :*

$$(\epsilon \otimes id_A)(R) = 1 = (id_A \otimes \epsilon)(R)$$

Si de plus A est une algèbre de Hopf d'antipode S, on a : $R^{-1} = (S \otimes id_A)(R)$

4.2.5 Retour sur la QISM

La Quantum Inverserse Scattering Method est un procédé utilisé en physique visant à construire et étudier des modèles quantiques intégrables. Elle repose sur la structure quasi-triangulaire d'une algèbre de Hopf.

On se donne une algèbre de Hopf A, son algèbre duale A^*. Un modèle physique est donné par une représentation $\pi : A^* \to End(V)$. L'image de A^* est alors appelée l'ensemble des observables. En particulier on fixe $H \in A^*$ qu'on appelle hamiltonien et dont l'image par π représente l'observable d'énergie du système. Pour pouvoir comprendre le système il est important de disposer du plus d'observables possible, et en particulier d'en construire à partir d'une représentation de A. L'intérêt d'une structure quasi-triangulaire sur A et qu'elle permet de définir un morphisme d'algèbres $\Psi : A^* \to A$ en posant $\Psi(\phi) = (\phi \otimes id)(R)$. La propriété de morphisme provient des propriétés particulières vérifiées par la R-matrice universelle R, en particulier de l'équation de Yang-Baxter. Il est alors facile d'obtenir une représentation de A^* à partir d'un A-module en utilisant Ψ.

Les algèbres affines quantifiées sont un exemple important d'algèbres de Hopf quasi-triangulaires (en fait pseudo quasi-triangulaires, voir plus loin) utilisées pour construire ces modèles.

Il est remarquable que ce procédé de construction d'un morphisme d'anneaux Ψ à partir de R est le même que celui qu'on utilisera dans la suite pour construire χ_q.

4.3 Le double de Drinfeld

4.3.1 Le double généralisé $D_\phi(A, B)$

Définition 54. *Soient A et B deux algèbres de Hopf dont l'antipode est inversible. On appelle accouplement de Hopf entre A et B une forme bilinéaire $\phi : A \times B \to k$ telle que :*

$$\forall a \in A, \forall b, b' \in B, \phi(a, bb') = \sum_{(a)} \phi(a_{(1)}, b)\phi(a_2, b')$$

$$\forall a, a' \in A, \forall b \in B, \phi(aa', b) = \sum_{(b)} \phi(a, b_{(2)})\phi(a', b_{(1)})$$
$$\forall a \in A, \forall b \in B, \phi(a, 1_B) = \epsilon(a) \text{ et } \phi(1_A, b) = \epsilon(b)$$
$$\forall a \in A, \forall b \in B, \phi(Sa, b) = \phi(a, S^{-1}b)$$

Théorème 28. *Soient A et B deux algèbres de Hopf dont l'antipode est inversible et $\phi : A \times B \to k$ un accouplement de Hopf entre elles. Alors il existe une unique structure d'algèbre de Hopf sur $A \otimes B$ telle que :*

(i) Comme coalgèbre, $A \otimes B$ est le produit tensoriel des coalgèbres A et B.

(ii) A et B s'identifient à deux sous-algèbres de Hopf de $A \otimes B$ par les inclusion naturelles respectives : $a \mapsto a \otimes 1$ et $b \mapsto 1 \otimes b$.

(iii) Pour $b \in B$ et $a \in A$:
$$(a \otimes 1)(1 \otimes b) = a \otimes b$$
$$(1 \otimes b)(a \otimes 1) = \sum_{(a),(b)} \phi(S^{-1}a_{(1)}, b_{(1)})\phi(a_{(3)}, b_{(3)})a_{(2)} \otimes b_{(2)}$$

Cette algèbre est appelée le double généralisé de A relativement à B et ϕ, et se note $D_\phi(A, B)$. Un cas particulier important est le double quantique de Drinfeld pour lequel $B = A^{*,cop}$ et ϕ est la parité naturelle $\phi(a, b) = b(a)$.

4.3.2 Construction d'une R-matrice universelle

Théorème 29. *Soient A et B deux algèbres de Hopf dont l'antipode est inversible et $\phi : A \times B \to k$ un accouplement de Hopf entre elles. Soit $D_\phi(A, B)$ leur double généralisé. Supposons de plus que A et B sont de dimension finie, et que ϕ est non-dégénéré. Soit (e_i) une base de A, (e_i^*) sa base duale et $R \in D_\phi(A, B) \otimes D_\phi(A, B)$ défini par :*
$$R = \sum_i (e_i \otimes 1) \otimes (1 \otimes e_i^*)$$
Alors R est inversible, $R^{-1} = \sum_i (Se_i \otimes 1) \otimes (1 \otimes e_i^*)$ et c'est une R-matrice universelle pour l'algèbre de Hopf $D_\phi(A, B)$.

Ce résultat permet d'obtenir des algèbres de Hopf tressées, et peut être appliqué à $\mathcal{U}_q(sl_n)$ dans le cas où q est une racine de l'unité que nous n'étudions pas dans ce mémoire (dans ce cas les algèbres considérées sont de dimension finie). Mais pour le cas où q n'est pas une racine de l'unité, les algèbres $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ sont de dimension infinie. On ne pourra pas obtenir une R-matrice universelle au sens défini précédemment, mais un élément R dans une complétion de $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$. Pour être plus précis, on revient au point de vue des déformations formelles :

Définition 55. *Le dual topologique d'un $\mathbb{C}[[h]]$-module V est le $\mathbb{C}[[h]]$-module $End_{\mathbb{C}[[h]]}(V, \mathbb{C}[[h]])$.*

Définition 56. *Une algèbre de Hopf tressée topologique est une algèbre de Hopf topologique $(A, M, \eta, \Delta, \epsilon)$ munie d'un élément inversible R de $A \tilde{\otimes} A$ tel que :*
$$\forall x \in A, \tau_{A,A}\Delta(x) = R\Delta(x)R^{-1}$$
$$(\Delta \tilde{\otimes} id_A)(R) = R_{13}R_{23} \text{ et } (id_A \tilde{\otimes} \Delta)(R) = R_{13}R_{12}$$
avec $R_{12} = R \tilde{\otimes} 1$, $R_{23} = 1 \tilde{\otimes} R$ et $R_{13} = (\tilde{\tau}_{A,A} \tilde{\otimes} id_A)(1 \tilde{\otimes} R)$.

Proposition 79. *Soit A une algèbre de Hopf topologique topologiquement libre telle que $V = A/h.A$ est de dimension finie. On peut alors munir le dual topologique A^* de A d'une unique structure d'algèbre de Hopf, dite duale, vérifiant des relations analogues à celle du cas non topologique de la proposition 3.*

De même que dans le cas non topologique, on peut définir dans le cas rang fini les algèbres de Hopf A^{op}, A^{cop}, $A^{op,cop}$, $(A^*)^{cop}$...

Théorème 30. *Soient A une algèbre de Hopf topologique topologiquement libre de rang fini, et $A^\circ = (A^*)^{cop}$ l'algèbre de Hopf duale munie de la comultiplication opposée. Alors il existe une unique algèbre de Hopf tressée topologique $(D(A), R)$ telle que :*

(i) $D(A)$ contient A et A° comme sous-algèbres de Hopf topologique.

(ii) R est l'image de l'élément canonique $\sum_i e_i \otimes e_i^*$ (avec $(e_i)_i$ une base topologique de A et $(e_i^*)_i$ sa base duale) de $A \tilde{\otimes} A^\circ$ par le plongement $A \tilde{\otimes} A^\circ \to D(A) \tilde{\otimes} D(A)$.

(iii) L'application linéaire $A \tilde{\otimes} A^\circ \to D(A)$, $a \tilde{\otimes} b \to ab$ est un isomorphisme de coalgèbres topologiques.

4.3.3 Construction de l'algèbre de Hopf topologique tressée $\mathcal{U}_h(sl_{n+1})$

On rappelle que sl_{n+1} $(n \geq 1)$ est une algèbre de Lie semi-simple de rang n. On reprend les notations de la première partie.

Définition 57. *On définit la $\mathbb{C}$-algèbre U_+ par les générateurs E_i, K_i, K_i^{-1} $(1 \leq i \leq n)$ et les relations pour $1 \leq i, j \leq n$:*

$$K_iK_j = K_jK_i \ , \ K_iK_i^{-1} = K_i^{-1}K_i = 1 \ , \ K_iE_j = q^{A_{ij}}E_jK_i$$

$$E_iE_j - E_jE_i = 0 \ (si \mid i-j \mid \geq 2)$$

$$E_i^2E_j - (q+q^{-1})E_iE_jE_i + E_jE_i^2 \ (si \mid i-j \mid = 1)$$

On définit la $\mathbb{C}$-algèbre de Hopf U_- par les générateurs F_i, K'_i, ${K'}_i^{-1}$ $(1 \leq i \leq n)$ et les relations pour $1 \leq i, j \leq n$:

$$K'_iK'_j = K'_jK'_i \ , \ K'_i{K'}_i^{-1} = {K'}_i^{-1}K'_i = 1 \ , \ K'_iF_j = q^{-A_{ij}}F_jK'_i$$

$$F_iF_j - F_jF_i = 0 (si \mid i-j \mid \geq 2)$$

$$F_i^2F_j - (q+q^{-1})F_iF_jF_i + F_jF_i^2 = 0 \ (si \mid i-j \mid = 1)$$

La $\mathbb{C}$-algèbre U_+ (respectivement U_-) peut être munie d'une unique structure d'algèbre de Hopf telle que : $\Delta(K_i) = K_i \otimes K_i$, $\Delta(E_i) = E_i \otimes 1 + K_i \otimes E_i$ (respectivement $\Delta(K'_i) = K'_i \otimes K'_i$, $\Delta(F_i) = F_i \otimes {K'}_i^{-1} + 1 \otimes F_i$).

Théorème 31. *Il existe un unique accouplement de Hopf non-dégénéré ϕ entre U_+ et U_- telle que pour $1 \leq i, j \leq n$:*

$$\phi(E_i, F_j) = -\frac{\delta_{ij}}{q - q^{-1}}$$

$$\phi(E_i, K'_j) = \phi(K_i, F_j) = 0$$

$$\phi(K_i, K'_j) = q^{-A_{ij}} = q^{-A_{ji}}$$

On note D le double généralisé, au sens du théorème 28, $D_\phi(U_+, U_-)$ de U_+ relativement à U_- et à ϕ.

Proposition 80. *Le quotient de l'algèbre de Hopf tressée D par l'idéal bilatère engendré par les $K_i - K'_i$ $(1 \leq i \leq n)$ est isomorphe à l'algèbre de Hopf $\mathcal{U}_q(sl_{n+1})$.*

Le point important est qu'on a un accouplement de Hopf non-dégénéré entre les images de U_+ et U_- dans $\mathcal{U}_q(sl_{n+1})$. Ceci permet d'établir une dualité entre U_+ et U_-, c'est à dire un isomorphisme entre le dual de l'un et l'autre. De plus cette dualité a aussi un sens du point de vue topologique. En utilisant le théorème 30, on obtient une R-matrice universelle pour $\mathcal{U}_h(sl_{n+1})$ dans $(\mathcal{U}(sl_{n+1}) \otimes \mathcal{U}(sl_{n+1}))[[h]]$.

Théorème 32. *L'algèbre de Hopf topologique $\mathcal{U}_h(sl_{n+1})$ peut être munie d'une structure d'algèbre de Hopf tressée topologique.*

Retranscrivons nos résultats dans le cadre de variable de quantification $q = e^{-\frac{h}{2}}$. On a déjà vu que pour $q \in \mathbb{C}^*$ qui n'est pas une racine de l'unité, on a $\mathcal{U}_q(sl_{n+1})$ qui s'indentifie à une sous-algèbre de $\mathcal{U}_h(sl_{n+1})/(q - e^{\frac{h}{2}})\mathcal{U}_h(sl_{n+1})$. On peut de même considérer l'algèbre :

$$\mathcal{U}_q(sl_{n+1})\hat{\otimes}\mathcal{U}_q(sl_{n+1}) = (\mathcal{U}(sl_{n+1}) \otimes \mathcal{U}(sl_{n+1}))[[h]]/(q - e^{\frac{h}{2}})(\mathcal{U}(sl_{n+1}) \otimes \mathcal{U}(sl_{n+1}))[[h]]$$

qui contient $\mathcal{U}_q(sl_{n+1}) \otimes \mathcal{U}_q(sl_{n+1})$, et qu'on appelle produit tensoriel complété. Dans le corollaire suivant tous les produits tensoriels sont complétés :

Corollaire 9. *Il existe un unique élément R inversible du produit tensoriel complété $\mathcal{U}_q(sl_{n+1})\hat{\otimes}\mathcal{U}_q(sl_{n+1})$ de $\mathcal{U}_q(sl_{n+1})$ tel que :*

$$\forall x \in \mathcal{U}_q(sl_{n+1}), R\Delta(x)R^{-1} = \tau\Delta(x)$$

$$(\Delta\hat{\otimes}id)(R) = R_{13}R_{23} \ et \ (id\hat{\otimes}\Delta)(R) = R_{13}R_{12}$$

On l'appelle la R-matrice universelle de $\mathcal{U}_q(sl_{n+1})$.

4.3.4 Cas semi-simple : construction des algèbres de Hopf topologiques tressées $\mathcal{U}_h(\mathfrak{g})$

En appliquant la construction de Drinfeld du théorème 30 :

Théorème 33. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple. Alors l'algèbre de Hopf topologique topologiquement libre de rang fini $\mathcal{U}_h(\mathfrak{g})$ peut être munie d'une unique structure d'algèbre de Hopf tressée topologique.*

On considére pour $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple, l'algèbre :

$$\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})\hat{\otimes}\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}) = (\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{g}))[[h]]/(q - e^{\frac{h}{2}})(\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{g}))[[h]]$$

qui contient $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$, et qu'on appelle produit tensoriel complété.

Corollaire 10. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple et $q \in \mathbb{C}^*$ qui n'est pas une racine de l'unité. Il existe un unique élément inversible du produit tensoriel complété de $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$, noté $R \in \mathcal{U}_q(\mathfrak{g})\hat{\otimes}\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$, tel que :*

$$\forall x \in \mathcal{U}_q(\mathfrak{g}), R\Delta(x)R^{-1} = \tau\Delta(x)$$

$$(\Delta\hat{\otimes}id)(R) = R_{13}R_{23} \ , \ (id\hat{\otimes}\Delta)(R) = R_{13}R_{12}$$

On l'appelle la R-matrice universelle de $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$.

Proposition 81. *Pour $A = \mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$, la R-matrice universelle R de A vérifie les propriétés suivantes :*

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}$$

$$(\epsilon\tilde{\otimes}id_A)(R) = 1 = (id_A\tilde{\otimes}\epsilon)(R)$$

$$R^{-1} = (S\tilde{\otimes}id_A)(R)$$

4.3.5 Cas affine : construction des algèbres de Hopf topologiques pseudo-tressées $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$

Proposition 82. *Soit $\hat{\mathfrak{g}}$ une algèbre affine non-tordue. Alors l'algèbre de Hopf topologique $\mathcal{U}_h(\hat{\mathfrak{g}})$ ne peut pas être munie d'une structure d'algèbre de Hopf tressée topologique.*

Cependant on peut obtenir par une méthode analogue de celle du double de Drinfeld ce qu'on appelle une structure d'algèbre de Hopf topologique pseudo-tressée. L'objet que nous appelerons R-matrice universelle ne sera pas dans $(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}) \otimes \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))[[h]]$. En effet on définit un morphisme d'algèbres $f_\lambda : \mathcal{U}_h(\hat{\mathfrak{g}}) \to \mathcal{U}_h(\hat{\mathfrak{g}})[\lambda, \lambda^-]$ par $f_\lambda(X_i^\pm) = \lambda^\pm X_i^\pm$ et $f_\lambda(H_i) = H_i$. $(0 \leq i \leq n)$. La R-matrice sera dans le complété de $(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}) \otimes \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))[[h]]$ par rapport à f_λ, c'est à dire $(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})((\lambda)) \otimes \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})((\lambda')))[[h]]$.

Théorème 34. *Soit $\hat{\mathfrak{g}}$ une algèbre affine non-tordue. Alors il existe un élément inversible :*

$$R \in (\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})((\lambda)) \otimes \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})((\lambda')))[[h]]$$

tel que

$$\forall x \in \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}), R\Delta(x)R^{-1} = \tau\Delta(x)$$

$$(\Delta((\lambda)) \otimes id((\lambda')))[[h]](R) = R_{13}R_{23}$$

$$(id((\lambda)) \otimes \Delta((\lambda')))[[h]](R) = R_{13}R_{12}$$

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}$$

$$(\epsilon((\lambda)) \otimes id((\lambda')))[[h]](R) = 1 = (id((\lambda)) \otimes \epsilon((\lambda')))[[h]](R)$$

$$R^{-1} = (S((\lambda)) \otimes id((\lambda')))[[h]](R)$$

Par la suite, on oubliera de noter les $((\lambda))$, $((\lambda'))$, et on travaillera comme si $R \in (\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}) \otimes \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))[[h]]$. Les calculs effectués sur R devront donc être "vus" dans des complétions relatives à f_λ, même si on ne le précise pas. Cette "oublie" ne portera pas préjudice à la construction de χ_q car les formules de définition ne feront intervenir que R_{im} et K, pour lesquels, modulo la complétion relative à τ_z, on peut se passer de celle relative à f_λ.

4.4 Formules explicites de la R-matrice universelle

4.4.1 Ordre sur le système de racines

Théorème 35. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple, $w \in W$ et l la longueur de w. Soit $w = s_{\alpha_{i_1}} ... s_{\alpha_{i_l}}$ une décomposition réduite de w (les racines $\alpha_{i_1}, ..., \alpha_{i_l}$ sont simples). Posons pour $1 \leq j \leq l$:*

$$\theta_j = s_{\alpha_{i_1}} s_{\alpha_{i_2}} ... s_{\alpha_{i_{j-1}}} (\alpha_{i_j})$$

Alors les racines θ_j sont > 0, deux à deux distinctes, vérifient $w(\theta_j) < 0$ et toute racine $\alpha > 0$ telle que $w(\alpha) < 0$ est égale à l'une des θ_j.

Proposition 83. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple, il existe un unique $w_0 \in W$ de longueur maximale l_0. Sa longueur est égal au nombre de racines positives et w_0 transforme R_+ en R_-.*

En particulier pour une décomposition réduite $w_0 = s_{\alpha_{i_1}} ... s_{\alpha_{i_{l_0}}}$ de w_0 on a :

$$R_+ = \{\alpha_{i_1}, s_{\alpha_{i_1}}(\alpha_{i_2}), ..., s_{\alpha_{i_1}} ... s_{\alpha_{i_{l_0-1}}}(\alpha_{i_{l_0}})\} = \{\alpha \in R_+ / w_0(\alpha) \in R_-\}$$

On peut donc fixer un ordre total sur l'ensemble des racines positives :

$$\alpha_{i_1} < s_{\alpha_{i_1}}(\alpha_{i_2}) < ... < s_{\alpha_{i_1}} ... s_{\alpha_{i_{l_0-1}}}(\alpha_{i_{l_0}})$$

Le symbole $<$ désigne à partir de maintenant cet ordre total (à ne pas confondre avec l'ordre partiel sur Q défini précédemment à l'aide des racines positives)

Proposition 84. *Si $\lambda, \mu \in R_+$, $\lambda < \mu$ et $\lambda + \mu \in R$ alors $\lambda + \mu \in R_+$ et $\lambda < \lambda + \mu < \mu$.*
Si $\lambda, \mu \in R_+$ et $\lambda + \mu \in R_+$, alors λ ou μ est dans R_+ et λ ou μ est $< \lambda + \mu$.

Un ordre avec de telles propriétés est dit normal. On généralise à présent au cas affine :

Théorème 36. *Soit $\hat{\mathfrak{g}}$ une algèbre de Lie affine. Alors il existe $w \in W$ tel que si $w = s_{\alpha_{i_1}} ... s_{\alpha_{i_l}}$ est une forme réduite de w, toutes les racines réelles positives ont l'une des deux formes suivantes :*

$$(s_{\alpha_{i_1}} ... s_{\alpha_{i_l}})^q s_{\alpha_{i_1}} ... s_{\alpha_{i_{p-1}}} (\alpha_{i_p}) \text{ avec } q \in \mathbb{N} \text{ et } 1 \leq p \leq l$$

$$(s_{\alpha_{i_1}} ... s_{\alpha_{i_l}})^q s_{\alpha_{i_1}} ... s_{\alpha_{i_{p+1}}} (\alpha_{i_p}) \text{ avec } q \in \mathbb{N} \text{ et } 1 \leq p \leq l$$

Ce résultat permet d'obtenir un ordre normal sur l'ensemble des racines positives $\Delta_+(\hat{\mathfrak{g}})$:

Corollaire 11. *On peut définir un ordre total $<$ sur l'ensemble des racines positives $\Delta_+(\hat{\mathfrak{g}}) = \Delta_+$ de $\hat{\mathfrak{g}}$ tel que :*

(i) si $\alpha \in \Delta_+$ et $\beta \in \Delta_+$ telles que $\alpha + \beta \in \Delta_+$, α et β non-proportionelles et $\alpha < \beta$ alors $\alpha < \alpha + \beta < \beta$.

(ii) $\delta > 2\delta > ...$

(iii) pour des racines simples $\alpha_i, \alpha_j \in R_+(\mathfrak{g})$, et des entiers $k, l, m \geq 0$, on a :

$$\alpha_i + m\delta < k\delta < (\delta - \alpha_j) + l\delta$$

4.4.2 Opérateurs de Lutszig et base à la Poincaré-Birkhoff-Witt : cas semi-simple

Proposition 85. *Soit $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ une algèbre semi-simple quantifiée.*

a) Pour $1 \leq i \leq n$ il existe un unique automorphisme T_i de la $\mathbb{C}(q)$-algèbre $U_q(\mathfrak{g})$ tel que pour $1 \leq j \leq n$:

$$T_i E_i = -F_i K_i \text{ , } T_i E_j = \sum_{s=0..-a_{ij}} (-1)^{s-a_{ij}} q_i^{-s} E_i^{-a_{ij}-s} E_j E_i^s \text{ (pour } j \neq i)$$

$$T_i F_i = -K_i^{-1} E_i \text{ , } T_i F_j = \sum_{s=0..-a_{ij}} (-1)^{s-a_{ij}} q_i^s F_i^s F_j F_i^{-a_{ij}-s} \text{ (pour } j \neq i)$$

$$T_i K_j = K_j K_i^{-a_{ij}}$$

b) Pour $w \in W$ et $w = r_{i_1} ... r_{i_k}$ une expression réduite, l'automorphisme $T_w = T_{i_1} ... T_{i_k}$ est indépendant du choix de l'expression réduite de w.

Ces opérateurs T_i sont appelés les opérateurs de Lusztig. Il est remarquable qu'ils vérifient les relations du groupe de tresses B associé à W, données dans la proposition 74 avec celle de W :

$$T_iT_j = T_jT_i \text{ si } a_{ij}a_{ji} = 0$$

$$T_iT_jT_i = T_jT_iT_j \text{ si } a_{ij}a_{ji} = 1$$

$$(T_iT_j)^2 = (T_jT_i)^2 \text{ si } a_{ij}a_{ji} = 2$$

$$(T_iT_j)^3 = (T_jT_i)^3 \text{ si } a_{ij}a_{ji} = 3$$

En conséquence les opérateurs de Lusztig définissent une action de B sur $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$.

Voici une autre utilisation de ces opérateurs particulièrement importante dans notre propos : comme dans la section précédente on se donne $w_0 = s_{\alpha_{i_1}}...s_{\alpha_{i_{l_0}}}$ une expression réduite de w_0 et les $(\theta_j)_{1\leq j\leq l_0}$ avec $\Delta_+ = \{\theta_1, ..., \theta_{l_0}\}$. On peut ainsi définir les analogues quantiques des vecteurs de racines E_α, F_α de $\mathfrak{g}$:

Définition 58. *Les analogues des vecteurs de racines sont les éléments de $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$:*

$$E_{\theta_j} = T_{i_1}T_{i_2}...T_{i_{j-1}}(E_{i_j}) \text{ , } F_{\theta_j} = T_{i_1}T_{i_2}...T_{i_{j-1}}(F_{i_j}) \ (1 \leq j \leq l_0)$$

On définit pour $m \in \mathbb{N}$ et $1 \leq j \leq l_0$ ($d_j = \frac{(\alpha_j,\alpha_j)}{2}$) :

$$E_{\theta_j}^{(m)} = T_{i_1}...T_{i_{j-1}}(\frac{E_j^m}{[m]_{d_j}!})$$

Pour définir un analogue quantique de la base de Poincaré-Birkoff-Witt de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, pour $a = (a_1, ..., a_{l_0}) \in \mathbb{N}^{l_0}$ et $1 \leq j \leq l_0$ on pose :

$$e^{(a)} = E_{\theta_1}^{(a_1)}...E_{\theta_{l_0}}^{(a_{l_0})}$$

Proposition 86. *Les éléments $e^{(a)} \in \mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ ($a \in \mathbb{N}^{l_0}$) forment une base du $\mathbb{C}(q)$-espace vectoriel $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$.*

On peut aussi considérer $q \in \mathbb{C}^*$ qui n'est pas une racine de l'unité et on obtient une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$.

Cette base permet de définir un accouplement de Hopf entre b_+ (sous-algèbre de $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ engendrée par les E_i, K_i) et b_- (sous-algèbre de $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ engendrée par les F_i, K_i). On peut ensuite exprimer $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ comme quotient d'un double de Drinfeld puis calculer des formules explicites de R comme dans le théorème 37.

4.4.3 Opérateurs de Lusztig et base à la Poincaré-Birkhoff-Witt : cas affine

Soit $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ une algèbre affine non-tordue quantifiée. De manière analogue au cas semi-simple, on peut définir les opérateurs de Lusztig $(T_i)_{0\leq i\leq n}$. Ce sont des automorphismes de la $\mathbb{C}(q)$-algèbre $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$. Les formules de définitions sur les générateurs K_i, E_i, F_i ($0 \leq i \leq n$) sont les mêmes que dans le cas semi-simple de la proposition 85.

Les opérateurs de Lusztig permettent également de définir une base de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ à la Poincaré-Birkhoff-Witt en utilisant un ordre normal sur les racines de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$:

$$\beta_0 < \beta_{-1} < \beta_{-2} < ... < 2\delta < \delta ... < \beta_3 < \beta_2 < \beta_1$$

avec les β_k racines réelles et les $m\delta$ imaginaires, avec par exemple pour $k > 0$, $\beta_k = s_{i_1}..s_{i_{k-1}}(\alpha_{i_k})$. On définit alors le vecteur de racine réelle associé :

$$E_{\beta_k} = T_{i_1}^{-1}...T_{i_{k+1}}^{-1}(E_{i_k})$$

Mais ce procédé ne permet que de définir des vecteurs associés à des racines réelles. Pour les vecteurs de racines imaginaires, on utilise un "q-commutateur" en posant :

$$E_{m\delta}^i = q_i^{-2}E_iT_{\omega_i}^k(K_i^{-1}F_i) - T_{\omega_i}^k(K_iF_i)E_i$$

Ici les opérateurs T_{ω_i} agissent sur $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ par $T_{\omega_i}(E_j) = E_{\tau_i(j)}$,$T_{\omega_i}(F_j) = E_{\tau_i(j)}$ et $T_{\omega_i}(K_j) = K_{\tau_i(j)}$ avec τ_i bijection de $\{1, ..., n\}$ définie dans [Bec94].

Une telle base de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ permet de définir un double de Drinfeld et d'expliciter la R-matrice universelle comme dans le théorème 38. Elle permet également de montrer l'existence de la nouvelle réalisation de Drinfeld de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$.

On peut obtenir aussi une base de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ à la Poincaré-Birkhoff-Witt en utilisant un algorithme inductif : on définit pour γ racine réelle positive e_γ et $e_{-\gamma}$ en choisissant un couple (α, β) de racines réelles positives, pour lesquelles e_α, e_β, $e_{-\alpha}$ et $e_{-\beta}$ ont déjà été définis, vérifiant $\gamma = \alpha + \beta$, $\alpha < \gamma < \beta$ pour l'odre normal fixé, et tel qu'on ne puisse pas trouver un autre couple (α', β') avec les même propriétés tel que $\alpha < \alpha' < \gamma < \beta' < \beta$. On pose alors en utilisant des q-commutateurs :

$$e_\gamma = [e_\alpha, e_\beta]_q = e_\alpha e_\beta - q^{(\alpha,\beta)} e_\beta e_\alpha$$

$$e_{-\gamma} = [e_{-\beta}, e_{-\alpha}]_{q^{-1}} = e_{-\beta} e_{-\alpha} - q^{-(\alpha,\beta)} e_{-\alpha} e_{-\beta}$$

L'algorithme permet ensuite de définir des vecteurs $e_{m\delta}^{(s)}$ et $e_0^{(s)}$ pour $m \in \mathbb{Z}^*$ et $1 \leq s \leq n$. Les vecteurs e_γ, $e_{m\delta}^{(s)}$, $e_0^{(s)}$ ($\gamma \in \Delta^{Re}(\hat{\mathfrak{g}})$, $m \in \mathbb{Z}^*$ et $1 \leq s \leq n$) engendrent la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ sont appelés générateurs de Cartan-Weyl de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$.

Proposition 87. *Pour $\gamma \in \Delta_+^{Re}$ il existe un unique $a(\gamma) \in \mathbb{C}^*$ tel que :*

$$[e_\gamma, e_{-\gamma}] = a(\gamma) \frac{K_\gamma - K_\gamma^{-1}}{q - q^{-1}}$$

(avec pour $\gamma = m_0\alpha_0 + ... + m_n\alpha_n$, $K_\gamma = K_0^{m_0}...K_n^{m_n}$)

4.4.4 Formule explicite dans le cas semi-simple

Pour $a \in \mathbb{Z}$ on note $(a)_q = \frac{q^a - 1}{q-1}$, et pour α une racine on note $q_\alpha = q^{\frac{(\alpha,\alpha)}{2}}$ (par exemple $q_i = q_{\alpha_i}$). Remarquer que ce sont des puissances entières de q et que $q_\alpha = q_i$ si α est dans l'orbite de α_i pour l'action du groupe de Weyl.

On note B^{-1} la matrice inverse de la matrice $B = ((\alpha_i, \alpha_j))_{1 \leq i,j \leq n}$ (qui est inversible comme $(,)$ est non-dégénérée). Dans le théorème suivant les sommes infinies sont licites d'après la proposition 40 :

Théorème 37. *Pour une algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}$, on a une expression explicite de la R-matrice universelle $R \in (\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{U}_q(\mathfrak{g}))[[h]]$:*

$$R = \overrightarrow{\prod_{\alpha \in R_+}} \left(\sum_{m=0..\infty} (1 - q_\alpha^2)^m ([m]_{q_\alpha}!)^{-1} q_\alpha^{-\frac{m(m-1)}{2}} E_\alpha^m \otimes F_\alpha^m \right) K$$

la flèche du produit $\overrightarrow{\prod_{\alpha \in R_+}}$ signifie que le produit est effectué dans l'ordre total croissant normal des racines positives et $K \in (\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{U}_q(\mathfrak{g}))[[h]]$ est définie par la formule :

$$K = e^{\frac{h}{2} \sum_{1 \leq i,j \leq n} (B^{-1})_{i,j} H_i \otimes H_j}$$

4.4.5 Formule explicite dans le cas affine

On garde les mêmes notations pour l'algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g} = \overset{\circ}{\hat{\mathfrak{g}}}$. On rappelle que la matrice de Cartan (affine) de $\hat{\mathfrak{g}}$ est notée $A = (a_{ij})_{0 \leq i,j \leq n}$, la matrice de Cartan de $\mathfrak{g}$ est notée $C = (c_{ij})_{1 \leq i \leq j \leq n}$ et $q_i = q^{\frac{B_{ii}}{2}}$ pour $0 \leq i, j \leq n$. On peut définir comme dans le cas semi-simple les q_α pour α racine réelle.

Pour $x \in \mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ (ou $x \in \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$), on peut définir en utilisant la proposition 40, et on appelle q-exponentielle de x l'élément de $\mathcal{U}_q'(\mathfrak{g})$ (respectivement de $\mathcal{U}_q'(\hat{\mathfrak{g}})$) :

$$exp_q(x) = 1 + x + \frac{x^2}{(2)_q!} + ... + \frac{x^m}{(m)_q!} + ...$$

De même on peut définir des q-exponentielles dans $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}) \hat{\otimes} \mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ (respectivement dans $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}) \hat{\otimes} \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$) :

$$exp_q(x \otimes y) = 1 + x \otimes y + \frac{(x \otimes y)^2}{(2)_q!} + ... + \frac{(x \otimes y)^m}{(m)_q!} + ...$$

On définit de manière analogue des q^m-exponentielles ($m \in \mathbb{Z}$), et en particulier pour α racine réelle des q_α-exponentielles. Ces éléments sont bien définis dans $(\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{U}_q(\mathfrak{g}))[[h]]$ ou dans une complétion relative à une graduation comme on l'a déjà évoquée.

On définit la matrice $C(q)$ de format $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{C}(q)$ par $C_{ij}(q) = (q_i + q_i^{-1})\delta_{ij} + (1-\delta_{ij})[C_{ij}]_q$ pour $1 \leq i,j \leq n$. La matrice $C(q)$ est inversible pour $q \in \mathbb{C}^*$. On note $\tilde{C}(q)$ un inverse de $C(q)$. On note $\tilde{B}(q)$ la matrice définie par $\tilde{B}(q)_{ij} = \frac{q-q^{-1}}{q_i - q_i^{-1}}\tilde{C}(q)_{ji}$ pour $1 \leq i,j \leq n$. Ces éléments sont bien définis dans $\mathbb{C}[[h]]$.

On note pour $0 \leq i \leq n$ l'élément $h_i = B_{ii}H_i \in \mathcal{U}_q'(\hat{\mathfrak{g}})$. On a alors $k_i = e^{-\frac{h}{2}h_i}$.

Théorème 38. *Pour une algèbre affine non-tordue $\hat{\mathfrak{g}}$ on a une expression de la R-matrice universelle de $\mathcal{U}_h\hat{\mathfrak{g}}$) de la forme :*

$$R = R_{re}^+ R_{im} R_{re}^- K$$

avec $R_{re}^+, R_{im}, R_{re}^-, K \in (\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}) \otimes \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))[[h]]$ définis par :

$$R_{Re}^+ = \overrightarrow{\prod_{\gamma \in \Delta_+^{Re}, \gamma < \delta}} R_\gamma \ , \ R_{Re}^- = \overrightarrow{\prod_{\gamma \in \Delta_+^{Re}, \gamma > \delta}} R_\gamma$$

$$R_{im} = e^{-(q-q^{-1}) \sum_{m>0, 1 \leq i,j \leq n} \frac{m}{[m]_q} \tilde{B_{ij}}(q^m) h_{i,m} \otimes h_{j,-m}}$$

$$K = e^{\frac{h}{2} \sum_{1 \leq i,j \leq n} (B^{-1})_{i,j} h_i \otimes h_j}$$

où pour $\gamma \in \Delta_+^{Re}$ on définit le terme $R_\gamma \in (\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}) \otimes \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))[[h]]$ par :

$$R_\gamma = exp_{q_\gamma}(a(\gamma)^{-1} e_\gamma \otimes e_{-\gamma})$$

le facteur $a(\gamma)$ provenant de la proposition 87, et les produit fléchés sont effectués dans l'ordre total normal sur les racines.

4.5 Quelques propriétés de R dans le cas affine

4.5.1 Quelques extensions et sous-algèbres de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$

Dans cette section on étudie une algèbre affine non-tordue $\hat{\mathfrak{g}}$. On note $\mathcal{U}_q b_+$ (respectivement $\mathcal{U}_q b_-$) la sous-algèbre de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ engendrée, dans la première réalisation, par les $k_i^\pm$, x_i^+ (respectivement les $k_i^\pm$, x_i^-) pour $0 \leq i \leq n$. On note $\mathcal{U}_q\hat{n}_+$ (respectivement $\mathcal{U}_q\hat{n}_-$) la sous-algèbre de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ engendrée, dans la réalisation de Drinfeld, par les $x_{i,m}^+$ (respectivement $x_{i,m}^-$) avec $1 \leq i \leq n$ et $m \in \mathbb{Z}$.

Proposition 88. *Il existe une extension $\mathcal{U}_q''(\hat{\mathfrak{g}}) \supset \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ de l'algèbre $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ définie par les générateurs $x_{i,m}^\pm$ ($1 \leq i \leq n$, $m \in \mathbb{Z}$), $k_i^\pm$ ($1 \leq i \leq n$), $h_{i,m}$ ($1 \leq i \leq n$, $m \in \mathbb{Z}^*$), les éléments centraux $c^{\pm\frac{1}{2}}$ auxquels on ajoute les $\tilde{k_i}^\pm$ ($i \in I$) et les relations de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ auxquelles on ajoute pour $i,j \in I$:*

$$k_j = \prod_{i \in I} \tilde{k_i}^{a_{ij}} \ , \ \tilde{k_i}\tilde{k_j} = \tilde{k_j}\tilde{k_i} \ , \ \tilde{k_i} h_{j,m} = h_{j,m}\tilde{k_i} \ , \ \tilde{k_i} x_{j,m}^\pm \tilde{k_i}^{-1} = q^{\pm(\omega_i, \alpha_j)} x_{j,m}^\pm$$

Remarquons que les nouvelles relations sont bien cohérentes avec celles de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ du théorème 24. On sait déjà dans le théorème 24 que les k_i commutent entre eux et avec les $h_{j,m}$, et il est naturel d'avoir des relations analogues pour les $\tilde{k_i}$. Considérons les relations $\tilde{k_i} x_{j,m}^\pm \tilde{k_i}^{-1} = q^{\pm(\omega_i,\alpha_j)} x_{j,m}^\pm$ (1) et $k_i x_{j,m}^\pm k_i^{-1} = q^{\pm b_{ij}} x_{j,m}^\pm$ (2). En partant de (1) et en utilisant $k_j = \prod_{i \in I} \tilde{k_i}^{a_{ij}}$, on obtient pour $1 \leq i,j \leq n$:

$$k_i x_{j,m}^\pm k_i^{-1} = (\tilde{k_1}^{a_{1i}} ... \tilde{k_n}^{a_{ni}}) x_{j,m}^\pm (\tilde{k_n}^{-a_{ni}} ... \tilde{k_1}^{-a_{1i}}) = q^{\pm a_{1i}(\omega_1,\alpha_j)} ... q^{\pm a_{ni}(\omega_n,\alpha_j)} x_{j,m}^\pm$$
$$= q^{\pm(a_{1i}\omega_1 + ... + a_{ni}\omega_n), \alpha_j)} x_{j,m}^\pm = q^{\pm(\alpha_i,\alpha_j)} x_{j,m}^\pm$$

Et comme par définition on a $b_{ij} = (\alpha_i, \alpha_j)$, on retrouve bien la relation (2).

Remarquons que $\mathcal{U}_q''(\hat{\mathfrak{g}}) \subset \mathcal{U}_q'(\hat{\mathfrak{g}})$ et que l'identification $k_i = e^{-\frac{h}{2}h_i}$ permet d'écrire :

Proposition 89. *Dans $\mathcal{U}_q''(\hat{\mathfrak{g}})$ on a les égalités :*

$$\tilde{k_i} = \prod_{j \in I} k_j^{(C^{-1})_{j,i}} = e^{-\frac{h}{2} \sum_{j \in I} (C^{-1})_{j,i} h_j}$$

Ces égalités sont bien compatibles avec les précédentes :

$$\prod_{i\in I}\tilde{k_i}^{a_{ij_0}} = \prod_{i\in I}\prod_{j\in I}k_j^{a_{ij_0}(C^{-1})_{j,i}} = \prod_{j\in I}k_j^{\sum_{i\in I}(C^{-1})_{j,i}C_{i,j_0}} = \prod_{j\in I}k_j^{\delta_{jj_0}} = k_j$$

Enfin comme les k_i vérifient $k_i x_{j,m}^{\pm} k_i^{-1} = q^{\pm(\alpha_i,\alpha_j)} x_{j,m}^{\pm}$ on dit qu'ils sont associés respectivement aux racines α_i, tandis que les $\tilde{k_i}$ vérifient $\tilde{k}_i x_{j,m}^{\pm} \tilde{k}_i^{-1} = q^{\pm(\omega_i,\alpha_j)} x_{j,m}^{\pm}$ et ont dit qu'ils sont associés respectivement aux poids ω_i.

La structure d'algèbre de Hopf de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ se prolonge canoniquement sur $\mathcal{U}_q''(\hat{\mathfrak{g}})$ ($\Delta(\tilde{k_i}) = \tilde{k_i}\otimes\tilde{k_i}$, $\epsilon(\tilde{k_i}) = 1$), de même que le morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres τ_z de la proposition 60 ($\tau_z(\tilde{k_i}) = \tilde{k_i}$).
On note $\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ (respectivement $\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}}^-)$) la sous-algèbre de $\mathcal{U}_q''(\hat{\mathfrak{g}})$ engendrée par les $x_{i,m}^{\pm}$, $\tilde{k_i}^{\pm}$, $h_{i,r}$ pour $m \leq 0$, $r < 0$, $i \in I$ (respectivement pour $m \geq 0$, $r > 0$, $i \in I$). Voici un résultat liant les deux réalisations de la définition 47 et du théorème 24 :

Proposition 90. *On a les inclusions :* $\mathcal{U}_q b_- \subset \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ *et* $\mathcal{U}_q b_+ \subset \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}}^-)$.

On note $\mathcal{U}_q(\tilde{n}_+)$ (respectivement $\mathcal{U}_q(\tilde{n}_-)$, $\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{h}})$) la sous-algèbre de $\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ engendrée par les $x_{i,m}^{+}$ pour $i \in I$, $m \leq 0$ (respectivement $x_{i,m}^{-}$ pour $i \in I$, $m \leq 0$, respectivement $\tilde{k_i}^{\pm}$, $h_{i,m}$ pour $i \in I$, $m < 0$). En fait on peut obtenir avec ces sous-algèbres une décomposition triangulaire de $\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}})$:

Proposition 91. *On a la décomposition d'espaces vectoriels suivante :* $\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}}) = \mathcal{U}_q(\tilde{n}_-)\otimes\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{h}})\otimes\mathcal{U}_q(\tilde{n}_+)$

On rappelle que dans une algèbre commutative A, une famille d'élément (a_l) deux à deux distincts sont dits algébriquement indépendants, si pour toute sous-famille finie $(a_j)_{1\leq j\leq N}$ et tout polynôme à N indéterminées P, on a $P(a_1,...,a_N) = 0 \Rightarrow P = 0$.

Proposition 92. *La sous-algèbre* $\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{h}})$ *de* $\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ *est commutative, et les* $h_{i,m}$, $\tilde{k_i}$ $(i \in I,\ m < 0)$ *sont algébriquement indépendants.*

On note $\mathcal{U}_q(\tilde{k})$ est la sous-algèbre de $\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ engendrée par les $\tilde{k}_i^{\pm}$.

Proposition 93. *La sous-algèbre* $\mathcal{U}_q(\tilde{k})$ *est une sous-algèbre de Hopf commutative de* $\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}})$.

Définition 59. *On appelle :*

$$(\mathcal{U}_q(\tilde{n}_-))_0 = \mathcal{U}_q(\tilde{n}_-)\cap Ker(\epsilon_{\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}})})\ ,\ (\mathcal{U}_q(\tilde{n}_+))_0 = \mathcal{U}_q(\tilde{n}_+)\cap Ker(\epsilon_{\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}})})$$

les idéaux d'augmentation respectifs de $\mathcal{U}_q(\tilde{n}_-)$ *et* $\mathcal{U}_q(\tilde{n}_+)$.

Remarquons que ce sont bien des idéaux car ϵ est un morphisme d'algèbres.

4.5.2 R relativement à des sous-algèbres de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$

Les résultats de cette section découlent de la formule explicite de R.

Corollaire 12. *La R-matrice universelle de* $\mathcal{U}_h(\hat{\mathfrak{g}})$ *qui appartient à priori à* $(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})\otimes\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))[[h]]$ *appartient en fait à* $(\mathcal{U}_q b_+\otimes\mathcal{U}_q b_-)[[h]]$.

Corollaire 13. *Les* R_{Re}^+, R_{Re}^-, R_{im}, K, R *qui appartiennent à priori à* $(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})\otimes\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))[[h]]$ *vérifient :*

$$R_{Re}^+ \in (\mathcal{U}_q\hat{n}_+\otimes\mathcal{U}_q(\tilde{n}_-))[[h]]$$

$$R_{Re}^- \in (\mathcal{U}_q\hat{n}_-\otimes\mathcal{U}_q(\tilde{n}_+))[[h]]$$

$$R_{im} \in (\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{h}})\otimes(\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{h}})))[[h]]$$

$$K \in (\mathcal{U}_q(\tilde{k})\otimes\mathcal{U}_q(\tilde{k}))[[h]]$$

$$R \in (\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})\otimes\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}}))[[h]]$$

De plus on peut écrire R_{Re}^+ *et* R_{Re}^- *sous la forme :*

$$R_{Re}^+ = 1\otimes 1 + R_{Re0}^+\ ,\ R_{Re}^- = 1\otimes 1 + R_{Re0}^-$$

avec :

$$R_{Re0}^+ \in (\mathcal{U}_q\hat{n}_+\otimes(\mathcal{U}_q(\tilde{n}_-))_0)[[h]]$$

et :

$$R_{Re0}^- \in (\mathcal{U}_q\hat{n}_-\otimes(\mathcal{U}_q(\tilde{n}_+))_0)[[h]]$$

4.5.3 Graduations de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$

Soit Q le réseau des racines de $\mathfrak{g}$.

Proposition 94. *Il existe une Q-graduation de $\mathcal{U}_q''(\hat{\mathfrak{g}})$ (et de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$, de $\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}})$, de $\mathcal{U}_h(\hat{\mathfrak{g}})$ telle que :*

$$deg(x_{i,r}^{\pm}) = \pm\alpha_i \ , \ deg(\tilde{k}_i) = deg(k_i) = deg(h_{i,n}) = deg(c^{\frac{1}{2}}) = 0$$

On notera la décomposition induite par cette graduation :

$$\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}}) = \bigoplus_{\alpha\in Q}(\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}}))_\alpha \ , \ \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}) = \bigoplus_{\alpha\in Q}(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))_\alpha \ , \ \mathcal{U}_q''(\hat{\mathfrak{g}}) = \bigoplus_{\alpha\in Q}(\mathcal{U}_q''(\hat{\mathfrak{g}}))_\alpha \ , \ \mathcal{U}_h(\hat{\mathfrak{g}}) = \bigoplus_{\alpha\in Q}(\mathcal{U}_h(\hat{\mathfrak{g}}))_\alpha$$

On rappelle la décomposition de la proposition 62 relative à τ_z :

$$\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}) = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}}(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))_m \subset (\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))((z))$$

et la notion d'algèbre produit de la proposition 38 :

Lemme 1. *On a une structure naturelle d'algèbre-produit sur :*

$$\prod_{m\geq 0}(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))_m \otimes \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$$

telle qu'elle s'injecte canoniquement dans $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})\hat{\otimes}\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$. On a une sous algèbre-produit :

$$\prod_{m\geq 0}(\mathcal{U}_q b_+)_m \otimes \mathcal{U}_q(b_-) \subset \prod_{m\geq 0}(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))_m \otimes \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$$

qui est aussi une sous-algèbre de $\mathcal{U}_q b_+\hat{\otimes}\mathcal{U}_q b_-$.

En fait cette décomposition permet d'écrire :

$$(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})\otimes\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))[[h]] \subset (\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})((z))\otimes\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))[[h]] \subset (\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})((z))\otimes\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})((w)))[[h]]$$

et des relations analogues pour les produits tensoriels de sous-algèbres de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$.

Remarquons que la décomposition $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}) = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}}(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))_m$ est Q-graduée, c'est à dire que chaque sous-espace $(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))_m$ peut être décomposé en une somme directe de sous-espaces Q-homogènes.

