Georges Maltsiniotis

LA THÉORIE DE L'HOMOTOPIE DE GROTHENDIECK

Georges Maltsiniotis

Institut de Mathématiques de Jussieu, Université Paris 7 Denis Diderot,
Case Postale 7012, Bâtiment Sophie Germain, 75205 PARIS cedex 13, FRANCE.

E-mail : georges.maltsiniotis@imj-prg.fr

Url : https://webusers.imj-prg.fr/~georges.maltsiniotis/

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 14F20, 14F35, 18B25, 18F20, 18G10, 18G30, 18G50, 18G55, 55P10, 55P15, 55P60, 55Q05, 55U10, 55U35, 55U40.

Mots clefs. — Asphérique, catégorie test, colimite homotopique, ensemble simplicial, équivalence faible, extension de Kan homotopique, foncteur lisse, foncteur propre, homotopie, localisation, modélisateur, préfaisceau.

LA THÉORIE DE L'HOMOTOPIE DE GROTHENDIECK

Georges Maltsiniotis

Résumé. — Le but de ce livre est d'exposer la très belle théorie de l'homotopie développée par Grothendieck dans "À la poursuite des champs". Il s'agit de caractériser les catégories de préfaisceaux qui permettent de modéliser les types d'homotopie, généralisant ainsi la théorie des ensembles simpliciaux. Les critères dégagés par Grothendieck montrent que de telles catégories, appelées des *modélisateurs élémentaires*, abondent. On expose une construction catégorique des extensions de Kan homotopiques à gauche, généralisant une construction des colimites homotopiques par Thomason. On étudie deux classes remarquables de foncteurs, les foncteurs *propres* et les foncteurs *lisses*, notions duales l'une de l'autre. Ces foncteurs sont caractérisés par des propriétés cohomologiques, inspirées des théorèmes de changement de base propre ou lisse, en géométrie algébrique. On termine par un exposé de la théorie des structures d'asphéricité de Grothendieck.

Abstract **(Grothendieck's homotopy theory).** — The aim of this book is to explain the very beautiful homotopy theory developed by Grothendieck in "Pursuing Stacks". The question is to characterize categories of presheaves that modelize homotopy types, thus generalizing the theory of simplicial sets. The criteria discovered by Grothendieck show that there are pretty many such categories, called *elementary modelizers*. We describe a categorical construction of left homotopy Kan extensions, generalizing a construction of homotopy colimits by Thomason. We study two remarkable classes of functors, *proper* and *smooth* functors, these two notions being mutually dual. These functors are characterized by cohomological properties inspired by the proper or smooth base change theorem in algebraic geometry. We end with a presentation of Grothendieck's theory of asphericity structures.

TABLE DES MATIÈRES

Préface 1

Introduction 3
La catégorie homotopique Hot 3
La définition simpliciale 4
La définition catégorique 5
La définition toposique 6
Les modélisateurs et les catégories test 7
Les foncteurs test 9
Les localisateurs fondamentaux 10
Les extensions de Kan homotopiques 13
La catégorie de modèles conjecturée par Grothendieck 14
Foncteurs propres, foncteurs lisses 15
Le plan du livre 16
Notations 18

1. La théorie des catégories test 19
1.1. Localisateurs fondamentaux faibles et asphéricité 19
1.2. Isomorphismes locaux et foncteurs localement asphériques 29
1.3. Les équivalences faibles dans une catégorie de préfaisceaux 36
1.4. Les catégories test faibles 44
1.5. Segments et homotopie dans une catégorie 48
1.6. Les catégories test 56
1.7. Les catégories test strictes 62
1.8. Les foncteurs test 68
1.9. Décalages et exemples de catégories test 84

2. Les localisateurs fondamentaux 111
2.1. Les propriétés élémentaires des localisateurs fondamentaux 111
2.2. Foncteurs d'intégration et de coïntégration 121

2.3. Images directes et composés transfinis d'équivalences faibles . . . 126
2.4. Catégories filtrantes et asphéricité . . . 137

3. Théorie homotopique élémentaire des catégories . . . 151
3.1. Colimites et extensions de Kan homotopiques . . . 151
3.2. Morphismes propres, lisses . . . 159
3.3. Variation du localisateur fondamental faible . . . 184

4. La théorie des structures d'asphéricité . . . 187
4.1. Structures d'asphéricité . . . 187
4.2. Structures homotopiques et structures de contractibilité . . . 206
4.3. Structure d'asphéricité définie par une structure de contractibilité . . . 211
4.4. Variation du localisateur fondamental faible . . . 218

Bibliographie . . . 221

Index des notations . . . 223

Index Terminologique . . . 227

PRÉFACE

Ce texte est une version augmentée, en cours de construction, de mon livre publié dans Astérisque [**21**]. Il comporte plusieurs nouvelles sections, et un nouveau chapitre sur les structures d'asphéricité de Grothendieck. L'introduction ainsi que les index ne sont pas encore mis à jour par rapport à la version précédente de 2012.