On note U_+ (respectivement U_-) la sous-algèbre de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ engendrée par les éléments de Q-degré dans Q_+^* (respectivement dans $-Q_+^*$). On note $\tilde{U}_+$ (respectivement $\tilde{U}_-$) l'idéal de U_+ (de U_-) engendré par les éléments de Q-degré dans Q_+^* (dans $-Q_+^*$). En particulier un élément de $\tilde{U}_+$ (respectivement de $\tilde{U}_-$) transforme un vecteur de poids (pour la structure de $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$-module) d'une représentation en un vecteur de poids strictement plus grand (plus petit) ou l'annule.

Lemme 2. *Si V, W sont deux représentations de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ sur lesquelles $c^{\frac{1}{2}}$ agit par l'identité, alors pour $i\in I, m>0$:*

$$\pi_{V\otimes W}(h_{i,\pm m}) = \pi_V(h_{i,\pm m})\otimes 1 + 1\otimes\pi_W(h_{i,\pm m}) + (\pi_V\otimes\pi_W)(R_{i,m})$$

avec $R_{i,m}\in\tilde{U}_\mp\otimes\tilde{U}_\pm$.

Comme $\mathcal{U}_q\mathfrak{h}$ est une algèbre commutative engendrée pas les éléments algébriquement indépendants $\tilde{k}_i, h_{i,m}$ ($i\in I$ et $m<0$) auxquels on ajoute les $\tilde{k}_i^{-1}$, on a :

Proposition 95. *Il existe une unique Λ-gradutation de $\mathcal{U}_q(\mathfrak{h})[[z]]$ telle que :*

$$Deg(\tilde{k}_i^{\pm} z^m) = \pm\omega_i \ et \ Deg(h_{i,m}z^m) = 0$$

4.5.4 Propriétés de la R-matrice universelle relatives aux graduations

Lemme 3. *L'action de τ_z sur K vérifie :*

$$(\tau_z\otimes\tau_z)[[h]](K) = (\tau_z\otimes id)[[h]](K) = (id\otimes\tau_z)[[h]](K) = K$$

En effet, par définition de τ_z, les $k_i = e^{-\frac{h}{2}h_i}$ sont des points fixes. Calculons dans $\mathcal{U}_h(\hat{\mathfrak{g}})$:

$$\tau_z(e^{-\frac{h}{2}h_i}) = e^{-\frac{h}{2}\tau_z(h_i)} = \sum_{m=0..\infty} \frac{(-h)^m}{2^m m!}\tau_z(h_i^m) = e^{-\frac{h}{2}h_i} = \sum_{m=0..\infty} \frac{((-h)^m}{2^m m!}h_i^m$$

en regardant le terme de degré 1 en h, on obtient $\tau_z(h_i) = h_i$. On effectue alors les calculs à partir de l'expression explicite $K = e^{\frac{h}{2}\sum_{1\leq i,j\leq n}(B^{-1})_{i,j}h_i\otimes h_j}$, par exemple :

$$\tau_z\hat{\otimes}id(K) = e^{\frac{h}{2}\sum_{1\leq i,j\leq n}(B^{-1})_{i,j}\tau_z(h_i)\otimes h_j} = e^{\frac{h}{2}\sum_{1\leq i,j\leq n}(B^{-1})_{i,j}h_i\otimes h_j} = K$$

D'après la proposition 90 on a $\mathcal{U}_q b_+ \subset \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}}^-)$. Mais par définition, $\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}}^-)$ est engendrée par les éléments $\tilde{k}_i^{\pm}$, $h_{i,r}$, $x_{i,m}^{\pm}$ ($i \in I$, $r > 0$, $m \geq 0$) dont l'image par τ_z est dans $\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}}^-)[z] \subset \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})[z, z^{-1}]$, donc $\tau_z(\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}}^-)) \subset \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}}^-)[z]$. Ainsi :

$$\mathcal{U}_q b_- \subset (\mathcal{U}_q b_-)[[z]]$$

On en déduit :

Corollaire 14. *On a*

$$R_{im} \in \prod_{m\geq 0} (\mathcal{U}_q b_+)_m \otimes \mathcal{U}_q(b_-) = \mathcal{U}_q b_+[[z]] \otimes \mathcal{U}_q(b_-)$$

On a :

$$K \in (\mathcal{U}_q(\tilde{k}) \otimes \mathcal{U}_q(\tilde{k}))[[h]]$$

Ces dernières relations sont exactes, c'ést à dire que l'"oublie" de la complétion relative à f_λ est licite.

Corollaire 15. *Pour V un $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$-module de dimension finie de type* 1, $(\pi_V \otimes id)[[h]](K)$ *et* $(\pi_V \otimes id)[[h]](K^{-1})$ *qui appartiennent à priori à* $(End(V))[[h]] \otimes \mathcal{U}_q(\tilde{k})$ *sont dans la sous-algèbre* $End(V) \otimes \mathcal{U}_q(\tilde{k})$.

D'après le théorème 34, la R-matrice est inversible, et on note R' son inverse.

Corollaire 16. *On a :*

$$R' = \mathfrak{R}'K^{-1}$$

avec

$$\mathfrak{R}' \in (\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}) \otimes \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))[[h]]$$

$$K^{-1} = e^{-\frac{h}{2}\sum_{1\leq i,j\leq n}(B^{-1})_{i,j}h_i\otimes h_j} \in (\mathcal{U}_q(\tilde{k}) \otimes \mathcal{U}_q(\tilde{k}))[[h]]$$

Lemme 4. *La R-matrice universelle est globalement de degré* 0 *pour la Q-graduation de $\mathcal{U}(\hat{\mathfrak{g}})$, c'est à dire que pour une écriture de R sous la forme $R = \sum x_k \otimes y_k$ avec les deux familles $(x_k)_k$ et $(y_k)_k$ d'éléments de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ libres et homogènes pour la Q-graduation, on a pour tous k :*

$$deg(x_k) + deg(y_k) = 0$$

En conséquence du lemme 4 et du corollaire 14 :

Proposition 96. *On peut décomposer R sous la forme :*

$$R = \sum_{m\geq 0, l\geq 0} h^l \sum_k x_{m,k,l} \otimes y_{m,k,l}$$

avec les $x_{m,k}$ linéairement indépendants, les $y_{m,k}$ linéairement indépendants, les $x_{m,k} \in (\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}}))_m$, les $y_{m,k} \in \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}})$, les $x_{m,k}, y_{m,k}$ Q-homogènes, et :

$$deg(x_{m,k}) + deg(y_{m,k}) = 0$$

4.5.5 Normalisation de la R-matrice universelle

Définition 60. *Pour $V = V(P), W = V(Q)$ des $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$-modules de type* 1 *irréductibles, on pose :*

$$R_{V,W} = f_{V,W}(R_{im})(\pi_V \otimes \pi_W)[[h]](K) \in End(V \otimes W)[[z]]$$

avec $f_{V,W} : \mathfrak{A} \to (End(V) \otimes End(W))[[z]]$ telle que pour $m \geq 0$, $f_{V,W}((\hat{\mathfrak{g}})_m \otimes \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})) \subset z^m End(V \otimes W)$.

Alors $v_P \otimes v_Q \in V \otimes W$ est un vecteur propre de $R_{V,W}$, c'est à dire qu'il existe $f_{V,W}(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ tel que :

$$R_{V,W}(z).(v_P \otimes v_Q) = f_{V,W}(z) v_P \otimes v_Q$$

De plus, d'après la proposition 108, $f_{V,W}(z)$ est de terme constant non nul $q^{-(\alpha,\beta)}$ avec α poids de v_P et β poids de v_Q.

Théorème 39. *Il existe $\bar{R}_{V,W}(z) \in End(V \otimes W)(z)$, appelée R-matrice renormalisée, telle que :*

$$f_{V,W}(z)\bar{R}_{V,W}(z) = R_{V,W}(z)$$

Notons le point important que $\bar{R}_{V,W}(z)$ est le développement d'une fraction rationelle.

Le résultat peut être obtenu en considérant l'action $P\bar{R}_{V,W}(z) : V((z)) \otimes W \to W \otimes V((z))$ qui est un isomorphisme de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$-modules, avec $P : V((z)) \otimes W \to W \otimes V((z))$ la permutation. Comme $V((z)) \otimes W$ est irréductible (car en spécialisant il l'est pour tout z sauf un ensemble dénombrable), l'argument de Schur montre que $\bar{R}_{V,W}(z)$ est entièrement définie par le fait que $\bar{R}_{V,W}(z).(v_V \otimes v_W) = v_V \otimes v_W$ et que $P\bar{R}_{V,W}(z)$ est un morphisme de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$-modules (la différence de deux telles applications aurait un noyau égal au module entier). Mais de telles conditions s'écrivent, en considérant les générateurs de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ dans la réalisation de Drinfeld, comme un système d'équations dont les coefficients sont des polynômes en z.

5 Compléments sur les représentations

5.1 Étude des $\mathcal{U}_q(\hat{sl_2})$-représentations d'évaluation $W_r(a)$

5.1.1 Valeurs propres des $\phi^{\pm}(u)$ sur $W_r(a)$

On définit pour $r \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}^*$, la représentation $W_r(a) \in Rep(\mathcal{U}_q(\hat{sl_2}))$, par $W_r(a) = L_r(qa)$ avec les notations de la définition 50. Ces représentations sont appelées représentations d'évaluation.

Lemme 5. *On fixe une base $(v_0, ..., v_r)$ de $W_r(a)$ comme dans la proposition 71. Alors l'action de $\phi^{\pm}(u) = \sum_{m=0..+\infty} \phi^{\pm}_{\pm m} u^{\pm m} \in \mathcal{U}_q(\hat{sl_2})[[u^{\pm}]]$ sur cette base est donnée par les formules suivantes ($0 \leq j \leq r$), respectivement pour $\phi^+(u)$ dans $W_r(a)[[u]]$, et pour $\phi^-(u)$ dans $W_r(a)[[u^{-1}]]$:*

$$\phi^{\pm}(u).v_j = q^{r-2j} \frac{(1-uaq^{-r})(1-uaq^{r+2})}{(1-uaq^{r-2j+2})(1-uaq^{r-2j})}.v_j$$

On notera la formule ci-dessus $\phi^{\pm}(u).v_j = \gamma^{\pm(j)}(u).v_j$.

Démonstration:

D'après les formules du théorème 24, on a pour $m > 0$: $\phi^-_m = 0$ et $[x^+_m, x^-_0] = \frac{c^{\frac{m}{2}}\phi^+_m}{q-q^{-1}}$. Comme $W_r(a)$ est de type 1, $c^{\frac{1}{2}}$ agit par l'identité, et l'action de $[x^+_m, x^-_0]$ est la même que celle de $\frac{\phi^+_m}{q-q^{-1}}$. En utilisant les formules de la proposition 71, on obtient pour $m > 0$:

$$\begin{aligned}\phi^+_m.v_j &= (q-q^{-1})[x^+_m, x^-_0].v_j \\ &= (q-q^{-1})x^+_m.[j+1]_q v_{j+1} - (q-q^{-1})x^-_0 (qa)^m q^{m(r-2j+1)}[r-j+1]_q v_{j-1} \\ &= (q-q^{-1})(qa)^m q^{m(r-2j-1)}[r-j]_q[j+1]_q v_j - (q-q^{-1})[j]_q (qa)^m q^{m(r-2j+1)}[r-j+1]_q v_j\end{aligned}$$

Et pour $\phi^+_0 = k$, on le résultat de la proposition 71 $\phi^+_0.v_j = q^{r-2j}v_j$. Les v_i sont donc des vecteurs propres pour tous les ϕ^+_m. Calculons la valeur propre $\gamma^{+(j)}$ de ϕ^+ correspondant à v_j :

$$\begin{aligned}\gamma^{+(j)}(u) &= q^{r-2j} + (q-q^{-1})[r-j]_q[j+1]_q \sum_{m=1..+\infty} (aq^{r-2j}u)^m \\ &\quad -(q-q^{-1})[j]_q[r-j+1]_q \sum_{m=1..+\infty} (aq^{r-2j+2}u)^m \\ &= q^{r-2j} + (q-q^{-1})[r-j]_q[j+1]_q\left(\tfrac{1}{1-aq^{r-2j}u} - 1\right) - (q-q^{-1})[j]_q[r-j+1]_q\left(\tfrac{1}{1-aq^{r-2j+2}u} - 1\right) \\ &= q^{r-2j} - (q-q^{-1})[r-j]_q[j+1]_q + (q-q^{-1})[j]_q[r-j+1]_q \\ &\quad + \tfrac{(q-q^{-1})[r-j]_q[j+1]_q}{1-aq^{r-2j}u} - \tfrac{(q-q^{-1})[j]_q[r-j+1]_q}{1-aq^{r-2j+2}u}\end{aligned}$$

Mais on peut simplifier l'écriture du premier terme :

$$\begin{aligned}
&q^{r-2j} - (q-q^{-1})[r-j]_q[j+1]_q + (q-q^{-1})[j]_q[r-j+1]_q \\
&= q^{r-2j} - (q^{r-j} - q^{j-r})(q^j + q^{j-2} + ...q^{-j}) + (q^j - q^{-j})(q^{r-j} + q^{r-j-2} + ... + q^{j-r}) \\
&= q^{r-2j} - (q^r + q^{r-2} + ...q^{r-2j}) + (q^{2j-r} + q^{2j-r-2} + ...q^{-r}) \\
&+(q^r + q^{r-2} + ... + q^{2j-r}) - (q^{r-2j} + q^{r-2j-2} + ... + q^{-r}) \\
&= q^{r-2j} + (q^r + q^{r-2} + ... + q^{-r}) + q^{2j-r} - (q^r + q^{r-2} + ... + q^{-r}) - q^{r-2j} \\
&= q^{2j-r}
\end{aligned}$$

Et donc obtient l'expression de la valeur propre $\gamma^{+(j)}$:

$$\gamma^{+(j)}(u) = q^{2j-r} + \frac{(q-q^{-1})[r-j]_q[j+1]_q}{1-aq^{r-2j}u} - \frac{(q-q^{-1})[j]_q[r-j+1]_q}{1-aq^{r-2j+2}u}$$

Pour obtenir le résultat annoncé, il ne reste plus qu'à identifier l'expression ci-dessus avec la décomposition en éléments simples $(b, c, d \in \mathbb{C})$:

$$q^{r-2j}\frac{(1-uaq^{-r})(1-uaq^{r+2})}{(1-uaq^{r-2j+2})(1-uaq^{r-2j})} = b + \frac{c}{1-uaq^{r-2j+2}} + \frac{d}{1-uaq^{r-2j}}$$

Les techniques usuelles permettent de conclure :

$$b = q^{r-2j}\frac{q^{-r}q^{r+2}}{q^{r-2j+2}q^{r-2j}} = q^{-r+2j}$$

$$c = q^{r-2j}\frac{(1-q^{-2r+2j-2})(1-q^{2j})}{1-q^{-2}} = q^{r-2j-r+j-1+j+1}\frac{(q^{r-j+1}-q^{-r+j-1})(q^{-j}-q^j)}{q-q^{-1}} = -(q-q^{-1})[j]_q[r-j+1]_q$$

$$d = q^{r-2j}\frac{(1-q^{-2r+2j})(1-q^{2+2j})}{1-q^2} = q^{r-2j-r+j+j+1-1}\frac{(q^{r-j}-q^{-r+j})(q^{j+1}-q^{-(j+1)})}{q-q^{-1}} = (q-q^{-1})[r-j]_q[j+1]_q$$

Pour les valeurs propres de ϕ^- le calcul est analogue en travaillant avec l'indéterminée u^{-1}. □

5.1.2 $W_r(a) = V(P_a^{(r)})$

Le résultat suivant fait le lien avec le point de vue du théorème 25 :

Corollaire 17. *Pour $r \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}^*$, la représentation $W_r(a) \in Rep(\mathcal{U}_q(\hat{sl}_2))$ est irréductible, et $W_r(a) = V(P_a^{(r)})$ avec le polynôme $P_a^{(r)} \in \mathbb{C}[u]$ de terme constant égal à 1 défini par :*

$$P_a^{(r)}(u) = \prod_{k=1..r}(1-uaq^{r-2k+1})$$

Démonstration:

On a déjà vu dans le corollaire 8 l'irréductibliité de $W_r(a) = L_r(qa)$. Le vecteur $v_0 \in W_r(a)$ vérifie d'après la proposition 71, $x_m^+.v_0 = 0$, d'après le lemme 5, $\phi^\pm(u^{\pm 1}).v_0 = \gamma^{\pm(0)}(u^{\pm 1}).v_0$, avec $\gamma^{\pm(0)}(u^{\pm 1}) = q^r\frac{1-uaq^{-r}}{1-uaq^r}$ respectivement dans $\mathbb{C}[[u]]$ et $\mathbb{C}[[u^{-1}]]$, et bien entendu $c^{\frac{1}{2}}.v_0 = v_0$. Le vecteur v_0 est donc un vecteur de plus haut poids de $W_r(a)$. Mais comme $W_r(a)$ est irréductible, on a $W_r(a) = \mathcal{U}_q(\hat{sl}_2).v_0$ et la représentation $W_r(a)$ est de vecteur de plus haut poids v_0, et de plus haut poids :

$$q^r\frac{1-uaq^{-r}}{1-uaq^r} = \frac{(1-uaq^{r-2})(1-uaq^{r-4})...(1-uaq^{-r})}{(1-uaq^r)(1-uaq^{r-2})...(1-uaq^{-r+2})} = q^{deg(P)}\frac{P(uq^{-1})}{P(uq)}$$

avec $P(u) = \prod_{k=1..r}(1-uaq^{r-2k+1})$. □

Corollaire 18. *Les valeurs propres du lemme 5 peuvent être mises sous la forme, respectivement dans $\mathbb{C}[[u]]$ et $\mathbb{C}[[u^{-1}]]$:*

$$\gamma^{\pm(j)}(u) = q^{deg(Q^{(j)})-deg(R^{(j)})}\frac{Q^{(j)}(uq^{-1})R^{(j)}(uq)}{Q^{(j)}(uq)R^{(j)}(uq^{-1})}$$

avec les polynômes de terme constant égal à 1 :

$$Q^{(j)}(u) = \prod_{k=1..r}(1-uaq^{r-2k+1})$$

$$R^{(j)}(u) = \prod_{l=1..j}(1-uaq^{r-2l+3})(1-uaq^{r-2l+1})$$

Cherchons, respectivement dans $\mathbb{C}[[u]]$ et $\mathbb{C}[u^{-1}]$, une expression de ces valeurs propres :

$$\begin{aligned}
\gamma^{\pm(j)}(u) &= q^{r-2j}\frac{(1-uaq^{-r})(1-uaq^{r+2})}{(1-uaq^{r-2j+2})(1-uaq^{r-2j})}\\
&= q^{r-2j}\frac{1-uaq^{-r}}{1-uaq^{r}}\frac{(1-uaq^{r+2})(1-uaq^{r})}{(1-uaq^{r-2j})(1-uaq^{r-2j+2})}\\
&= q^{r-2j}\frac{(1-uaq^{-r})(1-uaq^{-r+2})...(1-uaq^{r-2})}{(1-uaq^{r})(1-uaq^{r-2})...(1-uaq^{-r+2})}\frac{(1-uaq^{r+2})(1-uaq^{r})(1-uaq^{r-2})...(1-uaq^{r-2j+4})}{(1-uaq^{r-2j})(1-uaq^{r-2j+2})(1-uaq^{r-2j+4})...(1-uaq^{r-2})}\\
&= q^{r-2j}\prod_{k=1..r}\frac{1-uaq^{r-2k}}{1-uaq^{r-2k+2}}\prod_{l=1..j}\frac{1-uaq^{r-2l+4}}{1-uaq^{r-2l}}\\
&= q^{r-2j}\prod_{k=1..r}\frac{1-uaq^{r-2k}}{1-uaq^{r-2k+2}}\prod_{l=1..j}\frac{(1-uaq^{r-2l+4})(1-uaq^{r-2l+2})}{(1-uaq^{r-2l})(1-uaq^{r-2l+2})}\\
&= q^{deg(Q^{(j)})-deg(R^{(j)})}\frac{Q^{(j)}(uq^{-1})R^{(j)}(uq)}{Q^{(j)}(uq)R^{(j)}(uq^{-1})}
\end{aligned}$$

avec les polynômes de terme constant égal à 1 $Q^{(j)}$ et $R^{(j)}$ annoncés. □

5.1.3 Un analogue classique des caractères dans le cas affine ?

Afin d'étudier la théorie des représentations de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$, on pourrait considérer par analogie au cas classique un caractère "naïf" égal à la trace de k, ou la trace de $\Phi^{\pm}(u)$. Cependant :

Proposition 97. *La trace de $\Phi^+(u)$ (respectivement de $\Phi^+(u)$) sur $W_r(a)$ est indépendante de l'indéterminée u et de $a \in \mathbb{C}^*$, et est égale à :*

$$tr_{W_r(a)}(\Phi^{\pm}(u)) = \sum_{j=0...r} q^{\pm(2j-r)} = tr_{W_r(a)}(k^{\pm})$$

Démonstration:

On a vu dans le lemme 5 que les vecteurs $(v_i)_{0\leq i\leq r}$ forment une base de diagonalisation commune aux $\Phi^{\pm}(u)$ et on a donné les valeurs propres. Calculons alors la trace de $\Phi^+(u)$:

$$\begin{aligned}
tr_{W_r(a)}(\Phi^+(u)) &= \sum_{j=0..r} q^{r-2j}\frac{(1-uaq^{-r})(1-uaq^{r+2})}{(1-uaq^{r-2j+2})(1-uaq^{r-2j})}\\
&= \sum_{j=0..r} q^{r-2j}\left(q^{4j-2r} + \frac{\frac{(1-q^{-2r+2j-2})(1-q^{2j})}{1-q^{-2}}}{1-uaq^{r-2j+2}} + \frac{\frac{(1-q^{-2r+2j})(1-q^{2j+2})}{1-q^{2}}}{1-uaq^{r-2j}}\right)\\
&= \sum_{j=0...r} q^{\pm(2j-r)} + \sum_{j=0..r} q^{r-2j}\left(\frac{\frac{(1-q^{-2r+2j-2})(1-q^{2j})}{1-q^{-2}}}{1-uaq^{r-2j+2}} + \frac{\frac{(1-q^{-2r+2j})(1-q^{2j+2})}{1-q^{2}}}{1-uaq^{r-2j}}\right)\\
&= tr_{W_r(a)}(k) + \sum_{j=0..r}(A_j + B_j)
\end{aligned}$$

Remarquons que pour $0 \leq j \leq r-1$:

$$A_{j+1} = q^{r-2j-2}\frac{\frac{(1-q^{-2r+2j})(1-q^{2j+2})}{1-q^{-2}}}{1-uaq^{r-2j}} = -q^{r-2j}\frac{\frac{(1-q^{-2r+2j})(1-q^{2j+2})}{1-q^{2}}}{1-uaq^{r-2j}} = -B_j$$

Alors :

$$\begin{aligned}
tr_{W_r(a)}(\Phi^+(u)) &= tr_{W_r(a)}(k) + A_0 + B_0 + \sum_{j=1..r}(-B_{j-1} + B_j)\\
&= tr_{W_r(a)}(k) + A_0 + B_r
\end{aligned}$$

Mais on voit que $A_0 = B_r = 0$, d'où le résultat. Le calcul est analogue pour $tr_{W_r(a)}(\Phi^-(u))$. □

En particulier un tel caractère ne permet pas de distinguer les $W_r(a)$ lorsque $a \in \mathbb{C}^*$ varie.

5.2 Valeurs propres et décomposition de Jordan

5.2.1 Décomposition de Jordan d'un $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$-module de dimension finie de type 1.

Proposition 98. *Toute représentation V de dimension finie de type 1 de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ est somme directe de sous-espaces $V = \bigoplus V_{(\gamma_{i,m}^{\pm})}$, la somme portant sur les suites de complexes $(\gamma_{i,m}^{\pm})_{1\leq i\leq n, m\in\mathbb{Z}}$ telles que pour $m < 0$, $\gamma_{i,m}^+ = \gamma_{i,-m}^- = 0$, et le sous-espace $V_{(\gamma_{i,m}^{\pm})}$ étant défini par :*

$$V_{(\gamma_{i,m}^{\pm})} = \{x \in V / \exists p \in \mathbb{N}, \forall i \in \{1,...,n\}, \forall m \in \mathbb{Z}, (\phi_{i,m}^{\pm} - \gamma_{i,m}^{\pm})^p.x = 0\}$$

est non nul.

Démonstration:

Pour V comme dans l'énoncé, on note $\pi_V : \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}) \to End(V)$ le morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres correspondant. Comme $c^{\frac{1}{2}}$ agit pas l'identité, les actions des $h_{i,m}$ ($i \in I, m \in \mathbb{Z} - \{0\}$) commutent deux à deux, et il en est de même des actions des $\phi_{i,m}^{\pm}$ qui sont combinaisons linéraires de produits de $k_i^{\pm}$ et de $h_{i,m}$. L'espace V admet donc une décomposition de Jordan commune à tous les $\pi_V(\phi_{i,m})$. $\square$

La décomposition $V = \bigoplus_{(\gamma)\in\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}\times\{\pm\}} V_{(\gamma)}$ est appelée la décomposition de Jordan sur V relative aux opérateurs Φ_i.

Une suite $(\gamma_{i,m}^{\pm})_{1\leq i\leq n, m\in\mathbb{Z}}$ qui intervient effectivement dans la somme sera dite "valeur propre" des opérateurs Φ_i sur V.

Lemme 6. *La décomposition $V = \bigoplus_{\gamma\in(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\times\pm)^I} V_{(\gamma)}$ est une sous-décomposition de l'écriture de V comme sous-espace de poids relatifs à la structure de $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$-module. C'est aussi est une décomposition de Jordan commune relative aux opérateurs $\pi_V(h_{i,m})$ ($i \in I$, $m > 0$).*

Démonstration:

La première insertion provient du fait que pour chaque $i \in I$, $\Phi_i(0) = k_i$. La décomposition donne donc des sous-espaces de Jordan communs à tous les k_i ($i \in I$), et comme on sait que ces opérateurs ont une action diagonalisable, ce sont des sous-espaces de poids.

On a ensuite dans $End(V)[[z]]$:

$$\pi_V(\phi_i^+(z)) = \sum_{m=0..+\infty} \pi_V(\phi_{i,m}^+)z^m = \pi_V(k_i)e^{(q-q^{-1})\sum_{m'=1..\infty}\pi_V(h_{i,m'})z^{m'}}$$

$$(q-q^{-1})\sum_{m'=1..\infty}\pi_V(h_{i,m'})z^{m'} = ln(\pi_V(k_i^{-1})\sum_{m=0..+\infty}\pi_V(\phi_{i,m}^+)z^m)$$

Chaque $\pi_V(h_{i,m})$ est donc une combinaison linéaire (finie) de $\pi_V(k_i^{-1})\pi_V(\phi_{i,m}^+)$. C'est donc aussi une décomposition de Jordan pour chaque $\pi_V(h_{i,m})$. $\square$

5.2.2 Valeurs propres des opérateurs Φ_i

De même que précédemment, pour une valeur propre $(\gamma_{i,m}^{\pm})_{1\leq i\leq n, m\in\mathbb{Z}}$, on définit les séries formelles pour $1 \leq i \leq n$:

$$\gamma_i^+(u) = \sum_{m=0...\infty} \gamma_{i,m}^+ u^m \in \mathbb{C}[[u]] \text{ et } \gamma_i^-(u) = \sum_{m=0...\infty} \gamma_{i,-m}^- u^{-m} \in \mathbb{C}[[u^{-1}]]$$

Théorème 40. *Pour une représentation V complètement réductible de dimension finie de type 1 de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$, les "valeurs propres" $\gamma_i^{\pm}(u)$ de $\Phi_i^{\pm}(u)$ vérifient les égalités suivantes, respectivement dans $\mathbb{C}[[u]]$ et $\mathbb{C}[[u^{-1}]]$:*

$$\gamma_i^+(u) = q_i^{deg(Q_i)-deg(R_i)}\frac{Q_i(uq_i^{-1})R_i(uq_i)}{Q_i(uq_i)R_i(uq_i^{-1})} \text{ et } \gamma_i^-(u) = q_i^{deg(Q_i)-deg(R_i)}\frac{Q_i(uq_i^{-1})R_i(uq_i)}{Q_i(uq_i)R_i(uq_i^{-1})}$$

avec $Q_i(u)$, $R_i(u)$ des polynômes en u de terme constant égal à 1.

Démonstration:

Il suffit de montrer le résultat pour une représentation irréductible V. Pour $i \in I$, soit $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})_{\{i\}}$ la sous-algèbre de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ engendrée par les $k_i^{\pm}$, $h_{i,m}$, $x_{i,l}^{\pm}$ pour $l \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z} - \{0\}$. L'algèbre $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})_{\{i\}}$ est donc définie par ces générateurs et les relations :

$$k_i h_{i,m} = h_{i,m} k_i \ , \ k_i x_{i,m}^{\pm} k_i^{-1} = q^{\pm b_{ii}} x_{i,m}^{\pm} = q_i^{\pm} x_{i,m}^{\pm}$$

$$[h_{i,m}, x_{i,m'}^{\pm}] = \pm\frac{1}{m}[mb_{ii}]_q c^{\mp\frac{|m|}{2}} x_{i,m+m'}^{\pm} = \pm\frac{1}{m}[2m]_{q_i} c^{\mp\frac{|m|}{2}} x_{i,m+m'}^{\pm}$$

$$x_{i,m+1}^{\pm} x_{i,m'}^{\pm} - q_i^{\pm} x_{i,m'}^{\pm} x_{i,m+1}^{\pm} = q_i^{\pm} x_{i,m}^{\pm} x_{i,m'+1}^{\pm} - x_{i,m'+1}^{\pm} x_{i,m}^{\pm}$$

$$[h_{i,m}, h_{i,m'}] = \delta_{m,-m'}\frac{1}{m}[mb_{ii}]_q \frac{c^m - c^{-m}}{q_i - q_i^{-1}} = \delta_{m,-m'}\frac{1}{m}[2m]_{q_i}\frac{c^m - c^{-m}}{q_i - q_i^{-1}}$$

$$[x_{i,m}^+, x_{i,m'}^-] = \frac{c^{\frac{m-m'}{2}}\phi_{i,m+m'}^+ - c^{-\frac{m-m'}{2}}\phi_{i,m+m'}^-}{q_i - q_i^{-1}}$$

Elle est donc isomorphe à $\mathcal{U}_{q_i}(\hat{sl_2})$. Comme $\Phi_i^{\pm}(u) \in \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})[[u^{\pm}]]$ vérifie en fait $\Phi_i^{\pm}(u) \in \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})_{\{i\}}[[u^{\pm}]]$, il suffit de considérer l'action de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})_{\{i\}}$ sur V pour déterminer les valeurs propres relatives à $\Phi_i^{\pm}$.

Supposons donc que V est une représentation irréductible de $\mathcal{U}_q(\hat{sl_2})$. D'après le théorème 26, V peut s'écrire comme produit de représentations d'évaluation :

$$V = W_{r_1}(a_1) \otimes ... \otimes W_{r_m}(a_m)$$

D'après le corollaire 18, les valeurs propres des $W_{r_j}(a_j)$ sont de la forme annoncée. Il suffit donc de montrer que pour $V_1, V_2 \in Rep(\mathcal{U}_q(\hat{sl_2}))$ deux représentations, les valeurs propres de la représentation $W = V_1 \otimes V_2 \in Rep(\mathcal{U}_q(\hat{sl_2}))$ sont des produits de valeurs propres de V_1 et de V_2.

Décomposons les $\mathcal{U}_q(\hat{sl_2})$-modules V_1, V_2 selon leur sous-espaces de poids relatifs à leur structure de $\mathcal{U}_q(sl_2)$-module :

$$V_1 = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} V_1^{(p)} \text{ , } V_2 = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} V_2^{(p)}$$

avec $V_1^{(p)} = \{x \in V_1 / k.x = q^p x\}$ et $V_2^{(p)} = \{x \in V_2 / k.x = q^p x\}$. D'après le lemme 6, chaque espace $V_1^{(p)}$ (respectivement $V_2^{(p)}$) peut être décomposé en sous-espaces de Jordan pour l'action des h_m. On peut ainsi choisir une base $(v_\alpha^p)_{\alpha=1...l_p}$ de $V_1^{(p)}$ (respectivement une base $(w_\beta^p)_{\beta=1...s_p}$ de $V_2^{(p)}$) telle que l'action de tous les h_m est triangulaire supérieure dans cette base. Etudions l'action des h_m, $m > 0$ (l'autre cas se traite de manière analogue) sur W. Les vecteurs $v_\alpha^p \otimes w_\beta^p$ forment alors une base de W. On ordonner ces vecteurs de base de telle sorte que $(r > t)$, $(r = t$ et $p < s)$, $(r = t$ et $p = s$ et $\alpha < \alpha'$ et $\beta < \beta')$, sont des conditions suffisantes pour que $v_\alpha^p \otimes w_\beta^r < v_{\alpha'}^s \otimes w_{\beta'}^t$. Regardons l'action de h_m sur un des vecteurs $v_\alpha^p \otimes w_\beta^r$ en utilisant le lemme 2. On a :

$$\pi_W(h_m) = \pi_{V_1}(h_m) \otimes 1 + 1 \otimes \pi_{V_2}(h_m) + (\pi_{V_1} \otimes \pi_{V_2})(R_m)$$

avec $R_m \in \tilde{U}_- \otimes \tilde{U}_+$. On a en particulier :

$$(\pi_{V_1} \otimes \pi_{V_2})(R_m).(v_\alpha^p \otimes w_\beta^r) \in (\bigoplus_{p>s} V_1^{(s)}) \otimes (\bigoplus_{r<t} V_2^{(t)})$$

$$(\pi_{V_1}(h_m) \otimes 1).(v_\alpha^p \otimes w_\beta^r) = \lambda_m v_\alpha^p \otimes w_\beta^r + u_m$$

$$(1 \otimes \pi_{V_2}(h_m) \otimes 1).(v_\alpha^p \otimes w_\beta^r) = \mu_m v_\alpha^p \otimes w_\beta^r + v_m$$

avec $u_m \in (\bigoplus_{\alpha'<\alpha} \mathbb{C} v_{\alpha'}^p) \otimes w_\beta^r$, $v_m \in v_\alpha^p \otimes (\bigoplus_{\beta'<\beta} \mathbb{C} w_{\beta'}^r)$ et λ_m, μ_m les valeurs propres de h_m respectivement associées à v_α^p et à w_β^r. On a donc :

$$\pi_W(h_m).(v_\alpha^p \otimes w_\beta^r) - (\lambda_m + \mu_m)(v_\alpha^p \otimes w_\beta^r) \in \bigoplus_{(\alpha',\beta',s,t)<(\alpha,\beta,p,r)} \mathbb{C}(v_{\alpha'}^s \otimes w_{\beta'}^t)$$

Donc dans notre base de W, l'action des h_m est triangulaire supérieure, et on obtient que les valeurs propres $\lambda_m + \mu_m$ des h_m sur W sont la somme de celles sur V_1 et V_2. Mais à présent les valeurs propres de

$$\Phi^+(u) = \sum_{m=0..\infty} \phi_m^+ u^m = k e^{(q-q^{-1}) \sum_{m'=1..\infty} h_{m'} u^{m'}}$$

sont de la forme (en utilisant pour l'action de k sur W que $\Delta(k) = k \otimes k$) :

$$\begin{aligned} \gamma_W^+(u) &= q^{p+r} e^{(q-q^{-1}) \sum_{m'=1..\infty} (\lambda_{m'}+\mu_{m'}) u^{m'}} \\ &= q^p e^{(q-q^{-1}) \sum_{m'=1..\infty} \lambda_{m'} u^{m'}} q^r e^{(q-q^{-1}) \sum_{m'=1..\infty} \mu_{m'} u^{m'}} \\ &= \gamma_{V_1}(u) \gamma_{V_2}(u) \end{aligned}$$

□

5.2.3 Les valeurs propres des $\pi_V(h_{i,m})$

Considérons, dans le cas complètement réductible, la décomposition de la proposition 98 de Jordan $V = \bigoplus_{\gamma \in (\mathbb{C}^{\mathbb{N}} \times \pm)^I} V_{(\gamma)}$ relative aux opérateurs Φ_i. Pour (γ) une valeur propre, on conserve les notations $\gamma_i^+(u)$, $Q_{\gamma i}(z)$, $R_{\gamma i}(z)$, $a_{\gamma ir}$ et $b_{\gamma is}$ déjà introduites relatives au théorème 40.

Lemme 7. *si V est complètement réductible, la valeur propre de $\pi_V(h_{i,m})$ sur $V_{(\gamma)}$ est :*

$$\frac{q_i^m - q_i^{-m}}{m(q-q^{-1})}(\sum_{r=1..k_{\gamma i}} a_{\gamma ir}^m - \sum_{t=1..l_{\gamma i}} b_{\gamma it}^m)$$

Démonstration:

Regardons un sous-espace caractéristique $V_{(\gamma)}$. La valeur propre de $\pi_V(k_i)$ (respectivement de $\pi_V(k_i^{-1})$) sur $V_{(\gamma)}$ est $\gamma_{i0} = q_i^{deg(Q_i)-deg(R_i)}$ (respectivement $q_i^{deg(R_i)-deg(Q_i)}$). On est ainsi amené à introduire pour $i \in I$:

$$(\gamma_i^*) = (q-q^{-1})^{-1} ln(q_i^{deg(R_i)-deg(Q_i)}\gamma_i^+) \in \mathbb{C}[[z]]$$

qui vérifie :

$$\forall i \in I, \forall m > 0, \exists P \in \mathbb{N}, \forall x \in V_{(\gamma)} (h_{i,m} - \gamma_{i,m}^*)^P.x = 0$$

Calculons les termes de (γ_i^*) qui sont les valeurs propres recherchées :

$$\begin{aligned}
(\gamma_i^*)_m(z) &= ((q-q^{-1})^{-1} ln(q_i^{deg(R_i)-deg(Q_i)}\gamma_i^+))(z) \\
&= (q-q^{-1})^{-1}(ln(Q_{\gamma i}(zq_i^{-1})R_{\gamma i}(zq_i)) - ln(Q_{\gamma i}(zq_i)R_{\gamma i}(zq_i^{-1}))) \\
&= (q-q^{-1})^{-1}(\sum_{r=1..k_{\gamma i}} ln(1 - zq_i^{-1}a_{\gamma ir}) - ln(1 - zq_i a_{\gamma ir}) \\
&+ \sum_{t=1..l_{\gamma i}} ln(1 - zq_i b_{\gamma it}) - ln(1 - zq_i^{-1} b_{\gamma it})) \\
&= -(q-q^{-1})^{-1}(\sum_{m>0} \frac{1}{m} z^m (\sum_{r=1..k_{\gamma i}} ((q_i^{-1}a_{\gamma ir})^m - (q_i a_{\gamma ir})^m) + \sum_{t=1..l_{\gamma i}} (-(q_i^{-1}b_{\gamma it})^m + (q_i b_{\gamma it})^m)) \\
&= \sum_{m>0} z^m \frac{q_i^m - q_i^{-m}}{m(q-q^{-1})}(\sum_{r=1..k_{\gamma i}} a_{\gamma ir}^m - \sum_{t=1..l_{\gamma i}} b_{\gamma it}^m)
\end{aligned}$$

Et donc une valeur propre typique de $h_{i,m}$ est $\frac{q_i^m - q_i^{-m}}{m(q-q^{-1})}(\sum_{r=1..k_{\gamma i}} a_{\gamma ir}^m - \sum_{t=1..l_{\gamma i}} b_{\gamma it}^m)$. □

5.3 Étude du $\mathcal{U}_q(\hat{sl}_2)$-module $W = W_1(1) \otimes W_1(q^2)$

5.3.1 Action de $\mathcal{U}_q(\hat{sl}_2)$ sur W

On considère le $\mathcal{U}_q(\hat{sl}_2)$-module $W = W_1(1) \otimes W_1(q^2)$. On note (v_0, v_1) (respectivement (w_0, w_1)) une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $W_1(1)$ (respectivement $W_1(q^2)$) comme dans le lemme 5. Le $\mathbb{C}$-espace vectoriel W est de dimension 4 et admet la base $(v_0 \otimes w_0, v_1 \otimes w_0, v_0 \otimes w_1, v_1 \otimes w_0)$.

Lemme 8. *L'action de $\mathcal{U}_q(\hat{sl}_2)$ sur W est décrite dans les tableaux suivants (où on lit $x.w$ à l'intersection de la colonne d'indice $x \in \mathcal{U}_q(\hat{sl}_2)$ et de la ligne d'indice $w \in W$) :*

	E_0	F_0	K_0
$v_0 \otimes w_0$	$qv_0 \otimes w_1 + v_1 \otimes w_0$	0	$q^{-2}v_0 \otimes w_0$
$v_0 \otimes w_1$	$v_1 \otimes w_1$	$q^{-2}v_0 \otimes w_0$	$v_0 \otimes w_1$
$v_1 \otimes w_0$	$q^3 v_1 \otimes w_1$	$qv_0 \otimes w_0$	$v_1 \otimes w_0$
$v_1 \otimes w_1$	0	$q^{-1}v_0 \otimes w_1 + q^{-2}v_1 \otimes w_0$	$q^2 v_1 \otimes w_1$

	E_1	F_1	K_1
$v_0 \otimes w_0$	0	$v_0 \otimes w_1 + q^{-1}v_1 \otimes w_0$	$q^2 v_0 \otimes w_0$
$v_0 \otimes w_1$	$qv_0 \otimes w_0$	$qv_1 \otimes w_1$	$v_0 \otimes w_1$
$v_1 \otimes w_0$	$v_0 \otimes w_0$	$v_1 \otimes w_1$	$v_1 \otimes w_0$
$v_1 \otimes w_1$	$v_0 \otimes w_1 + q^{-1}v_1 \otimes w_0$	0	$q^{-2}v_1 \otimes w_1$

En particulier, en tant que $\mathcal{U}_q(sl_2)$-module, W admet la décomposition, suivant les poids de K :

$$W = W_{q^{-2}} \oplus W_1 \oplus W_{q^2}$$

avec :

$$W_{q^2} = \mathbb{C}v_0 \otimes w_0 \ , \ W_1 = \mathbb{C}v_0 \otimes w_1 \oplus \mathbb{C}v_1 \otimes w_0 \ , \ W_{q^{-2}} = \mathbb{C}v_1 \otimes w_1$$

Démonstration:

La représentation $\rho_W : \mathcal{U}_q(\hat{sl}_2) \to End(W)$ est donnée d'après la définition 50 par :

$$\rho_W = (\rho_{W_1(1)} \otimes \rho_{W_1(q^2)}) \circ \Delta = (\rho_{L_+(1)} \otimes \rho_{L_+(1)}) \circ (ev_q \otimes ev_{q^3}) \circ \Delta$$

Ici $\rho_{L_+(1)} : \mathcal{U}_q(sl_2) \to End(L_+(1))$ est donnée d'après le théorème 21 par :

$$K.v_0 = q.v_0 \ , \ K.v_1 = q^{-1}v_1 \ , \ F.v_0 = v_1 \ , \ F.v_1 = 0 \ , \ E.v_1 = v_0 \ , \ E.v_0 = 0$$

et des relations analogues pour (w_0, w_1). Les morphismes d'évalutation $ev_q, ev_{q^3} : \mathcal{U}_q(\hat{sl}_2) \to \mathcal{U}_q(sl_2)$ sont donnés par :

$$ev_q(E_0) = F \ , \ ev_q(F_0) = E \ , \ ev_q(E_1) = E \ , \ ev_q(F_1) = F_1 \ , \ ev_q(K_0) = K^{-1} \ , \ ev_q(K_1) = K$$

$$ev_{q^3}(E_0) = q^2F \ , \ ev_{q^3}(F_0) = q^{-2}E \ , \ ev_{q^3}(E_1) = E \ , \ ev_{q^3}(F_1) = F_1 \ , \ ev_{q^3}(K_0) = K^{-1} \ , \ ev_{q^3}(K_1) = K$$

On a donc les actions suivantes :

$$K_0.v_0 = q^{-1}.v_0 \ , \ K_0.v_1 = qv_1 \ , \ F_0.v_0 = 0 \ , \ F_0.v_1 = v_0 \ , \ E_0.v_1 = 0 \ , \ E_0.v_0 = v_1$$

$$K_1.v_0 = q.v_0 \ , \ K_1.v_1 = q^{-1}v_1 \ , \ F_1.v_0 = v_1 \ , \ F_1.v_1 = 0 \ , \ E_1.v_1 = v_0 \ , \ E_1.v_0 = 0$$

$$K_0.w_0 = q^{-1}.w_0 \ , \ K_0.w_1 = qw_1 \ , \ F_0.w_0 = 0 \ , \ F_0.w_1 = q^{-2}w_0 \ , \ E_0.w_1 = 0 \ , \ E_0.w_0 = q^2w_1$$

$$K_1.w_0 = q.w_0 \ , \ K_1.w_1 = q^{-1}w_1 \ , \ F_1.w_0 = w_1 \ , \ F_1.w_1 = 0 \ , \ E_1.w_1 = w_0 \ , \ E_1.w_0 = 0$$

On rappelle enfin que le comultiplication $\Delta : \mathcal{U}_q(\hat{sl}_2) \to \mathcal{U}_q(\hat{sl}_2) \otimes \mathcal{U}_q(\hat{sl}_2)$ est donnée par $(i = 0, 1)$:

$$\Delta(E_i) = E_i \otimes 1 + K_i \otimes E_i \ , \ \Delta(F_i) = F_i \otimes K_i^{-1} + 1 \otimes F_i \ , \ \Delta(K_i) = K_i \otimes K_i$$

On est alors en mesure de mener les calculs. Par exemple :

$$E_0.(v_0 \otimes w_0) = (E_0.v_0 \otimes w_0) + (K_0.v_0 \otimes E_0.w_0) = (v_1 \otimes w_0) + q(v_0 \otimes w_1)$$

Pour étudier les vecteurs de poids de W relativement à K en tant que $\mathcal{U}_q(sl_2)$-module, regardons l'action de K_1. D'après ce qui précède on a $v_0 \otimes w_0 \in W_{q^2}$, $v_0 \otimes w_1 \in W_1$, $v_1 \otimes w_0 \in W_1$ et $v_1 \otimes w_1 \in W_{q^{-2}}$ ce qui donne la décomposition annoncée. □

5.3.2 Le $\mathcal{U}_q(\hat{sl}_2)$-module $W = W_1(1) \otimes W_1(q^2)$ n'est pas complètement réductible

Proposition 99. *Le $\mathcal{U}_q(\hat{sl}_2)$-module W admet un unique sous-module propre. Il est de dimension 3 et s'écrit comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel :*

$$W' = \mathbb{C}v_0 \oplus w_0 \otimes \mathbb{C}(v_0 \otimes w_1 + q^{-1}v_1 \otimes w_0) \oplus \mathbb{C}v_1 \otimes w_1$$

Comme $\mathcal{U}_q(\hat{sl}_2)$-module, W' est irréductible et isomorphe à $W_2(q)$. Le $\mathcal{U}_q(\hat{sl}_2)$-module W n'est pas complètement réductible.

Démonstration:

Considérons le sous-espace vectoriel $W' = \mathbb{C}w'_0 \oplus \mathbb{C}w'_1 \oplus \mathbb{C}w'_2$ de W avec :

$$w'_0 = v_0 \otimes w_0 \ , \ w'_1 = v_0 \otimes w_1 + q^{-1}v_1 \otimes w_0 \ , \ w'_2 = (q + q^{-1})v_1 \otimes w_1$$

En utilisant les formules du lemme 8, on peut alors calculer l'action de $\mathcal{U}_q(\hat{sl}_2)$ sur ces vecteurs. Par exemple :

$$F_0.w'_1 = F_0.(v_0 \otimes w_1) + q^{-1}F_0.(v_1 \otimes w_0) = q^{-2}v_0 \otimes w_0 + q^{-1}qv_0 \otimes w_0 = (1 + q^{-2})v_0 \otimes w_0$$

On obtient :

$$E_0.w'_0 = qw'_1 \ , \ F_0.w'_0 = 0 \ , \ K_0.w'_0 = q^{-2}w'_0 \ , \ E_1.w'_0 = 0 \ , \ F_1.w'_0 = w'_1 \ , \ K_1.w'_0 = q^2w'_0$$

$$E_0.w'_1 = qw'_2 \ , \ F_0.w'_1 = (1 + q^{-2})w'_0 \ , \ K_0.w'_1 = w'_1 \ , \ E_1.w'_1 = (q + q^{-1})w'_0 \ , \ F_1.w'_1 = w'_2 \ , \ K_1.w'_1 = w'_1$$

$$E_0.w'_2 = 0 \ , \ F_0.w'_2 = (1 + q^{-2})w'_1 \ , \ K_0.w'_2 = q^2w'_0 \ , \ E_1.w'_2 = (q + q^{-1})w'_1 \ , \ F_1.w'_2 = 0 \ , \ K_1.w'_2 = q^{-2}w'_2$$

On voit ainsi que W' est stable pour l'action $\mathcal{U}_q(\hat{sl}_2)$. En particulier W n'est pas irréductible.

On rappelle que le $\mathcal{U}_q(\hat{sl}_2)$-module $W_2(q)$ est dimension 3, et la représentation est donnée par $\rho_{W_2(q)} = \rho_{L_+(2)} \circ ev_{q^2}$ avec pour une base (m_0, m_1, m_2) de $L_+(2)$:

$$K.m_0 = q^2 m_0 \ , \ F.m_0 = m_1 \ , \ E.m_0 = 0$$

$$K.m_1 = m_1 \ , \ F.m_1 = m_2 \ , \ E.m_1 = [2]_q m_0 = (q + q^{-1}) m_0$$
$$K.m_2 = q^{-2} m_2 \ , \ F.m_2 = 0 \ , \ E.m_2 = [2]_q m_1 = (q + q^{-1}) m_1$$

et le morphisme d'évaluation $ev_{q^2} : \mathcal{U}_q(\hat{sl}_2) \to \mathcal{U}_q(sl_2)$ donné par :

$$ev_{q^2}(E_0) = qF \ , \ ev_{q^2}(F_0) = q^{-1}E \ , \ ev_{q^2}(E_1) = E \ , \ ev_{q^2}(F_1) = F_1 \ , \ ev_{q^2}(K_0) = K^{-1} \ , \ ev_{q^2}(K_1) = K$$

On peut ainsi calculer l'action de $\mathcal{U}_q(s\hat{l}_2)$ sur W'. Par exemple :

$$F_0.m_1 = q^{-1}E.m_1 = (1 + q^{-2})m_0$$

On obtient ainsi des formules qui sont identiques à celles de W' où on remplace (w_0', w_1', w_2') par (m_0, m_1, m_2). Donc les $\mathcal{U}_q(s\hat{l}_2)$-modules W' et $W_2(q)$ sont isomorphes, et W' est irréductible.

Supposons par l'absurde que W est complètement réductible et considérons une décomposition de W en somme directe de sous-modules irréductibles. Chacun des sous-modules irréductibles est somme de ces sous-espaces de poids relativement à K. Donc le sous-espace W_{q^2} est inclus dans un des sous-espace de cette somme, celui-ci est donc égal à W'. On a donc en tant que $\mathcal{U}_q(s\hat{l}_2)$-module $W = W' \oplus W''$ avec W'' un $\mathcal{U}_q(s\hat{l}_2)$-module irréductible de dimension 1. Soit $u \in W$ tel que $W'' = \mathbb{C}u$. Le poids d'un vecteur d'un $\mathcal{U}_q(sl_2)$ de dimension 1 est 1, donc $u \in W_1 = \mathbb{C}(v_0 \otimes w_1) \oplus \mathbb{C}(v_1 \otimes w_0)$. Ecrivons $u = \lambda v_0 \otimes w_1 + \mu v_1 \otimes w_0$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Alors :

$$E_1.u = \lambda q(v_0 \otimes w_0) + \mu(v_0 \otimes w_0) = (\mu + q\lambda) v_0 \otimes w_0 \in W'$$

donc $\mu + q\lambda = 0$. Mais :

$$E_0.u = \lambda v_1 \otimes w_1 + \mu q^3 v_1 \otimes w_1 = (\lambda + q^3\mu) v_1 \otimes w_1 \in W'$$

donc $q^3\mu + \lambda = 0$. Le système de deux équations sur λ, μ est inversible car $q^4 \neq 1$. Donc $u = 0$, contradiction. □

6 Le morphisme de q-caractères χ_q

6.1 Motivations et énoncé

On a défini précédemment des morphismes de caractères qui permettent d'obtenir des résultats relatifs aux théories des représentations de dimension finie, et en particulier d'étudier l'anneau de Grothendieck : pour le cas classique semi-simple on a pu dans le théorème 11 obtenir $ch : Rep(\mathfrak{g}) \simeq \mathbb{Z}[T_1, ..., T_n]$, pour le cas classique affine dans le théorème 14 une généralisation des formules de Weyl et de l'étude des produits tensoriels, et pour le cas quantique semi-simple dans le théorème 23 une analogie forte entre les théories des représentations classique et quantique $Rep(\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})) \simeq Rep(\mathfrak{g}) \simeq \mathbb{Z}[\Lambda]^W \simeq \mathbb{Z}[T_1, ..., T_n]$.

On pourrait aussi bien sûr définir par analogie des caractères "classiques" sur $Rep(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))$ l'anneau de Grothendieck construit à partir des représentations de dimension finie de type 1 d'une algèbre affine quantifiée $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$. Cependant on a vu que de telles méthodes ne donnent pas de résultats aussi intéressants que dans les autres cas ; en particulier elles ne permettent pas de distinguer toutes les représentations irréductibles. Nous allons donc définir un nouvel objet, appelé morphisme de q-caratères avec des propriétés plus riches que ces analogues classiques. On dispose pour ceci d'un outil essentiel, la R-matrice universelle, qui interviendra fondamentalement dans la construction.

On demande que cet objet soit un morphisme d'anneaux (pour la compatiblité avec les sommes directes et les produits tensoriels) partant de $Rep(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))$, et qu'il soit compatible avec l'application caractère de $Rep(\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}))$ (car elle a déjà bien montré son efficacité). Cette dernière application est l'homorphisme d'anneaux de la définition 54 :

$$\chi : Rep(\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})) \to \mathbb{Z}[y_i^{\pm}]_{1 \leq i \leq n} \simeq \mathbb{Z}[\Lambda]$$

Pour faire le lien avec le cas semi-simple on rappelle le morphisme d'anneaux défini de la proposition 64 :

$$res : Rep(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})) \to Rep(\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}))$$

On pose $I = \{1, ..., n\}$. On définit l'anneau $\mathbb{Z}[y_i^{\pm 1}]_{i\in I}$ (respectivement l'anneau $\mathbb{Z}[Y_{i,a_i}^{\pm 1}]_{i\in I, a_i\in\mathbb{C}^*}$) comme le sous-anneau du corps des fractions rationnelles $\mathbb{Q}(y_i)_{1\leq i\leq n}$ (respectivement du corps des fractions rationnelles $\mathbb{Q}(Y_{i,a})_{i\in I,a\in\mathbb{C}^*}$) engendré par les éléments y_i, y_i^{-1}, $1 \leq i \leq n$ (respectivement par les éléments $Y_{i,a}, Y_{i,a}^{-1}$, $i \in I, a \in \mathbb{C}^*$.

Théorème 41. *Il existe un homomorphisme d'anneaux :*

$$\chi_q : Rep(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})) \to \mathbb{Z}[Y_{i,a}^{\pm 1}]_{i\in I, a\in\mathbb{C}^*}$$

tel que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} Rep(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})) & \xrightarrow{\chi_q} & \mathbb{Z}[Y_{i,a}^{\pm 1}]_{i\in I,a\in\mathbb{C}^*} \\ \downarrow res & & \downarrow \beta \\ Rep(\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})) & \xrightarrow{\chi} & \mathbb{Z}[y_i^{\pm 1}]_{i\in I} \end{array}$$

est commutatif, avec β l'homorphisme d'anneaux canonique qui vérifie $\beta({Y_{i,a}}^{\pm 1}) = y_i^{\pm 1}$.

Cette partie est consacrée à la démonstration de ce théorème. Pour ne pas perdre de l'information contenue dans la théorie des représentations, on souhaiterait que χ_q soit injectif. Nous verrons que ce n'est pas le cas mais que son noyau a une forme intéressante.

6.2 Construction de l'application χ_q

6.2.1 Les morphismes d'algèbres f_V et $\hat{f}_V$

Soit V un $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$-module de dimension finie de type 1. On note : $\pi_V : \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}) \to End(V)$ le morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres correspondant. On en déduit un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres $\hat{f}_V = (\pi_V((z)) \otimes id)[[h]]$:

$$\hat{f}_V : (\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})((z)) \otimes \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}}))[[h]] \to (End(V)((z)) \otimes \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}}))[[h]]$$

Remarquons que sur les générateurs de la nouvelle réalisation du théorème 24 par ($1 \leq i \leq n$, $r \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}^*$) :

$$\hat{f}_V(x_{i,r}^{\pm} \otimes x) = z^r \pi_V(x_{i,r}^{\pm}) \otimes x \ , \ \hat{f}_V(h_{i,m} \otimes x) = z^m \pi_v(h_{i,m}) \otimes x$$

$$\hat{f}_V(c^{\frac{1}{2}} \otimes x) = Id_V \otimes x \ , \ \hat{f}_V(k_i \otimes x) = \pi_V(k_i) \otimes x \ , \ \hat{f}_V(\phi_{i,r}^{\pm} \otimes x) = z^r \pi_V(\phi_{i,r}^{\pm}) \otimes x$$

Remarquons qu'en fait :

$$\hat{f}_V((\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))_m \otimes \mathcal{U}_q b_-) \subset z^m End(V) \otimes \mathcal{U}_q b_-$$

et pour $m \geq 0$ on note $f_{V,m}$ l'application $\mathbb{C}$-linéaire restreinte :

$$f_{V,m} : (\mathcal{U}_q b_+)_m \otimes \mathcal{U}_q b_- \to z^m End(V) \otimes \mathcal{U}_q b_-$$

On a vu dans le lemme 1 la $\mathbb{C}$-algèbre :

$$\mathfrak{A} = \prod_{m\geq 0} (\mathcal{U}_q b_+)_m \otimes \mathcal{U}_q b_- \subset (\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})[[z]] \otimes \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}}))$$

On considère aussi l'algèbre produit :

$$\mathfrak{B} = \prod_{m\geq 0} z^m End(V) \otimes \mathcal{U}_q b_- = (End(V) \otimes \mathcal{U}_q b_-)$$

On a ainsi des application linéaires $f_{V,m} : \mathfrak{A}_m \to \mathfrak{B}_m$, qui donnent une application $\mathbb{C}$-linéaire $f_V = (\tilde{f_{V,m}})$: $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$.

Lemme 9. *Les applications $f_{V,m}$ donnent par le procédé de la proposition 39 un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres :*

$$f_V : \mathfrak{A} \to (End(V) \otimes \mathcal{U}_q b_-)[[z]] = \mathfrak{B}$$

De plus f_V est la restriction de $\hat{f}_V$ à $\mathfrak{A} \subset (\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})((z)) \otimes \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}}))[[h]]$.

Démonstration:

Pour la première assertion, il suffit de vérifier les conditions de compatibilité de la proposition 39, pour $m, m' \geq 0$:

$$\begin{aligned} f_V((z^m x_m \otimes y_m)(z^{m'} x_{m'} \otimes y_{m'})) &= z^{m+m'} f_{V,m+m'}(x_m x_{m'}) \otimes y_m y_{m'}) \\ &= z^{m+m'} \pi_{(z)}(x_m x_{m'}) \otimes y_m y_{m'} \\ &= (z^m \pi_{(z)}(x_m) z^{m'} \pi_{v(z)}(x_{m'})) \otimes y_m y_{m'} \\ &= (z^m f_{V,m}(x_m) f_{V,m'}(z^{m'} x_{m'}) \otimes y_m y_{m'})) \\ &= (z^m f_{V,m}(x_m) \otimes y_m)(z^{m'} f_{V,m'}(x_{m'}) \otimes y_{m'}) \\ &= f_V(z^m x_m \otimes y_m) f_V(z^{m'} x_{m'} \otimes y_{m'}) \end{aligned}$$

Ensuite remarquons que sur $(\mathcal{U}_q b_+)_m \otimes \mathcal{U}_q b_-$ on a $f_V = f_{V,m} = \hat{f}_V$ puis sur $\mathfrak{A}$, $f_V = \prod_{m \geq 0} f_{V,m} = \hat{f}_V$. $\square$

6.2.2 L'application ν_q

La R-matrice universelle du théorème 34 est dans $(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}) \otimes \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}}))[[h]] \subset (\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})((z)) \otimes \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}}))[[h]]$.

Lemme 10. *La partie imaginaire R_{im} de R est dans $\mathfrak{A}$.*

Démonstration:

On part de la formule de définition de R_{im} du théorème 38 :

$$R_{im} = e^{-(q-q^{-1}) \sum_{m>0, 1 \leq i,j \leq n} \frac{m}{[m]_q} \tilde{B_{ij}}(q^m) h_{i,m} \otimes h_{j,-m}}$$

avec pour $m > 0$, $h_{i,m} \in (\mathcal{U}_q b_+)_m$ et $h_{i,-m} \in \mathcal{U}_q b_-$. Mais comme pour $m, m' > 0$ on a $[h_{i,m}, h_{j,m'}] = 0$ et $[h_{i,-m}, h_{j,-m'}] = 0$, on a :

$$R_{im} = \prod_{m>0, 1 \leq i,j \leq n} e^{-(q-q^{-1}) \frac{m}{[m]_q} \tilde{B_{ij}}(q^m) h_{i,m} \otimes h_{j,-m}}$$

Posons $M(m,i,j,q) = -(q-q^{-1}) \frac{m}{[m]_q} \tilde{B_{ij}}(q^m) \in \mathbb{C}(q)$. Pour $l > 0$, on a $(M(m,i,j,q) h_{i,m} \otimes h_{j,-m})^l \in (\mathcal{U}_q b_+)_{ml} \otimes \mathcal{U}_q b_-$. Donc

$$L_m^{(ij)} = e^{-(q-q^{-1}) \frac{m}{[m]_q} \tilde{B_{ij}}(q^m) h_{i,m} \otimes h_{j,-m}} = \sum_{l \geq 0} \frac{1}{l!} (M(m,i,j,q) h_{i,m} \otimes h_{j,-m})^l$$

est bien défini dans $\mathfrak{A} = \prod_{p \geq 0} ((\mathcal{U}_q b_+)_p \otimes \mathcal{U}_q b_-)$. Mais $L_m^{(ij)} \in 1 + \prod_{p \geq m} ((\mathcal{U}_q b_+)_p \otimes \mathcal{U}_q b_-)$. Donc lorsqu'on fait le produit sur tous les $m > 0$ des $L_m^{(ij)}$, on aura qu'un nombre fini de termes sur chaque composante $(\mathcal{U}_q b_+)_p \otimes \mathcal{U}_q b_-$ et le produit $L^{(ij)} = \prod_{m>0} L_m^{(ij)}$ est bien défini dans $\mathfrak{A}$. Enfin prendre le produit sur les indices i, j ne pose pas de problème puisqu'ils sont en nombre fini, et $R_{im} = \prod_{1 \leq i,j \leq n} L^{(ij)} \in \mathfrak{A}$. $\square$

Lemme 11. *Pour V un $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$-module de dimension finie de type 1, on a :*

$$(\pi_V \otimes id)[[h]](K) \in End(V) \otimes \mathcal{U}_q(\tilde{k}) \subset End(V) \otimes \mathcal{U}_q b_-$$

Démonstration:

On part de la formule de définition de K du théorème 38 :

$$K = e^{\frac{h}{2} \sum_{1 \leq i,j \leq n} (B^{-1})_{i,j} h_i \otimes h_j}$$

Le module V est de type 1, donc en particulier les k_i ont une action simultanément diagonalisable sur V, et on décompose selon les espaces de poids $V = \bigoplus_{\lambda \in Q} V_\lambda$. Pour $x \in V_\lambda$, les égalités $k_i.x = q^{(\lambda, \alpha_i)} x$ s'écrivent $e^{-\frac{h}{2} h_i}.x = e^{-\frac{h}{2}(\lambda, \alpha_i)} x$ et donc $h_i.x = (\lambda, \alpha_i) x$. Soit $p_\lambda \in End(V)$ la projection sur V_λ suivant la décomposition en sous-espaces de poids. Alors :

$$\pi_V(h_i) = \sum_{\lambda \in Q} (\lambda, \alpha_i) p_\lambda$$

la somme étant finie puisque V est de dimension finie. donc :

$$(\pi_V \otimes id)[[h]](K) = e^{\frac{h}{2}\sum\limits_{1\leq i,j\leq n}(B^{-1})_{i,j}\sum\limits_{\lambda\in Q}(\lambda,\alpha_i)p_\lambda\otimes h_j}$$

Comme les p_λ commutent entre eux, et qu'il en est de même pour les h_j :

$$\begin{aligned}
(\pi_V \otimes id)[[h]](K) &= \prod_{1\leq i,j\leq n,\lambda\in Q} e^{\frac{h}{2}(B^{-1})_{i,j}(\lambda,\alpha_i)p_\lambda\otimes h_j} \\
&= \prod_{1\leq i,j\leq n,\lambda\in Q} (id_V \otimes 1 + \sum_{l\ 0}\tfrac{1}{l!}p_\lambda^l \otimes (\tfrac{h}{2}(B^{-1})_{i,j}(\lambda,\alpha_i)h_j)^l) \\
&= \prod_{1\leq i,j\leq n,\lambda\in Q} (id_V \otimes 1 + p_\lambda \otimes (\sum_{l>0}\tfrac{1}{l!}(\tfrac{h}{2}(B^{-1})_{i,j}(\lambda,\alpha_i)h_j)^l)) \\
&= \prod_{1\leq i,j\leq n,\lambda\in Q} ((id_V - p_\lambda)\otimes 1 + p_\lambda \otimes e^{\frac{h}{2}(B^{-1})_{i,j}(\lambda,\alpha_i)h_j}) \\
&= \prod_{1\leq i,j\leq n,\lambda\in Q} ((id_V - p_\lambda)\otimes 1 + p_\lambda \otimes k_j^{-(B^{-1})_{i,j}(\lambda,\alpha_i)})
\end{aligned}$$

et ce terme est égal à un produit fini d'éléments de $End(V) \otimes \mathcal{U}_q(\tilde{k})$. □

Cet élément $(\pi_V \otimes id)[[h]](K)$ sera noté a.

Définition 61. *Les L-opérateurs associés à V sont définis par :*

$$\hat{L}_V = \hat{f}_V(R) \in (End(V)((z)) \otimes \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}}))[[h]]$$

$$L_V = f_V(R_{im})a \in (End(V) \otimes \mathcal{U}_q b_-)[[z]]$$

On déduit de l'application $\mathbb{C}$-linéaire classique trace $tr_V : End(V) \to \mathbb{C}$ une application $\mathbb{C}$-linéaire $tr'_V : End(V) \otimes \mathcal{U}_q b_- \to \mathcal{U}_q b_-$ en posant $tr'_V = tr_V \otimes id_{\mathcal{U}_q b_-}$, puis

$$Tr_V : (End(V) \otimes \mathcal{U}_q b_-)[[z]] \to \mathcal{U}_q b_-[[z]]$$

application $\mathbb{C}$-linéaire telle que $Tr_V(\sum\limits_{m\geq 0} x_m z^m) = \sum\limits_{m\geq 0} tr'_V(x_m)z^m$. De même on définit :

$$\hat{Tr}_V : (End(V)((z)) \otimes \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}}))[[h]] \to \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}})((z))[[h]]$$

En fait Tr_V est la restriction de $\hat{Tr}_V$ à $(End(V) \otimes \mathcal{U}_q b_-)[[z]]$.

Définition 62. *Les matrices de transfert associées à V sont définies par :*

$$t_V = Tr_V(L_V) \in \mathcal{U}_q b_-[[z]]$$

$$\hat{t}_V = \hat{Tr}_V(\hat{L}_V) \in \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}})((z))[[h]]$$

Proposition 100. *Il existe deux morphismes de groupes :*

$$\nu_q : Rep(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})) \to \mathcal{U}_q b_-[[z]]$$

$$\hat{\nu}_q : Rep(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})) \to \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}})((z))[[h]]$$

définis de manière unique pour que $\nu_q(V) = t_V$ et $\hat{\nu}_q(V) = \hat{t}_V$ pour une représentation V dans $Rep(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))$.

Démonstration:

L'unicité est claire puisqu'on définit la valeur de $\nu_q(V) = t_V$ (respectivement $\hat{\nu}_q(V) = \hat{t}_V$) sur les générateurs V du groupe de Grothendieck $Rep(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))$. Pour l'existence, notons d'abord que d'après le définition 62 les $t_V \in \mathcal{U}_q b_-[[z]]$ et $\hat{t}_V \in \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}})((z))[[h]]$. Il nous reste à montrer la compatibilité avec $\oplus$ sur les représentations.

Soient $V, W \in Rep(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))$ deux représentations. On a $V \oplus W \in Rep(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))$ et $\pi_{(V\oplus W)} : \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}) \to End(V \oplus W) \subset (End(V) \oplus End(W))$, et en tant que morphismes $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}) \to (End(V) \oplus End(W))$, on a par linéarité de τ_z : $f_{V\oplus W} = f_V + f_W$ et $\hat{f}_{V\oplus W} = \hat{f}_V + \hat{f}_W$. En conséquence $L_{V\oplus W} = L_V + L_W$ et $\hat{L}_{V\oplus W} = \hat{L}_V + \hat{L}_W$. En utilisant la linéarité de la trace et la propriété usuelle $tr_{V\oplus W|End(V)} = tr_V$, on obtient :

$$t_{V\oplus W} = Tr_{V\oplus W}(L_V) + Tr_{V\oplus W}(L_W) = Tr_V(L_V) + Tr_W(L_W) = t_V + t_W$$

et de même $\hat{t}_{V\oplus W} = \hat{t}_V + \hat{t}_W$. □

6.2.3 L'application h_q

On a déjà vu dans la proposition 90 l'inclusion $\mathcal{U}_q b_- \subset \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}})$. En particulier on pourra considérer que l'application ν_q est à valeurs dans $\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}})[[z]]$ (respectivement $\hat{\nu}_q$ à valeurs dans $\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}})((z))[[h]]$). On a rencontré les idéaux $(\mathcal{U}_q(\tilde{n}_-))_0$ et $(\mathcal{U}_q(\tilde{n}_+))_0$ dans la définition 59.

Proposition 101. *On a les décompositions d'espace vectoriel suivantes :*

$$\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}}) = \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{h}}) \oplus ((\mathcal{U}_q(\tilde{n}_-))_0.\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}}) + \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}}).(\mathcal{U}_q(\tilde{n}_+))_0)$$

$$\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}})[[h]] = \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{h}})[[h]] \oplus ((\mathcal{U}_q(\tilde{n}_-))_0[[h]].\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}})[[h]] + \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}})[[h]].(\mathcal{U}_q(\tilde{n}_+))_0[[h]])$$

Démonstration:

On a $1 \in \mathcal{U}_q(\tilde{n}_-)$ (respectivement $1 \in \mathcal{U}_q(\tilde{n}_+)$) et $\epsilon(1) = 1$. Donc on a la décomposition d'espace vectoriel $\mathcal{U}_q(\tilde{n}_-) = (\mathcal{U}_q(\tilde{n}_-))_0 \oplus \mathbb{C}.1$ (respectivement $\mathcal{U}_q(\tilde{n}_+) = (\mathcal{U}_q(\tilde{n}_+))_0 \oplus \mathbb{C}.1$). Donc :

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}}) &= \mathcal{U}_q(\tilde{n}_-) \otimes \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{h}}) \otimes \mathcal{U}_q(\tilde{n}_+) \\
&= ((\mathcal{U}_q(\tilde{n}_-))_0 \oplus \mathbb{C}.1) \otimes \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{h}}) \otimes ((\mathcal{U}_q(\tilde{n}_+))_0 \oplus \mathbb{C}.1) \\
&= (\mathbb{C}.1 \otimes \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{h}}) \otimes \mathbb{C}.1) \oplus ((\mathcal{U}_q(\tilde{n}_-))_0 \otimes \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{h}}) \otimes ((\mathcal{U}_q(\tilde{n}_+))_0 \oplus \mathbb{C}.1) \oplus \mathbb{C}.1 \otimes \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{h}}) \otimes (\mathcal{U}_q(\tilde{n}_+))_0) \\
&= \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{h}}) \oplus ((\mathcal{U}_q(\tilde{n}_-))_0 \otimes \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{h}}) \otimes \mathcal{U}_q(\tilde{n}_+) \oplus \mathbb{C}.1 \otimes \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{h}}) \otimes (\mathcal{U}_q(\tilde{n}_+))_0)
\end{aligned}$$

Comme $(\mathcal{U}_q(\tilde{n}_-))_0$ est un idéal de $\mathcal{U}_q(\tilde{n}_-)$ on a :

$$(\mathcal{U}_q(\tilde{n}_-))_0 = (\mathcal{U}_q(\tilde{n}_-))_0.\mathcal{U}_q(\tilde{n}_-) \text{ et } (\mathcal{U}_q(\tilde{n}_-))_0 \otimes \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{h}}) \otimes \mathcal{U}_q(\tilde{n}_+) = (\mathcal{U}_q(\tilde{n}_-))_0.\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}})$$

Et donc :

$$\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}}) = \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{h}}) \oplus ((\mathcal{U}_q(\tilde{n}_-))_0.\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}}) \oplus \mathbb{C}1 \otimes \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{h}}) \otimes (\mathcal{U}_q(\tilde{n}_+))_0)$$

Mais d'après les expressions précédentes le deuxième terme de cette somme directe est symétrique en $\tilde{n}_+$ et $\tilde{n}_-$. Il contient donc également $\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}}).(\mathcal{U}_q(\tilde{n}_+)_0$ qui lui même contient $\mathbb{C}.1 \otimes \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{h}}) \otimes (\mathcal{U}_q(\tilde{n}_+))_0$. On en déduit :

$$\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}}) = \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{h}}) \oplus ((\mathcal{U}_q(\tilde{n}_-))_0.\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}}) + \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}}).(\mathcal{U}_q(\tilde{n}_+))_0)$$

La décomposition de $\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}})[[h]]$ se montre exactement de la même manière. □

On peut donc considérer la projection $p_q : \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}}) \to \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{h}})$ suivant cette somme directe. Elle induit :

$$h_q : \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}})[[z]] \to \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{h}})[[z]]$$

et

$$\hat{h}_q : \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}})((z))[[h]] \to \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{h}})((z))[[h]])$$

6.2.4 L'application χ_q

Définition 63. *L'application :*

$$\chi_q : Rep(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})) \to \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{h}})[[z]]$$

est définie comme la composée de $\nu_q : Rep(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})) \to \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}})[[z]]$ et de $h_q : \tilde{\mathfrak{g}}[[z]] \to \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{h}})[[z]]$.

On appelle χ_q le morphisme de q-caractères, et pour $V \in Rep(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ on dit que $\chi_q(V)$ est le q-caractère de V. C'est un morphisme de groupes car $\hat{nu}_q$ et $\hat{h}_q$ le sont.

Définition 64. *L'application :*

$$\hat{\chi_q} : Rep(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})) \to \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{h}})((z))[[z]]$$

est définie comme la composée de $\hat{\nu}_q : Rep(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})) \to \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}})((z))[[h]]$ et de $\hat{h}_q : \tilde{\mathfrak{g}}((z))[[h]] \to \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{h}})((z))[[h]]$.

Théorème 42. *Pour $V \in Rep(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))$ une représentation, on a :*

$$\hat{\chi}_q(V) = \chi_q(V) = Tr_V(e^{-(q-q^{-1})\sum_{m>0,1\leq i,j\leq n}\frac{m}{[m]_q}\tilde{B}_{ij}(q^m)z^m\pi_V(h_{i,m})\otimes h_{j,-m}}a)$$

avec $a = (\pi_V \otimes id)[[h]](K) \in End(V) \otimes \mathcal{U}_q(\tilde{k})$.

Démonstration:

On part de la formule explicite obtenue dans le théorème 38 de la R-matrice universelle $R = R^+_{Re} R_{im} R^-_{Re} K$ et des décompositions du corollaire 13 $R^+_{Re} = 1 \otimes 1 + R^+_{Re0}$, $R^-_{Re} = 1 \otimes 1 + R^-_{Re0}$. On a vu dans le lemme 11 que $a = \hat{f}_V(K) \in End(V) \otimes \mathcal{U}_q(\tilde{k})$. Calculons $\hat{\chi}_q(V)$:

$$\begin{aligned} \hat{\chi}_q(V) &= \hat{h}_q(\hat{Tr}_V(\hat{f}_V(R^+_{Re})\hat{f}_V(R_{im})\hat{f}_V(R^-_{Re})a)) \\ &= h_q(\hat{Tr}_V((\hat{f}_V(R^+_{Re0}) + id_V \otimes 1)\hat{f}_V(R_{im}) \\ &(\hat{f}_V(R^-_{Re0}) + id_V \otimes 1)a)) \\ &= h_q(\hat{Tr}_V(\hat{f}_V(R_{im})a)) \\ &+ h_q(\hat{Tr}_V(\hat{f}_V(R^+_{Re0})\hat{f}_V(R_{im})\hat{f}_V(R^-_{Re})a)) \\ &+ h_q(\hat{Tr}_V(\hat{f}_V(R_{im})\hat{f}_V(R^-_{Re0})a))) \end{aligned}$$

Appelons les termes de cette dernière somme respectivement A_1, A_2 et A_3. Le premier est $A_1 = \chi_q(V)$, soit $\hat{\chi}_q(V) = \chi_q(V) + A_2 + A_3$.

Remarquons :

$$\hat{f}_V(R^+_{Re0}) \in (End(V)((z)) \otimes (\mathcal{U}_q(\tilde{n}_-))_0)[[h]]$$

$$\hat{f}_V(R^-_{Re}) \in (End(V)((z)) \otimes \mathcal{U}_q(\tilde{n}_+))[[h]]$$

$$\hat{f}_V(R^-_{Re0}) \in (End(V)((z)) \otimes (\mathcal{U}_q(\tilde{n}_+))_0)[[h]]$$

$$\hat{f}_V(R_{im}) \in (End(V)((z)) \otimes \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{h}}))[[h]]$$

$$a \in End(V) \otimes \mathcal{U}_q(\tilde{k})$$

En particulier pour A_2 on a :

$$\hat{Tr}_V(\hat{f}_V(R^+_{Re0})\hat{f}_V(R_{im})(\pi_{V(z)} \hat{\otimes} id)(R^-_{Re})a) \in (\mathcal{U}_q(\tilde{n}_-))_0.\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}})((z))[[h]]$$

et donc en prenant $\hat{h}_q$ on annule ce terme : $A_2 = 0$.

Ensuite pour le terme A_3, on se rappelle d'après le corollaire 88 que $K \in (\mathcal{U}_q(\tilde{k}) \otimes \mathcal{U}_q(\tilde{k}))[[h]]$. Les relations du théorème 24 : $\tilde{k}_i x^{\pm}_{j,m} \tilde{k}_i^{-1} = q^{\pm(\omega_i, \alpha_j)} x^{\pm}_{j,m}$ impliquent que $((\mathcal{U}_q(\tilde{n}_+))_0.\mathcal{U}_q(\tilde{k}))[[h]] \subset (\mathcal{U}_q(\tilde{k}).(\mathcal{U}_q(\tilde{n}_+))_0)[[h]]$. En conséquence :

$$\hat{Tr}_V(\hat{f}_V(R_{im})\hat{f}_V(R^-_{Re0})a) \in \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}})\mathcal{U}_q(\tilde{k}).(\mathcal{U}_q(\tilde{n}_+))_0((z))[[h]] \subset \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}}).(\mathcal{U}_q(\tilde{n}_+))_0((z))[[h]]$$

et donc en prenant $\hat{h}_q$ on annule ce terme : $A_3 = 0$.

On a donc obtenu $\hat{\chi}_q(V) = \chi_q(V) = A_1$ qu'il reste à calculer. En se souvenant que π_V, τ_z sont des morphismes d'anneaux et que $\tau_z(h_{i,m}) = z^m h_{i,m}$ on a :

$$\hat{f}_V(R_{im}) = e^{-(q-q^{-1}) \sum_{m>0, 1 \leq i,j \leq n} \frac{m}{[m]_q} \tilde{B}_{ij}(q^m) z^m \pi_V(h_{i,m}) \otimes h_{j,-m}}$$

Puis comme $Tr_V((\pi_{V(z)} \hat{\otimes} id)(R_{im})a) \in \mathcal{U}_q \tilde{\mathfrak{h}}[[z]]$, cet élément est invariant par h_q et est égal à A_1. Et donc on obtient pour $\chi_q(V) = A_1$ la formule annoncée. □

6.3 L'application χ_q est un morphisme d'anneaux

6.3.1 L'application $\hat{\nu}_q$ est un morphisme d'anneaux

Proposition 102. *L'application :*

$$\hat{\nu}_q : Rep(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})) \to \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}})((z))[[h]]$$

est un morphisme d'anneaux.

Démonstration:

On sait que $\hat{\nu}_q$ est un morphisme de groupes. Pour la représentation unité $\epsilon : \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}) \to \mathbb{C} \simeq End(\mathbb{C})$, on a vu dans la proposition 81 $(\epsilon \otimes id)[[h]](R) = 1_{\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})}$, et donc $\hat{t}_{1_{Rep(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))}} = 1_{\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}})((z))[[h]]}$. Pour conclure il ne reste plus qu'à montrer que $\hat{t}_{V \otimes W} = \hat{t}_V \hat{t}_W$ pour deux représentations V et W.

Regardons la représentation $V \otimes W \in Rep(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))$. Par définition, on a $\pi_{V\otimes W} = (\pi_V \otimes \pi_W) \circ \Delta$ (égalité dans $End(V \otimes W) \simeq End(V) \otimes End(W)$ en dimension finie). En posant $g = (\pi_V((z)) \otimes \pi_W((z)) \otimes id)[[h]]$ on obtient un morphisme d'algèbres :

$$g : (\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})((z)) \otimes \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})((z)) \otimes \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}}))[[h]] \to (End(V)((z)) \otimes End(W)((z)) \otimes \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))[[h]]$$

Comme d'après le théorème 34 on a :

$$(\Delta \hat{\otimes} id)(R) = R_{13}R_{23} \in (\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})((z)) \otimes \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})((z)) \otimes \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}}))[[h]]$$

on voit que :

$$\hat{L}_{V\otimes W} = g(R_{13}).g(R_{23})$$

L'application classique de la trace vérifie :

$$tr_{V\otimes W} = tr_V \circ (id_{End(V)} \otimes tr_W) : End(V \otimes W) \simeq End(V) \otimes End(W) \to \mathbb{C}$$

et donc :

$$\hat{Tr}_{V\otimes W} = \hat{Tr}_V \circ (id \otimes \hat{Tr}_W) : (End(V)((z)) \otimes End(W)((z)) \otimes \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}}))[[h]] \to (\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}}))((z))[[h]]$$

On obtient :

$$\begin{aligned} t_{V\otimes W} &= \hat{Tr}_{V\otimes W}(L_{V\otimes W}) \\ &= \hat{Tr}_V((id \otimes Tr_W)(g(R_{13}).g(R_{23}))) \\ &= \hat{Tr}_V(\hat{f}_V(R).(id_V \otimes Tr_W(\hat{f}_W(R)))) \\ &= \hat{Tr}_V(\hat{f}_V(R)).\hat{t}_W \\ &= \hat{t}_V.\hat{t}_W \end{aligned}$$

□

Proposition 103. *L'image de $\hat{\nu}_q$ est un sous-anneau commutatif de $\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}})((z))[[h]]$.*

Démonstration:

L'application $\hat{\nu}_q$ est un morphisme d'anneaux et son image $\hat{\nu}_q(Rep(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})))$ est un sous-anneau de $\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}})((z))[[h]]$. Montrons qu'il est commutatif. Il suffit de montrer que pour deux représentations $V, W \in Rep(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))$, et on a le crochet $[\hat{t}_V, \hat{t}_W] = 0$. On part de l'équation de Yang-Baxter vérifiée par R explicitée dans la proposition 81 :

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}$$

On note $p = (\pi_V((z)) \otimes \pi_W((z)))[[h]]$ morphisme d'algèbres, et en appliquant à cette égalité dans $(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})((z)) \otimes \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})((z)) \otimes \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}}))[[h]]$ le morphisme d'algèbres g (voir démonstration précédente), on obtient l'égalité suivante dans $(End(V)((z)) \otimes End(W)((z)) \otimes \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))[[h]]$:

$$(p(R) \otimes 1_{\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})}).g(R_{13}).(id_V \otimes \hat{f}_W(R)) = (id_V \otimes \hat{f}_W(R)).g(R_{13}).(p(R) \otimes 1_{\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})})$$

On sait que R est inversible, et on note R' sont inverse. En multipliant à gauche l'égalité précédente par :

$$p(R') \otimes 1_{\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})} = (p(R) \otimes 1_{\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})})^{-1}$$

on obtient dans $(End(V)((z)) \otimes End(W)((z)) \otimes \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))[[h]]$:

$$g(R_{13}).(id_V \otimes \hat{f}_W(R)) = (p(R') \otimes 1_{\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})}).(id_V \otimes \hat{f}_W(R)).g(R_{13}).(p(R) \otimes 1_{\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})})$$

On applique la trace $\hat{Tr}_V \circ (Id \otimes \hat{Tr}_W)$ et en utilisant la commutativité de l'argument de la trace :

$$\hat{Tr}_V(\hat{f}_V(R).(id_V \otimes \hat{t}_W)) = \hat{Tr}_V \circ (Id \otimes Tr_W)((id_V \otimes \hat{f}_W(R)).g(R_{13}).(p(R) \otimes 1_{\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})}).(p(R') \otimes 1_{\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})}))$$

puis comme R' est l'inverse de R :

$$\begin{aligned} &\hat{Tr}_V(\hat{f}_V(R)\hat{t}_W) \\ &= \hat{Tr}_V \circ (Id \otimes \tilde{\hat{Tr}}_W)((id_V \otimes \hat{f}_W(R)).g(R_{13})) \\ &= Tr_V((id_V \otimes \hat{t}_W)\hat{f}_V(R)) \\ &= \hat{t}_W Tr_V(\hat{f}_V(R)) \end{aligned}$$

Finalement $\hat{t}_V\hat{t}_W = \hat{t}_W\hat{t}_V$, et l'image de $\hat{\nu}_q$ commutative. □

6.3.2 L'application $\hat{h}_q$ est un morphisme d'anneaux sur $z_q(\hat{\mathfrak{g}})[[h]]$

Définition 65. *On note $z_q(\hat{\mathfrak{g}})[[h]]$ la sous-algèbre de $\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}})[[h]]$ engendrée par les $t_V[m]$ où, pour $V \in Rep(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))$ et $m \leq 0$, le terme $t_V[m] \in \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}})[[h]]$ est obtenu en décomposant $\hat{\nu}_q(V) \in \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}})((z))[[h]]$ sous la forme $\hat{\nu}_q(V) = \sum_{m\leq 0} t_V[m]z^{-m}$.*

On utilise ici la Q-graduation de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ de la proposition 94.

Lemme 12. *Soit $V \in Rep(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))$ une représentation. Alors les éléments de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ de Q-degré différent de 0 ont une action nilpotente sur V.*

Démonstration:

Soit $a \in \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ de Q-degré non nul $deg(a) \in Q^*$. Il suffit de montrer que pour un vecteur de poids $v \in V_\lambda$ de V (en tant que $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$-module) on a $a^N.v = 0$ pour un certain $N \in \mathbb{N}$. Mais comme pour $i,j \in I$, $m \in \mathbb{Z}$ on a $k_i x_{j,m}^{\pm} k_i^{-1} = q^{\pm(\alpha_i,\alpha_j)} x_{j,m}^{+}$ et les k_i commutent avec les k_j, les $h_{j,m}$ et $c^{\frac{1}{2}}$, on obtient $k_i a k_i^{-1} = q^{(\alpha_i, deg(a))} a$. Donc $k_i a^l.v = q^{(\alpha_i, l.deg(a))} a^l k_i.v = q^{(\alpha_i, l.deg(a)+\lambda)} a^l.v$ pour $l \in \mathbb{N}$, soit $a^l.v \in V_{\lambda + l.deg(a)}$. Comme V est de dimension finie, $V_{\lambda+l.deg(a)} = 0$ pour l assez grand. □

Lemme 13. *Soient $V \in Rep(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))$ et $m \in \mathbb{N}$. Alors le Q-degré de $\hat{t}_V[m] \in \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}})[[h]]$ est $deg(\hat{t}_V[m]) = 0$, c'est à dire :*

$$\hat{t}_V[m] = \sum_{l\geq 0,k} h^l y_{m,k,l}$$

avec $y_{m,k,l} \in \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}})_m$ et $deg(y_{m,k,l}) = 0$. .

Démonstration:

Comme $\hat{\nu}_q$ est en particulier un morphisme de groupes $Rep(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})) \to \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}})((z))[[h]]$, les applications $V \mapsto t_V[m]$ le sont aussi. Il suffit donc de vérifier la propriété du lemme pour $V \in Rep(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))$ une représentation.

On a déjà vu dans le corollaire 96 l'écriture de R sous la forme :

$$R = \sum_{m\geq 0, l\geq 0} h^l \sum_k x_{m,k,l} \otimes y_{m,k,l}$$

avec les $y_{m,k} \in \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ Q-homogènes, $x_{m,k} \in (\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))_m$ Q-homogènes, et $deg(x_{m,k}) + deg((y_{m,k}) = 0$. On calcule alors $\hat{t}_V$:

$$\hat{t}_V = \sum_{m\geq 0, l\geq 0} h^l \sum_k \hat{Tr}_V(\hat{f}_V(x_{m,k,l} \otimes y_{m,k,l})) = \sum_{m\geq 0} z^m \sum_{l\geq 0} h^l \sum_k tr_V(\pi_V(x_{m,k,l})) y_{m,k,l}$$

On travaille avec un $m \geq 0$:

$$\hat{t}_V[m] = \underset{k,l\geq 0}{h}{}^l \sum tr_V(\pi_V(x_{m,k,l})) y_{m,k,l}$$

Soit k tel que $deg(y_{m,k,l}) \neq 0$. Alors $deg(x_{m,k,l}) \neq 0$ donc d'après le lemme 12, $x_{m,k,l}$ a une action nilpotente sur V. En particulier $tr_V(\pi_V(x_{m,k,l})) = 0$ et $y_{m,k,l}$ n'intervient pas dans l'écriture de $\hat{t}_V[m]$. □

Lemme 14. *On a les inclusions suivantes :*

$$z_q(\hat{\mathfrak{g}})[[h]] \subset \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{h}})[[h]] \oplus (\mathcal{U}_q(\tilde{n}_-))_0[[h]].\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}})[[h]]$$

$$z_q(\hat{\mathfrak{g}})[[h]] \subset \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{h}})[[h]] \oplus \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}})[[h]].(\mathcal{U}_q(\tilde{n}_+))_0[[h]]$$

Démonstration:

Dans cette démonstration on n'a pas noté les $[[h]]$ pour la lisibilité des formules. Soient $V \in Rep(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))$, $m \in \mathbb{N}$ et $t_V[m] \in \mathcal{U}_q\tilde{\mathfrak{g}}$ qui est degré 0. Rappelons la décomposition obtenue lors de la démonstration de la proposition 101 :

$$\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}}) = \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{h}}) \oplus (\mathcal{U}_q(\tilde{n}_-))_0.\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}}) \oplus \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{h}}).(\mathcal{U}_q(\tilde{n}_+))_0$$

Décomposons $t_V[m]$ suivant cette somme directe : $t_V[m] = t_1 + t_2 + t_3$. Remarquons que $\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{h}})$ est engendrée par des éléments de Q-degré 0, donc tous ses éléments sont de degré 0 :

$$\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{h}}) \subset (\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}}))_0$$

($(\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}}))_0$ désigne bien le sous-espace de degré 0 et non l'idéal d'augmentation). En particulier on a $t_1 \in (\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}}))_0$ et $t_2 + t_3 = t_V[m] - t_1 \in (\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}}))_0$. Remarquons que $\mathcal{U}_q(\tilde{n}_+)$ est engendrée par des éléments de degré positif, donc :

$$\mathcal{U}_q(\tilde{n}_+) = \bigoplus_{\alpha\in Q_+} \mathcal{U}_q(\tilde{n}_+) \cap (\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}}))_\alpha$$

Puis $(\mathcal{U}_q(\tilde{n}_+))_0$ est un idéal de $\mathcal{U}_q(\tilde{n}_+)$ engendré par des éléments de degré strictement positif, donc :

$$(\mathcal{U}_q(\tilde{n}_+))_0 = \bigoplus_{\alpha \in Q_+^*} (\mathcal{U}_q(\tilde{n}_+))_0 \cap (\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}}))_\alpha$$

Et comme $\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{h}}) \subset (\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}}))_0$ on obtient de plus :

$$\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{h}}).(\mathcal{U}_q(\tilde{n}_+))_0 = \bigoplus_{\alpha \in Q_+^*} (\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{h}}).(\mathcal{U}_q(\tilde{n}_+))_0) \cap (\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}}))_\alpha$$

Décomposons t_3 suivant cette somme directe : $t_3 = \sum_{\alpha \in Q_+^*} t_{\alpha 3}$. Par des arguments analogues on peut décomposer : $t_2 = \sum_{\alpha \in Q} t_{\alpha 2}$ avec $t_{\alpha 2} \in ((\mathcal{U}_q(\tilde{n}_-))_0.\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}})) \cap (\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}}))_\alpha$. Alors la décomposition de $t_V[m] - t_1$ suivant la Q-graduation est :

$$t_V[m] - t_1 = \sum_{\alpha \in Q_+^*} (t_{\alpha 3} + t_{\alpha_2}) + \sum_{\alpha \in Q_-} t_{\alpha 2}$$

Dans cette somme tous les termes correspondant à des degrés non-nuls sont donc nuls, et pour $\alpha \in Q_+^*$ on a :

$$t_{\alpha 3} = -t_{\alpha 2} \in (\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{h}}).(\mathcal{U}_q(\tilde{n}_+))_0) \cap ((\mathcal{U}_q(\tilde{n}_-))_0.\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}})) = \{0\}$$

En conséquence $t_3 = 0$ et $t_V[m] \in \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{h}}) \oplus (\mathcal{U}_q(\tilde{n}_-))_0.\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}})$. L'autre assertion $z_q(\hat{\mathfrak{g}}) \subset \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{h}}) \oplus \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}}).(\mathcal{U}_q(\tilde{n}_+))_0$ se montre de manière complètement analogue. □

Lemme 15. *Pour $A, B \in z_q(\hat{\mathfrak{g}})[[h]] \subset \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}})[[h]]$ on a $\hat{h}_q(AB) = \hat{h}_q(A)\hat{h}_q(B)$.*

Démonstration:

Soient $A, B \in z_q(\hat{\mathfrak{g}})[[h]]$. On décompose en utilisant le lemme 14 $A = A_0 + A_1$ (respectivement $B = B_0 + B_1$) avec $A_0 \in \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{h}})[[h]]$ et $A_1 \in (\mathcal{U}_q(\tilde{n}_-))_0[[h]].\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}})[[h]]$ (respectivement $B_0 \in \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{h}})[[h]]$ et $B_1 \in \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}})[[h]].(\mathcal{U}_q(\tilde{n}_+))_0[[h]]$). On a donc par définition de $\hat{h}_q$: $A_0 = \hat{h}_q(A)$ et $B_0 = \hat{h}_q(B)$. On peut écrire :

$$\hat{h}_q(AB) = \hat{h}_q(A_0B_0) + \hat{h}_q(A_0B_1) + \hat{h}_q(A_1B_0) + \hat{h}_q(A_1B_A)$$

Mais des définitions de A_0, A_1, B_0 et B_1, on tire :

$$A_0B_0 \in \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{h}})[[h]] \ , \ A_0B_1 \in \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}})[[h]].(\mathcal{U}_q(\tilde{n}_+))_0[[h]]$$

$$A_1B_0 \in (\mathcal{U}_q(\tilde{n}_-))_0.\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}})[[h]] \ , \ A_1B_1 \in (\mathcal{U}_q(\tilde{n}_-))_0.\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}})[[h]]$$

et donc par définition de $\hat{h}_q$:

$$\hat{h}_q(A_0B_0) = A_0B_0 \ , \ \hat{h}_q(A_0B_1) = \hat{h}_q(A_1B_0) = \hat{h}_q(A_1B_1) = 0$$

et finalement :

$$\hat{h}_q(AB) = A_0B_0 = \hat{h}_q(A)\hat{h}_q(B)$$

□

6.3.3 Les applications χ_q et $\hat{\chi}_q$ sont des morphismes d'anneaux

Proposition 104. *L'application $\hat{\chi}_q$ est un morphisme d'anneaux.*

Démonstration:

Comme on a déjà vu dans la proposition 102 que $\hat{\nu}_q$ est un morphisme d'anneaux, $\hat{h}_q$ un morphisme de groupes et $h_q(1) = 1$, il suffit de montrer que pour tous $a = \hat{\nu}(V)$, $b = \hat{\nu}(W)$ avec v et W des représentations, on a $\hat{h}_q(ab) = \hat{h}_q(a)\hat{h}_q(b)$. Pour de tels a, b, on peut écrire par définition de $z_q(\hat{\mathfrak{g}})[[h]]$:

$$a = \sum_{m \leq 0} a_m z^m \ , \ b = \sum_{m \leq 0} b_m z^m$$

avec les $a_m, b_m \in z_q(\hat{\mathfrak{g}})[[h]]$. Alors en utilisant le résultat du lemmme 15 :

$$\hat{h}_q(ab) = \sum_{m,m' \leq 0} z^{m+m'} \hat{h}_q(a_m b_{m'}) = \sum_{m,m' \leq 0} z^{m+m'} \hat{h}_q(a_m)\hat{h}_q(b_{m'}) = \hat{h}_q(a)\hat{h}_q(b)$$

□

Proposition 105. *L'application χ_q est un morphisme d'anneaux.*

Démonstration:

Comme d'après le théorème 42 χ_q et $\hat{\chi}_q$ prennent les mêmes valeurs sur $Rep(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))$, le résultat découle directement de la proposition 104. $\square$

6.4 Interprétation de $\chi_q(V)$ dans le cas complètement réductible

6.4.1 Le sous-anneau $\mathbb{Z}[Y_{i,a}^{\pm}]_{i\in I, a\in\mathbb{C}^*}$ de $\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{h}})[[z]]$

Pour $m\in\mathbb{Z}^*$ et $i\in I$, on note : $\tilde{h}_{i,m}=\sum\limits_{j\in I}\tilde{C}_{j,i}(q^m)h_{j,m}\in U_q(\hat{\mathfrak{g}})$.

Lemme 16. *Les $\tilde{h}_{i,-m}$, avec $i\in I$, $m>0$, commutent et sont algébriquement indépendants dans $\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{h}})$.*

Démonstration:

D'après la proposition 92, les $h_{i,m}$ commutent dans $\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{h}})$, il en est donc de même des $\tilde{h}_{i,m}$. Considérons une équation de dépendance algébrique des $\tilde{h}_{i,-m}$ ($i\in I$, $m>0$), c'est à dire un polynôme complexe P à N variables, $N\in\mathbb{N}$, et N couples deux à deux distincts $(i_j,m_j)\in I\times\mathbb{N}^*$, tels que : $P(\tilde{h}_{i_1,-m_1},...,\tilde{h}_{i_N,-m_N})=0$. Quitte à rajouter des variables, on peut supposer cette équation de la forme :

$$P(\tilde{h}_{1,-m_1},...,\tilde{h}_{n,-m_1},\tilde{h}_{1,-m_2},...,\tilde{h}_{n,-m_2},...,\tilde{h}_{n,-m_N})=0$$

avec P à nN variables et les m_j distincts deux à deux. On remplace alors chaque $\tilde{h}_{i,-m_j}$ par son expression en fonction des $h_{i,-m_j}$ et on obtient un polynôme Q en nN variables, défini par :

$$Q(X_{1,-m_1},...,X_{n,-m_1},X_{1,-m_2},...,X_{n,-m_2},...,X_{n,-m_N})=P(\sum_{j\in I}\tilde{C}_{j,1}(q^{m_1})X_{j,-m_1},...,\sum_{j\in I}\tilde{C}_{j,n}(q^{m_N})X_{j,-m_N})$$

Mais alors en évaluant Q en les $h_{i,m}$:

$$Q(h_{1,-m_1},...,h_{n,-m_1},h_{1,-m_2},...,h_{n,-m_2},...,h_{n,-m_N})=P(\tilde{h}_{1,-m_1},...,\tilde{h}_{n,-m_N})=0$$

Comme les h_{i,m_j} ($i\in I$, $1\leq j\leq N$) sont d'après la proposition 92 algébriquement indépendants, l'équation de dépendance algébrique précédente ne peut être que triviale, et le polynôme Q est nul. Les matrices $\tilde{C}(q^m)$ sont inversibles d'inverses respectives $C(q^m)$. Définissons le polynôme R en nN variables :

$$R(X_{1,-m_1},...,X_{n,-m_1},X_{1,-m_2},...,X_{n,-m_2},...,X_{n,-m_N})=Q(\sum_{j\in I}C_{j,1}(q^{m_1})X_{j,-m_1},...,\sum_{j\in I}C_{j,n}(q^{m_N})X_{j,-m_N})$$

On calcule alors R :

$$\begin{aligned}&R(X_{1,-m_1},...,X_{n,-m_1},X_{1,-m_2},...,X_{n,-m_2},...,X_{n,-m_N})\\&=P(\sum_{i,j\in I}\tilde{C}_{j,1}(q^{m_1})C_{i,j}(q^{m_1})X_{i,-m_1},...,\sum_{i,j\in I}\tilde{C}_{j,n}(q^{m_N})C_{i,j}(q^{m_N})X_{i,-m_N})\\&=P(\sum_{i\in I}\delta_{1,i}X_{i,-m_1},...,\sum_{i}\delta_{i,n}X_{i,-m_N})=P(X_{1,-m_1},...,X_{n,-m_1},X_{1,-m_2},...,X_{n,-m_2},...,X_{n,-m_N})\end{aligned}$$

C'est à dire $R=P$, et :

$$P(X_{1,-m_1},...,X_{n,-m_1},X_{1,-m_2},...,X_{n,-m_2},...,X_{n,-m_N})=Q(\sum_{j\in I}C_{j,1}(q^{m_1})X_{j,-m_1},...,\sum_{j\in I}C_{j,n}(q^{m_N})X_{j,-m_N})$$

Et donc la nullité de Q entraîne celle de P. $\square$

Pour $i\in I$ et $a\in\mathbb{C}^*$, on pose :

$$Y_{i,a}=\tilde{k}_i^{-1}e^{-(q-q^{-1})\sum\limits_{m>0}\tilde{h}_{i,-m}z^m a^m}\in\mathcal{U}_q\tilde{\mathfrak{h}}[[z]]$$

Lemme 17. *Pour $i\in I$ et $a\in\mathbb{C}^*$, $Y_{i,a}$ est inversible dans $\mathcal{U}_q\tilde{\mathfrak{h}}[[z]]$ d'inverse :*

$$Y_{i,a}^{-1}=e^{(q-q^{-1})\sum\limits_{m>0}\tilde{h}_{i,-m}z^m a^m}\tilde{k}_i$$

Démonstration:

On effectue le calcul :

$$Y_{i,a}^{-1}Y_{i,a}=e^{(q-q^{-1})\sum\limits_{m>0}\tilde{h}_{i,-m}z^m a^m}e^{-(q-q^{-1})\sum\limits_{m'>0}\tilde{h}_{i,-m'}z^{m'}a^{m'}}$$

Mais comme pour $i,j\in I$, $m,m'<0$ on a $[h_{i,m},h_{j,m'}]=0$, et les $\tilde{h}_{i,m}$ sont combinaisons linéaires des $h_{j,m'}$, les $[\tilde{h}_{i,m},\tilde{h}_{j,m'}]=0$ pour $m,m'<0$. Donc dans le produit $Y_{i,a}^{-1}Y_{i,a}$ les arguments des exponentielles commutent entre eux, ce qui permet d'utiliser la formule habituelle de l'exponentielle :

$$Y_{i,a}^{-1}Y_{i,a}=e^{(q-q^{-1})\sum\limits_{m>0}\tilde{h}_{i,-m}z^m a^m-(q-q^{-1})\sum\limits_{m'>0}\tilde{h}_{i,-m'}z^{m'}a^{m'}}=e^0=1$$

De même :

$$Y_{i,a}Y_{i,a}^{-1}=\tilde{k}_i^{-1}e^{-(q-q^{-1})\sum\limits_{m>0}\tilde{h}_{i,-m}z^m a^m}e^{(q-q^{-1})\sum\limits_{m>0}\tilde{h}_{i,-m}z^m a^m}\tilde{k}_i=\tilde{k}_i^{-1}\tilde{k}_i=1$$

□

Lemme 18. *Les $(Y_{i,a})_{i\in I,a\in\mathbb{C}^*}$ commutent deux à deux.*

Démonstration:

Comme d'après la proposition 88 les $\tilde{k}_i^{\pm}$ commutent avec les $h_{j,m}$, ils commutent avec les $\tilde{h}_{j,m}$ et avec les $e^{-(q-q^{-1})\sum\limits_{m>0}\tilde{h}_{j,-m}z^m a^m}$. On peut donc mener le calcul :

$$\begin{aligned}Y_{i,a}Y_{j,b}=&\ \tilde{k}_i^{-1}e^{-(q-q^{-1})\sum\limits_{m>0}\tilde{h}_{i,-m}z^m a^m}\tilde{k}_j^{-1}e^{-(q-q^{-1})\sum\limits_{m'>0}\tilde{h}_{j,-m'}z^{m'}b^{m'}}\\ &=\tilde{k}_i^{-1}e^{-(q-q^{-1})\sum\limits_{m>0}\tilde{h}_{i,-m}z^m a^m}e^{-(q-q^{-1})\sum\limits_{m'>0}\tilde{h}_{j,-m'}z^{m'}b^{m'}}\tilde{k}_j^{-1}\end{aligned}$$

Mais de même que précédemment, en remarquant que le crochet des arguments des exponentielles est nul, on peut utiliser la formule habituelle :

$$\begin{aligned}Y_{i,a}Y_{j,b}\ &=\tilde{k}_i^{-1}e^{-(q-q^{-1})\sum\limits_{m>0}\tilde{h}_{i,-m}z^m a^m-(q-q^{-1})\sum\limits_{m'>0}\tilde{h}_{j,-m'}z^{m'}b^{m'}}\tilde{k}_j^{-1}\\ &=\tilde{k}_i^{-1}e^{-(q-q^{-1})\sum\limits_{m'>0}\tilde{h}_{j,-m'}z^{m'}b^{m'}}e^{-(q-q^{-1})\sum\limits_{m>0}\tilde{h}_{i,-m}z^m a^m}\tilde{k}_j^{-1}\\ &=\tilde{k}_j^{-1}e^{-(q-q^{-1})\sum\limits_{m'>0}\tilde{h}_{j,-m'}z^{m'}b^{m'}}\tilde{k}_i^{-1}e^{-(q-q^{-1})\sum\limits_{m>0}\tilde{h}_{i,-m}z^m a^m}\\ &=Y_{j,b}Y_{i,a}\end{aligned}$$

□

Proposition 106. *Les $(Y_{i,a})_{i\in I,a\in\mathbb{C}^*}$ sont algébriquement indépendants dans $\mathcal{U}_q\tilde{\mathfrak{h}}[[z]]$. De plus le sous-anneau de $\mathcal{U}_q\tilde{\mathfrak{h}}[[z]]$ engendré par les $Y_{i,a}^{\pm}$ ($i\in I,a\in\mathbb{C}^*$) est isomorphe au sous-anneau du corps des fractions rationnelles $\mathbb{Q}(Y_{i,a})_{i\in I,a\in\mathbb{C}^*}$ engendré par les éléments $Y_{i,a},Y_{i,a}^{-1}$, $i\in I,a\in\mathbb{C}^*$. On le notera $\mathbb{Z}[Y_{i,a}^{\pm}]_{i\in I,a\in\mathbb{C}^*}$.*

Démonstration:

Considérons une combinaison linéaire de monômes distincts deux à deux :

$$A=\sum_p\lambda_p\prod_j Y_{i_{j,p},a_{j,p}}^{m_{j,p}}$$

avec les $\lambda_p\in\mathbb{C}$, $i_{j,p}\in I$, $a_{j,p}\in\mathbb{C}^*$ et $m_{j,p}\in\mathbb{Z}$. Ils nous suffit de montrer que la nullité de A entraîne celle des λ_p. Supposons donc que $A=0$.

On utilise ici la Λ-graduation de $\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{h}})$ de la proposition 95. Chaque monôme $Y_{i_{j,p},a_{j,p}}^{m_{j,p}}$ est homogène de poids $\omega(p)=\sum\limits_j m_{j,p}\omega_{i_{j,p}}$. Dans la somme on réunit les monômes de même poids et on peut écrire, en se rappelant que d'après le lemme 18 les $Y_{i,a}$ commutent, et en notant $\omega(l)=l_1\omega_1+...+l_n\omega_n\in\Lambda$ pour tout n-uplet $l=(l_1,...,l_n)\in\mathbb{Z}^n$:

$$\begin{aligned}0=A\ &=\sum_{l\in\mathbb{Z}^n}\sum_{p/\omega(p)=\omega(l)}\lambda_p\prod_j Y_{i_{j,p},a_{j,p}}^{m_{j,p}}\\ &=\sum_{l\in\mathbb{Z}^n}(\prod_{i\in I}\tilde{k}_i^{-l_i})\sum_{p/\omega(p)=\omega(l)}\lambda_p\prod_j e^{-(q-q^{-1})\sum\limits_{m>0}\tilde{h}_{i_{j,p},-m}m_{j,p}z^m a_{j,p}{}^m}\end{aligned}$$

Alors pour chaque $l \in \mathbb{Z}^n$ le terme $A(l) = (\prod_{i \in I} \tilde{k_i}^{-l_i}) \sum_{p/\omega(p)=\omega(l)} \lambda_p \prod_j e^{-(q-q^{-1})\sum_{m>0} \tilde{h}_{i_{j,p},-m} m_{j,p} z^m {a_{j,p}}^m}$ est homogène de degré $\omega(l)$. En conséquence la nullité de la somme $A = \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} A(l)$ entraîne celle des $A(l)$, et pour chaque $l \in \mathbb{Z}^n$:

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{p/\omega(p)=\omega(l)} \lambda_p \prod_j e^{-(q-q^{-1})\sum_{m>0} \tilde{h}_{i_{j,p},-m} m_{j,p} z^m {a_{j,p}}^m} \\
&= \sum_{p/\omega(p)=\omega(l)} \lambda_p e^{-(q-q^{-1})\sum_{m>0, i \in I} \tilde{h}_{i,-m} z^m (\sum_{j/i_{j,p}=i} m_{j,p} {a_{j,p}}^m)}
\end{aligned}$$

avec $\omega(p) = \sum_{i \in I} \omega_i \sum_{j/i_{j,p}=i} m_{j,p}$. Pour chaque terme, développons l'exponentielle suivant les puissances de z :

$$\begin{aligned}
& e^{-(q-q^{-1})\sum_{m>0, i \in I} \tilde{h}_{i,-m} z^m (\sum_{j/i_{j,p}=i} m_{j,p} {a_{j,p}}^m)} \\
&= 1 + z(\sum_{i \in I} \tilde{h}_{i,-1}(\sum_{j/i_{j,p}=i} m_{j,p} a_{j,p})) \\
&+ z^2(\sum_{i \in I} \tilde{h}_{i,-2}(\sum_{j/i_{j,p}=i} m_{j,p} {a_{j,p}}^2) + \tfrac{1}{2}(\sum_{i \in I} \tilde{h}_{i,-1} \sum_{j/i_{j,p}=i} m_{j,p} a_{j,p})^2) \\
&+ ... \\
&+ z^m(\sum_{i \in I} \tilde{h}_{i,-m}(\sum_{j/i_{j,p}=i} m_{j,p} {a_{j,p}}^m) + ... + \tfrac{1}{m!}(\sum_{i \in I} \tilde{h}_{i,-1} \sum_{j/i_{j,p}=i} m_{j,p} a_{j,p})^m) + ... \\
&= 1 + \sum_{m>0} z^m \sum_{T,(i_t) \in I^T, (m_t) \in \mathbb{N}^T / m_1 + ... + m_T = m} \tfrac{1}{T!} \prod_{t=1..T} \tilde{h}_{i_t,-m_t}(\sum_{j/i_{j,p}=i_t} m_{j,p} {a_{j,p}}^{m_t})
\end{aligned}$$

On obtient ainsi une combinaison linéaire de monômes de la forme $z^m \prod_{t=1..T} \tilde{h}_{i_t,-m_t}$. On réécrit chaque monôme sous la forme $z^m \tilde{h}_{i_1,-m_1}^{n_1} ... \tilde{h}_{i_u,-m_N}^{n_N}$ avec les $\tilde{h}_{i_u,-m_u}$ distincts deux à deux. On regroupe les termes de même monôme et en utilisant du lemme 16 l'indépendance algébrique des $\tilde{h}_{i,m}$, on obtient pour tout $(i_u, m_u, n_u) \in (I \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*)^N$ tel que les couples (i_u, m_u) sont deux à deux distincts :

$$0 = \sum_{p/\omega(p)=\omega(l)} \lambda_p (\sum_j m_{j,p,i_1} {a_{j,p}}^{m_1})^{n_1} ... (\sum_j m_{j,p,i_u} {a_{j,p}}^{m_u})^{n_u}$$

En notant $m_{j,p,i} = m_{j,p} \delta_{i_j,i}$. Dans une telle somme on réunit les termes pour lesquels la somme $\sum_j m_{j,p,i_u} {a_{j,p}}^{m_u}$ a la même valeur non nulle :

$$0 = \sum_{(b_1,...,b_N) \in (\mathbb{C}^*)^N} b_1^{n_1} ... b_N^{n_N} \sum_{p/\omega(p)=\omega(l), \sum_j m_{j,p,i_u} {a_{j,p}}^{m_u} = b_u} \lambda_p$$

En faisant varier les $n_u \in \mathbb{N}$ on obtient un système linéraire de type Van der Monde en N variables dont on obtient classiquement par récurrence sur N qu'il est inversible, et en conséquence pour tout $(b_1, ..., b_N) \in (\mathbb{C}^*)^N$:

$$0 = \sum_{p/\omega(p)=\omega(l), \sum_j m_{j,p,i_u} {a_{j,p}}^{m_u} = b_u} \lambda_p$$

ou encore, en notant $m_{a,p,i} = \sum_{j/a_{j,p}=a} m_{j,p,i}$ (somme ne comportant au plus qu'un seul terme) :

$$0 = \sum_{p/\omega(p)=\omega(l), \sum_{a \in \mathbb{C}^*} m_{a,p,i_u} a^{m_u} = b_u} \lambda_p$$

Mais supposons que deux termes d'indice p et p' vérifient pour tout $(i_u, m_u) \in (I \times \mathbb{N}^*)^N$ (les couples (i_u, m_u) étant deux à deux distincts) $\sum_{a \in \mathbb{C}^*} (m_{a,p,i_u} - m_{a,p',i_u}) a^{m_u} = 0$. Alors on obtient en faisant varier m_u dans un ensemble fini pour $i_u \in I$ fixé un système de Van der Monde classiquement inversible, et pour tout $a \in \mathbb{C}^*$, $m_{a,p,i_u} - m_{a,p',i_u} = 0$. Donc pour tout $(i, a) \in I \times \mathbb{C}^*$ on a $m_{a,p,i} - m_{a,p',i} = 0$, ainsi p et p' sont associés au même monôme, et sont égaux.

Donc pour un terme d'indice p on peut choisir une famille finie d'indices $(i_u, m_u, b_u) \in (I \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{C}^*)^N$ telle que p est le seul terme à vérifier pour chaque u : $\sum_{a \in \mathbb{C}^*} m_{a,p,i_u} a^{m_u} = b_u$. Pour un tel choix, la somme ne comporte que λ_p, qui est donc nul. □

6.4.2 L'image de χ_q vue dans $\mathbb{Z}[Y_{i,a}^{\pm}]_{i\in I, a\in\mathbb{C}^*}$

Pour $V \in Rep(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))$ une représentation complètement réductible, on note $V = \bigoplus_{\gamma\in(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\times\pm)^I} V_{(\gamma)}$ sa décomposition de Jordan de la proposition 98 pour les opérateurs $\Phi_i^{\pm}$ (la sommes portant sur les valeurs propres pour lesquelles le sous-espace est non nul). Pour γ une valeur propre et $i \in I$, on notera $k_{\gamma i}, l_{\gamma i} \in \mathbb{N}^*$, $(a_{\gamma ir})_r \in {\mathbb{C}^*}^{k_{\gamma i}}$, $(b_{\gamma is})_s \in {\mathbb{C}^*}^{l_{\gamma i}}$ et $Q_{\gamma i}(z) = \prod_{r=1..k_{\gamma i}}(1 - za_{\gamma ir})$, $R_{\gamma i}(z) = \prod_{r=1..l_{\gamma i}}(1 - zb_{\gamma ir})$ tels qu'on a dans le théorème 40 les égalités suivantes respectivement dans $\mathbb{C}[[u]]$ et $\mathbb{C}[[u^{-1}]]$:

$$\gamma_i^+(u) = q_i^{deg(Q_{\gamma i})-deg(R_{\gamma i})}\frac{Q_{\gamma i}(uq_i^{-1})R_{\gamma i}(uq_i)}{Q_{\gamma i}(uq_i)R_{\gamma i}(uq_i^{-1})} \text{ et } \gamma_i^-(u) = q_i^{deg(Q_{\gamma i})-deg(R_{\gamma i})}\frac{Q_{\gamma i}(uq_i^{-1})R_{\gamma i}(uq_i)}{Q_{\gamma i}(uq_i)R_{\gamma i}(uq_i^{-1})}$$

Proposition 107. *Pour $V \in Rep(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))$ une représentation complètement rédutible, $\chi_q(V)$ est combinaison linéaire à coefficients entiers positifs de monômes de la forme $\prod_{i\in I}\prod_{r=1..k_i} Y_{i,a_{ir}} \prod_{s=1..l_i} Y_{i,b_{ir}}^{-1}$ (avec pour $i \in I$, $(a_{ir})_r \in {\mathbb{C}^*}^{k_i}$ et $(b_{is})_s \in {\mathbb{C}^*}^{l_i}$). De plus il existe une bijection conservant la multiplicité entre ces monômes et les valeurs propres des $\Phi_i^{\pm}$ sur V, c'est à dire que la contribution d'un vecteur de Jordan d'un sous-espace caractéristique $V_{(\gamma)}$ à χ_q est le monôme : $\prod_{i\in I}\prod_{r=1..k_{\gamma i}} Y_{i,a_{\gamma ir}} \prod_{s=1..l_{\gamma i}} Y_{i,b_{\gamma ir}}^{-1}$, et qu'on peut écrire $\chi_q(V)$ sous la forme :*

$$\chi_q(V) = \sum_{\gamma} dim(V_{(\gamma)})\prod_{i\in I}\prod_{r=1..k_{\gamma i}} Y_{i,a_{\gamma ir}} \prod_{s=1..l_{\gamma i}} Y_{i,b_{\gamma ir}}^{-1}$$

La démonstration de cette proposition est l'enjeu de cette section.

6.4.3 Une propriété utile de la matrice K

La proposition suivante n'est pas indispensable au déroulement logique de cette partie, mais elle permettra de donner plus loin une deuxième démonstration du lemme 19.

Proposition 108. *La matrice $K \in \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})\hat{\otimes}\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ vérifie la propriété suivante pour $V, W \in Rep(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))$, pour $x \in V, y \in W, \lambda, \mu \in \Delta$:*

$$(\forall i \in I, k_i.x = q^{(\lambda,\alpha_i)}x, k_i.y = q^{(\mu,\alpha_i)}y) \Longrightarrow K.(x\otimes y) = q^{-(\lambda,\mu)}x\otimes y$$

Démonstration:

On rappelle que $K = e^{\frac{h}{2}\sum_{1\leq i,j\leq n}(B^{-1})_{i,j}h_i\otimes h_j}$ et on considère V, x, y, λ, μ comme dans l'énoncé. Les égalités $k_i.x = q^{(\lambda,\alpha_i)}x$ (respectivement $k_i.y = q^{(\mu,\alpha_i)}y$) s'écrivent $e^{-\frac{h}{2}h_i}.x = e^{-\frac{h}{2}(\lambda,\alpha_i)}x$ (respectivement $e^{-\frac{h}{2}h_i}.y = e^{-\frac{h}{2}(\mu,\alpha_i)}y$) et donc $h_i.x = (\lambda,\alpha_i)x$ (respectivement $h_i.y = (\mu,\alpha_i)y$).

$$\begin{aligned}
K.(x\otimes y) &= \sum_{m\geq 0}(-\tfrac{h}{2}\sum_{1\leq i,j\leq n}(B^{-1})_{i,j}h_i\otimes h_j)^m.(x\otimes y)\\
&= \sum_{m\geq 0}(-\tfrac{h}{2}\sum_{1\leq i,j\leq n}(B^{-1})_{i,j}(\lambda,\alpha_i)(\mu,\alpha_j))^m.(x\otimes y)\\
&= e^{\frac{h}{2}\sum_{1\leq i,j\leq n}(B^{-1})_{i,j}(\lambda,\alpha_i)(\mu,\alpha_j)}.(x\otimes y)\\
&= q^{-\sum_{1\leq i,j\leq n}(B^{-1})_{i,j}(\lambda,\alpha_i)(\mu,\alpha_j)}.(x\otimes y)
\end{aligned}$$

Décomposons λ et μ sur la base des racines simples $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$: $\lambda = \lambda_1\alpha_1 + ... + \lambda_n\alpha_n$ et $\mu = \mu_1\alpha_1 + ... + \mu_n\alpha_n$. Alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leq i,j\leq n}(B^{-1})_{i,j}(\lambda,\alpha_i)(\mu,\alpha_j) &= \sum_{1\leq i,j,k,l\leq n}(B^{-1})_{i,j}\lambda_k(\alpha_k,\alpha_i)\mu_l(\alpha_l,\alpha_j)\\
&= \sum_{1\leq k,l\leq n}\lambda_k\mu_l\sum_{1\leq i,j\leq n}B_{k,i}(B^{-1})_{i,j}B_{j,l}\\
&= \sum_{1\leq k,l\leq n}\lambda_k\mu_l B_{k,l}\\
&= (\lambda_1\alpha_1 + ... + \lambda_n\alpha_n, \mu_1\alpha_1 + ... + \mu_n\alpha_n)\\
&= (\lambda,\mu)
\end{aligned}$$

et donc : $K.(x\otimes y) = q^{-(\lambda,\mu)}(x\otimes y)$. □

6.4.4 La trace de $(\pi_V \otimes id)[[h]](K)$

Lemme 19. *Pour $V \in Rep(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))$ une représentation complètement réductible, la contribution d'un vecteur de Jordan d'un sous-espace caractéristique $V_{(\gamma)}$ à $Tr_V((\pi_V \otimes id)[[h]](K))$ est :*

$$\prod_{1\leq i\leq n} \tilde{k}_i^{deg(R_{\gamma i})-deg(Q_{\gamma i})}$$

On propose deux démonstrations de ce lemme. La première utilise l'expression explicite de K :

Démonstration:

On a déjà vu lors de la démonstration du lemme 7 que la valeur propre de $k_i = e^{-\frac{h}{2}h_i}$ sur $V_{(\gamma)}$ est :

$$q_i^{deg(Q_{\gamma i})-deg(R_{\gamma i})} = e^{-\frac{h}{2}B_{ii}(deg(Q_{\gamma i})-deg(R_{\gamma i}))}$$

et donc celle de h_i est $\frac{B_{ii}}{2}(deg(Q_{\gamma i})-deg(R_{\gamma i}))$. La valeur propre de $(\pi_V\hat{\otimes}id)(K)$ avec $K = e^{\frac{h}{2}\sum_{1\leq i,j\leq n}(B^{-1})_{i,j}h_i\otimes h_j}$ est donc d'après la proposition 108 :

$$e^{\frac{h}{2}\sum_{1\leq i,j\leq n}(B^{-1})_{i,j}\frac{B_{ii}}{2}(deg(Q_{\gamma i})-deg(R_{\gamma i}))h_j}$$

Mais comme pour $1 \leq i, j \leq n$ on a $B_{i,j} = \frac{(\alpha_i,\alpha_i)}{2}C_{i,j}$, on peut noter $B = DC$ avec D la matrice diagonale telle que $D_{ii} = \frac{(\alpha_i,\alpha_i)}{2} = \frac{B_{ii}}{2}$. Les trois matrices étant inversibles, on a $B^{-1}D = C^{-1}$ et $(B^{-1})_{ij}D_j = C^{-1}_{i,j}$, ou encore comme B et B^{-1} sont symétriques, $(B^{-1})_{i,j}\frac{B_{ii}}{2} = C^{-1}_{j,i}$. Le terme recherché est donc :

$$\prod_{1\leq i\leq n} e^{-\frac{h}{2}\sum_{1\leq j\leq n}(C^{-1})_{j,i}h_j(deg(R_{\gamma i})-deg(Q_{\gamma i}))} = \prod_{1\leq i\leq n}\prod_{1\leq j\leq n} k_j^{(C^{-1})_{j,i}(deg(R_{\gamma i})-deg(Q_{\gamma i}))} = \prod_{1\leq i\leq n} \tilde{k}_i^{deg(R_{\gamma i})-deg(Q_{\gamma i})}$$

□

La deuxième démonstration utilise une propriété de K. Elle est un peu moins directe mais a le mérite de limiter essentiellement notre à travail à $\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ en oubliant pour un moment la complétion $\mathcal{U}'_q(\hat{\mathfrak{g}})$, et d'être plus dans l'esprit des articles de Frenkel et Reshetikhin :

Démonstration:

On a déjà vu lors de la démonstration du lemme 7 que la valeur propre de k_i sur $V_{(\gamma)}$ est $q_i^{deg(Q_{\gamma i})-deg(R_{\gamma i})}$. Comme V est par définition en particulier un $U_q(\mathfrak{g})$-module de type 1, on peut supposer qu'on a exactement pour $x \in V_{(\gamma)}$, $\pi_V(k_i).x = q_i^{deg(Q_{\gamma i})-deg(R_{\gamma i})}x$. On pose alors $\lambda = \sum_{i\in I}(deg(Q_{\gamma i}) - deg(R_{\gamma i}))\omega_i$, et on a pour $i \in I$, $\pi_V(k_i).x = q^{(\lambda,\alpha_i)}x$.
Considérons l'action adjointe de l'algèbre $\mathcal{U}_q(\tilde{k})$ sur $\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ déduite du résultat général de la proposition 2 :

$$\forall u \in \mathcal{U}_q(\tilde{k}), \forall v \in \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}}), ad(u)(v) = \sum u_{(1)}vS(u_{(2)})$$

Remarquons que pour $i \in I$ et $v \in \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ on a simplement $ad(k_i)(v) = k_ivk_i^{-1}$. On peut alors définir une représentation linéaire de $\mathcal{U}_q(\tilde{k})\hat{\otimes}\mathcal{U}_q(\tilde{k})$ sur $V\hat{\otimes}U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ qu'on notera $*$:

$$\forall T \in \mathcal{U}_q(\tilde{k})\hat{\otimes}\mathcal{U}_q(\tilde{k}), \forall x \in V, \forall y \in \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}}), T_*(x \otimes y) = (\pi_V\hat{\otimes}ad)(T).(x \otimes y)$$

Etudions comment agit K qui d'après le corollaire 88 vérifie $K \in (\mathcal{U}_q(\tilde{k})\otimes\mathcal{U}_q(\tilde{k}))[[h]]$: considérons y un monôme de $\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}})$, c'est à dire un produit fini de $\tilde{k_j}^{\pm}$, $h_{j,m}$, $x^{\pm}_{j,m}$ $(m \leq 0)$. Comme d'après la proposition 92 les $\tilde{k_j}^{\pm}$, $h_{j,m}$ commutent avec $\mathcal{U}_q(\tilde{k})$ dans $\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}})$, et on a les relations $ad(k_i)(x^{\pm}_{j,m}) = q^{(\pm\alpha_j,\alpha_i)}y$, l'action adjointe des k_i sur y ne dépend que de la multiplicité des $j \in I$ dans l'écriture de y, c'est à dire du nombre m_j de fois où apparait un $x_{m,j}$ dans le produit. Alors :

$$ad(k_i)(y) = q^{(\sum_{j\in I}m_j\alpha_j,\alpha_i)}y$$

En conséquence :

$$K_*(x \otimes y) = q^{-(\lambda,\sum_{j\in I}m_j\alpha_j)}(x \otimes y) = q^{\sum_{i\in I}(deg(R_{\gamma i})-deg(Q_{\gamma i}))m_i}(x \otimes y)$$

On constate ainsi que pour y un monôme, et donc par linéarité pour $y \in U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$, on a $K_*(x \otimes y) = (x \otimes ad(t_0)(y))$ avec $t_0 = \prod_{1 \leq i \leq n} \tilde{k}_i^{deg(R_{\gamma i}) - deg(Q_{\gamma i})}$.

Notons $K = \sum K_{(1)} \otimes K_{(2)}$, avec les $K_{(1)}, K_{(2)} \in \mathcal{U}_q(\tilde{k})$, la somme pouvant ne pas être finie. Considérons $x \in V_{(\gamma)}$. On a déjà vu que x est un vecteur propre des k_i, et donc de tout élément de $\mathcal{U}_q(\tilde{k})$. Notons $f_{(1)} \in \mathbb{C}$ tel que $\pi_V(K_{(1)})(x) = f_{(1)} x$. Alors :

$$(\pi_V \hat{\otimes} id)(K).x = \sum \pi_V(K_{(1)})(x) \otimes K_{(2)} = (\sum f_{(1)} \otimes K_{(2)}).x$$

et donc l'élément de trace recherché est $t = \sum f_{(1)} K_{(2)} \in \mathcal{U}_q(\tilde{k})$. Mais alors pour $y \in \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ on a :

$$K_*(x \otimes y) = \sum f_{(1)} x \otimes ad(K_{(2)})(y) = x \otimes ad(\sum f_{(1)} K_{(2)})(y) = x \otimes ad(t)(y)$$

En égalisant avec les expressions précédentes on a $x \otimes ad(t)(y) = x \otimes ad(t_0)(y)$ et comme $x \neq 0$, on obtient :

$$\forall y \in \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{g}}), ad(t - t_0)(y) = 0$$

Ecrivons $t - t_0 \in \mathcal{U}_q(\tilde{k})$ sous la forme suivante, avec des monômes distincts deux à deux indéxés par p :

$$t - t_0 = \sum_p \lambda_p \prod_{i \in I} \tilde{k}_i^{m_{p,i}}$$

avec les $m_{p,i} \in \mathbb{Z}$. On obtient alors pour tout n-uplet $(l_1, ..., l_n) \in \mathbb{Z}^n$ en prenant $y = x_{1,0}^{l_1} ... x_{n,0}^{l_n} \in \mathcal{U}_q \tilde{\mathfrak{g}}$:

$$0 = ad(t - t_0)(y) = \sum_p \lambda_p ad(\prod_{i \in I} \tilde{y}_i^{m_{p,i}})(y) = (\sum_p \lambda_p \prod_{i \in I} q^{m_{p,i}(\omega_i, \sum_{j \in I} l_j \alpha_j)}) y$$

$$0 = \sum_p \lambda_p q^{(\sum_{i \in I} m_{p,i} \omega_i, \sum_{j \in I} l_j \alpha_j)} = \sum_p \lambda_p q^{\sum_{i \in I} m_{p,i} l_i}$$

Considérons le polynôme à n variables :

$$P(X_1, ..., X_n) = \sum_p \lambda_p \prod_{i \in I} X_i^{m_{p,i}}$$

Pour tout n-uplet $(l_1, ..., l_n) \in \mathbb{Z}^n$, le n-uplet $(q^{l_1}, ..., q^{l_n}) \in \mathbb{C}^n$ annule P. Si on fixe $(l_1, ..., l_{n-1})$, le polynôme à une variable $P_n(X_n) = P(q^{l_1}, ..., q^{l_{n-1}}, X_n)$ a une infinité de racines (comme q n'est pas une racine de l'unité) et est donc nul. On regarde ensuite ses coefficients comme polynômes à une variable en X_{n-1} qui à leur tour ont une infinité de racines et sont nuls, et par récurrence on obtient que P est nul. Comme les monômes $\prod_{i \in I} X_i^{m_{p,i}}$ sont distincts deux à deux, on obtient que tous les λ_p sont nuls. Donc $t = t_0$. □

6.4.5 Démonstration de la proposition 107

Lemme 20. *Pour $V \in Rep(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))$ une représentation complètement réductible, la contribution d'un vecteur de Jordan d'un sous-espace caractéritique $V_{(\gamma)}$ à*

$$Tr_V(e^{-(q-q^{-1}) \sum_{m>0, 1 \leq i,j \leq n} \frac{m}{[m]_q} \tilde{B}_{ij}(q^m) z^m \pi_V(h_{i,m}) \otimes h_{j,-m}})$$

est :

$$\prod_{1 \leq i \leq n} \prod_{r=1..k_{\gamma i}} \tilde{k}_i Y_{i, a_{\gamma i r}} \prod_{t=1..l_{\gamma i}} \tilde{k}_i^{-1} Y_{i, b_{\gamma i t}}^{-1}$$

Démonstration:

On mène le calcul en se rappelant que la valeur propre de $h_{i,m}$ sur $V_{(\gamma)}$ est $\frac{q_i^m - q_i^{-m}}{m(q-q^{-1})} (\sum_{r=1..k_{\gamma i}} a_{\gamma i r}^m - \sum_{t=1..l_{\gamma i}} b_{\gamma i t}^m)$:

$$\begin{aligned}
& e^{-(q-q^{-1}) \sum_{m>0, 1 \leq i,j \leq n} \frac{m}{[m]_q} \tilde{B}_{ij}(q^m) z^m \frac{q_i^m - q_i^{-m}}{m(q-q^{-1})} (\sum_{r=1..k_{\gamma i}} a_{\gamma i r}^m - \sum_{t=1..l_{\gamma i}} b_{\gamma i t}^m) h_{j,-m}} \\
&= e^{-(q-q^{-1}) \sum_{m>0, 1 \leq i,j \leq n} (\sum_{r=1..k_{\gamma i}} a_{\gamma i r}^m - \sum_{t=1..l_{\gamma i}} b_{\gamma i t}^m) \tilde{C}_{j,i}(q^m) z^m h_{j,-m}} \\
&= \prod_{1 \leq i \leq n} \prod_{r=1..k_{\gamma i}} e^{-(q-q^{-1}) \sum_{m>0, 1 \leq j \leq n} a_{\gamma i r}^m z^m \tilde{C}_{j,i}(q^m) h_{j,-m}} \prod_{t=1..l_{\gamma i}} e^{(q-q^{-1}) \sum_{m>0, 1 \leq j \leq n} b_{\gamma i t}^m z^m \tilde{C}_{j,i}(q^m) h_{j,-m}} \\
&= \prod_{1 \leq i \leq n} \prod_{r=1..k_{\gamma i}} \tilde{k}_i Y_{i, a_{\gamma i r}} \prod_{t=1..l_{\gamma i}} \tilde{k}_i^{-1} Y_{i, b_{\gamma i t}}^{-1}
\end{aligned}$$

□

On peut à présent achever la démonstration de la proposition 107 :

Démonstration:

Comme d'après la proposition 98, la décomposition de Jordan est la même pour les termes $e^{-(q-q^{-1})\sum\limits_{m>0,1\leq i,j\leq n}\frac{m}{[m]_q}\tilde{B}_{ij}(q^m)z^m\pi_V(h_{i,m})\otimes h_{j,-m}}$ et $(\pi_V\otimes id)[[h]](K)$, il suffit pour obtenir la contribution totale d'un vecteur de Jordan d'un sous-espace caractéristique $V_{(\gamma)}$ à χ_q de multiplier les résultats des lemmes 19 et 20. En se rappelant que $l_{\gamma i}=deg(Q_{i\gamma})$ et $k_{\gamma i}=deg(P_{\gamma i})$, on obtient :

$$(\prod_{1\leq i'\leq n}\tilde{k}_{i'}^{deg(Q_{\gamma i'})-deg(P_{\gamma i'})})\prod_{1\leq i\leq n}\prod_{r=1..k_{\gamma i}}\tilde{k}_iY_{i,a_{\gamma ir}}\prod_{t=1..l_{\gamma i}}\tilde{k}_i^{-1}Y_{i,b_{\gamma it}}^{-1}=\prod_{i\in I}\prod_{r=1..k_{\gamma i}}Y_{i,a_{\gamma ir}}\prod_{s=1..l_{\gamma i}}Y_{i,b_{\gamma ir}}^{-1}$$

ce qui correspond au monôme annoncé dans l'énoncé. On fixe ensuite une base de Jordan de V relative aux opérateurs ϕ_i et on décompose $V=\bigoplus\limits_{(\gamma)}V_{(\gamma)}$. Les $dim(V_{(\gamma)})$ vecteurs de Jordan de $V_{(\gamma)}$ apportent chacun à la trace puis à χ_q une contribution $\prod\limits_{i\in I}\prod\limits_{r=1..k_{\gamma i}}Y_{i,a_{\gamma ir}}\prod\limits_{s=1..l_{\gamma i}}Y_{i,b_{\gamma ir}}^{-1}$. Le sous-espace $V_{(\gamma)}$ apporte donc une contribution $dim(V_{(\gamma)})\prod\limits_{i\in I}\prod\limits_{r=1..k_{\gamma i}}Y_{i,a_{\gamma ir}}\prod\limits_{s=1..l_{\gamma i}}Y_{i,b_{\gamma ir}}^{-1}$, ce qui donne la formule annoncée en ajoutant les contributions de tous les sous-espaces de Jordan. □

6.5 Interprétation de $\chi_q(V)$ dans le cas général

6.5.1 Suites exactes et de Jordan-Hölder de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$-modules : applications à χ_q

Lemme 21. *Les $\chi_q(V)$, avec $V\in Rep(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))$ représentation irréductible, sont linéairement indépendants dans $\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{h}})[[z]]$.*

Démonstration:

Soit $V\in Rep(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))$ une représentation irréductible. On travaille avec la Λ-graduation de $\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{h}})$ de la proposition 95. Dans l'écriture de $\chi_q(V)$ de la proposition 107 sous la forme :

$$\chi_q(V)=\sum_\gamma dim(V_{(\gamma)})\prod_{i\in I}\prod_{r=1..k_{\gamma i}}Y_{i,a_{\gamma ir}}\prod_{s=1..l_{\gamma i}}Y_{i,b_{\gamma ir}}^{-1}$$

les monômes sont homogènes, de degré respectif :

$$Deg(\prod_{i\in I}\prod_{r=1..k_{\gamma i}}Y_{i,a_{\gamma ir}}\prod_{s=1..l_{\gamma i}}Y_{i,b_{\gamma ir}}^{-1})=\sum_{i\in I}(k_{\gamma i}-l_{\gamma i})\omega_i$$

ce qui correpond au poids des vecteurs de Jordan de $V_{(\gamma)}$ lorsqu'on considère V comme $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$-module.
En particulier, comme V est irréductible, donc égal à $V(P)$ pour P un n-uplet de polynômes de terme constant égal à 1 d'après le théorème 25, le plus haut poids λ pour la structure de $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$-module, égal à $\lambda=\sum\limits_{i\in I}deg(P_i)\omega_i$ d'après la proposition 66, est aussi le degré du monôme correpondant $\prod\limits_{i\in I}\prod\limits_{r=1..k_{\gamma_0 P i}}Y_{i,a_{\gamma_0 P ir}}$. On note $\omega(P)=\lambda$ ce poids. Toujours d'après la proposition 66, $\omega(P)$ est de multiplicité 1 et les autres poids de V comme $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$-module sont dans Q strictement inférieurs à $\omega(P)$ (pour l'ordre partiel sur Q induit par la partie Q_+). Les autres monômes de $\chi_q(V)$ sont donc de degré strictement inférieur à $\omega(P)$:

$$\chi_q(V(P))=\prod_{i\in I}\prod_{r=1..k_{\gamma_0 P i}}Y_{i,a_{\gamma_0 P ir}}+\text{ monômes de degré strictement inférieur à }\omega(P)$$

Considérons à présent une combinaison linéaire nulle :

$$A=\sum_P\lambda_P\chi_q(V(P))=0$$

avec les $\lambda_P\in\mathbb{C}$ presque tous nuls. Supposons par l'absurde cette combinaison non triviale. Considérons, parmi les P pour lesquels $\lambda_P\neq 0$, l'un d'eux P^1 de poids $\omega(P^1)$ maximal. Alors le monôme $A_1=\prod\limits_{i\in I}\prod\limits_{r=1..k_{\gamma_{0P^1}i}}Y_{i,a_{\gamma_{0P^1}ir}}$

qui intervient dans l'écriture de $\chi_q(V(P_1))$ avec la multiplicité 1 ne peut intervenir dans aucun autre des $\chi_q(P)$ de la combinaison linéaire. En effet si c'etait le cas pour un ${P_1}'$, ce serait, comme le poids de A_1 est maximal, le monôme de plus haut poids de $\chi_q({P^1}')$. Mais comme P est caractérisé par le monôme de plus haut poids de $\chi_q(P)$ $(P_i(z) = \prod\limits_{r=1..k_{\gamma_0 P i}} (1 - z a_{\gamma_0 P ir}))$ on aurait $P^1 = {P^1}'$. Par indépendance algébrique des $Y_{i,a}$, vue dans la proposition 106, la nullité de A entraîne celle du coefficient de A_1, soit $\lambda_{P^1} = 0$. Contradiction. □

Proposition 109. *Soient $U, V, W \in Rep(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))$ des représentations telles qu'on a une suite exacte courte de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$-modules :*

$$0 \to V \to W \to U \to 0$$

Alors on $\chi_q(W) = \chi_q(V) + \chi_q(U)$.

Démonstration:

L'argument classique concernant l'action d'une algèbre sur des espaces vectoriels donne que pour tout $g \in \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$, $tr_W(\pi_W(g)) = tr_V(\pi_V(g)) + tr_U(\pi_U(g))$ (l'action de g sur les espaces commutent avec les flêches de la suite exacte, on choisit une base de V, une base d'un supplémentaire de V dans W qui donne une base de U, et la matrice de $\pi_W(g)$ dans la base de W obtenue est triangulaire par blocs, chaque bloc représente l'action de g sur U et V, et la trace est la somme des traces des blocs). On en déduit par construction que pour $g, g' \in \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$,

$$tr''_W(\pi_W(g) \otimes g') = tr''_V(\pi_V(g) \otimes g') + tr''_U(\pi_U(g) \otimes g')$$

puis

$$Tr_W(\hat{f}_W(R)) = Tr_V(\hat{f}_V(R)) + Tr_U(\hat{f}_U(R))$$

soit $\nu_q(W) = \nu_q(V) + \nu_q(U)$. Puis par linéarité de h_q, on obtient $\chi_q(W) = \chi_q(V) + \chi_q(U)$. □

Proposition 110. *Pour $V \in Rep(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))$ une représentation, il existe une suite strictement croissante de sous $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$-modules :*

$$\{0\} = V_s \subset V_{s-1} \subset ... \subset V_0 = V$$

telle que les $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$-modules quotient $G_i = V_i/V_{i+1} \in Rep(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))$ $(0 \leq i \leq s-1)$ sont irréductibles. Une telle suite est dite de Jordan-Hölder et toutes les suites de Jordan-Hölder ont même longueur s, et mêmes facteurs G_i à permutation près. Pour une telle suite on a :

$$\chi_q(V) = \sum_{i=0..s-1} \chi_q(G_i)$$

En particulier $\chi_q(V)$ peut s'écrire, de manière unique, comme combinaison linéaire à coefficients entiers positifs d'éléments de $\mathbb{Z}[Y_{i,a_i}^{\pm 1}]_{i \in I, a_i \in \mathbb{C}^*}$ de la forme $\chi_q(W)$ avec $W \in Rep(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))$ représentation irréductible, et $\chi_q(Rep(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})))$ est dans le sous-groupe de $\mathbb{Z}[Y_{i,a_i}^{\pm 1}]_{i \in I, a_i \in \mathbb{C}^*}$ engendré par les $\chi_q(W)$ avec $W \in Rep(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))$ représentation irréductible.

Démonstration:

Une récurrence sur la dimension de V donne l'existence. Le cas $V = \{0\}$ est clair. Si V est irréductible, la suite $\{0\} \subset V$ convient. Sinon il existe un sous-module propre maximal $V' \subset V$ car V est de dimension finie. Alors la maximalité de V' entraîne l'irréductibilité de V/V'. En utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient une suite de Jordan-Hölder pour V' qui, complétée par V, devient une suite de Jordan-Hölder pour V.

On considère une suite de Jordan-Hölder $\{0\} = V_s \subset V_{s-1} \subset ... \subset V_0 = V$. On obtient en appliquant la proposition 109 à la suite exacte courte :

$$\{0\} \to V_{i+1} \to V_i \to G_i \to \{0\}$$

que $\chi_q(V_i) = \chi_q(G_i) + \chi_q(V_{i+1})$, puis par récurrence sur i que $\chi_q(V) = \chi_q(G_0) + ... + \chi_q(G_i) + \chi_q(V_{i+1})$ puis $\chi_q(V) = \chi_q(G_0) + ... + \chi_q(G_s)$.

L'avant dernière assertion de la proposition découle de cette dernière expression de $\chi_q(V)$, l'unicité de l'écriture de $\chi_q(V)$ provenant de l'indépendance linéaire établie dans le lemme 21. La dernière assertion est obtenue en se rappelant que les représentations engendrent l'anneau $Rep(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))$.

Regardons l'écriture unique que nous venons d'obtenir :

$$\chi_q(V) = \sum_{i=1..m} m_i \chi_q(W_i)$$

avec les $m_i \in \mathbb{N}^*$ et les $W_i \in Rep(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))$ des représentations irréductibles. Alors par unicité de cette écriture on obtient, pour une suite de Jordan-Hölder, la longueur $s = \sum\limits_{i=1..m} m_i$ et l'ensemble des facteurs G_i est égal à celui des W_i en comptant les multiplicités. On obtient bien ainsi l'unicité de la longueur et des facteurs de la suite à permutation près. □

6.5.2 Généralisation du théorème 40 et de la proposition 107

Théorème 43. *Les conclusions du théorème 40 et de la proposition 107 sont valables pour toutes représentations de dimension finie de type 1.*

Démonstration:

Montrons ceci par récurrence sur la dimension de la représentation V. Si V est irréductible, le résultat a déjà été établi. Sinon, en utilisant la proposition 110, on peut écrire une suite exacte de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$-modules :

$$0 \to W_1 \to V \to U \to 0$$

avec W_1 irréductible et $dim(U) < dim(V)$. En utilisant l'hypothèse de récurrence on a le résultat pour W_1 et U. Mais comme les flèches de la suite exacte commutent avec les opérateurs Φ_i, les valeurs propres de V qui leurs sont relatives sont égales en comptant la multiplicité à celles de W_1 ou celles de U. La forme des valeurs propres annoncée dans le théorème 40 est donc encore valable pour V. Puis d'après la proposition 109 on a $\chi_q(V) = \chi_q(U) + \chi_q(W_1)$, et on peut généraliser la formule de la proposition 107. □

Proposition 111. *L'image de χ_q est un sous-anneau de $\mathbb{Z}[Y_{i,a}^{\pm}]_{i\in I, a\in\mathbb{C}^*}$.*

Démonstration:

D'après le théorème 43, pour $V \in Rep(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))$ une représentation, on a $\chi_q(V) \in \mathbb{Z}[Y_{i,a_i}^{\pm 1}]_{i\in I, a_i\in\mathbb{C}^*}$. Mais comme les $V \in Rep(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))$ qui sont des représentations engendrent l'anneau $Rep(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))$, l'image du morphisme d'anneaux χ_q est bien un sous-anneau de $\mathbb{Z}[Y_{i,a_i}^{\pm 1}]_{i\in I, a_i\in\mathbb{C}^*}$. □

6.5.3 Démonstration du théorème 41

Nous allons montrer que l'application $\chi_q : Rep(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})) \to \mathbb{Z}[Y_{i,a_i}^{\pm 1}]_{i\in I, a_i\in\mathbb{C}^*}$ vérifie les conditions du théorème 41. On sait déjà d'après la proposition 105 que c'est un morphisme d'anneaux. Il reste à vérifier la compatibilité avec χ :

Proposition 112. *Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} Rep(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})) & \xrightarrow{\chi_q} & \mathbb{Z}[Y_{i,a_i}^{\pm 1}]_{i\in I, a_i\in\mathbb{C}^*} \\ \downarrow res & & \downarrow \beta \\ Rep(\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})) & \xrightarrow{\chi} & \mathbb{Z}[y_i^{\pm 1}]_{i\in I} \end{array}$$

Démonstration:

Comme toutes les applications du diagramme considéré sont des morphismes d'anneaux, il suffit de vérifier que pour $V \in Rep(\mathcal{U}(\hat{\mathfrak{g}}))$ une représentation, on a $\beta(\chi_q(V)) = \chi(res(V))$.

On considère donc $V \in Rep(\mathcal{U}(\hat{\mathfrak{g}}))$ une représentation qu'on décompose, d'après le théorème 43, suivant la base de Jordan des opérateurs $\Phi_i^{\pm}$ en une somme directe $V = \bigoplus_{(\gamma)} V_{(\gamma)}$. En reprenant les notations précédentes, on a, toujours d'après le théorème 43 :

$$\chi_q(V) = \sum_{(\gamma)} dim(V_{(\gamma)}) \prod_{i\in I} \prod_{r=1..k_{\gamma i}} Y_{i,a_{\gamma ir}} \prod_{s=1..l_{\gamma i}} Y_{i,b_{\gamma ir}}^{-1}$$

$$\beta(\chi_q(V)) = \sum_{(\gamma)} dim(V_{(\gamma)}) \prod_{i\in I} y_i^{deg(Q_{\gamma i}) - deg(R_{\gamma i})}$$

On a déjà vu lors de la démonstration du lemme 7 que la décomposition de Jordan des Φ_i en est aussi une pour les $k_i = (\Phi_i^+)_0$ avec la valeur propre k_i sur $V_{(\gamma)}$ égale à $q^{deg(Q_{\gamma i}) - deg(R_{\gamma i})}$. Mais $V \in Rep(\mathcal{U}(\hat{\mathfrak{g}}))$ est par définition de $Rep(\mathcal{U}(\hat{\mathfrak{g}}))$ une représentation de type 1 comme $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$-module. On continue à noter V pour $res(V)$. En particulier V est somme directe de ses sous-espaces caractéristiques $V_\lambda = \{x \in V / \forall 1 \leq i \leq n, k_i.x = q^{(\lambda, \alpha_i)} x\}$ avec $\lambda \in \Lambda$, et le sous-espace de Jordan $V_{(\gamma)}$ est contenu dans le sous-espace caractéristique $V_{\lambda_{(\gamma)}}$ avec $\lambda_{(\gamma)} = \sum_{i=1..n} (deg(Q_{\gamma i}) - deg(R_{\gamma i}))\omega_i$. Menons le calcul :

$$\begin{aligned} \beta(\chi_q(V)) &= \sum_{\lambda\in\Lambda} \sum_{\substack{(\gamma) \\ \lambda_{(\gamma)}=\lambda}} dim(V_{(\gamma)}) \prod_{i\in I} y_i^{deg(Q_{\gamma i}) - deg(R_{\gamma i})} \\ &= \sum_{\lambda\in\Lambda} \prod_{i\in I} y_i^{(\lambda,\alpha_i)} \sum_{\substack{(\gamma) \\ \lambda_{(\gamma)}=\lambda}} dim(V_{(\gamma)}) = \sum_{\lambda\in\Lambda} \prod_{i\in I} y_i^{(\lambda,\alpha_i)} dim(V_\lambda) \\ &= \sum_{\lambda\in\Lambda} dim(V_\lambda) e(\lambda) = \chi(res(V)) \end{aligned}$$

$\square$

6.6 Expressions explicites de q-caractères dans le cas $\mathcal{U}_q(\hat{sl}_2)$

Dans cette section, on travaille avec $\hat{\mathfrak{g}} = \hat{sl}_2$. On a $n = 1$, $q_1 = q$, et on ne notera pas l'indice $i = 1$ des éléments de $\mathcal{U}_q(\hat{sl}_2)$ considérés.

6.6.1 Expression explicite des $\chi_q(W_r(a))$

Pour $a \in \mathbb{C}^*$, on pose $A_a = Y_{aq}Y_{aq^{-1}} \in \mathbb{Z}[Y_a^{\pm 1}]_{a\in\mathbb{C}^*}$. Les Y_b commutent et sont inversibles, donc les A_a sont inversibles dans $\mathbb{Z}[Y_a^{\pm 1}]_{a\in\mathbb{C}^*}$, d'inverse $A_a^{-1} = Y_{aq}^{-1}Y_{aq^{-1}}^{-1}$.

Proposition 113. *On a pour $r \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{C}^*$ la formule explicite suivante :*

$$\chi_q(W_r(a)) = (\prod_{k=1..r} Y_{aq^{r-2k+1}})(1 + \sum_{i=1..r}\prod_{j=1..i} A^{-1}_{aq^{r-2j+2}})$$

Démonstration:

Comme, d'après le lemme 5, la base $(v_0, ..., v_r)$ de $W_r(a)$ est formée de vecteurs propres pour les opérateurs $\phi^{\pm}(u)$, c'est une base de Jordan comme dans la proposition 98, la valeur propre sur $W_j = \mathbb{C}.v_j$ étant $\gamma^{\pm(j)}$. On a de plus :

$$\gamma^{\pm(j)}(u) = q^{deg(Q^{(j)})-deg(R^{(j)})}\frac{Q^{(j)}(uq^{-1})R^{(j)}(uq)}{Q^{(j)}(uq)R^{(j)}(uq^{-1})}$$

avec les polynômes de terme constant égal à 1 :

$$Q^{(j)}(u) = \prod_{k=1..r}(1 - uaq^{r-2k+1})$$

$$R^{(j)}(u) = \prod_{l=1..j}(1 - uaq^{r-2l+3})(1 - uaq^{r-2l+1})$$

On est à présent en mesure d'appliquer la proposition 107 :

$$\begin{aligned}\chi_q(W_r(a)) &= \sum_{j=0..r}\prod_{k=1..r} Y_{aq^{r-2k+1}}\prod_{l=1..j} Y^{-1}_{aq^{r-2l+3}}Y^{-1}_{aq^{r-2l+1}}\\ &= (\prod_{k=1..r} Y_{aq^{r-2k+1}})(1 + \sum_{j=1..r}\prod_{l=1..j} Y^{-1}_{aq^{r-2l+3}}Y^{-1}_{aq^{r-2l+1}})\end{aligned}$$

Examinons les termes du deuxième facteur :

$$\prod_{l=1..j} Y^{-1}_{aq^{r-2l+3}}Y^{-1}_{aq^{r-2l+1}} = \prod_{l=1..j} Y^{-1}_{aq^{r-2l+2}q}Y^{-1}_{aq^{r-2l+2}q^{-1}} = \prod_{l=1..j} A^{-1}_{aq^{r-2l+2}}$$

et on obtient pour $\chi_q(W_r(a))$ la formule annoncée. $\square$

6.6.2 Étude de la forme des q-caractères de représentations irréductibles

Théorème 44. *Pour une représentation irréductible $V \in Rep(\mathcal{U}_q(\hat{sl}_2))$, en notant $P(u) = \prod_{j=1..m}(1 - ua_j)$ avec les $a_j \in \mathbb{C}^*$ le polynôme tel que $V = V(P)$, on a une expression de la forme :*

$$\chi_q(V) = Y_{a_1}...Y_{a_n}(1 + \sum_p M_p)$$

avec les $M_p \in \mathbb{Z}[Y_a^{\pm 1}]_{a\in\mathbb{C}^*}$ des monômes de la forme $A_{c_1}^{-1}...A_{c_l}^{-1}$ avec les $c_k \in \bigcup_{1\leq j\leq m} a_jq^{1+2\mathbb{Z}}$.

Démonstration:

D'après la théorème 26, le $\mathcal{U}_q(\hat{sl}_2)$-module irréductible V est de la forme $V = L_{r_1}(d_1) \otimes ... \otimes L_{r_M}(d_M)$, et donc de la forme $V = W_{r_1}(b_1) \otimes ... \otimes W_{r_M}(b_M)$, avec $P = P_{b_1}^{(r_1)}...P_{b_M}^{(r_M)}$. En particulier, en regardant l'expression des polynômes $P_b^{(r)}$ du corollaire 17, l'ensemble des a_j est égal en comptant les multiplicités à l'ensemble $(b_l q^{r_l-2k+1})_{1\leq l\leq M, 1\leq k\leq r_l}$. En particulier :

$$\prod_{l=1..M,k=1..r_l} Y_{b_l q^{r_l-2k+1}} = Y_{a_1}...Y_{a_n}$$

et les a_j sont de la forme $b_l q^{r_l-2k+1}$ avec $1 \leq l \leq M$ et $1 \leq k \leq r_l$. Comme χ_q est un morphisme d'anneaux, on a en utilisant la proposition 113 :

$$\begin{aligned}
\chi_q(V) &= \chi_q(W_{r_1}(b_1))...\chi_q(W_{r_M}(b_M)) \\
&= \prod_{l=1..M}((\prod_{k=1..r_l} Y_{b_l q^{r_l-2k+1}})(1+\sum_{i=1..r_l}\prod_{j=1..i} A^{-1}_{b_l q^{r_l-2j+2}})) \\
&= (\prod_{l=1..M,k=1..r_l} Y_{b_l q^{r_l-2k+1}})(\prod_{l'=1..M}(1+\sum_{i=1..r_{l'}}\prod_{j=1..i} A^{-1}_{b_{l'} q^{r_{l'}-2j+2}})) \\
&= (Y_{a_1}...Y_{a_n})(1+\sum_p M_p)
\end{aligned}$$

avec les M_p des monômes de la forme $A_{c_1}^{-1}...A_{c_l}^{-1}$, où les c_k sont de la forme $b_l q^{r_l-2j+2}$ avec $1 \leq l \leq M$ et $1 \leq j \leq r_l$. Les c_k sont donc de la forme $a_i q^{-(r_l-2k+1)} q^{r_l-2j+2} = a_i q^{2(k-j)+1}$ et les c_k sont bien dans $\bigcup_{1\leq j\leq m} a_j q^{1+2\mathbb{Z}}$. □

6.7 Défaut d'injectivité de χ_q

6.7.1 Critère d'injectivité de χ_q

Proposition 114. *L'injectivité de l'application* $\chi_q : Rep(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})) \to \mathbb{Z}[Y_{i,a_i}^{\pm 1}]_{i\in I, a_i\in\mathbb{C}^*}$ *équivaut à la complète réductibilité des représentations* $V \in Rep(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))$.

Démonstration:

Supposons la complète réductibilité acquise. Pour commencer considérons $V_1, V_2 \in Rep(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))$ des représentations telles que $\chi_q(V_1) = \chi_q(V_2)$. La complète réductibilité de V_1 et V_2 s'écrit :

$$V_1 = \bigoplus_P m_{1,P} V(P) \text{ , } V_2 = \bigoplus_P m_{2,P} V(P)$$

les $m_{1,P}, m_{2,P} \in \mathbb{N}$, et les sommes, qui sont finies, portant sur les n-uplets de polynômes de terme constant égal à 1. On obtient par linéarité de χ_q :

$$A = \sum_P m_{1,P}\chi_q(V(P)) = \sum_P m_{2,P}\chi_q(V(P))$$

Mais d'après le lemme 21, les $\chi_q(V(P))$ sont linéairement indépendants, donc pour chaque P on a $m_{1,P} = m_{2,P}$ et donc $V_1 = V_2$.

À présent, soient $V_1, V_2 \in Rep(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))$ tels que $\chi_q(V_1) = \chi_q(V_2)$. On les décompose sous la forme $V_1 = W_1 + W_1'$ et $V_2 = W_2 + W_2'$ avec W_1, W_2 des représentations, W_1', W_2' des représentations virtuelles. Si on suppose $\chi_q(V_1) = \chi_q(V_2)$, on obtient $\chi_q(W_1 - W_2') = \chi_q(W_2 - W_1')$. Alors $W_1 - W_2'$ et $W_2 - W_1'$ sont des représentations, donc ce qui précède donne $W_1 - W_2' = W_2 - W_1'$, puis $V_1 = V_2$.

Supposons l'injectivité de χ_q acquise. Soit $V \in Rep(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))$ une représentation. La proposition 110 donne une écriture :

$$\chi_q(V) = \sum_{i=1..m} m_i\chi_q(W_i) = \chi_q(\bigoplus_{i=1..m} W_i^{\oplus m_i})$$

avec les $m_i \in \mathbb{N}^*$ et les $W_i \in Rep(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))$ des représentations irréductibles. Et l'injectivité de χ_q donne :

$$V = \bigoplus_{i=1..m} W_i^{\oplus m_i}$$

et la représentation V est complètement réductible. □

6.7.2 Compléments sur l'étude du $\mathcal{U}_q(\hat{sl}_2)$-module $W = W_1(1) \otimes W_1(q^2)$

Lemme 22. *Le q-caractère de* W *est :*

$$\chi_q(W) = \chi_q(W_2(q)) + \chi_q(1) = Y_1 Y_{q^2} + Y_1 Y_{q^4}^{-1} + 1 + Y_{q^2}^{-1} Y_{q^4}^{-1}$$

Démonstration:

On mène le calcul en utilisant les résultats de la proposition 113 :

$$\begin{aligned}
\chi_q(W) &= \chi_q(W_1(1))\chi_q(W_1(q^2)) \\
&= Y_1(1 + A_q^{-1}) Y_{q^2}(1 + A_{q^3}^{-1}) \\
&= (Y_1 + Y_{q^2}^{-1})(Y_{q^2} + Y_{q^4}^{-1}) \\
&= Y_1 Y_{q^2} + Y_1 Y_{q^4}^{-1} + 1 + Y_{q^2}^{-1} Y_{q^4}^{-1} \\
&= 1 + Y_1 Y_{q^2}(1 + Y_{q^2}^{-1} Y_{q^4}^{-1} + Y_1^{-1} Y_{q^2}^{-1} Y_{q^2}^{-1} Y_{q^4}^{-1}) \\
&= 1 + Y_1 Y_{q^2}(1 + A_{q^3}^{-1} + A_q^{-1} A_{q^3}^{-1}) \\
&= \chi_q(1) + \chi_q(W_1(q^2))
\end{aligned}$$

□

Pour achever notre étude de cette représentation, regardons la du point de vue de la réalisation de Drinfeld. Certains passages de la démonstration du lemme suivant peuvent être court-circuités par les arguments développés précédemment, mais ils permettent d'obtenir ou de retrouver les résultats en restant dans la même réalisation, ce qui constitue une illustration de la théorie :

Lemme 23. *La décomposition en sous-espaces de Jordan de* W *correspondant à la proposition 107 est :*

monôme	*sous-espace de Jordan*	*valeur propre de* h_m
$Y_1 Y_{q^2}$	$\mathbb{C}.(v_0 \otimes w_0)$	$\frac{q^m - q^{-m}}{m(q-q^{-1})}(1 + q^{2m})$
$Y_1 Y_{q^4}^{-1}$	$\mathbb{C}.(v_0 \otimes w_1 + q^{-1} v_1 \otimes w_0)$	$\frac{q^m - q^{-m}}{m(q-q^{-1})}(1 - q^{4m})$
1	$\mathbb{C}.(v_1 \otimes w_0)$	0
$Y_{q^2}^{-1} Y_{q^4}^{-1}$	$\mathbb{C}.(v_1 \otimes w_1)$	$\frac{q^m - q^{-m}}{m(q-q^{-1})}(-q^{2m} - q^{4m})$

Démonstration:

On a vu dans le lemme 5 que les vecteurs v_0, v_1 (respectivement w_0, w_1) sont des vecteurs de Jordan, et même des vecteurs propres de $W_1(1)$ (respectivement de $W_1(q^2)$). Le vecteur v_0 (respectivement w_0) est de plus haut poids, correpond donc au monôme Y_1 de $\chi_(W_1(1)) = Y_1 + Y_{q^2}^{-1}$ (Y_{q^2} de $\chi_q(W_1(q^2)) = Y_{q^2} + Y_{q^4}^{-1}$), et le vecteur v_1 à $Y_{q^2}^{-1}$ (w_1 à $Y_{q^4}^{-1}$). En utilisant le lemme 7, on obtient pour $m > 0$:

$$h_m.v_0 = \frac{q^m - q^{-m}}{m(q - q^{-1})} v_0 \ , \ h_m.v_1 = -\frac{q^m - q^{-m}}{m(q - q^{-1})} q^{2m} v_0$$

$$h_m.w_0 = \frac{q^m - q^{-m}}{m(q - q^{-1})} q^{2m} w_0 \ , \ h_m.w_1 = -\frac{q^m - q^{-m}}{m(q - q^{-1})} q^{4m} w_1$$

Ensuite grâce au lemme 2, nous pouvons regarder l'action des h_m sur les vecteurs de W. Dans le cas $m > 0$, on a (le cas $m < 0$ se traite de manière analogue) :

$$\pi_W(h_m) = \pi_{W_1(1)}(h_{\pm m}) \otimes 1 + 1 \otimes \pi_{W_1(q^2)}(h_m) + (\pi_{W_1(1)} \otimes \pi_{W_1(q^2)})(R_m)$$

avec $R_m \in \tilde{U}_- \otimes \tilde{U}_+$. Comme v_1 dirige l'espace de plus bas poids de $W_1(1)$ et w_0 celui de plus haut poids de $W_1(q^2)$, on a $\tilde{U}_-.v_1 = 0$ et $\tilde{U}_+.w_0 = 0$. En particulier :

$$R_m.(v_0 \otimes w_0) = R_m.(v_1 \otimes w_1) = R_m.(v_1 \otimes w_0) = 0$$

Comme les vecteurs de $W_1(1)$ de poids strictement plus petit que celui de v_0 sont proportionnels à v_1, et ceux de $W_1(q^2)$ de poids strictement plus grand que celui de w_1 sont proportionnels à w_0, on a $\tilde{U}_-.v_0 \subset \mathbb{C}.v_1$ et $\tilde{U}_+.w_1 \subset \mathbb{C}.w_0$ et il existe un $\lambda_m \in \mathbb{C}$ tel que $R_m.(v_0 \otimes w_1) = \lambda_m(v_1 \otimes w_0)$. On peut ainsi mener le calcul :

$$\begin{aligned}
h_m.(v_0 \otimes w_0) &= \tfrac{q^m - q^{-m}}{m(q-q^{-1})}(v_0 \otimes w_0) + \tfrac{q^m - q^{-m}}{m(q-q^{-1})} q^{2m}(v_0 \otimes w_0) + R_m.(v_0 \otimes w_0) \\
&= \tfrac{q^m - q^{-m}}{m(q-q^{-1})}(1 + q^{2m})(v_0 \otimes w_0)
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rl} h_m.(v_1\otimes w_1) & = -\frac{q^m-q^{-m}}{m(q-q^{-1})}q^{2m}(v_1\otimes w_1) - \frac{q^m-q^{-m}}{m(q-q^{-1})}q^{4m}(v_1\otimes w_1) + R_m.(v_1\otimes w_1) \\ & = \frac{q^m-q^{-m}}{m(q-q^{-1})}(-q^{2m}-q^{4m})(v_1\otimes w_1) \\ h_m.(v_1\otimes w_0) & = -\frac{q^m-q^{-m}}{m(q-q^{-1})}q^{2m}(v_1\otimes w_0) + \frac{q^m-q^{-m}}{m(q-q^{-1})}q^{2m}(v_1\otimes w_0) + R_m.(v_1\otimes w_1) = 0 \end{array}$$

Et $v_0\otimes w_0$, $v_1\otimes w_1$, $v_1\otimes w_0$ sont des vecteurs de jordan avec les valeurs propres annoncées. Calculons ensuite :

$$\begin{array}{rl} h_m.(v_0\otimes w_1) & = \frac{q^m-q^{-m}}{m(q-q^{-1})}(v_0\otimes w_1) - \frac{q^m-q^{-m}}{m(q-q^{-1})}q^{4m}(v_0\otimes w_1) + R_m.(v_0\otimes w_1) \\ & = \frac{q^m-q^{-m}}{m(q-q^{-1})}(1-q^{4m})(v_0\otimes w_1) + \lambda_m(v_1\otimes w_0) \\ & = \frac{q^m-q^{-m}}{m(q-q^{-1})}(1-q^{4m})(v_0\otimes w_1 + \frac{\lambda_m}{\frac{q^m-q^{-m}}{m(q-q^{-1})}(1-q^{4m})}v_1\otimes w_0) \end{array}$$

Montrons que $d_m = \frac{\lambda_m}{\frac{q^m-q^{-m}}{m(q-q^{-1})}(1-q^{4m})} \in \mathbb{C}$ est indépedant de $m>0$. Comme $c^{\frac{1}{2}}$ agit par l'identité sur les modules considérés, on a $\pi_W(h_m)\pi_W(h_1) = \pi_W(h_1)\pi_W(h_m)$, et la relation suivante dans $End(W)$ (par abus on ne note pas les π pour simplifier l'écriture) :

$$(h_1\otimes 1 + 1\otimes h_1 + R_1)(h_m\otimes 1 + 1\otimes h_m + R_m) = (h_m\otimes 1 + 1\otimes h_m + R_m)(h_1\otimes 1 + 1\otimes h_1 + R_1)$$

$$R_1(h_m\otimes 1 + 1\otimes h_m) + (h_1\otimes 1 + 1\otimes h_1)R_m + R_1R_m = (h_m\otimes 1 + 1\otimes h_m)R_1 + R_m(h_1\otimes 1 + 1\otimes h_1) + R_mR_1$$

En appliquant les termes de cette égalité à $v_0\otimes w_1$:

$$\begin{array}{rl} & \lambda_1\frac{q^m-q^{-m}}{m(q-q^{-1})}(1-q^{4m})(v_1\otimes w_0) \\ = & \frac{q^m-q^{-m}}{m(q-q^{-1})}(1-q^{4m})R_1.(v_0\otimes w_1) + \lambda_m(h_1\otimes 1 + 1\otimes h_1)(v_1\otimes w_0) + \lambda_m R_1(v_1\otimes w_0) \\ = & \lambda_1(h_m\otimes 1 + 1\otimes h_m)(v_1\otimes w_0) + (1-q^4)R_m.(v_0\otimes w_1) + \lambda_1 R_m(v_1\otimes w_0) \\ = & \lambda_m(1-q^4)(v_1\otimes w_0) \end{array}$$

Et donc pour tout $m>0$:

$$\frac{\lambda_m}{\frac{q^m-q^{-m}}{m(q-q^{-1})}(1-q^{4m})} = \frac{\lambda_1}{1-q^4} = d_1$$

On a ainsi :

$$h_m.(v_0\otimes w_1 + d_1v_1\otimes w_0) = h_m.(v_0\otimes w_1) = \frac{q^m-q^{-m}}{m(q-q^{-1})}(1-q^{4m})(v_0\otimes w_1 + d_1v_1\otimes w_0)$$

Et le vecteur $v_0\otimes w_1 + d_1v_1\otimes w_0$ est le dernier vecteur propre recherché avec la valeur propre annoncée.

L'étude précédente (dans le cadre de la première réalisation de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$) intervient ici seulement pour déterminer d_1 : on a vu dans la proposition 99 que $W_2(q)\subset W$ et que $W_2(q)\cap(\mathbb{C}.(v_0\otimes w_1)\oplus\mathbb{C}.(v_1\otimes w_0)) = \mathbb{C}.(v_0\otimes w_1 + q^{-1}v_1\otimes w_0)$ est un sous-espace de poids de $W_2(q)$. Donc c'est un des espaces de Jordan recherchés, et est nécessairement égal à $\mathbb{C}.(v_0\otimes w_1 + d_1v_1\otimes w_0)$, donc $d_1 = q^{-1}$. □

6.7.3 Correction du défaut d'injectivité

Proposition 115. *Dans le cas $\hat{\mathfrak{g}} = \hat{sl}_2$, le morphisme d'anneaux χ_q n'est pas injectif.*

Démonstration:

On a d'après le lemme 22 :

$$\chi_q(W) = \chi_q(W_2(q)) + \chi_q(1) = \chi_q(W_2(q)\oplus W_0)$$

avec W_0 la représentation unité. Les représentations $W_2(q)$ et W_0 sont irréductibles. Mais on a vu dans la proposition 99 que W n'est pas complètement réductible, donc W n'est pas isomorphe à $W_2(q)\oplus W_0$. □

Théorème 45. *Le noyau du morphisme d'anneaux*

$$\chi_q : Rep(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})) \to \mathbb{Z}[Y_{i,a}^{\pm 1}]_{i\in I, a\in\mathbb{C}^*}$$

est l'idéal I de $Rep(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))$ engendré par les $T-U-V$ avec $T,U,V\in Rep(\chi_q)$ des représentations telles qu'on a une suite exacte de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$-modules :

$$0\to U\to T\to V\to 0$$

Démonstration:

Le noyau $Ker(\chi_q)$ du morphisme d'anneaux χ_q est un idéal de $Rep(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))$ qui, d'après la proposition 109, contient les $T-U-V$ comme dans l'énoncé. On a donc $I \subset Ker(\chi_q)$.

Soit $M \in Ker(\chi_q)$ et écrivons M sous la forme $M = M_0 - M_1$ avec M_0, M_1 des représentations. La proposition 110 donne une écriture :

$$\chi_q(M_0) = \sum_{i=1..m} m_i \chi_q(W_i) \ , \ \chi_q(M_1) = \sum_{i=1..m} m_i' \chi_q(W_i)$$

avec les $m_i, m_i' \in \mathbb{N}^*$ et les $W_i \in Rep(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))$ des représentations irréductibles, disctinctes deux à deux. Comme $\chi_q(M_0) = \chi_q(M_1)$, et les $\chi_q(W_i)$ sont linéairement indépendants d'après le lemme 21, on a pour chaque i, $m_i = m_i'$, et les facteurs qui interviennent dans une suite de Jordan-Hölder de M_0 ou de M_1 sont les mêmes. Pour obtenir $M_0 - M_1 = (M_0 - (\bigoplus_{i=1..m} m_i W_i)) - (M_1 - (\bigoplus_{i=1..m} m_i W_i)) \in I$, il suffit donc de montrer que pour un $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$-module M dont les facteurs d'une suite de Jordan-Hölder sont $(G_i)_{1\geq i \geq s}$, on a $M - (\bigoplus_{i=1..s} G_i) \in I$. Montrons le par récurrence sur la dimension de M. Le cas $M = 0 \in I$ est clair, puis considérons un des facteurs G_1 de Jordan-Hölder qui commence la suite :

$$0 \to G_1 \to M \to M/G_1 \to 0$$

On a $\chi_q(M/G_1) = \chi_q(M) - \chi_q(G_1) = \sum_{i=2..s} \chi_q(G_i)$ et en appliquant l'hypothèse de récurrence à M/G_1 on obtient $M/G_1 - (\sum_{i=2..s} G_i) \in I$. Mais comme le suite exacte donne $M - G_1 - M/G_1 \in I$, on $M - G_1 - (\sum_{i=2..s} G_i) \in I$ ce qui donne le résultat. □

Définition 66. *On définit l'anneau $Rep_r(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))$ de Grothendieck complètement réduit comme le quotient de l'anneau $Rep(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))$ par son idéal $I = Ker(\chi_q)$. Le morphisme d'anneaux déduit de χ_q par passage au quotient est encore noté χ_q :*

$$\chi_q : Rep_r(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})) \to \mathbb{Z}[Y_{i,a_i}^{\pm 1}]_{i\in I, a_i \in \mathbb{C}^*}$$

Lemme 24. *Le morphisme d'anneaux $res : Rep(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})) \to Rep(\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}))$ est nul sur I. On note encore*

$$res : Rep_r(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})) \to Rep(\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}))$$

le morphisme d'anneaux déduit par passage au quotient.

Démonstration:

Pour montrer que I est inclus dans l'idéal $Ker(res)$, il suffit de montrer que $res(T) = res(U) + res(V)$ pour T, U, V des représentations telles qu'on a une suite exacte de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$-modules $0 \to U \to T \to V \to 0$. C'est aussi une suite exacte de $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$-modules. Comme d'après le corollaire 5 les $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$-modules de dimension finie sont complètement réductibles, on peut écrire :

$$res(T) = \bigoplus_{j=1..m} V_j \ , \ res(U) = \bigoplus_{j=1..p} V_j$$

avec $p \geq m$ et les $V_j \in Rep(\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}))$ des $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$-modules irréductibles. Alors

$$res(V) = res(T)/res(U) = \bigoplus_{j=1..m} V_j$$

et $res(T) = res(V) + res(U)$. □

Théorème 46. *Le morphisme d'anneaux :*

$$\chi_q : Rep_r(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})) \to \mathbb{Z}[Y_{i,a}^{\pm 1}]_{i\in I, a\in \mathbb{C}^*}$$

est injectif, et on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Rep_r(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})) & \xrightarrow{\chi_q} & \mathbb{Z}[Y_{i,a}^{\pm 1}]_{i\in I, a\in\mathbb{C}^*} \\ \downarrow res & & \downarrow \beta \\ Rep(\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})) & \xrightarrow{\chi} & \mathbb{Z}[y_i^{\pm 1}]_{i\in I} \end{array}$$

Démonstration:

L'injectivité de $\chi_q : Rep_r(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})) \to \mathbb{Z}[Y_{i,a}^{\pm 1}]_{i\in I, a\in\mathbb{C}^*}$ provient directement de sa construction comme morphisme d'anneaux obtenu par passage au quotient dans la définition 66. Pour montrer que le diagramme est commutatif, il suffit de montrer que pour $M \in Rep_r(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))$ une représentation on a $\beta(\chi_q(M)) = \chi(res(M))$. Soit $M' \in Rep(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))$ un représentant de M dans $Rep(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))$. Par définition de res et de χ_q respectivement dans le lemme 24 et la définition 66, on a $res(M) = res(M')$ et $\chi_q(M) = \chi_q(M')$. Mais d'après le théorème 41 on a $\beta(\chi_q(M')) = \chi(res(M'))$. □

6.7.4 Application à l'étude de la structure de l'anneau de Grothendieck $Rep_r(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))$

Lemme 25. *Les $\chi_q(V_i(a))$, avec $i \in I, a \in \mathbb{C}^*$, sont algébriquement indépendants dans $\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{h}})[[z]]$.*

Démonstration:

Comme $V_i(z) = V(P_z^{(i)})$ pour le n-uplet $P_z^{(i)} = (P_1, ..., P_n)$ avec $P_j(u) = 1$ si $j \neq i$ et $P_i(u) = 1 - zu$, le terme de plus haut poids de $V_i(z)$ est $Y_{i,a}$ de poids ω_i. En reprenant l'écriture de $\chi_q(V_{\omega_i}(a))$ vue lors de la démonstration du lemme 21, on a :

$$\chi_q(V_{\omega_i}(a)) = Y_{i,a} + \text{ monômes de degré strictement inférieur à } \omega_i$$

Considérons à présent une équation de dépendance algébrique :

$$A = Q(\chi_q(V_{\omega_{i_1}}(a_1)), ..., \chi_q(V_{\omega_{i_N}}(a_N))) = 0$$

avec Q polynôme complexe en N variables. Supposons par l'absurde que $Q \neq 0$. Regardons alors parmi les monômes $\chi_q(V_{\omega_{i_1}}(a_1))^{n_1}...\chi_q(V_{\omega_{i_N}}(a_N))^{n_N}$ intervenant effectivement dans A l'un d'eux A_1 pour lequel le poids $n_1\omega_{i_1}+...+n_N\omega_{i_N}$ est maximal. Le monôme $Y_{i_1,a_1}^{n_1}...Y_{i_N,a_N}^{n_N}$ qui intervient dans l'écriture de A_1 avec la multiplicité 1 ne peut intervenir dans l'écriture d'aucun autre des monômes en $\chi_q(V)$ par un argument analogue à celui de la démonstration du lemme 21 et par l'indépendance algébrique des $Y_{i,a}$ vue dans la proposition 106. Cette même indépendance algébrique entraîne, en sachant que $A = 0$, la nullité du coefficient de ce monôme $Y_{i_1,a_1}^{n_1}...Y_{i_N,a_N}^{n_N}$, qui est égal au coefficient de A_1 dans l'écriture de A. Contradiction. □

Théorème 47. *L'anneau de Grothendieck $Rep_r(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))$ est un anneau commutatif isomorphe à l'anneau $\mathbb{Z}[X_{i,a}]_{i\in I, a\in\mathbb{C}^*}$ de polynômes sur $\mathbb{Z}$. Un isomorphisme est donné en identifiant pour $i \in I, a \in \mathbb{C}^*$ le monôme $X_{i,a}$ et la classe de $V_i(a)$.*

Démonstration:

Notons A le sous-anneau de $\mathbb{Z}[Y_{i,a_i}^{\pm 1}]_{i\in I, a_i\in\mathbb{C}^*}$ engendré par les $\chi_q(V_i(a))$, $i \in I, a \in \mathbb{C}^*$. L'indépendance algébrique des $\chi_q(V_i(a))$ étudiée dans le lemme 25 implique que A est isomorphe à l'anneau $\mathbb{Z}[X_{i,a}]_{i\in I, a\in\mathbb{C}^*}$. Comme, d'après le théorème 46, χ_q est injective, l'anneau $Rep_r(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))$ est isomorphe à $\chi_q(Rep_r(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))$, et il suffit pour démontrer le théorème d'obtenir l'égalité $A = \chi_q(Rep_r(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))$.

L'inclusion $A \subset \chi_q(Rep_r(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})))$ provient du fait que A est engendré par les $\chi_q(V_i(a))$.

Soit $V \in Rep_r(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))$ et montrons que $\chi_q(V) \in A$. On a vu dans la proposition 110 que $\chi_q(V)$ est combinaison linéaire à coefficients entiers de $\chi_q(W)$ avec $W \in Rep_r(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))$ représentation irréductible. Ils nous suffit donc d'obtenir $\chi_q(W) \in A$ pour un tel W.

Pour un tel W, on a défini lors de la démonstration du lemme 21 le degré $\omega(V) = \omega(P) \in \Lambda^+$, avec P tel que $W = V(P)$. Montrons $\chi_q(W) \in A$ par "récurrence" sur le degré (c'est licite, car pour l'ordre partiel sur Λ, $\lambda \geq \mu \iff \lambda - \mu \in \Lambda^+$, chaque $\lambda \in \Lambda^+$ non nul est $\lambda > \omega_i$ pour un ω_i et les μ tels que $\omega < \mu < \lambda$ sont en nombre fini) : si le poids de W est un ω_i, alors d'après le corollaire 7, W est un $V_i(z)$ et le résultat vient. Ensuite supposons la propriété acquise pour tout W' tel que $\omega(W') < \omega(W)$. Le corollaire 7, indique que W est un quotient $W \simeq G/H$ du sous-module $G = \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}).(v_{i_1,a_1} \otimes ... \otimes v_{i_m,a_m})$ d'un module de la forme $W_0 = V_{i_1}(z_1) \otimes ... \otimes V_{i_m}(z_m)$. Remarquons d'abord $\chi_q(W_0) = \chi_q(V_{i_1}(z_1)))...\chi_q(V_{i_m}(z_m)) \in A$. Puis la suite exacte courte $\{0\} \to H \to G \to W \to \{0\}$ donne d'après la proposition 109 $\chi_q(G) = \chi_q(W) + \chi_q(H)$. Mais de même la suite exacte courte $\{0\} \to G \to W_0 \to W_0/G \to \{0\}$ donne $\chi_q(W_0) = \chi_q(W_0/G) + \chi_q(W) + \chi_q(H)$. On a vu lors de la démonstration du lemme 25 :

$$\chi_q(V_{\omega_i}(a)) = Y_{i,a} + \text{ monômes de degré strictement inférieur à } \omega_i$$

et donc :

$$\chi_q(W_0) = Y_{i_1,a_1}...Y_{i_m,a_m} + \text{ monômes de degré strictement inférieur à } \omega(W)$$

Le monôme $Y_{i_1,a_1}...Y_{i_m,a_m}$ intervient dans $\chi_q(W)$. Donc si on écrit grâce à la proposition 110 $\chi_q(W_0/G)$ et $\chi_q(H)$ comme combinaison linéaire à coefficients entiers de $\chi_q(Z)$ avec $Z \in Rep_r(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))$ représentation irréductible, les monômes des $\chi_q(Z)$ qui interviennent sont de degré strictement inférieur à $\omega(W)$, et donc les Z qui interviennent vérifient $\omega(Z) < \omega(W)$. En utilisant l'hypothèse de récurrence ils vérifient $\chi_q(Z) \in A$, et donc $\chi_q(W_0/G) + \chi_q(H) \in A$, puis $\chi_q(W) = \chi_q(W_0) - (\chi_q(W_0/G) + \chi_q(H)) \in A$. □

7 Opérateurs d'écrantage et image de χ_q

7.1 Etude dans le cas $\hat{\mathfrak{g}} = \hat{sl}_2$

7.1.1 Définition de l'opérateur d'écrantage S

On note $\mathcal{Y}$ l'anneau commutatif $\mathbb{Z}[Y_a]_{a\in\mathbb{C}^*}$. On note $\tilde{\mathcal{Y}}$ le $\mathcal{Y}$-module librement engendré par une famille $(S_x)_{x\in\mathbb{C}^*}$ indéxée par $\mathbb{C}^*$:

$$\tilde{\mathcal{Y}} = \bigoplus_{x\in\mathbb{C}^*}\mathcal{Y}.S_x \text{ avec } \mathcal{Y}.S_x \simeq \mathcal{Y}$$

On définit $\mathcal{Y}_1$ comme le $\mathcal{Y}$-module quotient de $\tilde{\mathcal{Y}}$ par le sous-module engendré par les éléments de la forme $S_{xq^2} - A_{xq}S_x$ avec $x \in \mathbb{C}^*$.

Lemme 26. *Le $\mathcal{Y}$-module $\mathcal{Y}_1$ est libre, et est librement engendré par une famille $(S_x)_{x\in C}$ avec $C \subset \mathbb{C}^*$ telle que la projection canonique $C \to \mathbb{C}^*/q^{2\mathbb{Z}}$ est une bijection, ce qui s'écrit :*

$$\mathcal{Y}_1 \simeq \bigoplus_{x\in(\mathbb{C}^*/q^{2\mathbb{Z}})}\mathcal{Y}.S_x \text{ avec } \mathcal{Y}.S_x \simeq \mathcal{Y}$$

Démonstration:

Soit $J \subset \mathbb{C}^*$ une partie représentative de $\mathbb{C}^*/q^{2\mathbb{Z}}$, et montrons que $B = (S_x)_{x\in J}$ (on note de la même manière un élément de $\tilde{\mathcal{Y}}$ et son image dans $\mathcal{Y}_1$) engendre librement $\mathcal{Y}_1$. Pour $x \in \mathbb{C}^*$, il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $xq^{2m} = x_0 \in J$. Si $m < 0$, on écrit :

$$S_x = A_{xq^{-1}}S_{xq^{-2}} = A_{xq^{-1}}A_{xq^{-3}}...A_{xq^{2m+1}}S_{x_0}$$

et si $m > 0$:

$$S_x = A_{xq}^{-1}S_{xq^2} = A_{xq}^{-1}A_{xq^3}^{-1}...A_{xq^{2m-1}}^{-1}S_{x_0}$$

ce qui implique, comme les $(S_x)_{x\in\mathbb{C}^*}$ engendrent $\tilde{\mathcal{Y}}$, que B est génératrice de $\mathcal{Y}_1$. Ensuite pour une combinaison linéaire nulle dans $\mathcal{Y}_1$: $\sum_{x\in J}\lambda_x.S_x = 0$ avec les $\lambda_x \in \mathcal{Y}$, on regarde un représentant dans $\tilde{\mathcal{Y}}$:

$$\sum_{x\in J}\lambda_x.S_x = \sum_{x'\in\mathbb{C}^*}\mu_{x'}.(S_{x'q^2} - A_{x'q}.S_{x'}) = \sum_{x\in J}\sum_{x'\in q^{2\mathbb{Z}}x}\mu_{x'}.(S_{x'q^2} - A_{x'q}.S_{x'})$$

avec les $\mu_{x'} \in \mathcal{Y}$. On obtient $\sum_{x\in J}(\lambda_x.S_x - \sum_{x'\in q^{2\mathbb{Z}}x}\mu_{x'}.(S_{x'q^2} - A_{x'q}S_{x'})) = 0$. Puis par liberté des $S_x \in \tilde{\mathcal{Y}}$, et comme les $xq^{2\mathbb{Z}}$ sont disjoints pour $x \in J$, tous les termes $\lambda_x.S_x - \sum_{x'\in q^{2\mathbb{Z}}x}\mu_{x'}.(S_{x'q^2} - A_{x'q}S_{x'}) = 0$. Si on suppose par l'absurde que l'un des $\lambda_x \neq 0$, alors $\sum_{x'\in q^{2\mathbb{Z}}x}\mu_{x'}.(S_{x'q^2} - A_{x'q}S_{x'}) \neq 0$, et on regarde le plus grand $m_1 \in \mathbb{Z}$ et le plus petit $m_2 \in \mathbb{Z}$ tels que $\mu_{xq^{2m_1}} \neq 0$ et $\mu_{xq^{2m_2}} \neq 0$. Alors dans la somme $\sum_{x'\in q^{2\mathbb{Z}}x}\mu_{x'}.(S_{x'q^2} - A_{x'q}S_{x'}) \neq 0$ les coefficients de $S_{xq^{2m_1+2}}$ et $S_{xq^{2m_2}}$ sont respectivement égaux à $\mu_{xq^{2m_1}}$ et $-A_{xq^{2m_2+1}}\mu_{xq^{2m_2}}$, donc non nuls, et l'écriture de cette somme dans la base des S_a fait intervenir au moins deux termes. Contradiction car cette somme est égale à $\lambda_x.S_x$. □

Dans le lemme suivant les structures de groupe considérées sont les structures additives, qui sont abéliennes.

Lemme 27. *Il existe un unique morphisme de groupes $\tilde{S} : \mathcal{Y} \to \tilde{\mathcal{Y}}$ tel que :*

$$\tilde{S}(Y_a) = Y_a.S_a \text{ pour } a \in \mathbb{C}^* \text{ , } \tilde{S}(1) = 0$$

$$\tilde{S}(\alpha\beta) = \beta.\tilde{S}(\alpha) + \alpha.\tilde{S}(\beta) \text{ pour } \alpha, \beta \in \mathcal{Y}$$

L'application $\tilde{S}$ vérifie alors pour $a \in \mathbb{C}^*$, $\tilde{S}(Y_a^{-1}) = -Y_a^{-1}.S_a$.

Démonstration:

Montrons d'abord l'unicité. On a pour $a \in \mathbb{C}^*$:

$$0 = \tilde{S}(Y_a Y_a^{-1}) = Y_a.\tilde{S}(Y_a^{-1}) + Y_a^{-1}.\tilde{S}(Y_a) = Y_a\tilde{S}(Y_a^{-1}) + S_a$$

soit $Y_a.\tilde{S}(Y_a^{-1}) = -S_a$ et $\tilde{S}(Y_a^{-1}) = -Y_a^{-1}.S_a$. On obtient ensuite par récurrence sur m que pour tout m-uplet $(a_1, ..., a_m) \in \mathbb{C}^{*m}$ et $(\epsilon_1, ..., \epsilon_m) \in \{\pm 1\}^m$, on a :

$$\tilde{S}(Y_{a_1}^{\epsilon_1}...Y_{a_m}^{\epsilon_m}) = \sum_{k=1..m} Y_{a_1}^{\epsilon_1}..Y_{a_{k-1}}^{\epsilon_{k-1}}Y_{a_{k+1}}^{\epsilon_{k+1}}..Y_{a_m}^{\epsilon_m}.\tilde{S}(Y_{a_k}^{\epsilon_k}) = \sum_{k=1..m} \epsilon_k Y_{a_1}^{\epsilon_1}..Y_{a_m}^{\epsilon_m}.S_{a_k} = Y_{a_1}^{\epsilon_1}..Y_{a_m}^{\epsilon_m}\sum_{k=1..m}\epsilon_k.S_{a_k}$$

L'application $\tilde{S}$ est ainsi définie de manière unique sur les monômes qui engendrent le groupe $\mathcal{Y}$, et on a l'unicité.

Pour l'existence, on définit $\tilde{S}$ sur les monômes par la formule que nous venons d'établir. C'est licite car le $\mathbb{Z}$-module $\mathcal{Y}$ est librement engendré par les monômes, et pour deux expressions $Y_{a_1}^{\epsilon_1}..Y_{a_m}^{\epsilon_m} = Y_{b_1}^{\eta_1}...Y_{b_{m'}}^{\eta_{m'}}$ du même monôme, les sommes $\sum_{k=1..m}\epsilon_k S_{a_k}$ et $\sum_{k=1..m'}\eta_k S_{b_k}$ sont égales à la somme correspondante pour l'expression réduite du monôme où toutes les simplifications $Y_a Y_a^{-1}$, qui donnent $S_a - S_a$ dans la somme, ont été faites. Cette somme, définie de manière unique pour un monôme M, sera notée $s(M) \in \mathbb{Z}[S_a]_{a\in\mathbb{C}^*}$. On convient $s(1) = 0$. Il découle de la définition que pour M et M' deux monômes, le monôme MM' vérifie $s(MM') = s(M) + s(M')$. De plus pour tout monôme M on définit bien $\tilde{S}$ par $\tilde{S}(M) = M.s(M)$. Il ne reste plus qu'à vérifier la formule multiplicative. Soient deux éléments :

$$\alpha = \sum_p \lambda_p M_p \text{ et } \beta = \sum_p \mu_p M_p$$

avec les M_p monômes et $\lambda_p, \mu_p \in \mathbb{Z}$. Alors :

$$\begin{aligned}
\tilde{S}(\alpha\beta) &= \tilde{S}(\sum_p \lambda_p M_p \sum_{p'} \mu_{p'} M_{p'}) = \sum_{p,p'} \lambda_p \mu_{p'} \tilde{S}(M_p M_{p'}) = \sum_{p,p'} \lambda_p \mu_{p'} M_p M_{p'}.s(M_p M_{p'}) \\
&= \sum_{p,p'} \lambda_p \mu_{p'} M_p M_{p'}(s(M_p) + s(M_{p'})) = \sum_{p,p'} \lambda_p \mu_{p'} s(M_p) M_p M_{p'} + \sum_{p,p'} \lambda_p \mu_{p'} M_p s(M_{p'}) M_{p'} \\
&= \sum_{p,p'} \lambda_p \mu_{p'} \tilde{S}(M_p) M_{p'} + \sum_{p,p'} \lambda_p \mu_{p'} M_p \tilde{S}(M_{p'}) = \tilde{S}(\alpha)\beta + \tilde{S}(\beta)\alpha
\end{aligned}$$

□

Définition 67. *On appelle opérateur d'écrantage le morphisme de groupes $S : \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}_1$ composé de $\tilde{S}$ et de la projection canonique de $\tilde{\mathcal{Y}}$ sur $\mathcal{Y}_1$.*

Lemme 28. *Pour $\alpha, \beta \in \mathcal{Y}$, on a $S(\alpha\beta) = \alpha S(\beta) + \beta S(\alpha)$.*

Démonstration:

On a d'après le lemme 27, $\tilde{S}(\alpha\beta) = \alpha.\tilde{S}(\beta) + \beta.\tilde{S}(\alpha)$. Puis comme la projection de $\tilde{\mathcal{Y}}$ sur $\mathcal{Y}_1$ est $\mathcal{Y}$-linéaire, on a la formule annoncée. □

7.1.2 $Im(\chi_q) \subset ker(S)$

Pour $x \in \mathbb{C}^*$, on note $\mathcal{Y}^{(x)}$ le sous-anneau $\mathbb{Z}[Y_{xq^{2m}}^{\pm}]_{m\in\mathbb{Z}}$ de $\mathcal{Y}$. On voit que si $x, x' \in \mathbb{C}^*$ sont dans la même classe modulo $q^{2\mathbb{Z}}$, alors $\mathcal{Y}^{(x)} = \mathcal{Y}^{(x')}$. On peut donc aussi définir $\mathcal{Y}^{(x)}$ pour $x \in \mathbb{C}^*/q^{2\mathbb{Z}}$.

Lemme 29. *On a l'isomorphisme de $\mathbb{Z}$-modules $\mathcal{Y} \simeq \bigotimes_{x\in(\mathbb{C}^*/q^{2\mathbb{Z}})} \mathcal{Y}^{(x)}$, et on peut identifier le produit tensoriel et de multiplication dans $\mathcal{Y}$.*

Démonstration:

Chaque monôme M de $\mathcal{Y}$ s'écrit de manière $M = \prod_{x\in(\mathbb{C}^*/q^{2\mathbb{Z}})} M^{(x)}$ avec $M^{(x)} \in \mathcal{Y}^{(x)}$ en regroupant les facteurs de même indice modulo $q^{2\mathbb{Z}}$. Puis il existe une unique application $\mathbb{Z}$-linéaire $f : \mathcal{Y} \to \bigotimes_{x\in(\mathbb{C}^*/q^{2\mathbb{Z}})} \mathcal{Y}^{(x)}$ telle que $f(M) = \bigotimes_{x\in(\mathbb{C}^*/q^{2\mathbb{Z}})} M^{(x)}$ sur les monômes. C'est un isomorphisme car f envoie bijectivement une $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{Y}$ (les monômes) sur une $\mathbb{Z}$-base de $\bigotimes_{x\in(\mathbb{C}^*/q^{2\mathbb{Z}})} \mathcal{Y}^{(x)}$ (les produits tensoriels de monômes des $\mathcal{Y}^{(x)}$). □

Lemme 30. *On a l'isomorphisme de $\mathbb{Z}$-modules $\chi_q : Rep_r(\mathcal{U}_q(\hat{sl}_2)) \simeq \bigotimes_{x\in(\mathbb{C}^*/q^{2\mathbb{Z}})} \mathbb{Z}[Y_{xq^{2m}} + Y^{-1}_{xq^{2m+2}}]_{m\in\mathbb{Z}}$, et dans $\mathcal{Y}$ on a l'isomorphisme canonique qu'on notera par une égalité :*

$$Im(\chi_q) = \bigotimes_{x\in(\mathbb{C}^*/q^{2\mathbb{Z}})} \mathbb{Z}[Y_{xq^{2m}} + Y^{-1}_{xq^{2m+2}}]_{m\in\mathbb{Z}}$$

Démonstration:

D'après le théorème 47, on a l'isomorphisme d'anneaux $Rep_r(\mathcal{U}_q(\hat{sl}_2)) \simeq \mathbb{Z}[X_a]_{a\in\mathbb{C}^*}$ avec X_a la classe de $V(a)$. En utilisant la même démarche que dans le lemme 29, on obtient :

$$Rep_r(\mathcal{U}_q(\hat{sl}_2)) \simeq \bigotimes_{x\in(\mathbb{C}^*/q^{2\mathbb{Z}})} \mathbb{Z}[X_a]_{a\in xq^{2\mathbb{Z}}}$$

Mais par définition $V(a) = V(P_a)$ avec le polynôme $P^{(a)}(u) = 1 - ua$. Ce polynôme est égal au polynôme $P_a^{(1)}$ du corollaire 17, et donc $V(a) = V(P_a^{(1)}) = W_1(a)$. On connait donc d'après la proposition 113 son q-caractère :

$$\chi_q(V(a)) = Y_a(1 + A^{-1}_{qa}) = Y_a + Y_aY^{-1}_{aq^2}Y_a^{-1} = Y_a + Y^{-1}_{aq^2}$$

En conséquence l'isomorphisme d'anneaux χ_q donne $\chi_q : \mathbb{Z}[X_a]_{a\in xq^{2\mathbb{Z}}} \simeq \mathbb{Z}[Y_a + Y^{-1}_{aq^2}]_{a\in xq^{2\mathbb{Z}}}$ et finalement le résultat annoncé. $\square$

Proposition 116. *On a $Im(\chi_q) \subset ker(S)$.*

Démonstration:

En prenant l'expression de $Im(\chi_q)$ du lemme 30, on voit qu'il suffit de montrer que pour $a \in \mathbb{C}^*$, on a $Y_a + Y^{-1}_{aq^2} \in ker(S)$. Or $\tilde{S}(Y_a + Y^{-1}_{aq^2}) = Y_a.S_a - Y^{-1}_{aq^2}.S_{aq^2}$ mais en prenant ensuite la projection sur $\mathcal{Y}_1$, on a $S_{aq^2} = A_{aq}.S_a$ et :

$$S(Y_a + Y^{-1}_{aq^2}) = Y_a.S_a - Y^{-1}_{aq^2}Y_{aq^2}Y_a.S_a = 0$$

$\square$

7.1.3 Etude préliminaire d'un endomorphisme du $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}[y_m^{\pm}]_{m\in\mathbb{Z}}$

On considère l'anneau de polynômes $\mathbb{Z}[y_m^{\pm}]_{m\in\mathbb{Z}}$ d'indéterminées $y_m^{\pm}$ avec $y_my_m^- = 1$. On notera $y_m^+ = y_m$

Lemme 31. *Il existe une unique application $\mathbb{Z}$-linéaire S_1 de $\mathbb{Z}[y_m^{\pm}]_{m\in\mathbb{Z}}$ dans $\mathbb{Z}[y_m^{\pm}]_{m\in\mathbb{Z}}$ telle que :*

$$S_1(y_m^{\pm}) = \pm y_m^{\pm} \prod_{i=1..m} y_iy_{i-1} \textit{ pour } m \geq 0$$

$$S_1(y_m^{\pm}) = \pm y_m^{\pm} \prod_{i=1..m+1} y_i^{-1}y_{i-1}^{-1} \textit{ pour } m < 0$$

$$S_1(\alpha\beta) = \alpha S_1(\beta) + \beta S_1(\alpha) \textit{ pour } \alpha, \beta \in \mathbb{Z}[y_m^{\pm}]_{m\in\mathbb{Z}}$$

Démonstration:

Cette application apparaîtra lors de la démonstration du lemme 35. $\square$

Soit $A = \mathbb{Z}[y_m, y^{-1}_{m+1}]_{m\geq 0} = \mathbb{Z}[y_0; y_m^{\pm}, m \geq 0]$ sous-anneau de $\mathbb{Z}[y_m^{\pm}]_{m\in\mathbb{Z}}$. Pour $m \geq 0$, on pose $t_m = y_m + y^{-1}_{m+1} \in A$. On dit qu'un élément de A de la forme $t_{m_1}...t_{m_k}y_{m'_1}...y_{m'_l}$ est un monôme réduit de A si $0 \leq m_1 \leq ... \leq m_k$, $O \leq m'_1 \leq ... \leq m'_l$ et $m'_j \neq m_{j'} + 1$ pour tout j, j'.

Lemme 32. *On a l'isomorphisme d'anneaux :*

$$A = \mathbb{Z}[y_m, y^{-1}_{m+1}]_{m\geq 0} \simeq \mathbb{Z}[t_m, y_m]_{m\geq 0}/(\bigoplus_{l\geq 0}\mathbb{Z}[t_m, y_m]_{m\geq 0}.(t_ly_{l+1} - y_ly_{l+1} - 1))$$

et les monômes réduits de A forment une $\mathbb{Z}$-base de A.

Démonstration:

On a un morphisme d'anneaux

$$\alpha : \mathbb{Z}[y_m, y^{-1}_{m+1}]_{m\geq 0} \to \mathbb{Z}[t_m, y_m]_{m\geq 0}/(\bigoplus_{l\geq 0}\mathbb{Z}[t_m, y_m]_{m\geq 0}.(t_ly_{l+1} - y_ly_{l+1} - 1))$$

en posant sur les générateurs $\alpha(y_m) = y_m$ et $\alpha(y_{m+1}^{-1}) = t_m - y_m$. Il est bien défini car on a $\alpha(y_{m+1}y_{m+1}^{-1}) = t_m y_{m+1} - y_m y_{m+1} = 1$. Puis on a un morphisme d'anneaux

$$\beta : \mathbb{Z}[t_m, y_m]_{m\geq 0}/(\bigoplus_{l\geq 0}\mathbb{Z}[t_m, y_m]_{m\geq 0}.(t_l y_{l+1} - y_l y_{l+1} - 1)) \to \mathbb{Z}[y_m, y_{m+1}^{-1}]_{m\geq 0}$$

en posant sur les générateurs $\beta(t_m) = y_m + y_{m+1}^{-1}$ et $\beta(y_m) = y_m$. Il est bien défini car on a $\beta(t_m y_{m+1} - y_m y_{m+1} - 1) = (y_m + y_{m+1}^{-1})y_{m+1}^{-1} - y_m y_{m+1} - 1 = 0$. On vérifie ensuite sur les générateurs que α et β sont des bijections réciproques l'une de l'autre, ce qui nous donne l'isomorphisme.

Les monômes $t_{m_1}...t_{m_k}y_{m_1'}...y_{m_l'}$ engendrent le $\mathbb{Z}$-module A. On pose $deg_t(t_{m_1}...t_{m_k}y_{m_1'}...y_{m_l'}) = k$ le degré en les t_m d'un tel monôme. On obtient une filtration de A en posant A_k le sous $\mathbb{Z}$-module de A engendré par les monômes de degré inférieur à k. Montrons par récurrence sur k qu'un monôme $M \in A_k$ est combinaison $\mathbb{Z}$-linéaire de monômes réduits. C'est clair si $m = 0$ car c'est alors un monôme réduit. Ensuite, si le monôme n'est pas réduit, il existe i, j tels que $m_j' = m_i + 1$. Mais alors on a $t_{m_i}y_{m_j'} = t_{m_i}y_{m_i+1} = 1 + y_{m_i}y_{m_i+1}$ et :

$$t_{m_1}...t_{m_k}y_{m_1'}...y_{m_l'} = t_{m_1}..t_{m_{i-1}}t_{m_{i+1}}..t_{m_k}y_{m_1'}..y_{m_{j-1}'}y_{m_{j+1}'}..y_{m_l'} + t_{m_1}..t_{m_{i-1}}t_{m_{i+1}}..t_{m_k}y_{m_1'}...y_{m_l'}y_{m_{j+1}'}$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence à ces deux derniers monômes on obtient le résultat. Donc les monômes réduits engendrent le $\mathbb{Z}$-module A.

Considérons à présent une combinaison $\mathbb{Z}$-linéaire de monômes réduits qui s'annule $\sum_{i=1..p}\lambda_i M_i = 0$ avec les $\lambda_i \in \mathbb{Z}$. Lorsqu'on développe chaque monôme dans $\mathbb{Z}[y_m, y_{m+1}^{-1}]_{m\geq 0}$, comme les monômes sont réduits il n'y aura pas d'annulation entre les $y_{m_j'}$ et les $y_{m_i}^{-1}$, c'est à dire qu'un monôme réduit $t_{m_1}...t_{m_k}y_{m_1'}...y_{m_l'}$ se développe en une somme de monômes en y_m, y_m^{-1} de longueur $k + l$. En fait :

$$t_{m_1}...t_{m_k}y_{m_1'}...y_{m_l'} \in \bigoplus_{(\epsilon_1,...,\epsilon_{k+l})\in\{\pm 1\}^{k+l}} \mathbb{Z}.y_{m_1}^{\epsilon_1}...y_{m_k}^{\epsilon_k}y_{m_1'}^{\epsilon_{k+1}}...y_{m_l'}^{\epsilon_{k+l}}$$

Ces dernières sommes sont en somme directe pour différentes suites $(m_1, ..., m_k, m_1', ..., m_l') \in \mathbb{N}^{k+l}$ et donc pour chaque suite $u = (n_1, ..., n_N) \in \mathbb{N}^{k+l}$, en notant J_u l'ensemble des i tels que $M_i = t_{m_1}...t_{m_k}y_{m_1'}...y_{m_l'}$ avec $k + l = N$ et $\{m_1, ..., m_k, m_1', ..., m_l'\} = \{n_1, ..., n_N\}$, on a $\sum_{i\in J_u}\lambda_i M_i = 0$. Supposons par l'absurde qu'un des λ_i est non nul, et soit u tel que $i \in J_u$. Parmi les $j \in J_u$ tels que $\lambda_j \neq 0$, choisissons en un j_0 tel que k_0 est maximal. On écrit $M_{j_0} = t_{m_1}...t_{m_{k_0}}m_1'...y_{m_{l_0}'}$. Alors le monôme $y_{n_1}^{-1}...y_{n_{k_0}}^{-1}y_{m_1'}...y_{m_{l_0}'}$ intervient dans la somme en provenant de M_{j_0}. Mais il ne peut provenir d'aucun autre des M_i : si c'était le cas pour un M_{j_1}, comme k_0 est maximal, on aurait $k_1 = k_0$, et le fait que $y_{n_1}^{-1}...y_{n_{k_0}}^{-1}y_{m_1'}...y_{m_{l_0}'}$ intervienne dans M_1 impliquerait que $M_1 = t_{m_1}...t_{m_{k_0}}y_{m_1'}...y_{m_{l_0}'} = M_0$. Donc dans $\sum_{i\in J_u}\lambda_i M_i$, le monôme $y_{n_1}^{-1}...y_{n_{k_0}}^{-1}y_{m_1'}...y_{m_{l_0}'}$ intervient avec la multiplicité λ_{j_0}. Donc $\lambda_{j_0} = 0$, contradiction. □

Lemme 33. *Le sous-groupe A de $\mathbb{Z}[y_m^{\pm}]_{m\in\mathbb{Z}}$ est stable par S_1, et le noyau de S_1 sur A est $Ker(S_1) \cap A = \mathbb{Z}[t_m]_{m\geq 0}$ avec pour $m \geq 0$, $t_m = y_m + y_{m+1}^{-1}$.*

Démonstration:

On voit d'après la définition de S_1 que pour $m \geq 0$, $S_1(y_m) \in A$ et $S_1(y_{m+1}^{-1}) \in A$. Or si $\alpha, \beta \in A$ sont tels que $S_1(\alpha) \in A$ et $S_1(\beta) \in A$, alors $S_1(\alpha\beta) = \alpha S_1(\beta) + \beta S_1(\alpha) \in A$. Et donc A est stable par S_1.

Remarquons que pour $m \geq 0$, on a bien $t_m = y_m + y_{m+1}^{-1} \in A$ et :

$$S_1(t_m) = y_m \prod_{i=1..m} y_i y_{i-1} - y_{m+1}^{-1} \prod_{i=1..m+1} y_i y_{i-1} = y_m \prod_{i=1..m} y_i y_{i-1} - y_m \prod_{i=1..m} y_i y_{i-1} = 0$$

ce qui donne la première inclusion.

Soit maintenant $P \in Ker(S_1) \cap A$. Décomposons P suivant la base des monômes réduits de A décrite dans le lemme 32. Supposons par l'absurde que P n'est pas dans $\mathbb{Z}[t_m]_{m\geq 0}$. Alors au moins un y_m intervient dans un des monômes réduits de cette décomposition. Soit N le plus grand entier tel que y_N intervient et $a \in \mathbb{N}$ la plus grande puissance avec laquelle il intervient. En regroupant les monômes réduits dans lesquels y_N^a intervient, on obtient une écriture $P = y_N^a Q + R$ avec Q, R des combinaisons $\mathbb{Z}$-linéaires de monômes réduits tels que y_N n'intervient pas dans Q, et aucun des monômes de R est factorisable pas y_N^a. Sous cette forme, par définition des monômes réduits, t_{N-1} n'intervient pas dans Q. De plus Q est non nul. Alors :

$$\begin{aligned}0 &= S_1(P) = S_1(y_N^a)Q + y_N^a S_1(Q) + S_1(R)\\ &= aS_1(y_N)y_N^{a-1}Q + y_N^a S_1(Q) + S_1(R)\\ &= a(y_N \prod_{j=1..N} y_j y_{j-1})y_N^{a-1}Q + y_N^a S_1(Q) + S_1(R)\\ &= a(y_N^2 y_{N-1} \prod_{j=1..N-1} y_j y_{j-1})y_N^{a-1}Q + y_N^a S_1(Q) + S_1(R)\\ &= ay_N^{a+1} y_{N-1} \prod_{j=1..N-1} y_j y_{j-1} Q + y_N^a S_1(Q) + S_1(R)\\ &= A_0 + A_1 + A_2\end{aligned}$$

Remarquer que, comme les $S_1(t_m) = 0$, pour un monôme réduit on a :

$$S_1(t_{m_1}...t_{m_k} y_{m'_1}...y_{m'_l}) = \sum_{j=1..l} t_{m_1}...t_{m_k} y_{m'_1}...S_1(y_{m'_j})...y_{m'_l}$$

Ainsi comme les y_m de Q vérifient $m < N$, Y_N n'intervient pas dans $S_1(Q)$ et aucun des monômes réduits de A_2 n'est divisible par y_N^{a+1}. De même les monômes réduits de R ne sont pas factorisables par y_N^a, les autres y_m donnent des $S_1(y_m) = y_m \prod_{i=1..m} y_i y_{i-1}$ avec $m < N$, et $S_1(y_N^{a-1}) = (a-1)y_N^a \prod_{j=1..N-1} y_j y_{j-1}$, donc les monômes réduits de A_3 ne sont pas divisibles par y_m^{a+1}. Donc $A_1 = -A_2 - A_3$ est combinaison $\mathbb{Z}$-linéaire de monômes réduits qui ne sont pas divisibles par y_N^{a+1}. Mais comme t_{N-1} n'intervient pas dans Q, en décomposant $y_{N-1} \prod_{j=1..N-1} y_j y_{j-1} Q$ sur la base des monômes réduits, ces monômes ne font pas intervenir t_{N-1}, et donc en les multipliant chacun par ay_N^{a+1}, on obtient la décomposition de A_1 sur la base. Donc A_1 est combinaison $\mathbb{Z}$-linéaire de monômes réduits divisibles par y_N^{a+1}. Contradiction. $\square$

7.1.4 L'image de χ_q est le noyau de S

Théorème 48. *L'image de χ_q est le noyau de S.*

L'enjeu de cette section est la démonstration de ce théorème. Pour $x \in \mathbb{C}^*$, et $x \in (\mathbb{C}^*/q^{2\mathbb{Z}})$, on note $Ker(S)^{(x)} = Ker(S) \cap \mathcal{Y}^{(x)}$.

Lemme 34. *On a l'isomorphisme canonique de $\mathbb{Z}$-modules, qui de plus est naturel et qu'on notera par une égalité :*

$$Ker(S) = \bigotimes_{x\in(\mathbb{C}^*/q^{2\mathbb{Z}})} Ker(S)^{(x)}$$

Démonstration:

Un élément $P \in \bigotimes_{x\in(\mathbb{C}^*/q^{2\mathbb{Z}})} Ker(S)^{(x)}$ est, vu dans $\mathcal{Y}$, une combinaison $\mathbb{Z}$-linéaire de produits de la forme $y_1.y_2...y_m$ avec chaque $y_i \in Ker(S)^{(x_i)}$ pour un x_i, soit $S(y_i) = 0$. Alors en appliquant la formule du lemme 28, on obtient :

$$S(y_1.y_2...y_m) = \sum_{k=1..m} y_1..y_{k-1}y_{k+1}..y_m.S(y_k) = 0$$

et donc $S(P) = 0$, ce qui donne la première inclusion :

$$\bigotimes_{x\in(\mathbb{C}^*/q^{2\mathbb{Z}})} Ker(S)^{(x)} \subset ker(P)$$

Soit maintenant $P \in \ker(S)$. Considérons un $a \in \mathbb{C}^*$ tel que Y_a ou Y_a^{-1} intervient dans l'écriture de P. On peut écrire P sous la forme d'une combinaison $\mathbb{Z}$-linéaire de monômes M. Chaque monôme M peut être mis sous la forme d'un produit $M = QR$, avec Q monôme ne faisant intervenir que des $Y_{aq^{2m}}$ $(m \in \mathbb{Z})$, et R monôme ne faisant intervenir que des Y_b, avec $b \in (\mathbb{C}^* - aq^{2\mathbb{Z}})$. En regroupant les monômes de même facteur Q, on obtient une écriture $P = \sum_k Q_k R_k$ avec les Q_k monômes distincts deux à deux ne faisant intervenir que des $Y_{aq^{2m}}$ $(m \in \mathbb{Z})$, et les R_k des $\mathbb{Z}$-polynômes en les variables Y_b, avec $b \in (\mathbb{C}^* - aq^{2\mathbb{Z}})$. Alors la formule du lemme 28 donne :

$$0 = S(P) = \sum_k (Q_k.S(R_k) + R_k.S(Q_k))$$

Mais d'après la démonstration du lemme 27, les $\tilde{S}(Q_k) \in \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} \mathcal{Y}.S_{aq^{2m}}$ et les $\tilde{S}(R_k) \in \bigoplus_{b\in\mathbb{C}^*-q^{2\mathbb{Z}}} \mathcal{Y}.S_b$, et donc :

$$S(Q_k) \in \mathcal{Y}.S_a \text{ et } S(R_k) \in \bigoplus_{b\in(\mathbb{C}^*/q^{2\mathbb{Z}})-aq^{2\mathbb{Z}}} \mathcal{Y}.S_b$$

Mais comme d'après le lemme 26, $\mathcal{Y}_1 = (\mathcal{Y}.S_a) \bigoplus (\bigoplus_{b\in(\mathbb{C}^*/q^{2\mathbb{Z}})-aq^{2\mathbb{Z}}} \mathcal{Y}.S_b)$, la nullité de $S(P)$ entraîne :

$$\sum_k Q_k.S(R_k) = \sum_k R_k.S(Q_k) = 0$$

Décomposons sur la somme directe $\bigoplus_{b\in(\mathbb{C}^*/q^{2\mathbb{Z}})-aq^{2\mathbb{Z}}} \mathcal{Y}.S_b$ les $S(R_k) = \sum_{b\in(\mathbb{C}^*/q^{2\mathbb{Z}})-aq^{2\mathbb{Z}}} \lambda_{k,b}.S_b$. D'après la démonstration du lemme 27, les $\lambda_{k,b} \in \mathbb{Z}[Y_c]_{c\in\mathbb{C}^*-aq^{2\mathbb{Z}}}$. Alors $0 = \sum_{k,b} Q_k\lambda_{k,p}.S_b = \sum_b(\sum_k \lambda_{k,b}Q_k).S_b$ et pour chaque b, $\sum_k \lambda_{k,b}Q_k = 0$ dans $\mathcal{Y}$. Comme les monômes $Q_k \in \mathbb{Z}[Y_{aq^{2m}}]_{m\in\mathbb{Z}}$ sont distincts et que les $\lambda_{k,b} \in \mathbb{Z}[Y_c]_{c\in\mathbb{C}^*-aq^{2\mathbb{Z}}}$, on a $\lambda_{k,b} = 0$ pour tout k, b. Et donc $S(R_k) = 0$, soit :

$$R_k \in Ker(S)^{(\neq a)} = Ker(S) \cap \mathbb{Z}[Y_c]_{c\in\mathbb{C}^*-aq^{2\mathbb{Z}}} = Ker(S)^{(\neq a)}$$

Considérons à présent l'égalité $\sum_k R_k.S(Q_k) = 0$. On a déjà vu que $S(Q_k) \in \mathcal{Y}.S_a$. On peut être plus précis : d'après la démonstration du lemme 27, les $\tilde{S}(Q_k) \in \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} \mathcal{Y}^{(a)}.S_{aq^{2m}}$. Mais comme dans $\mathcal{Y}_1$, $S_{aq^{2m}} \in \mathcal{Y}^{(a)}.S_a$, on a $S(Q_k) \in \mathcal{Y}^{(a)}.S_a$ et on peut définir $q_k \in \mathcal{Y}^{(a)}$ tel que $S(Q_k) = q_k.S_a$. On a ainsi $(\sum_k R_kq_k).S_a = 0$ et $\sum_k R_kq_k = 0$. Comme $Ker(S)^{(\neq a)}$ est un sous $\mathbb{Z}$-module du $\mathbb{Z}$-module libre $\mathcal{Y}$, on peut considérer une $\mathbb{Z}$-base $(K_l)_l$ de $Ker(S)^{(\neq a)}$. Décomposons les R_k sur cette base $R_k = \sum_l \lambda_{lk}K_l$ avec les $\lambda_{lk} \in \mathbb{Z}$. On obtient $0 = \sum_{k,l} \lambda_{lk}K_lQ_kq_k = \sum_l K_l \sum_k \lambda_{lk}Q_kq_k$. Posons :

$$\tilde{Q}_l = \sum_k \lambda_{lk}Q_k \in \mathcal{Y}^{(a)} \text{ et } \hat{Q}_l = \sum_k \lambda_{lk}Q_kq_k \in \mathcal{Y}^{(a)}$$

On a $S(\tilde{Q}_l) = \hat{Q}_l.S_a$ et $\sum_l K_l\hat{Q}_l = 0$. Considèrons une $\mathbb{Z}$-base $(L_u)_u$ de $Ker(S)^{(a)}$ sous $\mathbb{Z}$-module de $\mathcal{Y}$ et décomposons les $\hat{Q}_l = \sum_l \mu_{lu}L_u$ sur la base des L_u avec les $\mu_{lu} \in \mathbb{Z}$. On a $0 = \sum_l \mu_{lu}K_lL_u$. Comme $Ker(S)^{(\neq a)} \otimes Ker(S)^{(a)} \subset \mathcal{Y}^{(\neq a)} \otimes \mathcal{Y}^{(a)} = \mathcal{Y}$, la famille $(K_lL_u)_{l,u}$ de $Ker(S)$ est $\mathbb{Z}$-libre. Ainsi les $\mu_{lu} = 0$ et les $\hat{Q}_l = 0$ et les $\tilde{Q}_l \in Ker(a)$. Mais :

$$P = \sum_k R_kQ_k = \sum_{k,l} \lambda_{lk}K_l = \sum_l K_l \sum_k \lambda_{lk}Q_k = \sum_l K_l\tilde{Q}_l$$

avec les $K_l \in Ker(S)^{(\neq a)}$ et les $\tilde{Q}_l \in Ker(S)^{(a)}$, soit :

$$P \in Ker(S)^{(\neq a)} \otimes Ker(S)^{(a)}$$

On recommence ensuite pour les $K_l \in Ker(S)^{\neq a}$, avec un $b \neq a$, et on obtient avec des notations évidentes $P \in Ker(S)^{\neq a,b} \otimes Ker(S)^{(a)} \otimes Ker(S)^{(b)}$. Comme un nombre fini de variables Y_a interviennent dans P, cet algorithme sera terminé après un nombre fini d'étape, et on obtient l'autre inclusion. □

Lemme 35. *On a* $Ker(S)^{(1)} = \mathbb{Z}[Y_{q^{2m}} + Y_{q^{2m+2}}^{-1}]_{m\in\mathbb{Z}}$.

Démonstration:

La première inclusion $\mathbb{Z}[Y_{q^{2m}} + Y_{q^{2m+2}}^{-1}]_{m\in\mathbb{Z}} \subset Ker(S)^{(1)}$ est claire : pour $m \in \mathbb{Z}$,

$$S(Y_{q^{2m}} + Y_{q^{2m+2}}^{-1}) = Y_{q^{2m}}.S_{q^{2m}} - Y_{q^{2m+2}}^{-1}.S_{q^{2m+2}} = Y_{q^{2m}}(S_{q^{2m}} - A_{q^{2m+1}}^{-1}.S_{q^{2m+2}}) = 0$$

puis la propriété multiplicative de $S(\alpha\beta) = \alpha.S(\beta) + \beta.S(\alpha)$ montre que le noyau de S est un sous-anneau de $\mathcal{Y}$. Notons ensuite que $\mathcal{Y}^{(1)} \simeq \mathbb{Z}[y_m]_{m\in\mathbb{Z}}$ en identifiant $Y_{q^{2m}}^{\pm}$ et $y_m^{\pm}$ pour $m \in \mathbb{Z}$. Soit ensuite $\mathcal{Y}_1^{(1)}$ le sous-groupe de $\mathcal{Y}_1$ engendré par les $\mathcal{Y}^{(1)}.S_{q^{2l}}$ $(l \in \mathbb{Z})$. C'est en particulier un sous $\mathcal{Y}^{(1)}$-module de $\mathcal{Y}_1$. Par définition de $\mathcal{Y}_1$, $\mathcal{Y}_1^{(1)}$

est le $\mathcal{Y}^{(1)}$-module défini par les générateurs $S_{q^{2l}}$ ($l \in \mathbb{Z}$) et les relations $S_{q^{2l+1}} = Y_{q^{2l}}Y_{q^{2(l+1)}}.S_{q^{2l}}$. En identifiant $Y_{q^{2l}}$ avec y_l et $S_{q^{2l}}$ avec s_l, on obtient l'isomorphisme de groupes :

$$\mathcal{Y}_1^{(1)} \simeq \bigoplus_{l\in\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[y_m^{\pm}]_{m\in\mathbb{Z}}.s_l/(\mathbb{Z}[y_m^{\pm}]_{m\in\mathbb{Z}}.(s_m - y_m y_{m-1} s_{m-1})) = G$$

On voit que $S(\mathcal{Y}^{(1)}) \subset \mathcal{Y}_1^{(1)}$: on a $S(Y_{q2m}^{\pm}) = \pm Y_{q^{2m}}^{\pm}.S_{q^{2m}} \in \mathcal{Y}_1^{(1)}$, puis si $\alpha, \beta \in \mathcal{Y}^{(1)}$ sont tels que $S(\alpha) \in \mathcal{Y}_1^{(1)}$ et $S(\beta) \in \mathcal{Y}_1^{(1)}$, alors $S(\alpha\beta) = \alpha.S(\beta) + \beta.S(\alpha) \in \mathcal{Y}_1^{(1)}$ comme $\mathcal{Y}_1^{(1)}$ est un sous $\mathcal{Y}^{(1)}$-module de $\mathcal{Y}_1$. Le morphisme de groupes $S : \mathcal{Y}^{(1)} \to \mathcal{Y}_1^{(1)}$ s'identifie donc à un morphisme de groupes

$$T : \mathbb{Z}[y_m]_{m\in\mathbb{Z}} \to G = (\bigoplus_{l\in\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[y_m^{\pm}]_{m\in\mathbb{Z}}.s_l)/(\bigoplus_{l\in\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[y_m^{\pm}]_{m\in\mathbb{Z}}.(s_l - y_l y_{l-1} s_{l-1}))$$

tel que pour $m \in \mathbb{Z}$, $T(y_m^{\pm}) = \pm y_m^{\pm}.s_m$ et pour $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[y_m]_{m\in\mathbb{Z}}$, $T(\alpha\beta) = \alpha.T(\beta) + \beta.T(\alpha)$. Ensuite $\mathbb{Z}[Y_{xq^{2m}} + Y_{xq^{2m+2}}^{-1}]_{m\in\mathbb{Z}} \subset \mathcal{Y}^{(1)}$ s'identifie à $\mathbb{Z}[y_m + y_{m+1}^{-1}]_{m\in\mathbb{Z}} \subset \mathcal{Y}^{(1)} \subset G$. Il nous suffit donc de montrer que $Ker(T) = \mathbb{Z}[y_m + y_{m+1}^{-1}]_{m\in\mathbb{Z}}$.

Dans G, on a pour $m \geq 0$:

$$s_m = y_m y_{m-1}.s_{m-1} = \prod_{j=1..m} y_j y_{j-1}.s_0$$

et pour $m < 0$:

$$s_m = y_{m+1}^{-1} y_m^{-1}.s_{m+1} = \prod_{j=0..m+1} y_j^{-1} y_{j-1}^{-1}.s_0$$

Donc $G = \mathbb{Z}[y_m^{\pm}]_{m\in\mathbb{Z}}.s_0 \simeq \mathbb{Z}[y_m^{\pm}]_{m\in\mathbb{Z}}$. On peut ainsi identifier T avec un morphisme de groupes $S_1 : \mathbb{Z}[y_m^{\pm}]_{m\in\mathbb{Z}} \to \mathbb{Z}[y_m^{\pm}]_{m\in\mathbb{Z}}$. Celui-ci vérifie :

$$S_1(y_m^{\pm}) = \pm y_m^{\pm}.s_m = \pm y_m^{\pm} \prod_{j=1..m} y_j y_{j-1}.s_0 = \pm y_m^{\pm} \prod_{j=1..m} y_j y_{j-1} \text{ pour } m \geq 0$$

$$S_1(y_m^{\pm}) = \pm y_m^{\pm}.s_m = \pm y_m^{\pm} \prod_{j=0..m+1} y_j^{-1} y_{j-1}^{-1}.s_0 = \pm y_m^{\pm} \prod_{j=0..m+1} y_j^{-1} y_{j-1}^{-1} \text{ pour } m < 0$$

Comme les identifications précédentes sont aussi valables pour les structures de $\mathbb{Z}[y_m^{\pm}]_{m\in\mathbb{Z}}$-module, on a pour $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[y_m^{\pm}]_{m\in\mathbb{Z}}$:

$$S_1(\alpha\beta) = \alpha S_1(\beta) + \beta S_1(\alpha)$$

On retrouve ainsi l'application S_1 du lemme 31, ce qui nous donne d'après le lemme 33 $Ker(S_1) \cap A = \mathbb{Z}[t_m]_{m\geq 0}$. Ainsi on a :

$$Ker(T) \cap \mathbb{Z}[y_m, y_{m+1}^{-1}]_{m\geq 0} = \mathbb{Z}[y_m + y_{m+1}^{-1}]_{m\geq 0}$$

Considérons à présent pour $k \in \mathbb{Z}$ le morphisme d'anneaux $\phi_k : \mathbb{Z}[y_m^{\pm}]_{m\in\mathbb{Z}} \to \mathbb{Z}[y_m^{\pm}]_{m\in\mathbb{Z}}$ défini sur les générateurs par $\phi_k(y_m^{\pm}) = y_{m+k}^{\pm}$ ($m \in \mathbb{Z}$), et le morphisme de groupes $\psi_k : G \to G$ défini sur les générateurs par $\psi_k(\alpha.s_m) = \phi_k(\alpha).s_{m+k}$ ($m \in \mathbb{Z}, \alpha \in \mathbb{Z}[y_m^{\pm}]_{m\in\mathbb{Z}}$). Considérons alors le diagramme de groupes et morphismes de groupes suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[y_m^{\pm}]_{m\in\mathbb{Z}} & \xrightarrow{T} & G \\ \downarrow \phi_k & & \downarrow \psi_k \\ \mathbb{Z}[y_m^{\pm}]_{m\in\mathbb{Z}} & \xrightarrow{T} & G \end{array}$$

Il est commutatif. En effet pour $m \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\psi_k(T(y_m^{\pm})) = \psi_k(\pm y_m.s_m) = \pm y_{m+k}^{\pm}.s_{m+k} = T(y_{m+k}^{\pm}) = T(\phi_k(y_m^{\pm}))$$

puis si $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[y_m^{\pm}]_{m\in\mathbb{Z}}$ sont tels que $\psi_k(T(\alpha)) = T(\phi_k(\alpha))$ et $\psi_k(T(\beta)) = T(\phi_k(\beta))$, alors comme ϕ_k est aussi un morphisme d'anneaux :

$$\begin{aligned} \psi_k(T(\alpha\beta)) &= \psi_k(\alpha.T(\beta) + \beta.T(\alpha)) \\ &= \phi_k(\alpha).\psi_k(T(\beta)) + \phi_k(\beta).\psi_k(T(\alpha)) \\ &= \phi_k(\alpha).T(\phi_k(\beta)) + \phi_k(\beta).T(\phi_k(\alpha)) \\ &= T(\phi_k(\alpha)\phi_k(\beta)) \\ &= S^{(x)}(\phi_k(\alpha\beta)) \end{aligned}$$

Soit à présent $y \in Ker(T)$. Pour un $k \geq 0$ assez grand, on a $\phi_k(x) \in \mathbb{Z}[y_m, y_{m+1}^{-1}]_{m\geq 0}$. Mais $T(\phi_k(x)) = \psi_k(T(x)) = 0$ et :

$$\phi_k(x) \in Ker(T) \cap \mathbb{Z}[y_m, y_{m+1}^{-1}]_{m\geq 0} = \mathbb{Z}[y_m + y_{m+1}^{-1}]_{m\geq 0}$$

Donc :

$$x \in \phi_{-k}(\mathbb{Z}[y_m + y_{m+1}^{-1}]_{m\geq 0}) \subset \mathbb{Z}[y_m + y_{m+1}^{-1}]_{m\in\mathbb{Z}}$$

□

Lemme 36. *Pour $x \in \mathbb{C}^*$, on a $Ker(S)^{(x)} = \mathbb{Z}[Y_{xq^{2m}} + Y_{xq^{2m+2}}^{-1}]_{m\in\mathbb{Z}}$.*

Démonstration:

Soit $x \in \mathbb{C}^*$. Alors on a un isomorphisme de groupes $f : \mathcal{Y}^{(1)} \to \mathcal{Y}^{(x)}$ obtenu en identifiant $Y_{q^{2m}}^{\pm}$ et $Y_{xq^{2m}}^{\pm}$ pour $m \in \mathbb{Z}$. Soit ensuite $\mathcal{Y}_1^{(x)}$ le sous-groupe de $\mathcal{Y}_1$ engendré par les $\mathcal{Y}^{(x)}.S_{xq^{2l}}$ ($l \in \mathbb{Z}$). C'est en particulier un sous $\mathcal{Y}^{(x)}$-module de $\mathcal{Y}_1$. On a un isomorphisme de groupes $g : \mathcal{Y}_1^{(1)} \to \mathcal{Y}_1^{(x)}$ obtenu en identifiant $a.S_{q^{2m}}$ et $f(a).S_{xq^{2m}}$ pour $a \in \mathcal{Y}^{(1)}$ et $m \in \mathbb{Z}$. On voit que $S(\mathcal{Y}^{(x)}) \subset \mathcal{Y}_1^{(x)}$: on a $S(Y_{xq2m}^{\pm}) = \pm Y_{xq^{2m}}^{\pm}.S_{xq^{2m}} \in \mathcal{Y}_1^{(x)}$, puis si $\alpha, \beta \in \mathcal{Y}^{(x)}$ sont tels que $S(\alpha) \in \mathcal{Y}_1^{(x)}$ et $S(\beta) \in \mathcal{Y}_1^{(x)}$, alors $S(\alpha\beta) = \alpha S(\beta) + \beta S(\alpha) \in \mathcal{Y}_1^{(x)}$ comme $\mathcal{Y}_1^{(x)}$ est un sous $\mathcal{Y}^{(x)}$-module de $\mathcal{Y}_1$. Notons $S^{(x)} : \mathcal{Y}^{(x)} \to \mathcal{Y}_1^{(x)}$ et $S^{(1)} : \mathcal{Y}^{(1)} \to \mathcal{Y}_1^{(1)}$ les applications induites par S. Considérons le diagramme de groupes et morphismes de groupes suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y}^{(1)} & \xrightarrow{S^{(1)}} & \mathcal{Y}_1^{(1)} \\ \downarrow f & & \downarrow g \\ \mathcal{Y}^{(x)} & \xrightarrow{S^{(x)}} & \mathcal{Y}_1^{(x)} \end{array}$$

Il est commutatif : en effet pour $m \in \mathbb{Z}$, on a :

$$g(S^{(1)}(Y_{q^{2m}}^{\pm})) = g(\pm Y_{q^{2m}}^{\pm}.S_{q^{2m}}) = \pm Y_{xq^{2m}}^{\pm}.S_{xq^{2m}} = S^{(x)}(Y_{xq^{2m}}^{\pm}) = S^{(x)}(f(Y_{q^{2m}}^{\pm}))$$

puis si $\alpha, \beta \in \mathcal{Y}^{(1)}$ sont tels que $g(S^{(1)}(\alpha)) = S^{(x)}(f(\alpha))$ et $g(S^{(1)}(\beta)) = S^{(x)}(f(\beta))$, alors comme f est aussi un morphisme d'anneaux :

$$\begin{aligned} g(S^{(1)}(\alpha\beta)) &= g(\alpha.S^{(1)}(\beta) + \beta.S^{(1)}(\alpha)) \\ &= f(\alpha).g(S^{(1)}(\beta)) + f(\beta).g(S^{(1)}(\alpha)) \\ &= f(\alpha).S^{(x)}(f(\beta)) + f(\beta).S^{(x)}(f(\alpha)) \\ &= S^{(x)}(f(\alpha)f(\beta)) \\ &= S^{(x)}(f(\alpha\beta)) \end{aligned}$$

En conséquence, pour $y \in \mathcal{Y}^{(1)}$, on a $S^{(1)}(y) = 0 \Leftrightarrow g(S^{(1)}(y)) = 0 \Leftrightarrow S^{(x)}(f(x)) = 0$ et donc $f(Ker(S^{(1)})) = Ker(S^{(x)})$. En appliquant le lemme 35, on a :

$$Ker(S^{(x)}) = f(Ker(S^{(1)})) = f(\mathbb{Z}[Y_{q^{2m}} + Y_{q^{2m+2}}^{-1}]_{m\in\mathbb{Z}}) = \mathbb{Z}[Y_{xq^{2m}} + Y_{xq^{2m+2}}^{-1}]_{m\in\mathbb{Z}}$$

□

On est à présent en mesure de démontrer le théorème 48 :

Démonstration:

On obtient en appliquant les lemmes 29, 30 et 36 :

$$Ker(S) = \bigotimes_{x\in(\mathbb{C}^*/q^{2\mathbb{Z}})} Ker(S)^{(x)} = \bigotimes_{x\in(\mathbb{C}^*/q^{2\mathbb{Z}})} \mathbb{Z}[Y_{xq^{2m}} + Y_{xq^{2m+2}}^{-1}]_{m\in\mathbb{Z}} = Im(\chi_q)$$

□

7.2 Structure des q-caractères dans le cas général

À partir de maintenant on s'intéresse au cas général avec $\hat{\mathfrak{g}}$ une algèbre affine non-tordue. On note $\mathcal{Y}$ l'anneau commutatif $\mathbb{Z}[Y_{a,i}]_{a\in\mathbb{C}^*,i\in I}$.

7.2.1 Les monômes $A_{i,a}$

On pose pour $i \in I$ et $a \in \mathbb{C}^*$:

$$A_{i,a}^{\pm} = k_i^{-1} e^{\mp(q-q^{-1}) \sum\limits_{m>0} h_{i,-m} z^m a^m} = \Phi_i^-(z^{-1}a^{-1}) \in \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{h}})[[z]]$$

Lemme 37. *On a $A_{i,a}^{\pm} \in \mathcal{Y}$, et la formule :*

$$A_{i,a} = Y_{i,aq_i} Y_{i,aq_i^{-1}} (\prod_{j/C_{j,i}=-1} Y_{j,a}^{-1})(\prod_{l/C_{l,i}=-2} Y_{l,aq}^{-1} Y_{l,aq^{-1}}^{-1})(\prod_{m/C_{m,i}=-3} Y_{m,aq^2}^{-1} Y_{m,a}^{-1} Y_{m,aq^{-2}}^{-1})$$

avec $C = (C_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice de Cartan de $\mathfrak{g}$.

De plus le Λ-poids de $A_{i,a}$ dans $\mathcal{Y}$ est α_i.

Démonstration (grandes lignes):

Comme $\tilde{h}_{i,-m} = \sum\limits_{j \in I} \tilde{C}_{ji}(q^m) h_{j,m}$ et $\tilde{C}(x)$ est la matrice inverse de $C(x)$, on a $h_{j,m} = \sum\limits_{i \in I} C_{ij}(q^m) \tilde{h}_{i,-m}$. En se rappelant que $C_{ij}(q) = (q_i + q_i^{-1})\delta_{ij} + (1 - \delta_{ij})[C_{ij}]_q$ on obtient la formule en séparant les facteurs suivant la valeur de C_{ij}.

Le poids de $A_{i,a}$ est alors, en remarquant que $C_{ii} = 2$ car C est la matrice de Cartan de $\mathfrak{g}$:

$$2\omega_i - \sum_{j/C_{ji}=-1} \omega_j - 2 \sum_{k/C_{ki}=-2} \omega_k - 3 \sum_{l/C_{li}=-3} \omega_l = \sum_j C_{ji} \omega_j$$

Mais pour $l \in I$, on a :

$$(\sum_j C_{ji} \omega_j, \alpha_l) = \sum_j C_{ji} (\omega_j, \alpha_l) = \sum_j \frac{2(\alpha_j, \alpha_i)}{(\alpha_j, \alpha_j)} \delta_{j,l} r_j = (\alpha_l, \alpha_i)$$

et donc $\sum\limits_j C_{ji} = \alpha_i$. □

7.2.2 Les M' sont des monômes en $A_{i,c}^{\pm}$

Lemme 38. *Pour $V = V(P)$ un $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$-module de type 1 irréductible, v_P est un vecteur propre pour tous les $Y_{i,a}^{\pm} \in \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{h}})$, et il existe $Y_i^P(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ telle que :*

$$Y_{i,a}^{\pm}.v_P = Y_i^P(za)^{\pm} v_P$$

De plus v_P est un vecteur propre pour l'action de tout élément de $\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{h}})$.

Démonstration:

En effet $\mathbb{C}.v_P$ est un sous-espace caractéristique, et le poids associé et de multiplicité 1. Donc $\mathbb{C}.v_P$ est un sous-espace propre des $h_{i,m}, k_i$, et donc aussi des $Y_{i,a}^{\pm}$ et de tout élément de $\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{h}})$. □

On introduit les notations suivantes : pour $M = \prod\limits_{k=1..m} Y_{i_k,a_k}^{\epsilon_k} \in \mathcal{Y}$ un monôme, on pose :

$$M^P(z) = \prod_{k=1..m} Y_{i_k}^P(a_k z)^{\epsilon_k}$$

Pour $1 \leq l$, et P tel que $P_j(u) = 1 - u$ et $P_l(u) = 1$ si $l \neq j$, on note :

$$Y_i^{(j)}(z) = Y_i^P \text{ et } M^{(j)}(z) = M^P(z)$$

Lemme 39. *Pour un monôme $M = m_+ M'$ de $\chi_q(V(P))$ avec m_+ le monôme de plus haut poids de $\chi_q(V(P))$, on a ${M'}^Q(z) \in \mathbb{C}(z)$.*

Démonstration:

Soit $x \in V$ un vrai vecteur propre (il en existe car les Φ_i commutent) du sous-espace caractéristique correpondant au monôme M de $\chi_q(V)$ dans la correspondance établie dans le proposition 107. On a alors en notant $R_{im}K = \sum_{m\in\mathbb{Z},p} \sum x_{m,p} \otimes y_{m,p}$ adaptée à la $\mathbb{Z}$-graduation (c'est à dire avec $x_{m,p}$ de $\mathbb{Z}$-degré m) :

$$\begin{aligned}\hat{f}_V(R_{im}K).(x\otimes 1) &= \hat{f}_V(\sum_{m\in\mathbb{Z},p} x_{m,p}\otimes y_{m,p}).(x\otimes 1) = \sum_{m\in\mathbb{Z},p} z^m \pi_V(x_m)(x)\otimes y_m \\ &= \sum_{m\in\mathbb{Z},p} z^m \lambda_{m,p} x\otimes y_{m,p} = x\otimes(\sum_{m\in\mathbb{Z},p} z^m\lambda_{m,p}y_{m,p})\end{aligned}$$

avec $\lambda_{m,p} \in \mathbb{C}$ la valeur propre de $x_{m,p} \in \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{h}})$ sur x. Mais alors $(\sum z^m\lambda_m y_m) \in \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{h}})[[z]]$ est l'élément de trace correspondant à x lorsqu'on applique $\hat{Tr}_V$ à $\hat{f}_V(R_{im}K)$. D'après la proposition 107 cet élément de trace est le monôme M. On a donc :

$$\hat{f}_V(R_{im}K).(x\otimes 1) = x\otimes M \in V\otimes \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{h}})[[z]]$$

Mais pour la normalisation de la R-matrice, on a :

$$R_{V,W}(z) = (\pi_{v(z)}\otimes\pi_W)(R_{im}K) = (id\otimes\pi_W)\circ(\pi_{v(z)}\otimes id)(R_{im}K) = (id\otimes\pi_W)(f_V(R_{im}K))$$

On rappelle que d'après le théorème 39 on a une décomposition $R_{V,W}(z) = f_{V,W}(z)\bar{R}_{V,W}(z)$ avec $\bar{R}_{V,W}(z) \in End(V\otimes W)(z)$. En écrivant M sous la forme $M = (\prod_{i\in I}\prod_{k=1..n_i} Y_{i,a_k^{(i)}})M' = m_+M'$, on obtient :

$$\begin{aligned}f_{V,W}(z)\bar{R}_{V,W}(z).(x\otimes v_Q) &= R_{V,W}(z)(x\otimes v_Q) \\ &= (id\otimes\pi_W(M)).(x\otimes v_Q) \\ &= (x\otimes\pi_W(m_+M').v_Q)\end{aligned}$$

Mais dans le cas $x = v_P$, on a $M = m_+$, et ce qui précède donne en se rappelant que $\bar{R}_{V,W}.(v_P\otimes v_Q) = v_P\otimes v_Q$:

$$f_{V,W}(z)(v_P\otimes v_Q) = (v_P\otimes\pi_W(m_+).v_Q)$$

et donc $f_{V,W}(z) = m_+^Q(z)$. Revenons au cas M quelconque, et on obtient :

$$x\otimes\pi_W(m_+M').v_Q = x\otimes\pi_W(m_+)\pi_W(M').v_Q = {M'}^Q(z)x\otimes\pi_W(m_+).v_Q = f_{V,W}(z){M'}^Q(z)(x\otimes v_Q)$$

et donc :

$$f_{V,W}(z)\bar{R}_{V,W}(z).(x\otimes v_Q) = f_{V,W}(z){M'}^Q(z)(x\otimes v_Q)$$

Et comme $f_{V,W} \in \mathbb{C}[[z]]$ a un terme constant non nul, il est inversible dans $\mathbb{C}[[z]]$, et on obtient :

$$\bar{R}_{V,W}(z).(x\otimes v_Q) = {M'}^Q(z)(x\otimes v_Q)$$

et donc ${M'}^Q(z) \in \mathbb{C}(z)$ car $\bar{R}_{V,W}(z) \in End(V\otimes W)(z)$. □

Lemme 40. *Soit $(x_l)_l$ une famille de représentants des classes de $\mathbb{C}^*/q^{\mathbb{Z}}$. Pour un monôme $M \in \mathcal{Y}$ qu'on décompose suivant ces classes $M = \prod_l M_l$ avec $M_l \in \mathbb{Z}[Y^{\pm}_{i,x_lq^m}]_{i\in I,m\in\mathbb{Z}}$, pour tout $j \in I$ on a $M^{(j)} \in \mathbb{C}(z)$ si et seulement si $M_l^{(j)} \in \mathbb{C}(z)$ pour tous les l.*

Lemme 41. *Les $Y_{i,a}^{(j)} \in \mathbb{C}[[z]]$ peuvent être écrits formellement comme un produit infini de fractions rationelles dont les pôles et les zéros sont des puissances entières de Q.*

Démonstration (grandes lignes):

Pour ces deux lemmes on calcule explicitement les $Y_i^{(j)}(z)$ en utilisant la formule du lemme 37, en remarquant que $A_{i,a} = q_i^2\Phi_i^-(z^{-1}a^{-1})$ et en se rappelant que les valeurs propres des $\Phi_i^{\pm}$ sur v_Q sont connues. □

Lemme 42. *Un monôme $M \in \mathcal{Y}$ tel que pour tout $1 \leq j \leq n$, $M^{(j)} \in \mathbb{C}(z)$, est un produit de $A_{i,c}^{\pm}$.*

Démonstration (grandes lignes):

On peut se ramener au cas où M est de la forme $M = \prod_{k=1..p} Y^{\epsilon_k}_{i_k,aq^{l_k}}$ en utilisant le lemme 40. On sait que dans $\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{h}})[[z]]$:

$$Y_{i,a} = \tilde{k}_i^{-1} e^{-(q-q^{-1})\sum_{m>0}\tilde{h}_{i,-m}z^m a^m}$$

et en notant $\lambda_{i,m}^{(j)} \in \mathbb{C}$ la valeur propre de $\tilde{h}_{i,m}$ sur l'espace de plus haut poids de $V(P^{(j)})$, on a dans $\mathbb{C}[[z]]$:

$$ln(Y_i^{(j)}(az)q^{(\omega_j,\omega_i)}) = -(q-q^{-1})\sum_{m>0}\lambda_{i,-m}^{(j)}z^m a^m$$

Pour notre étude on obtient donc :

$$ln(\prod_{k=1..p} Y_{i_k}^{(j)}(aq^{l_k}z)^{\epsilon_k} q^{\epsilon_k(\omega_j,\omega_{i_k})}) = -(q-q^{-1})\sum_{m>0} z^m a^m \sum_{k=1..p}\lambda_{i,-m}^{(j)} q^{ml_k}\epsilon_k$$

Mais on sait que $\prod_{k=1..m} Y_{i_k}^{(j)}(aq^{l_k}z)^{\epsilon_k} = M^{(j)}(z)$ est le développement d'une fraction rationnelle. Notons la $A\prod_r(1-za_r)^{c_r}$ avec $a_r, A \in \mathbb{C}^*$ $c_r \in \mathbb{Z}$. Comme le terme de droite de la dernière égalité n'a pas de terme constant, on a $A\prod_{k=1..p} q^{\epsilon_k(\omega_j,\omega_{i_k})} = 1$. Le développement du logarithme est alors :

$$ln(\prod_r(1-za_r)^{c_r}) = \sum_r c_r ln(1-za_r) = -\sum_{r,m>0} c_r\frac{(za_r)^m}{m} = -\sum_{m>0}\frac{z^m}{m}\sum_r c_r a_r^m$$

En identifiant les termes :

$$(q-q^{-1})a^m \sum_{k=1..p}\lambda_{i,-m}^{(j)}q^{ml_k}\epsilon_k = \frac{1}{m}\sum_r c_r a_r^m$$

Mais chaque facteur $(1-za_r)^{c_r}$ provient d'un $Y_{i_k}^{(j)}(aq^{l_k}z)^{\epsilon_k}$, et donc d'après le lemme 41 a_r est de la forme $aq^{l_r}q^{j_r}$ avec $j_r \in \mathbb{Z}$. Ceci s'écrit :

$$(q-q^{-1})a^m \sum_{k=1..p}\lambda_{i,-m}^{(j)}q^{ml_k}\epsilon_k = \frac{a^m}{m}\sum_r c_r q^{(l_r+j_r)m}$$

En conséquence la valeur propre de $a^m \sum_{k=1..m}\epsilon_k \tilde{h}_{i_k,-m}q^{l_k m}$ est égale à $a^m\frac{\beta_j(q^m)}{m}$ avec $\beta_j(x)$ le polynôme en $x^{\pm}$ qui ne dépend pas de m :

$$\beta_j(x) = \sum_r c_r x^{(l_r+j_r)}$$

En posant :

$$\gamma_i(x) = \sum_{k=1..m}\epsilon_k x^{l_k}$$

on voit que la valeur propre de $(q-q^{-1})\sum_{i\in I}\tilde{h}_{i,-m}\gamma_i(q^m)$ est égale à $\frac{\beta_j(q^m)}{m}$.

Par définition des $\tilde{h}_{i,m} = \sum_{l\in I}\tilde{C}_{li}(q^m)h_{l,m}$, on a :

$$(q-q^{-1})\sum_{i\in I}\tilde{h}_{i,-m}\gamma_i(q^m) = (q-q^{-1})\sum_{i,l\in I}h_{l,-m}\tilde{C}_{li}(q^m)\gamma_i(q^m)$$

Mais on a déjà calculé dans le lemme 7 la valeur propre de $h_{l,-m}$ sur le vecteur de plus haut poids qui correspond au monôme $Y_{j,1}$ du q-caractère, à savoir $\frac{\delta_{l,j}[m]_{q_l}}{m}$. En conséquence :

$$\frac{\beta_j(q^m)}{m} = (q-q^{-1})\sum_{i,l\in I}\frac{\delta_{l,j}[m]_{q_l}}{m}\tilde{C}_{li}(q^m)\gamma_i(q^m)$$

$$\beta_j(q^m) = (q-q^{-1})\sum_{i\in I}[m]_{q_j}\tilde{C}_{ji}(q^m)\gamma_i(q^m) = \sum_{i\in I}(q^{mr_j}-q^{-mr_j})\tilde{C}_{ji}(q^m)\gamma_i(q^m)$$

Cette égalité étant vérifiée pour tout $m>0$, on a pour les polynômes de Laurent :

$$\beta_j(x) = \sum_{i\in I}(x^{r_j}-x^{-r_j})\tilde{C}_{ji}(x)\gamma_i(x)$$

En travaillant dans $\mathbb{C}(x)$, on peut alors écrire en prenant la combinaison linéaire $\sum\limits_{j\in I}(x^{r_j}-x^{-r_j})^{-1}C_{i_0 j}(x)$ et en se rappelant que $\tilde{C}C = Id$:

$$\sum_{j\in I} C_{i_0 j}(x)\frac{\beta_j(x)}{x^{r_j}-x^{-r_j}} = \sum_{i\in I}\delta_{ii_0}\gamma_i(x) = \gamma_{i_0}(x)$$

Maintenant il suffit de montrer que $\beta'_j(x) = \frac{\beta_j(x)}{x^{r_j}-x^{-r_j}} \in \mathbb{C}(x)$ est un polynôme de Laurent ; en effet la formule du lemme 37 montre que M est un produit de $A_{i,c}^{\pm}$ si et seulement si les polynômes de Laurent $\gamma_i(x)$ peuvent être écrit sous la forme $\gamma_i(x) = \sum\limits_k C_{ik}R_k(x)$ avec $R_k(x)$ polynôme de Laurent. La divisibilité de $\beta_j(x)$ par $x^{r_j}-x^{-r_j}$ s'obtient au cas par cas en regardant les valeurs des r_j en fonction de $\hat{\mathfrak{g}}$ et en utilisant le lemme 44. □

Théorème 49. *Soit $V(P)$ une représentation irréductible avec $P = (P_1, ..., P_n)$ donné par :*

$$P_i(u) = \prod_{k=1..n_i}(1-ua_k^{(i)})$$

Alors on a le q-caractère de $V(P)$ de la forme :

$$\chi_q(V(P)) = (\prod_{i\in I}\prod_{k=1..n_i} Y_{i,a_k^{(i)}})(1+\sum_p M'_p)$$

avec les M'_p des monômes en $A_{j,c}^{\pm}$, $j\in I, c\in\mathbb{C}^*$.

Démonstration:

Grâce au lemme 39 on peut appliquer le lemme 42 aux M'_p ce qui donne directement le résultat. □

7.2.3 Les homomorphismes τ_J

Pour $J\subset I$, on note $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})_J$ la sous-algèbre de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ engendrée par les $x_{i,m}^{\pm}$, $k_i^{\pm}$, $h_{i,r}$ pour $i\in J$, $m\in\mathbb{Z}$, $r\in\mathbb{Z}-\{0\}$. C'est une algèbre affine quantifiée, et on peut construire le morphisme de q-caractères :

$$\chi_{q,J} : Rep_r(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})_J) \to \mathbb{Z}[Y_{i,a}^{\pm}]_{i\in J, a\in\mathbb{C}^*}$$

On a $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})_J \subset \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ et on en déduit un morphisme d'anneaux $Rep_r(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})) \to Rep_r(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})_J)$.

Lemme 43. *On a le diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{array}{ccc} Rep_r(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})) & \xrightarrow{\chi_q} & \mathbb{Z}[Y_{i,a}^{\pm 1}]_{i\in I, a\in\mathbb{C}^*} \\ \downarrow res_J & & \downarrow \beta_J \\ Rep_r(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})_J) & \xrightarrow{\chi_{q,J}} & \mathbb{Z}[Y_{i,a}^{\pm 1}]_{i\in J, a\in\mathbb{C}^*} \end{array}$$

avec $\beta_J : \mathbb{Z}[Y_{i,a}^{\pm 1}]_{i\in I, a\in\mathbb{C}^*} \to \mathbb{Z}[Y_{i,a}^{\pm 1}]_{i\in J, a\in\mathbb{C}^*}$ le morphisme d'anneaux envoyant $Y_{i,a}^{\pm}$ sur lui-même si $i\in J$, et sur 1 sinon.

Démonstration:

Cosidérons $V\in Rep_r(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))$ qui est une représentation, et grâce à la proposition 107 décomposons le suivant les sous-espaces de Jordan $V = \sum\limits_r V_{M_r}$ avec les M_r monômes tels que $\chi_q(V) = \sum\limits_r n_{M_r}M_r$ ($n_{M_r}\in\mathbb{Z}$). Alors cette décomposition est aussi adaptée à la structure de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})_J$-module puisque $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{h}})_J \subset \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$. Chaque sous-espace V_{M_r} correspond donc à un monôme $M_{r,J}$ de $\chi_{q,J}(res_J(V))$. Il nous suffit donc de montrer que $M_{r,J} = \beta_J(M_r)$. Mais pour $i\in J$, on a les mêmes valeurs propres des $\Phi_i(u)$ vu pour la structure de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ ou de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})_J$-module, et donc les $Y_{i,a}^{\pm}$ qui d'après la proposition 107 codent ces valeurs propres sont les mêmes. Donc tout les $Y_{i,a}^{\pm}$ avec $i\in J$ de M_r se retrouvent dans $M_{r,J}$ avec la même multiplicité, ce qui signifie exactement $M_{r,J} = \beta_J(M_r)$. □

Posons $\overline{J} = I - J$, et considérons l'anneau :

$$\mathcal{Y}^{(J)} = \mathbb{Z}[Y_{i,a}^{\pm}, Z_{k,c}^{\pm}]_{i\in J, k\in\overline{J}, a\in\mathbb{C}^*, c\in\mathbb{C}^*}$$

On rappelle que la matrice $C(q)$ de format $n\times n$ à coefficients dans $\mathbb{C}(q)$ est définie par $C_{ij}(q) = (q_i+q_i^{-1})\delta_{ij} + (1-\delta_{ij})[C_{ij}]_q$ pour $1\leq i,j\leq n$. La matrice $C(q)$ est inversible pour $q\in\mathbb{C}^*$. On note $\tilde{C}(q)$ un inverse de $C(q)$.

Lemme 44. *On a une écriture*

$$\tilde{C}_{ij}(q) = \frac{\tilde{C}'_{ij}(q)}{d(q)}$$

avec $\tilde{C}'_{ij}(q), d(q) \in \mathbb{N}[[q, q^{-1}]]$. *De plus on a pour* $i, j \in I$, $deg(\tilde{C}'_{i,j}(q)) < deg(d(q))$.

Dans le lemme précédent, le degré est compris au sens des polynômes de Laurent, c'est à dire pour $p(x) = \sum_{m=-l..r} a_m x^m$ avec $-l < r$, $a_{-l} \neq 0, a_r \neq 0$ on a $deg(p) = r + l$.

Par exemple pour $\mathfrak{g}$ de type A_l, on peut prendre $d(q) = q^l + q^{l-2} + ... + q^{-l}$.

On considère la matrice diagonale $D(q) = (\delta_{ij}[r_i])_{i,j}$. Ses coefficients sont des polynômes de Laurent en q. Pour $1 \leq i, j \leq n$, il existe donc des $p_{i,j}(k) \in \mathbb{Z}$ presque tous nuls tels que :

$$(D(q)\tilde{C}'(q))_{i,j} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} p_{ij}(k) q^k \in \mathbb{C}[[h]]$$

Définition 68. *On définit le morphisme d'anneaux* $\tau_J : \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}^{(J)}$ *par :*

$$\tau_J(Y_{i,a}) = Y_{i,a} \prod_{j\in\overline{J}} \prod_{k\in\mathbb{Z}} Z_{j,aq^k}^{p_{ij}(k)} \text{ si } i \in J$$

$$\tau_J(Y_{i,a}) = \prod_{j\in\overline{J}} \prod_{k\in\mathbb{Z}} Z_{j,aq^k}^{p_{ij}(k)} \text{ si } i \in \overline{J}$$

Lorsque J est un singleton $\{j\}$, on note $\tau_J = \tau_j$.

Lemme 45. *Le morphisme d'anneaux* τ_J *est injectif.*

Démonstration (grandes lignes):

Comme la matrice $((D(q)\tilde{C}'(q))_{i,j})_{i,j\in\overline{J}}$ est inversible (puisque $\tilde{C}$ est non dégénérée et que $D(q)$ est diagonale à coefficients non nuls), il existe des $\tilde{p}_{ij}(k) \in \mathbb{Q}$ presque tous nuls tels que pour $i, l \in \overline{J}$:

$$\sum_{j\in\overline{J}} (\sum_{k\in\mathbb{Z}} p_{ij}(k) q^k)(\sum_{k'\in\mathbb{Z}} \tilde{p}_{jl}(k') q^{k'}) = \delta_{il}$$

On peut définir $\rho_J : \mathcal{Y}^{(J)} \to \mathcal{Y}$ telle que $\rho_J \circ \tau_J = id_{\mathcal{Y}}$ en posant :

$$\rho_J(Y_{i,a}) = Y_{i,a} \prod_{j,l\in\overline{J}} \prod_{k,k'\in\mathbb{Z}} Y_{l,aq^k q^{k'}}^{-\tilde{p}_{jl}(k')p_{ij}(k)} \text{ pour } i \in J \text{ et } a \in \mathbb{C}^*$$

$$\rho_J(Z_{j,c}) = \prod_{i\in\overline{J}} \prod_{k\in\mathbb{Z}} Y_{i,cq^k}^{\tilde{p}_{ji}(k)} \text{ pour } j \in \overline{J} \text{ et } c \in \mathbb{C}^*$$

En effet, on a alors pour $i \in \overline{J}$:

$$\begin{aligned}
\rho_J \circ \tau_J(Y_{i,a}) &= \rho_J(\prod_{j\in\overline{J}} \prod_{k\in\mathbb{Z}} Z_{j,aq^k}^{p_{ij}(k)}) = \prod_{j,l\in\overline{J}} \prod_{k,k'\in\mathbb{Z}} Y_{l,aq^k q^{k'}}^{\tilde{p}_{jl}(k')p_{ij}(k)} \\
&= \prod_{m\in\mathbb{Z}} \prod_{k+k'=m} \prod_{j,l\in\overline{J}} Y_{l,aq^m}^{\tilde{p}_{jl}(k')p_{ij}(k)} = \prod_{m\in\mathbb{Z}} \prod_{j,l\in\overline{J}} Y_{l,aq^m}^{\sum_{k+k'=m} \tilde{p}_{jl}(k')p_{ij}(k)} \\
&= \prod_{m\in\mathbb{Z}} \prod_{l\in\overline{J}} Y_{l,aq^m}^{\sum_{j\in\overline{J}} \sum_{k+k'=m} \tilde{p}_{jl}(k')p_{ij}(k)} = \prod_{m\in\mathbb{Z}} \prod_{l\in\overline{J}} Y_{l,aq^m}^{\delta_{i,l}\delta_{0,m}} = Y_{i,a}
\end{aligned}$$

et pour $i \in J$:

$$\rho_J \circ \tau_J(Y_{i,a}) = \rho_J(Y_{i,a} \prod_{j\in\overline{J}} \prod_{k\in\mathbb{Z}} Z_{j,aq^k}^{p_{ij}(k)}) = \rho_J(Y_{i,a}) \prod_{j,l\in\overline{J}} \prod_{k,k'\in\mathbb{Z}} Y_{l,aq^k q^{k'}}^{\tilde{p}_{jl}(k')p_{ij}(k)} = Y_{i,a}$$

□

Voici le résultat qui motive les τ_J :

Proposition 117. *Soit $V \in Rep_r(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))$ une représentation et écrivons $\tau_J(\chi_q(V))$ sous la forme :*

$$\tau_J(\chi_q(V)) = \sum_k P_k Q_k$$

avec les $P_k \in \mathbb{Z}[Y_{i,a}^{\pm 1}]_{i\in J, a\in\mathbb{C}^*}$, et les Q_k des monômes distincts dans $\mathbb{Z}[Z_{j,c}^{\pm 1}]_{j\in\overline{J}, c\in\mathbb{C}^*}$. Alors on peut décomposer $res_J(V)$ en une somme directe de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})_J$-modules $res_J(V) = \bigoplus_k V_k$ avec $\chi_{q,J}(V_k) = P_k$.

Démonstration (grandes lignes):

Remarquons d'abord qu'une telle écriture de $\tau_J(\chi_q(V))$ est toujours possible : on écrit chaque monôme comme produit d'un monôme de $\mathbb{Z}[Y_{i,a}^{\pm 1}]_{i\in J, a\in\mathbb{C}^*}$ et d'un monôme de $\mathbb{Z}[Z_{j,c}^{\pm 1}]_{j\in\overline{J}, c\in\mathbb{C}^*}$, on les regroupe suivant le monôme en $\mathbb{Z}[Z_{j,c}^{\pm 1}]_{j\in\overline{J}, c\in\mathbb{C}^*}$ et on factorise par ce monôme.

L'application τ_J a été construite de manière à ce que pour un monôme M de $\chi_q(V)$, avec pour image par τ_J :

$$\tau_J(M) = (\prod_{i\in J}\prod_{r=1..k_i} Y_{i,a_{ir}} \prod_{s=1..l_i} Y_{i,b_{is}}^{-1})(\prod_{k\in\overline{J}}\prod_{l=1..u_k} Z_{k,c_{kl}} \prod_{p=1..t_k} Z_{k,d_{kp}}^{-1})$$

on ait sur le sous-espace caractéristique associé de la proposition 107 les valeurs propres des $h_{i,m}$ pour $i \in J$, $m \in \mathbb{Z}^*$ égales à (voir le lemme 7) :

$$\alpha(i,m) = \frac{q_i^m - q_i^{-m}}{m(q-q^{-1})}(\sum_{r=1..k_i} a_{ir}^m - \sum_{t=1..l_i} b_{it}^m)$$

et les valeurs propres des $\tilde{h}_{i,m} = \sum_{j\in I} \tilde{C}_{ji}(q^m) h_{j,m}$ pour $i \in \overline{J}$, $m \in \mathbb{Z}^*$ égales à (toujours d'après le lemme 7) :

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}(i,m) &= \tfrac{[m]_q}{m} \sum_{j\in I} \tilde{C}_{ji}(q^m)[r_j]_{q^m}(\sum_{r=1..k_j}(a_{jr})^m - \sum_{s=1..l_j}(b_{js})^m) \\
&= \tfrac{[m]_q}{md(q^m)} \sum_{j\in I, k\in\mathbb{Z}} p_{j,i}(k)(\sum_{r=1..k_j}(a_{jr}q^k)^m - \sum_{s=1..l_j}(b_{js}q^k)^m) \\
&= \tfrac{[m]_q}{md(q^m)}(\sum_{l=1..u_i}(c_{il})^m - \sum_{p=1..t_i}(d_{ip})^m)
\end{aligned}$$

Considérons $\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{h}}_{\overline{J}})$ la sous-algèbre de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})'$ engendrée par les $\tilde{k}_i^{\pm}$, $\tilde{h}_{i,m}$ pour $i \in \overline{J}$ et $m \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Un vecteur x du sous-espace caractéristique associé à M peut ainsi être écrit formellement $x = y \otimes z$ avec l'action de $\mathcal{U}_q(\mathfrak{h})$ sur y donnée par les $\alpha(i,m)$ ($i \in J$) et l'action de $\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{h}}_{\overline{J}})$ sur z donnée par les $\tilde{\alpha}_{i,m}$ ($i \in \overline{J}$). Comme les sous-algèbres $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}_J)$ et $\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{h}}_{\overline{J}})$ commutent, V peut être ainsi écrit sous la forme (en tant que $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}_J) \otimes \mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{h}}_{\overline{J}})$-module) $V = \sum_k V_k \otimes W_k$ avec V_k un $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}_J)$-module tel que $\chi_{q,J}(V_k) = P_k$ et W_k un $\mathcal{U}_q(\tilde{\mathfrak{h}}_{\overline{J}})$-module correpondant à Q_k. Comme les Q_k sont des monômes tous distincts, les W_k sont de dimension 1 et tous distincts. Ainsi en tant que $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}_J)$-module, l'action sur le vecteur directeur d'un W_k est triviale, et $V = \bigoplus_k V_k$. □

On décompose en un polynôme de Laurent $d(q)[r_i]_q = \sum_{k\in\mathbb{Z}} s_i(k) q^k \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ et on pose pour $i \in \overline{J}$, $a \in \mathbb{C}^*$:

$$B_{i,a} = \prod_{k\in\mathbb{Z}} Z_{i,aq^k}^{s_i(k)} \in \mathcal{Y}^{(J)}$$

Lemme 46. *On a :*

$$\tau_J(A_{i,a}) = \beta_J(A_{i,a}) \text{ si } i \in J$$

$$\tau_J(A_{i,a}) = \beta_J(A_{i,a}) B_{i,a} \text{ si } i \in \overline{J}$$

Démonstration (grandes lignes):

On part de la formule du lemme 37, puis on mène le calcul en se rappelant que $\tilde{C}(q)C(q) = Id$ et donc $D(q)\tilde{C}'(q)C(q) = D(q)d(q)$. □

Lemme 47. *Considérons le diagramme :*

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{Y} & \xrightarrow{\tau_j} & \mathcal{Y}^{(j)} \\
\downarrow & & \downarrow \overline{A}_{j,x}^{-1} \\
\mathcal{Y} & \xrightarrow{\tau_j} & \mathcal{Y}^{(j)}
\end{array}$$

avec la flèche de droite la multiplication par $\bar{A}_{j,x}^{-1} \otimes 1 = \beta_j(A_{j,c})^{-1} \otimes 1$. Alors il existe une unique application $\mathcal{Y} \to \mathcal{Y}$ rendant le diagramme commutatif, et c'est la multiplication par $A_{j,x}^{-1}$.

Démonstration:

La commutativité du diagramme provient du lemme 46 : pour $x \in Yim$ on a :

$$\beta_j(A_{j,c})^{-1}\tau_j(x) = \tau_j(A_{j,c}^{-1})\tau_j(x) = \tau_j(A_{j,c}^{-1}x)$$

Ensuite pour obtenir l'unicité de l'application, considérons $\phi : \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}$ qui rend le diagramme commutatif. Alors pour $x \in \mathcal{Y}$ on a $\tau_j(\phi(x)) = \beta_j(A_{j,c})^{-1}\tau_j(x) = \tau_j(A_{j,c}^{-1}x)$, et par injectivité de τ_j vue dans le lemme 45, on a $\phi(x) = A_{j,c}^{-1}x$. □

7.2.4 Les M' sont des monômes en $A_{i,c}^{-1}$

Théorème 50. *Dans le théorème 49, les monômes M'_p ne font intervenir que des $A_{j,c}^{-1}$.*

Le résultat est connu pour $\mathcal{U}_q(s\hat{l}_2)$ dans le théorème 44. Il suffit de le montrer pour les représentations irréductibles fondamentales d'après le corollaire 7. On fait une démonstration par l'absurde. Soit alors pour $V = V_{\omega_{i_0}}(a_0)$ un monôme $m = Y_{i_0,a_0}M'$ de poids maximal parmi les monômes de $\chi_q(V)$ pour lesquels M' n'est pas un produit de $A_{i,c}^{-1}$. On note $m_+ = Y_{i_0,a_0}$ le monôme de plus haut poids de $\chi_q(V)$.

Lemme 48. *Le monôme m est dominant, c'est à dire qu'il peut être écrit comme produit de $Y_{i,a}$.*

Démonstration:

Supposons que le monôme m contient, sous forme réduite, un facteur $Y_{i,a}^{-1}$. Considérons $\tau_i(\chi_q(V))$ qui est une somme de monômes en $Y_{i,b}^{\pm}$ et $Z_{j,c}^{\pm}$ avec $b, c \in \mathbb{C}^*$ et $j \neq i$. En réunissant les monômes ayant les mêmes facteurs en $Z_{j,c}^{\pm}$, on obtient un écriture $\tau_i(\chi_q(V)) = \sum_p P_p N_p$ avec les Q_p des monômes en $Z_{j,c}^{\pm}$ $(j \neq i)$ disctincts et les $P_p \in \mathbb{Z}[Y_{i,b}^{\pm}]_{b\in\mathbb{C}^*}$. En appliquant la proposition 117 à cette écriture, on obtient $\tau_i(\chi_q(V)) = \sum_p \chi_{q,\{i\}}(V_p)N_p$ avec les V_p des $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}_{\{i\}})$-modules. Mais comme $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}_{\{i\}}) \simeq \mathcal{U}_{q_i}(s\hat{l}_2)$, et que le résultat est vrai dans le cas $s\hat{l}_2$, on connait la forme des $\chi_{q,\{i\}}(V_p)$, et on a une écriture :

$$\tau_i(\chi_q(V)) = \sum_p (m_p(1 + \sum_r \bar{M}_{r,p}))N_p$$

avec chaque m_p produit de $Y_{i,b}$ avec $b \in \mathbb{C}^*$ et chaque $\bar{M}_{r,p}$ produit de $Y_{i,cq^{-1}}^{-1}Y_{i,cq}^{-1} = \bar{A}_{i,c}^{-1}$. En conséquence les monômes m_pN_p ne contiennent pas $Y_{i,a}^{-1}$. Mais comme m contient $Y_{i,a}^{-1}$, par définition de τ_i le monôme $\tau_i(m)$ en $Y_{i,b}^{\pm}, Z_{j,c}^{\pm}$ contient aussi $Y_{i,a}^{-1}$. Donc $\tau_i(m)$ est l'un des $m_p\bar{M}_{r,p}N_p$ avec $\bar{M}_{r,p} \neq 1$, qu'on notera :

$$\tau_i(m) = m_{p_0}\bar{M}_{r_0,p_0}N_{p_0}$$

Mais comme les monômes de $\tau_i(\chi_q(V))$ correspondent bijectivement aux monômes de $\chi_q(V)$, on a un monôme m' de $\chi_q(V)$ tel que $\tau_i(m') = m_{p_0}N_{p_0}$. Or en utilisant le lemme 47 pour τ_i autant de fois qu'il y a de facteurs $\bar{A}_{i,c}^{-1}$ dans $\bar{M}_{r_0,p_0}$, on obtient :

$$\tau_i(m')\bar{M}_{r_0,p_0} = \tau_i(m'M_{r_0,p_0}) \in \mathcal{Y}^{(i)}$$

où $M_{r_0,p_0} \in \mathcal{Y}$ est obtenu à partir de $\bar{M}_{r_0,p_0}$ en changeant les $\bar{A}_{i,c}^{-1}$ en $A_{i,c}^{-1}$. On a donc :

$$\tau_i(m'M_{r_0,p_0}) = \tau_i(m')\bar{M}_{r_0,p_0} = m_{p_0}N_{p_0}\bar{M}_{r_0,p_0} = \tau_i(m)$$

Mais comme d'après le lemme 45 l'application τ_i est injective, on a $m = m'M_{r_0,p_0}$. Comme d'après le lemme 37 les $A_{j,c}^{-1}$ sont de poids $-\alpha_i$, le poids de m' est strictement plus grand que celui de m. Donc par hypothèse de maximalité du poids de m, on peut écrire $m' = m_+M''$ avec M'' un produit de $A_{k,c}^{-1}$. Mais alors $m = m_+M_{r_0,p_0}M'' = m_+M'$ et $M' = M_{r_0,p_0}M''$ est un produit de $A_{k,c}^{-1}$, et on obtient une contradiction. □

Lemme 49. *Si $A_{i,c}$ intervient dans M' avec $m = m_+M'$, alors pour $v \in V_m$, où V_m est le sous-espace caractéristique de V associé au monôme m par la proposition 107, on a $x_{j,r}^+.v = 0$ pour $j \in I - \{i\}$ et $r \in \mathbb{Z}$.*

Démonstration:

Considérons un tel $j \neq i$. On applique la proposition 117 avec $J = \{j\}$. On considère la décomposition $V = \bigoplus_k V'_k$ de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}_{\{j\}})$-modules. Mais dans l'énoncé de la proposition 117 on voit que V'_k correspond à un $P_k Q_k$ de $\tau_j(\chi_q(V))$ avec $Q_k \in \mathbb{Z}[Z^{\pm}_{l,c}]_{l\neq j, c\in\mathbb{C}^*}$ monôme. Donc V'_k est la somme directe de sous-espaces caractéristiques qui correspondent aux monômes produits de Q_k et d'un monôme de P_k. Alors comme v est dans un sous espace caratéristique, v est dans un des sous-espaces V'_{k_0}, avec en particulier $x^+_{j,r}.v \in V'_{k_0}$. De plus V'_{k_0} est la somme directe de sous-espaces caractéristiques $V_{m'_p}$ de V avec $\tau_j(m'_p) = \beta_j(m'_p)N$, où $N \in \mathbb{Z}[Z^{\pm}_{l,c}]_{l\neq j, c\in\mathbb{C}^*}$ est le monôme tel que $\tau_j(m) = \beta_j(m)N$. Or de manière générale on a en appliquant le lemme 46 et comme τ_j est un morphisme d'anneaux :

$$\begin{aligned}\tau_j(m_+\prod_k A^{\epsilon_k}_{i_k,c_k}) &= \tau_j(m_+)\tau_j(\prod_{k/i_k=j} A^{\epsilon_k}_{j,c_k})\tau_j(\prod_{k/i_k\neq j} A^{\epsilon_k}_{i_k,c_k}) \\ &= \tau_j(m_+)(\prod_{k/i_k=j} \beta_j(A^{\epsilon_k}_{j,c_k}))(\prod_{k/i_k\neq j} \beta_j(A^{\epsilon_k}_{i_k,c_k})B^{\epsilon_k}_{i_k,c_k}) \\ &= \tau_j(m_+)(\prod_k \beta_j(A^{\epsilon_k}_{i_k,c_k}))(\prod_{k/i_k\neq j} B^{\epsilon_k}_{i_k,c_k})\end{aligned}$$

En appliquant cette formule pour m, on voit que N contient le facteur $B_{i,c}$ puisque M' contient $A_{i,c}$. En conséquence pour les m'_p tels que $\tau_j(m'_p) = \beta_j(m'_p)N$, le facteur $B_{i,c}$ intervient dans $\tau_j(m'_p)$ et donc $A_{i,c}$ intervient aussi dans m'_p. Par hypothèse de maximalité du poids de m, les m'_p en question ne peuvent pas être de poids strictement plus grand que m. Mais à cause des formules $k_l x^{\pm}_{u,r} k_l^{-1} = q^{\pm b_{l,u}} x^{\pm}_{u,r}$, le vecteur $x^+_{j,r}.v$ est de poids strictement plus grand que v. Il ne peut donc pas être dans la somme directe de sous-espaces caractéristiques $V_{m'_p}$ de V avec $\tau_j(m'_p) = \beta_j(m'_p)N$ à moins d'être nul. □

Lemme 50. *On peut écrire m sous la forme :*

$$m = m_+ M \prod_p A_{j_0,a_p}$$

avec M produit de $A^{-1}_{i,c}$.

Démonstration:

Le lemme signifie que si M' contient un $A_{j,c}$, alors tous les autres $A_{l,d}$ qu'il contient vérifient $j = l$. Supposons par l'absurde que M' contient deux facteurs $A_{j,c}$ et $A_{l,d}$ avec $j \neq l$. Alors d'après le lemme 49 les $x \in V_m$ sont annulés par tous les $x^+_{i,r}$ pour $i \in I$ et $r \in \mathbb{Z}$. Si on prend pour $x \in V_m$ un vrai vecteur propre commun des $\phi^{\pm}_{i,r}$ (il en existe au moins puisque les $\phi^{\pm}_{i,r}$ commutent sur V), alors c'est un vecteur de plus haut poids de V. Mais comme V est irréductible, le sous-espace de plus haut poids est unique, de dimension 1 et correspond au monôme m_+. Donc $m = m_+$, contradiction. □

Définition 69. *On dit qu'un monôme $M \in \mathcal{Y}$ a un support en réseau de base $a_0 \in \mathbb{C}^*$ si $M \in \mathbb{Z}[Y^{\pm}_{i,a_0 q^k}]_{i\in I, k\in\mathbb{Z}}$.*

Lemme 51. *Tout monôme $M \in \mathcal{Y}$ peut être écrit de manière unique sous la forme $M = M^{(1)}...M^{(s)}$ avec $M^{(j)}$ de support en réseau de base $a_j \in \mathbb{C}^*$ tels que pour $j \neq l$, a_j/a_l n'est pas dans $q^{\mathbb{Z}}$.*

Pour que deux monômes $A^{\pm}_{i,bq^k}$ et $A^{\pm}_{i,cq^{k'}}$ soient égaux, il faut que $b/c \in q^{\mathbb{Z}}$.

Démonstration:

On considère une famille de représentants $(a_l)_l$ des classes de $\mathbb{C}^*/q^{\mathbb{Z}}$. Ils vérifient $a_l/a_u \in q^{\mathbb{Z}} \Leftrightarrow l = u$. Puis on réunit les $Y^{\pm}_{i,a}$ suivant la classe de a, et on forme les monômes $M^{(j)}$. Il n'y a qu'un nombre fini de classes $(a_j)_{1\leq j\leq s}$ qui interviennent effectivement.

D'après la formule du lemme 37, les $Y^{\pm}_{j,c}$ qui interviennent dans $A_{i,b}$ vérifient $c/b \in q^{\mathbb{Z}}$. Pour que deux monômes $A^{\pm}_{i,bq^k}$ et $A^{\pm}_{i,cq^{k'}}$ soient égaux, il faut qu'il aient les mêmes facteurs $Y_{j,c}$ et donc bq^k et $cq^{k'}$ soient dans la même classe modulo $q^{\mathbb{Z}}$, c'est à dire $b/c \in q^{\mathbb{Z}}$. □

Lemme 52. *Les résultats des lemmes 48 et 50 sont en contradiction.*

Démonstration (grandes lignes):

Ecrivons m sous la forme du lemme 50 $m = m_+ M \prod_p A_{j_0,a_p} = Y_{i_0,a_0} M \prod_p A_{j_0,a_p}$ avec M produit de $A^{-1}_{i,c}$. En réunissant les monômes $A_{j,d}$ suivant la classe de d modulo $q^{\mathbb{Z}}$, on obtient $m = \prod_l m^{(l)}$ comme dans le lemme 51. Chaque $m^{(l)}$ est donc de la forme :

$$m^{(l)} = m^{(l)}_+ M^{(l)} \prod_m A^{n_m}_{j_0,a_l q^m}$$

avec $m^{(l)}$ de support en réseau de base a_l, $m^{(l)} = Y_{i_0,a_0}$ si $a_l/a_0 \in q^{\mathbb{Z}}$, $m^{(l)} = 1$ sinon, $M^{(l)}$ est un monôme en A^{-1}_{i,a_lq^r}, et enfin les $n_m \geq 0$.

Il suffit de montrer qu'il existe un $m^{(l)}$ qui n'est pas dominant. En effet, comme il ne peut pas y avoir de simplification entre les différents $m^{(l)}$ et que dans m on a au moins un facteur différent de 1 et m_+, cela impliquera que m n'est pas dominant, et on aura une contradiction avec le lemme 48.

Examinons le premier cas où $m^{(l)}$ est le facteur de support en réseau de base a_0. On a une écriture :

$$m^{(l)} = \prod_{i\in I}\prod_{r\in\mathbb{Z}} Y^{p_i(m)}_{i,a_0q^m}$$

avec les $p_i(m) \in \mathbb{Z}$. On introduit le polynôme de Laurent $P_i(x) = \sum_{r\in\mathbb{Z}} p_i(r)x^r \in \mathbb{Z}[x,x^{-1}]$. L'écriture de $m^{(l)}$ sous la forme $m^{(l)} = Y_{i_0,a_0}M^{(l)}\prod_m A^{n_m}_{j_0,a_0q^m}$ donne en utilisant la formule du lemme 37 une écriture :

$$P_i(x) = -\sum_{j\in I} C_{ji}(x)R_j(x) + \delta_{ii_0}$$

avec les $R_j(x) \in \mathbb{Z}[x,x^{-1}]$ qui proviennent respectivement des $A^{\pm}_{j,c}$. Le terme δ_{ii_0} provient de Y_{i_0,a_0}. Mais comme $M^{(l)}$ ne fait intervenir que des $A^{-1}_{i,d}$, on a pour $j \neq j_0$ les coefficients de $R_j(x)$ positifs. Supposons par l'absurde que $m^{(l)}$ est dominant, alors tous les $p_i(r)$ sont positifs, et les polynômes $P_i(x)$ sont à coefficients positifs. En considérant alors les termes $\tilde{C}'_{ij}(x), d(x) \in \mathbb{N}[[x,x^{-1}]]$ du lemme 44 et comme $\tilde{C}(x)$ est la matrice inverse de la matrice $C(x)$, on a pour tout $k \in I$ en prenant une combinaison linéaire $\sum_{i\in I}\tilde{C}'_{i,k}(x)$ des égalités précédentes :

$$\sum_{i\in I}\tilde{C}'_{i,k}(x)P_i(x) = -\sum_{i,j\in I}\tilde{C}'_{i,k}(x)C_{j,i}(x)R_j(x) + \tilde{C}'_{i_0,k}(x)$$

$$\sum_{i\in I}\tilde{C}'_{i,k}(x)P_i(x) + \sum_{j\in I}(d(x))_{j,k}R_j(x) = \tilde{C}'_{i_0,k}(x)$$

$$\sum_{i\in I}\tilde{C}'_{i,k}(x)P_j(x) + d(x)R_k(x) = \tilde{C}'_{i_0,k}(x)$$

Pour $k \neq j_0$ si on suppose $R_k(x) \neq 0$, alors comme tous les polynômes $P_j(x), \tilde{C}'_{jk}(x), d(x), R_k(x)$ sont à coefficients positifs, la longueur (c'est à dire la différence entre le plus haut degré et le plus bas degré) du polynôme de Laurent $d(x)R_k(x)$ est plus grande que celle de $d(x)$, et donc celle $\sum_{i\in I}\tilde{C}'_{i,k}(x)P_j(x) + d(x)R_k(x) = \tilde{C}'_{i_0,k}(x)$ est plus grande que celle de $d(x)$. Mais c'est faux d'après l'énoncé du lemme 44 sur les degrés. Contradiction. Donc $R_k(x) = 0$ pour $k \neq j_0$. Comme $R_j(x)$ provient de la présence de facteurs $A^{\pm}_{j,c}$ dans $m^{(l)}$, seuls des $A^{\pm}_{j_0,c}$ peuvent intervenir dans l'écriture de $m^{(l)}$, c'est à dire :

$$m^{(l)} = Y_{i_0,a_0}\prod_{r\in\mathbb{Z}} A^{c_r}_{j_0,a_0q^r}$$

Comme d'après le lemme 37 le poids de A_{j_0,a_0q^r} est α_{j_0}, le poids de $m^{(l)}$ est de la forme $\omega_{i_0} + u\alpha_{j_0}$ avec $u \in \mathbb{Z}$.

Dans le cas où $m^{(l)}$ le facteur de support en réseau de base a_l tel que a_l/a_0 n'est pas dans $q^{\mathbb{Z}}$. On mène les mêmes calculs, mais l'absence du facteur Y_{i_0,a_0} modifie un peu les équations :

$$P_i(x) = -\sum_{j\in I} C_{ji}(x)R_j(x)$$

$$\sum_{i\in I}\tilde{C}'_{i,k}(x)P_j(x) + d(x)R_k(x) = 0$$

Comme tous ces polynômes sont à coefficients positifs pous $k \neq j_0$, les $R_k(x)$ sont nécessairement nuls pour $k \neq j_0$. On retrouve une forme :

$$m^{(l)} = \prod_{r\in\mathbb{Z}} A^{c_r}_{j_0,a_lq^r}$$

et le poids de $m^{(l)}$ est de la forme $u_l\alpha_{j_0}$, avec $u_l \in \mathbb{Z}^*$.

Mais en regardant l'interprétation de la proposition 107, on voit que le poids ω_{i_0} du monôme Y_{i_0,a_0} est le plus grand, donc m a un poids strictement inférieur à ω_{i_0}. En conséquence au moins l'un des u_l, u est strictement négatif. Mais un monôme de poids $\omega_{i_0} - p\alpha_{j_0}$ avec $p > 0$ ne peut pas être dominant puisque son poids n'est pas dans Λ^+. $\square$

Corollaire 19. *Le monôme de plus haut poids $Y_{i,a}$ de $\chi_q(V_i(a))$ est le seul monôme dominant de $\chi_q(V)$.*
Démonstration:

Les autres monômes sont de la forme $Y_{i,a}\prod A_{i,c}^{-1}$ et n'ont pas un poids dans Λ^+. □

7.3 Les opérateurs d'écrantage S_i

On généralise ici les définitions du cas $\mathcal{U}_q(\hat{sl}_2)$. On note $\tilde{\mathcal{Y}}_i$ le $\mathcal{Y}$-module librement engendré par une famille $(S_{i,x})_{x\in\mathbb{C}^*}$:

$$\tilde{\mathcal{Y}}_i = \bigoplus_{x\in\mathbb{C}^*}\mathcal{Y}.S_{i,x} \text{ avec } \mathcal{Y}.S_{i,x}\simeq\mathcal{Y}$$

On définit $\mathcal{Y}_i$ comme le $\mathcal{Y}$-module quotient de $\tilde{\mathcal{Y}}_i$ par le sous-module engendré par les éléments de la forme $S_{i,xq_i^2} - A_{i,xq_i}S_{i,x}$ avec $x\in\mathbb{C}^*$. Le $\mathcal{Y}$-module $\mathcal{Y}_i$ est libre, et est librement engendré par une famille $(S_{i,x})_{x\in C_i}$ avec $C_i\subset\mathbb{C}^*$ telle que la projection canonique $C\rightarrow\mathbb{C}^*/q_i^{2\mathbb{Z}}$ est une bijection, ce qui s'écrit :

$$\mathcal{Y}_i \simeq \bigoplus_{x\in(\mathbb{C}^*/q_i^{2\mathbb{Z}})}\mathcal{Y}.S_{i,x} \text{ avec } \mathcal{Y}.S_{i,x}\simeq\mathcal{Y}$$

Il existe un unique morphisme de groupes $\tilde{S}_i:\mathcal{Y}\rightarrow\tilde{\mathcal{Y}}_i$ tel que :

$$\tilde{S}_i(Y_{j,a}) = \delta_{i,j}Y_{i,a}.S_{i,a} \text{ pour } a\in\mathbb{C}^*\ ,\ \tilde{S}_i(1)=0$$

$$\tilde{S}_i(\alpha\beta) = \beta.\tilde{S}_i(\alpha)+\alpha.\tilde{S}_i(\beta) \text{ pour } \alpha,\beta\in\mathcal{Y}$$

L'application $\tilde{S}_i$ vérifie alors pour $a\in\mathbb{C}^*$, $\tilde{S}_i(Y_{j,a}^{-1}) = -\delta_{i,j}Y_{i,a}^{-1}.S_{i,a}$.

Définition 70. *On appelle $i^{ème}$ opérateur d'écrantage le morphisme de groupes $S_i:\mathcal{Y}\rightarrow\mathcal{Y}_i$ composé de $\tilde{S}_i$ et de la projection canonique de $\tilde{\mathcal{Y}}_i$ sur $\mathcal{Y}_i$.*
Remarquons que pour $\alpha,\beta\in\mathcal{Y}$, on a $S_i(\alpha\beta)=\alpha S_i(\beta)+\beta S_i(\alpha)$.

7.4 L'image de χ_q est l'intersection des noyaux des S_i

Théorème 51. *L'image de χ_q est l'intesection des noyaux des opérateurs d'écrantage S_i :*

$$Im(\chi_q) = \bigcap_{1\leq i\leq n}Ker(S_i)$$

7.4.1 $Ker(S_i)=\mathfrak{K}_i$

Pour $x\in\mathbb{C}^*$, et $x\in(\mathbb{C}^*/q^{\mathbb{Z}})$, on note $\mathcal{Y}^{(x)}=\mathbb{Z}[Y_{j,xq^m}^{\pm}]_{j\in I,m\in\mathbb{Z}}\subset\mathcal{Y}$ et $Ker(S_i)^{(x)}=Ker(S_i)\cap\mathcal{Y}^{(x)}$.
Lemme 53. *On a l'isomorphisme canonique de $\mathbb{Z}$-modules :*

$$Ker(S_i) = \bigotimes_{x\in(\mathbb{C}^*/q^{\mathbb{Z}})}Ker(S_i)^{(x)}$$

La démonstration est complètement analogue à celle du lemme 29.

Posons :

$$\mathfrak{K}_i = \mathbb{Z}[Y_{j,a}^{\pm}]_{j\neq i,a\in\mathbb{C}^*}\mathbb{Z}[Y_{i,b}+Y_{i,b}A_{i,bq_i}^{-1}]_{b\in\mathbb{C}^*}$$

Lemme 54. *Le noyau de $S_i:\mathcal{Y}\rightarrow\mathcal{Y}_i$ contient $\mathfrak{K}_i$.*
Démonstration:

Pour montrer $\mathfrak{K}_i\subset Ker(S_i)$, on voit que pour $j\neq i$, $Y_{j,a}^{\pm}\in Ker(S_i)$ et pour $b\in\mathbb{C}^*$ (on note $C_{i,j}=a_{i,j}$) :

$$\begin{aligned}
& S_i(Y_{i,b}+Y_{i,b}A_{i,bq_i}^{-1})\\
= \ & Y_{i,b}.S_{i,b}+A_{i,bq_i}^{-1}.S_i(Y_{i,b})+Y_{i,b}.S_i(A_{i,bq_i}^{-1})\\
= \ & Y_{i,b}.S_{i,b}+A_{i,bq_i}^{-1}Y_{i,b}.S_{i,b}\\
& +Y_{i,b}.S_i(Y_{i,bq_i^2}^{-1}Y_{i,b}^{-1}(\prod_{j/a_{j,i}=-1}Y_{j,bq_i})(\prod_{l/a_{l,i}=-2}Y_{l,bq_iq}Y_{l,bq_iq^{-1}})(\prod_{m/a_{m,i}=-3}Y_{m,bq_iq^2}Y_{m,bq_i}Y_{m,bq_iq^{-2}}))\\
= \ & Y_{i,b}.S_{i,b}+A_{i,bq_i}^{-1}Y_{i,b}.S_{i,b}\\
& +Y_{i,b}(\prod_{j/a_{j,i}=-1}Y_{j,bq_i})(\prod_{l/a_{l,i}=-2}Y_{l,bq_iq}Y_{l,bq_iq^{-1}})(\prod_{m/a_{m,i}=-3}Y_{m,bq_iq^2}Y_{m,bq_i}Y_{m,bq_iq^{-2}}).S_i(Y_{i,bq_i^2}^{-1}Y_{i,b}^{-1})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= Y_{i,b}.S_{i,b} + A_{i,bq_i}^{-1} Y_{i,b}.S_{i,b} + Y_{i,b} A_{i,bq_i}^{-1} Y_{i,bq_i^2} Y_{i,b}.(Y_{i,bq_i^2}^{-1}.S_i(Y_{i,b}^{-1}) + Y_{i,b}^{-1}.S_i(Y_{i,bq_i^2}^{-1}))\\
&= Y_{i,b}.S_{i,b} + A_{i,bq_i}^{-1} Y_{i,b}.S_{i,b} - Y_{i,b} A_{i,bq_i}^{-1} Y_{i,bq_i^2} Y_{i,b} Y_{i,bq_i^2}^{-1} Y_{i,b}^{-1} (S_{i,bq_i^2} + S_{i,b})\\
&= Y_{i,b}.S_{i,b} + A_{i,bq_i}^{-1} Y_{i,b}.S_{i,b} - Y_{i,b} A_{i,bq_i}^{-1} (S_{i,bq_i^2} + S_{i,b})\\
&= Y_{i,b}.S_{i,b} + A_{i,bq_i}^{-1} Y_{i,b}.S_{i,b} - Y_{i,b} A_{i,bq_i}^{-1} S_{i,b} - Y_{i,b}.S_{i,b} = 0
\end{aligned}
$$

car dans $\mathcal{Y}_i$, $A_{i,bq_i}^{-1} S_{i,bq_i^2} = S_{i,b}$. Le fait que S_i est une dérivation permet de conclure. □

Proposition 118. *Le noyau de $S_i : \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}_i$ est égal à $\mathfrak{K}_i$.*

Démonstration (grandes lignes):

Il reste à montrer $ker(S_i) \subset \mathfrak{K}_i$. On calque la démonstration sur celle du cas $\hat{sl}_2$. D'après le lemme 53, il suffit de montrer que pour $x \in \mathbb{C}^*$, on a $Ker(S_i)^{(x)} \subset \mathfrak{K}_i(x)$ avec :

$$\mathfrak{K}_i(x) = \mathbb{Z}[Y_{j,xq^m}^{\pm}]_{j\neq i, m\in\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[Y_{i,xq^m} + Y_{i,xq^m} A_{i,xq^m q_i}^{-1}]_{m\in\mathbb{Z}}$$

De même que dans le cas $\hat{sl}_2$, on simplifie les notations en posant $y_{j,m} = Y_{j,xq^m}$, $a_{j,m} = A_{j,xq^m}$, $t_m = y_{i,2r_i m} + y_{i,2r_i m} a_{i,r_i(2m+1)}^{-1}$ et on se ramène grâce à l'opérateur de décalage à l'étude d'un morphisme encore noté S_i :

$$S_i : \mathcal{Y}_i^{\geq 0}(x) \to \mathcal{Y}_i$$

avec :

$$\mathcal{Y}_i^{\geq 0}(x) = \mathbb{Z}[y_{i,2r_i m}, y_{i,2r_i(m+1)}^{-1}]_{m\geq 0} \otimes \mathbb{Z}[y_{j,m}^{\pm}]_{j\neq i, m\geq 0}$$

avec $r_i = \frac{(\alpha_i,\alpha_i)}{2}$ et les valeurs de S_i sur $\mathcal{Y}_i^{\geq 0}(x)$ donnée par l'identification des $y_{j,m}$ et des Y_{j,xq^m}. Il nous suffit de montrer que si $P \in \mathcal{Y}_i^{\geq 0}(x)$ est dans le noyau de S_i, il appartient en fait à :

$$\mathfrak{K}^{\geq 0}(x) = \mathbb{Z}[t_m]_{m\geq 0} \otimes \mathbb{Z}[y_{j,m}^{\pm}]_{j\neq i, m\geq 0}$$

Pour ce faire on introduit les monômes de $\mathcal{Y}_i^{\geq 0}(x)$ dit réduits, c'est à dire de la forme :

$$t_{m_1}...t_{m_k} y_{i,2r_i c_1}...y_{i,2r_i c_l} \prod_{j\neq i, p_j\geq 0} y_{j,p_j}^{\pm 1}$$

avec $m_1 \geq m_2 \geq ...m_k \geq 0$, $c_1 \geq c_2 \geq ...c_l \geq 0$ et $c_a \neq m_b + 1$ pour $a, b \in I$. On montre que ces monômes forment une base de $\mathcal{Y}_i^{\geq 0}(x)$, et on conclut par des argument similaires au cas $\hat{sl}_2$ en exprimant P dans cette base. □

Définition 71. *On pose $\mathfrak{K} = \bigcap_{i\in I} \mathfrak{K}_i = \bigcap_{i\in I} Ker(S_i)$.*

7.4.2 $Im(\chi_q) \subset \mathfrak{K}$

On note $\bar{\mathcal{Y}}_i$ l'anneau de quotient de $\tilde{\mathcal{Y}}_i = \bigoplus_{x\in\mathbb{C}^*} \mathcal{Y}.S_{i,x}$ par le sous-module engendré par les $S_{i,xq_i^2} - \bar{A}_{i,xq_i}.S_{i,x}$ où on pose $\bar{A}_{i,xq_i} = Y_{i,x} Y_{i,xq_i^2}$. On définit l'application linéaire $\bar{S}_i : \mathbb{Z}[Y_{i,a}]_{a\in\mathbb{C}^*} \to \bar{\mathcal{Y}}_i$ par $\bar{S}_i(Y_{i,a}) = Y_{i,a} S_{i,a}$ et une propriété de dérivation $\bar{S}_i(\alpha\beta) = \alpha.\bar{S}_i(\beta) + \beta.\bar{S}_i(\alpha)$. Dans le cas $\mathcal{U}_q(\hat{sl}_2)$ cette application n'est autre que S_i. On pose $\mathcal{Y}_i^{(i)} = \mathbb{Z}[Z_{j,c}^{\pm}]_{j\neq i, c\in\mathbb{C}^*} \otimes \bar{\mathcal{Y}}_i$. Remarquons que $\mathbb{Z}[Y_{i,a}]_{a\in\mathbb{C}^*} \subset \mathcal{Y}^{(i)}$ et $\bar{\mathcal{Y}}_i \subset \mathcal{Y}_i^{(i)}$.

Lemme 55. *L'application $\bar{S}_i$ se prolonge de manière unique en une application linéaire $\mathcal{Y}^{(i)} \to \mathcal{Y}_i^{(i)}$ qui est une dérivation et qui envoit les $Z_{j,c}$ sur 0. On note encore $\bar{S}_i$ cette application.*

Lemme 56. *Il existe une unique application $\mathbb{Z}$-linéaire $\tau_i' : \mathcal{Y}_i \to \mathcal{Y}_i^{(i)}$ telle que pour $\lambda \in \mathcal{Y}$, $u \in \mathcal{Y}_i$, $x \in \mathbb{C}^*$ on a :*

$$\tau_i'(\lambda.u) = \tau_i(\lambda).\tau_i'(u)$$

$$\tau_i'(S_{i,x}) = S_{i,x}$$

De plus τ_i' est injective.

Démonstration (grandes lignes):

On définit τ_i' en posant pour $\lambda \in \mathcal{Y}$ et $x \in \mathbb{C}^*$, $\tau_i'(\lambda.S_{i,x}) = \tau_i(\lambda).S_{i,x}$.

Pour l'injectivité, on choisit pour chaque classe de $\mathbb{C}^*/q^{\mathbb{Z}}$ un représentant x. Alors :

$$\mathcal{Y}_i^{(i)} = \bigoplus_x \mathcal{Y}^{(i)}.S_{i,x}$$

Si $\tau_i'(\bigoplus_x \lambda_x S_{i,x}) = 0$ alors $0 = \bigoplus_x \tau_i(\lambda_x) S_{i,x}$ et tous les $\tau_i(\lambda_x)$ sont nuls. Mais par injectivité de τ_i, les λ_x sont nuls. □

Lemme 57. *Le diagramme :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y} & \stackrel{\tau_i}{\longrightarrow} & \mathcal{Y}^{(i)} \\ S_i \downarrow & & \downarrow \overline{S}_i \\ \mathcal{Y}_i & \stackrel{\tau_i'}{\longrightarrow} & \mathcal{Y}_i^{(i)} \end{array}$$

est commutatif.

Démonstration:

On veut montrer que pour $\lambda \in \mathcal{Y}$, on a $\overline{S}_i(\tau_i(\lambda)) = \tau_i'(S_i(\lambda))$. Comme S_i et $\overline{S}_i$ sont des dérivations, que τ_i est un morphisme d'anneaux, si $\overline{S}_i(\tau_i(a)) = \tau_i'(S_i(a))$ et $\overline{S}_i(\tau_i(a)) = \tau_i'(S_i(a))$, on a :

$$\overline{S}_i(\tau_i(ab)) = \tau_i(a)\overline{S}_i(\tau_i(b)) + \tau_i(b)\overline{S}_i(\tau_i(a)) = \tau_i(a)\tau_i'(S_i(b)) + \tau_i(b)\tau_i'(S_i(a))$$
$$\tau_i'(S_i(ab)) = \tau_i'(aS_i(b)) + \tau_i'(bS_i(a)) = \tau_i(a)\tau_i'(S_i(b)) + \tau_i(b)\tau_i'(S_i(a))$$

et la propriété est encore valable pour ab. Comme de plus les applications considérées sont $\mathbb{Z}$-linéaires, il suffit de montrer la propriété pour $\lambda = Y_{j,x}^{\pm}$. Pour $j = i$, on obtient :

$$\tau_i'(S_i(Y_{i,x}^{\pm})) = \tau_i'(\pm Y_{i,x}^{\pm} S_{i,x}) = \pm\tau_i(Y_{i,x}^{\pm})\tau_i'(S_{i,x}) = \pm\tau_i(Y_{i,x}^{\pm})S_{i,x}$$

$$\begin{aligned} \overline{S}_i(\tau_i(Y_{i,x}^{\pm})) &= \overline{S}_i(Y_{i,x}^{\pm} \prod_{j\neq i} \prod_{k\in\mathbb{Z}} Z_{j,xq^k}^{\pm p_{i,j}(k)}) \\ &= \tau_i(Y_{i,x}^{\pm})Y_{i,x}^{\mp}\overline{S}_i(Y_{i,x}^{\pm}) + Y_{i,x}^{\pm}\overline{S}_i(\prod_{j\neq i} \prod_{k\in\mathbb{Z}} Z_{j,xq^k}^{\pm p_{i,j}(k)}) \\ &= \tau_i(Y_{i,x}^{\pm})Y_{i,x}^{\mp}\overline{S}_i(Y_{i,x}^{\pm}) \\ &= \pm\tau_i(Y_{i,x}^{\pm})Y_{i,x}^{\mp}Y_{i,x}^{\pm}.S_{i,x} \\ &= \pm\tau_i(Y_{i,x}^{\pm})S_{i,x} \end{aligned}$$

Puis pour $j \neq i$, on a :

$$\tau_i'(S_i(Y_{j,x}^{\pm})) = \tau_i'(0) = 0$$
$$\overline{S}_i(\tau_i(Y_{j,x}^{\pm})) = \overline{S}_i(\prod_{j\neq i}\prod_{k\in\mathbb{Z}} Z_{j,xq^k}^{\pm p_{i,j}(k)}) = 0$$

□

Théorème 52. *L'image de χ_q est incluse dans l'intersection des $Ker(S_i)$.*

Démonstration:

Pour $V \in Rep_r(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))$ une représentation, on applique le résultat de la proposition 117, et donc en écrivant $\tau_i(\chi_q(V)) = \sum_k P_k Q_k$ avec les $P_k \in \mathbb{Z}[Y_{i,a}^{\pm 1}]_{a\in\mathbb{C}^*}$, et les Q_k des monômes distincts dans $\mathbb{Z}[Z_{j,c}^{\pm 1}]_{j\neq i, c\in\mathbb{C}^*}$, on peut décomposer $res_{\{i\}}(V)$ en une somme directe de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})_{\{i\}} \simeq \mathcal{U}_{q_i}(s\hat{l}_2)$-modules $res_{\{i\}}(V) = \bigoplus_k V_k$ avec $\chi_{q,i}(V_k) = P_k$. On sait déjà que pour les $\mathcal{U}_{q_i}(s\hat{l}_2)$-modules, on a $Im(\chi_{q,i}) \subset Ker(S_{\mathcal{U}_{q_i}(s\hat{l}_2)})$. Mais l'application $S_{\mathcal{U}_{q_i}(s\hat{l}_2)}$ correspond ici à $\overline{S}_i$ restreinte à $\mathbb{Z}[Y_{i,a}^{\pm}]$, car les $\overline{A}_{i,c}$ correspondent au A_c dans le cas $s\hat{l}_2$. On a donc $0 = \overline{S}_i(\chi_{q,i}(V_k)) = \overline{S}_i(P_k)$, et :

$$(\overline{S}_i \circ \tau_i)(\chi_q(V)) = \overline{S}_i(\sum_k P_k Q_k) = \sum_k (Q_k \overline{S}_i(P_k) + P_k \overline{S}_i(Q_k)) = \sum_k P_k \overline{S}_i(Q_k)$$

Mais les $Q_k \in [Z_{j,c}^{\pm 1}]_{j\neq i, c\in\mathbb{C}^*}$, donc $\overline{S}_i(Q_k) = 0$. Donc $(\overline{S}_i \circ \tau_i)(\chi_q(V)) = 0$. Alors le lemme 57 implique $\tau_i'(S_i(\chi_q(V))) = 0$ puis $S_i(\chi_q(V))$ par injectivité de τ_i' vue dans le lemme 56. □

7.4.3 $\mathfrak{K} \subset Im(\chi_q)$

Lemme 58. *Pour $P \in \mathfrak{K}$, un monôme de poids maximal de P est dominant (il ne contient que des $Y_{i,a}$), et un monôme de poids minimal est antidominant (il ne contient que des $Y_{i,a}^{-1}$).*

Démonstration:

Il suffit de montrer que pour $i \in I$, un monôme de plus haut poids d'un $P \in \mathfrak{K}_i$ ne fait pas intervenir de facteur $Y_{i,a}^{-1}$. Fixons un tel $i \in I$, et pour $b \in \mathbb{C}^*$, posons $t_b = Y_{i,b} + Y_{i,b}A_{i,bq_i}^{-1}$. Ecrivons

$$P \in \mathfrak{K}_i = \mathbb{Z}[Y_{j,a}^{\pm}]_{j \neq i, a \in \mathbb{C}^*} \otimes \mathbb{Z}[t_b]_{b \in \mathbb{C}^*}$$

sous la forme $P = \sum_k R_k Q_k$ avec $R_k \in \mathbb{Z}[Y_{j,a}^{\pm}]_{j \neq i, a \in \mathbb{C}^*}$ et $Q_k \in \mathbb{Z}[t_b]_{b \in \mathbb{C}^*}$. Alors un monôme de poids maximal m de P est un monôme de poids maximal d'un certain $R_{k_0}Q_{k_0}$. Il s'écrit donc sous la forme $m = m_1 m_2$ avec m_1, m_2 des monômes de poids maximal respectivement de R_{k_0} et Q_{k_0}. Comme $R_k \in \mathbb{Z}[Y_{j,a}^{\pm}]_{j \neq i, a \in \mathbb{C}^*}$ il ne contient aucun facteur $Y_{i,a}^{-1}$. Maintenant regardons $Q_k \in \mathbb{Z}[t_b]_{b \in \mathbb{C}^*}$ et notons $p_1, ..., p_l$ ses monômes en $(t_b)_{b \in \mathbb{C}^*}$ de $\mathbb{N}$-poids maximal relativement aux t_b (c'est à dire en posant le poids de t_b égal à 1, ce qui donne une $\mathbb{N}$-graduation de $\mathbb{Z}[t_b]_{b \in \mathbb{C}^*}$). Comme le Λ-poids de $Y_{i,b}$ est ω_i et celui de $A_{i,b}^{-1}$ est $-\alpha_i$, un monôme de Λ-poids maximal de Q_{k_0} est le monôme de plus haut poids d'un des $p_1, ..., p_l$, et par exemple pour $p_u = t_{b_1}...t_{b_k}$ est égal à $Y_{i,b_1}...Y_{i,b_k}$. En particulier il ne fait pas intervenir de $Y_{i,a}^{-1}$. □

Théorème 53. *L'image de χ_q contient $\mathfrak{K}$.*

Démonstration:

Pour $P \in \mathfrak{K}$, posons :

$$\Delta(P) = \{\lambda \in \Lambda / \lambda \text{ est dominant et } \exists \mu \geq \lambda,\ \mu \text{ est le poids d'un monôme de } P\}$$

Comme P n'a qu'un nombre fini de monôme, et que pour $\mu \in \Lambda$ il n'y a qu'un nombre fini de $\lambda \in \Lambda$ dominant tel que $\mu \geq \lambda$, l'ensemble $\Delta(P)$ est fini.

Montrons par récurrence sur le cardinal de $\Lambda(P)$ que $P \in \mathfrak{K}$ est dans $Im(\chi_q)$. Si $\Lambda(P)$ est vide, P n'a pas de monôme de poids dominant, et d'après le lemme 58 P n'a pas de monôme de poids maximal. Donc $P = 0 \in Im(\chi_q)$.

Considérons pour $P \neq 0$ un monôme m de poids maximal. On note $\nu \in \mathbb{Z}^*$ sa multiplicité. D'après le lemme 58, m est dominant, et on peut écrire $m = Y_{i_1,a_1}...Y_{i_r,a_r}$. En particulier m est le monôme de plus haut poids d'un $\chi_q(V)$ avec V module irréductible (on peut par exemple considérer dans $Rep_r(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))$ un terme irréductible de plus hat poids dans la décomposition de $V_{i_1}(a_1) \otimes ... \otimes V_{i_r}(a_r)$). On sait que $\chi_q(V) \in Im(\chi_q) \subset \mathfrak{K}$, et on peut considérer $P_1 = P - \nu.\chi_q(V) \in \mathfrak{K}$. On sait d'après le théorème 50 que les monômes de $\chi_q(V)$ sont de poids inférieur ou égal à celui de m. En particulier :

$$\Delta(\chi_q(V)) = \{\lambda \leq \mu /\ \lambda \text{ est dominant}\} \subset \Delta(P)$$

et on a $\Delta(P_1) \subset \Delta(P) \cup \Delta(\chi_q(V)) \subset \Delta(P)$. Mais d'après l'interprétation de la proposition 107, le monôme m est de multiplicité 1 dans $\chi_q(V)$, et donc il n'intervient pas dans P_1. On recommence ainsi avec tous les monômes dominants qui ont le même poids que m, et on obtient $P_r = P - \nu\chi_q(V) - \nu_2\chi_q(V_2)... - \nu_r\chi_q(V_r) \in \mathfrak{K}$ avec $\Delta(P_r) \subset \Delta(P)$. Mais dans P_r, plus aucun monôme dominant de poids celui de m intervient. Donc ce poids n'est pas dans $\Delta(P_r)$ qui est stritement inclus dans $\Delta(P)$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à P_r, ce qui donne le résultat pour P. □

Corollaire 20. *On un isomorphisme d'anneaux :*

$$\chi_q : Rep_r(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})) \simeq \mathfrak{K} = \bigcap_{i \in I} (\mathbb{Z}[Y_{j,a}^{\pm}]_{j \neq i, a \in \mathbb{C}^*} \mathbb{Z}[Y_{i,b} + Y_{i,b}A_{i,bq_i}^{-1}]_{b \in \mathbb{C}^*})$$

7.4.4 Interprétation des S_i

On a vu dans le cas semi-simple quantifié que l'image de $\chi : Rep(\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})) \to \mathbb{Z}[y_i^{\pm}]_{1 \leq i \leq n}$ est formée des éléments W-invariants, c'est à dire $Im(\chi) = \bigcap_{i=1..n} Ker(s_i - id)$ avec $s_j : \mathbb{Z}[y_i^{\pm}]_{1 \leq i \leq n} \to \mathbb{Z}[y_i^{\pm}]_{1 \leq i \leq n}$ le morphisme d'anneaux tel que $s_j(y_i) = y_i - a_{j,i}y_j$.

Cependant on ne peut pas interpréter les S_i comme des $s_i - id$, d'abord car ces opérateurs ne sont pas à valeur dans $\mathcal{Y}$. De plus ce ne sont par des morphismes d'anneaux, mais des dérivations.

On définit des morphismes d'anneaux $\tilde{s}_i : \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}$ par :

$$\tilde{s}_i(Y_{i,a}) = Y_{i,a}A_{i,aq_i}^{-1}$$

$$\tilde{s}_i(Y_{j,a}) = Y_{j,a} \text{ si } j \neq i$$

Dans le cas $\mathcal{U}_q(\hat{sl}_2)$, on a :

$$\tilde{s}_1(W_1(a)) = \tilde{s}_1(Y_a + Y_{aq^2}^{-1}) = Y_aY_a^{-1}Y_{aq^2}^{-1} + Y_{aq^2}^{-1}Y_aY_{aq^2} = Y_{aq^2}^{-1} + Y_a = W_1(a)$$

et comme $Im(\chi_q) = \mathbb{Z}[W_1(a)]_{a\in\mathbb{C}^*}$, on obtient $Im(\chi_q) \subset Ker(\tilde{s}_1 - id)$. On peut montrer l'égalité.

7.5 Quelques applications

Corollaire 21. *Le q-caractère $\chi_q(V_{\omega_i}(a))$ est de la forme $Y_{i,a}(1 + \sum_p M'_p)$ avec les M'_p des monômes en A_{j,aq^m}^{-1}, $m \geq 0$.*

Démonstration:

On connait déjà le résultat dans le cas $\mathcal{U}_q(\hat{sl}_2)$ grâce au calcul explicite des $\chi_q(W_r(a))$. Dans le cas général, supposons par l'absurde que le résultat soit faux pour un $\chi_q(V_{\omega_i}(a))$, et considérons un monôme m de $\chi_q(V_{\omega_i}(a))$ qui n'est pas de la forme voulue $Y_{i,a}M'_p$ avec M'_p monôme en A_{j,aq^m}^{-1}, $m \geq 0$, et qui soit de poids maximal parmi de tels monômes. D'après le corollaire 19, m n'est pas dominant, et on a un Y_{i_0,b_0}^{-1} qui intervient. Les arguments suivants sont semblables à ceux de la démonstration du lemme 48 : considérons $\tau_{i_0}(\chi_q(V_{\omega_i}(a)))$ et en utilisant la proposition 117, on peut le décomposer sous la forme :

$$\tau_{i_0}(\chi_q(V_{\omega_i}(a))) = \sum_p \chi_q(V_p)N_p = \sum_p m_p(1 + \sum_r \bar{M}_{r,p})N_p$$

en utilisant la structure des q-caractères des $\mathcal{U}_{q_{i_0}}(\hat{sl}_2)$-modules V_p comme dans la démonstration du lemme 48. Comme les m_p sont dominants et que les N_p proviennent de $Y_{j,a}^{\pm}$ avec $j \neq i_0$, on a nécessairement $\tau_{i_0}(m)$ de la forme $m_{p_0}N_{p_0}\bar{M}_{r_0,p_0}$ avec $\bar{M}_{r_0,p_0} \neq 1$. On considère un monôme m_1 de $\chi_q(V_{\omega_i}(a))$ tel que $\tau_{i_0}(m_1) = m_{p_0}N_{p_0}$. Or en utilisant le lemme 47 pour τ_{i_0} autant de fois qu'il y a de facteur $\bar{A}_{i_0,c}^{-1}$ dans $\bar{M}_{r_0,p_0}$, on obtient :

$$\tau_{i_0}(m_1)\bar{M}_{r_0,p_0} = \tau_{i_0}(m_1M_{r_0,p_0}) \in \mathcal{Y}^{(i_0)}$$

où $M_{r_0,p_0} \in \mathcal{Y}$ est obtenu à partir de $\bar{M}_{r_0,p_0}$ en changeant les $\bar{A}_{i_0,c}^{-1}$ en $A_{i_0,c}^{-1}$. On a donc :

$$\tau_{i_0}(m_1M_{r_0,p_0}) = \tau_{i_0}(m_1)\bar{M}_{r_0,p_0} = m_1N_{p_0}\bar{M}_{r_0,p_0} = \tau_{i_0}(m)$$

Mais comme d'après le lemme 45 l'application τ_{i_0} est injective, on a $m = m_1M_{r_0,p_0}$. Comme les $A_{i_0,c}^{-1}$ sont de poids $-\alpha_{i_0}$, le poids de m_1 est strictement plus grand que celui de m, et donc par maximalité du poids de m, le monôme m_1 ne fait intervenir que des $Y_{j,aq^m}^{\pm}$, $m \geq 0$. Par construction de τ_{i_0}, c'est donc aussi le cas de m_{p_0}. Comme le résultat est déjà établi dans le cas $\hat{sl}_2$, si on regarde les $\mathcal{U}_{q_{i_0}}(\hat{sl}_2)$-modules V_p, ceci implique que les $\bar{M}_{r,p}$ ne font intervenir que des $\bar{A}_{j,aq^m}^{-1}$, $m \geq 0$. En particulier M_{r_0,p_0} ne fait intervenir que des A_{j,aq^m}^{-1}, $m \geq 0$, et on obtient une contradiction en se rappelant que $m = m_1M_{r_0,p_0}$.

Corollaire 22. *Une condition suffisante pour que $V_{\omega_1}(a_1) \otimes ... \otimes V_{\omega_n}(a_n)$ soit irréductible est que pour $i \neq j$ on a a_j/a_i qui n'est pas dans $q^{\mathbb{Z}}$.*

Démonstration:

Supposons que $V = V_{\omega_1}(a_1)\otimes...\otimes V_{\omega_n}(a_n)$ soit réductible. Alors dans $Rep_r(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))$ on a complète réductibilité, et $\chi_q(V)$ s'écrit comme combinaison $\mathbb{Z}$-linéaire d'au moins deux $\chi_q(W)$ avec W irréductible. On a donc au moins deux monômes dominants dans $\chi_q(V)$. Comme dans $\chi_q(V_{\omega_{i_k}}(a_k))$ il y a un seul monôme dominant qui est Y_{a_k,i_k}, il faut qu'il y ait des annulations entre d'autres monômes des $\chi_q(V_{\omega_{i_k}}(a_k))$. Mais comme d'après le corollaire 21 dans $\chi_q(V_{\omega_{i_k}}(a_k))$ il n'y a que des $Y_{i_k,a_kq^m}^{\pm}$ qui interviennent, il faut avoir un $a_i/a_j \in q^{\mathbb{Z}}$ pour que des annulations soient possibles. □

Lemme 59. *Soit V un $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$-module irréductible, dont on choisit une base adaptée à la décomposition de Jordan B_V. Soit v un des vecteurs de cette base dont le monôme de $\chi_q(V)$ correspondant est :*

$$m_v = m_+ M \prod_k A_{i,a_k}^{-1}$$

avec M un produit de $A_{j,b}^{-1}$ avec $j \neq i$, $b \in \mathbb{C}^*$. On choisit aussi une base B_W de $V_i(b)$ pour un $c \in \mathbb{C}^*$. Alors dans l'écriture de $\bar{R}_{V,V_i(b)}(z) \in End(V \otimes V_i(b))(z)$ dans la base $B_V \otimes B_W$, on a le terme diagonale :

$$(\bar{R}_{V,V_i(b)}(z))_{v \otimes v_i^{(b)}} = \prod_k q_i \frac{1 - a_k z b^{-1} q_i^{-1}}{1 - a_k z b^{-1} q_i}$$

Démonstration:

On a vu dans la démonstration du lemme 39 que pour x vrai vecteur propre associé au monôme $m_v = m_+ M \prod_k A_{i,a_k}^{-1}$, on a :

$$\bar{R}_{V,W}(z).(x \otimes v_i^{(b)}) = M'^P(z)(x \otimes v_P)$$

avec $M' = M \prod_k A_{i,a_k}^{-1}$ et P tel que $V_i(b) = V(P)$. Mais comme M a une action triviale sur v_P, on a $M'^P(z) = \prod_k A_{i,a_k}^{-1\ P}(z)$. Or par définition $A_{i,a} = \Phi_i^-(z^{-1}a^{-1})$, et comme le monôme de $\chi_q(V_i(b)$ associé à $v_i^{(b)}$ est $Y_{i,b}$, la valeur propre de $A_{i,a}$ sur $v_i^{(b)}$ est :

$$q_i \frac{P_i(z^{-1}a^{-1}q_i^{-1})}{P_i(z^{-1}a^{-1}q_i)} = q_i \frac{1 - bz^{-1}a^{-1}q_i^{-1}}{1 - bz^{-1}a^{-1}q_i} = q_i^{-1} \frac{zab^{-1}q_i - 1}{zab^{-1}q_i^{-1} - 1}$$

En conséquence :

$$M'^P(z) = \prod_k A_{i,a_k}^{-1\ P}(z) = \prod_k q_i \frac{1 - a_k z b^{-1} q_i^{-1}}{1 - a_k z b^{-1} q_i}$$

□

Théorème 54. *Un produit tensoriel de représentations irréductibles fondamentales $V_1 \otimes ... \otimes V_m$ est réductible si et seulement si pour $i \neq j$ la R-matrice universelle normalisée $\bar{R}_{V_i V_j}(z) \in End(V_i \otimes V_j)(z)$ a un pôle en $\frac{a_j}{a_i}$ où $a_k \in \mathbb{C}^*$ est défini par $V_k = V_{s(k)}(a_k)$.*

Démonstration (grandes lignes):

Supposons pour $V_1 = V_{s(1)}(a_1)$ et $V_2 = V_{s(2)}(a_2)$ que $\bar{R}_{V_1,V_2}(z) \in End(V_1 \otimes V_2)(z)$ a un pôle en a_2/a_1. Supposons de plus par l'absurede que $V_1 \otimes V_2$ est irréductible. Considérons alors $\sigma : V_1 \otimes V_2 \to V_2 \otimes V_1$ telle que $\sigma(x \otimes y) = y \otimes x$. Pour $z \in \mathbb{C}^*$ qui n'est pas un pôle de $\bar{R}_{V_1,V_2}$, l'application linéaire $\sigma \circ \bar{R}_{V_1,V_2}(z) : V_1 \otimes V_2 \to V_2 \otimes V_1$ est bien définie. Alors comme la R-matrice universelle vérifie $\Delta'(x) = R\Delta(x)R^{-1}$, les applications $\bar{R}_{V_1,V_2}(z)$, lorsqu'elles sont définies, sont des morphismes de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$-modules. Mais pour $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ tels que les applications sont définies, considérons $f = \bar{R}_{V_1,V_2}(z_1) - \bar{R}_{V_1,V_2}(z_2)$. C'est un morphisme de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$-modules, son noyau est un sous $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$-module de $V_1 \otimes V_2$, et est donc égal à $\{0\}$ ou $V_1 \otimes V_2$ par irréductibilité de $V_1 \otimes V_2$. Cependant on a par définition des normalisations de R :

$$f(v_1 \otimes v_2) = \bar{R}_{V_1,V_2}(z_1)(v_1 \otimes v_2) - \bar{R}_{V_1,V_2}(z_2)(v_1 \otimes v_2) = v_1 \otimes v_2 - v_1 \otimes v_2 = 0$$

Donc le noyau est $V_1 \otimes V_2$ et $\bar{R}_{V_1,V_2}(z_1) = \bar{R}_{V_1,V_2}(z_2)$. Mais alors la fraction rationelle $\bar{R}_{V_1,V_2}(z) \in End(V_1 \otimes V_2)(z)$ est indépendante de z, et ne peut avoir de pôle. Contradiction.

On a montré le résultat pour $m = 2$, les autres cas se traitent de manière analogue on considérant pour le couple (i, j) (pour lequel on a le pôle) l'application :

$$\sigma_{i,j} : V_1 \otimes ...V_i \otimes ...V_j \otimes ...V_m \to V_1 \otimes ...V_j \otimes ...V_i \otimes ...V_m$$

Montrons à présent l'autre implication : supposons que le produit tensoriel $V_1 \otimes ... \otimes V_m$ est réductible. Son q-caractère est donc somme d'au moins deux q-caractères de module irréductible, et en particulier $\chi_q(V_1)...\chi_q(V_m)$ contient au moins un autre monôme dominant m' que le produit des monômes dominants m_k des $\chi_q(V_k)$. Alors m' s'écrit comme produit de m monômes, chacun provenant d'un $\chi_q(V_k)$: $m' = m'_1...m'_m$. Comme le poids d'un monôme de V_k non dominant est de la forme $\omega_{s(m)} - \alpha_{i_1} - .. - \alpha_{i_r}$, si tous les m'_k sont non dominants, le poids de m' est la somme de poids de ce type et ne peut pas être dominant. De plus, comme chaque $A_{i,b}^{-1}$ contient deux $Y_{j,c}^+$ avec un produit de monômes non dominants du type $Y_{i,a}(1+\sum M_p)$ avec les M_p monômes en $A_{j,b}^{-1}$ ne peut être dominant puisque les $Y_{i,a}$ ne suffisent pas à annuler les $A_{j,b}^{-1}$. On a donc au moins un $m'_{k_0} = Y_{s(k_0),b}$ dominant qui s'annule avec un $Y_{s(k_0),b}^{-1}$ apparaissant dans un m'_{k_1}. En appliquant le corollaire 21 à $\chi_q(V_{k_1})$, on obtient que $m'_{k_1} = m_{k_1}M$ avec M produit de $A_{s,a_{k_1}q^l}^{-1}$, $l \geq 0$. Parmi les l qui apparaissent effectivement, on considère le plus grand l_0, et on peut supposer que m'_{k_0} annule $Y_{a_{k_1}q^{l_0}q_{s(k_1)}}^{-1}$ dans $A_{a_{k_1}q^{l_0}q_{s(k_1)}}^{-1}$ (quitte à considérer le plus grand a_{k_1} en module). On a donc $a_{k_1}q^{l_0} = a_iq_i^{-1}$. Mais alors avec les notations du lemme 59, on trouve un coefficient diagonale de $\bar{R}_{V_{k_0},V_{k_1}}$ avec un pôle en $(a_ia_j^{-1}q_i)-1 = a_j/a_i$. $\square$

Index des notations

Repères dans la bibliographie

Pour les généralités sur les algèbres de Lie de dimension on peut se rapporter à l'ouvrage de référence [Bou68], puis à [Fuc92] pour une approche plus intuitive. Les résultats de base concerant les algèbres enveloppantes des algèbres de Lie sont démontrés dans [Car55]. Une introduction à la théorie des algèbres de Hopf est donnée dans [Swe69]. Les résultats concernant la structure et les représentations de dimension finie des algèbres de Lie semi-simples sont détaillés dans [Ser66] et [Hum72]. La théorie générale des algèbres de Kac-Moody, et en particulier des algèbres affines, est présentée dans [Kac90]. Les livres [Gui95] et [Kas95] nous introduisent au point de vue des déformations formelles. Les algèbres semi-simples quantifiées sont définies dans [Dri87]. Leurs représentations sont étudiées dans [Ros92]. Pour les algèbres affines quantifiées et leur représentations, on peut se rapporter à [Cha91] pour $\mathcal{U}_q(s\hat{l}_2)$, et à [Cha94] pour le cas général. On trouve dans [Bax82] l'origine de l'équation de Yang-Baxter en mécanique statistique, qui mène à la notion de R-matrice universelle, comme expliqué dans [Ros95]. Le lien avec la théorie des catégories monoïdales est donné dans [Kas97]. La construction par double de Drinfeld est décrite dans [Ros92] et [Ros98]. L'article [Pap95] étudie les ordres normaux sur les racines. Les opérateurs de Lusztig sont décrits dans [Jan96] pour le cas semi-simple, et dans [Bec94] pour le cas affine. Les formules explicites de la R-matrice universelle sont données dans [Ro92] pour le cas semi-simple, et dans [Kho93] pour le cas affine. Des résultats relatifs à la normalisation de la R-matrice sont étudiés dans [Eti98]. La théorie des q-caractères est introduite dans [Fre99], en référence à des travaux dans [Din94], puis est complétée dans [Fre01].

Références

Articles et exposés

[Bec94] **J. Beck**, *Braid Group Action and Quantum Affine Algebras*
Communications in Mathematical Physics, vol 165, pp 555-568 (1994)

[Bec94b] **J. Beck**, *Convex Bases of PBW Type for Quantum Affine Algebras*
Communications in Mathematical Physics, vol 165, pp 193-199 (1994)

[Car55] **P. Cartier**, *Le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt*
Séminaire "Sophus Lie", 1ère année : 1954/1955, exposé no 1, Ecole Normale Supérieure (1955)

[Cha91] **V. Chari et A. Pressley**, *Quantum Affine Algebras*
Communications in Mathematical Physics, vol 142, pp 261-283, (1991)

[Din94] **J. Ding et P. Etingof**, *The Center of a Quantum Affine Algebra at the Critical Level*
Mathematical Research Letters 1, pp 469-480 (1994)

[Dri87] **V. G. Drinfeld**, *Quantum Groups*
Proc. I.C.M. Berkeley 1986, A.M.S., Providence, vol 1 pp 798-820 (1987)

[Fre99] **E. Frenkel et N. Reshetikhin**, *The q-Characters of Representations of Quantum Affine Algebras and Deformations of W-Algebras*
Prépublication disponible en ligne (http ://xxx.lpthe.jussieu.fr/abs/math/9810055)
Recent Developments in Quantum Affine Algebras and related topics, Contemporary Mathematics, vol 248, pp 163-205 (1999)

[Fre01] **E. Frenkel et E. Mukhin**, *Combinatorics of q-Characters of Finite-Dimensional Representations of Quantum Affine Algebras*
Prépublication disponible en ligne (http ://xxx.lpthe.jussieu.fr/abs/math/9911112)
Communications in Mathematical Physics, vol 216, no. 1, pp 23-57 (2001)

[Kho93] **S.M. Khoroshkin et V.N. Tolstoy**, *On Drinfeld's Realization of Quantum Affine Algebras*
Journal of Geometry and Physics, vol 11, pp 445-452, Pays-bas (1993)

[Pap95] **P. Papi**, *Convex Orderings in Affine Root Systems*
Journal of Algebra, vol 172, pp 613-623 (1995)

[Ros92] **M. Rosso**, *Représentations des groupes quantiques*
Séminaire Bourbaki, exposé no 744, Astérique, vol 201-203, pp 443-83, Société mathématique de France, Paris (1992)

[Ros95] **M. Rosso**, *Groupes quantiques : origines et applications*
Images des mathématiques, année 1995, pp 68-76, CNRS-éditions (1995)

[Ros98] **M. Rosso**, *Quantum Groups and Braid Groups*
Symétries quantiques, Les Houches, Session LXIV, 1995, exposé no 9, pp 757-785 (1998)

Livres

[Bax82] **R.J. Baxter**, *Exacty Solved Models in Statistical Mechanics*
Academics Press, London (1982)

[Bou68] **N. Bourbaki**, *Groupes et algèbres de Lie*
Chapitre VI, Hermann, Paris (1968)

[Cha94] **V. Chari et A. Pressley**, *A Guide to Quantum Groups*
Cambridge University Press, Cambridge (1994)

[Eti98] **P.I. Etingof, I.B. Frenkel et A.A. Kirillov, Jr.**, *Lectures on Representations Theory and Knizhnik-Zamolodchikov Equations*
Mathematical Surveys and Monographs, vol. 58, AMS (1998)

[Fuc92] **J. Fuchs**, *Affine Lie Algebras and Quantum Groups*
Cambridge University Press (1992)

[Gui95] **A. Guichardet**, *Groupes quantiques Introduction au point de vue formel*
InterÉditions/ CNRS Éditions (1992)

[Hum72] **J.E. Humphreys**, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*
Springer-Verlag (1972)

[Jan96] **J. C. Jantzen**, *Lectures on Quantum Groups*
Graduate Studies in Mathematics, vol 6, AMS (1996)

[Kac90] **V.G. Kac**, *Infinite Dimensional Lie Algebras*
Cambridge University Press (1990)

[Kas95] **C. Kassel**, *Quantum Groups*
Graduate Texts in Mathematics, vol 155, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin (1995)

[Kas97] **C. Kassel, M. Rosso, V. Turaev**, *Quantum Groups and Knot Invariants*
Panoramas et Synthèses, no 5, Société Mathématique de France, Paris (1997)

[Ser66] **J.-P. Serre**, *Algèbres de Lie semi-simple complexes*
Benjamin (1966)

[Swe69] **M.E. Sweedler**, *Hopf Algebras*
Benjamin (1969)