Le but de ce livre est de rendre accessible la très belle théorie de l'homotopie de Grothendieck, telle qu'elle est développée dans "Pursuing Stacks" ("À la poursuite des champs"). La plupart des résultats exposés ici lui sont dus. Dans un autre volume d'Astérisque [**10**], qui peut être considéré comme la suite de ce livre, Denis-Charles Cisinski a prouvé deux conjectures énoncées par Grothendieck, et a poursuivi le développement de la théorie.

La lecture de ce livre ne remplace évidemment pas celle de "Pursuing Stacks". Son ambition est de rendre cette dernière plus facile, en donnant une exposition plus systématique (et plus "bourbachique") des idées de Grothendieck. Tous les sujets traités dans "la poursuite" ne sont pas couverts par ces notes. En particulier, il n'est pas fait mention d'infini-groupoïdes, ni d'abélianisation, ou schématisation des types d'homotopie, et l'aspect toposique n'est considéré que dans l'introduction. En outre, la structure de journal "intime" mathématique, qui fait de "Pursuing Stacks" une lecture passionnante, pleine de surprises, et précieuse pour la compréhension de la genèse des concepts, est perdue.

En dehors du nouveau chapitre 4 sur les structures d'asphéricité, les principaux ajouts au livre publié sont la section 1.9 sur la théorie des décalages et les exemples de catégories test qui s'en déduisent, en particulier la catégorie Θ de Joyal, la section 3.3 étudiant l'incidence du changement de localisateur fondamental sur les diverses notions introduites dans le livre, des compléments sur la stabilité par limites inductives filtrantes des foncteurs asphériques, coasphériques, propres, lisses, ainsi que des catégories totalement asphériques (2.4.17, 2.4.18, 2.4.19, 3.2.18, 3.2.19), la preuve de Grothendieck que tout foncteur se décompose en une équivalence faible suivie d'un morphisme propre et lisse (3.2.45), et un exemple de catégorie test faible qui est un ensemble ordonné (2.4.22). La section 1.1 du livre publié a été remplacée par deux sections, la deuxième comportant de nombreux compléments sur les isomorphismes locaux et les foncteurs localement asphériques. Enfin, on a légèrement modifié la définition d'un précontracteur, en exigeant qu'il soit non vide (1.7.17).

Je voudrais remercier Dimitri Ara, Alain Bruguières, Albert Burroni, Bruno Kahn, Bernhard Keller et Fabien Morel pour les innombrables discussions que j'ai eues avec eux, ainsi que tous les participants du groupe de travail "du mercredi soir". Je voudrais plus particulièrement exprimer ma reconnaissance à Denis-Charles Cisinski pour notre longue et fructueuse collaboration pendant et après la préparation de sa thèse sous ma direction. Je le remercie également de m'avoir autorisé à inclure dans ce texte une version de notre article [**12**] développant sa théorie des "décalages". Je voudrais aussi remercier Jonathan Chiche pour les "coquilles" qu'il a trouvées dans la version publiée, et qui sont ici corrigées. Une grande partie de ce livre a été écrite sur l'île de Patmos. J'aimerais exprimer ma gratitude à la famille Vamvakos qui m'a longtemps hébergé sur cette île, et m'a épargné de tout souci matériel.

Patmos, Paris, Port-en-Bessin, 1997-2020

INTRODUCTION

La catégorie homotopique Hot

La catégorie homotopique Hot est définie classiquement comme étant la catégorie dont les objets sont les CW-complexes, et les morphismes les classes d'homotopie d'applications continues entre CW-complexes. On démontre qu'on obtient une catégorie équivalente en localisant la catégorie $\mathcal{T}\!op$ de *tous* les espaces topologiques et applications continues, relativement aux équivalences faibles topologiques.

On rappelle que si M désigne une catégorie et W une partie de la classe $\mathsf{Fl}(M)$ des flèches de M, il existe (quitte à éventuellement agrandir l'univers de base) une catégorie $W^{-1}M$ (localisée de M relativement à W) et un foncteur $\gamma : M \longrightarrow W^{-1}M$ (foncteur de localisation) tel que pour tout $w \in W$, $\gamma(w)$ soit un isomorphisme de $W^{-1}M$, et qui sont universels pour cette propriété. Autrement dit, pour tout foncteur $F : M \longrightarrow M'$ tel que pour tout $w \in W$, $F(w)$ soit inversible, il existe un unique foncteur $\widetilde{F} : W^{-1}M \longrightarrow M'$ tel que $F = \widetilde{F}\gamma$.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dr, "F"'] & W^{-1}M \arrow[d, dashed, "\widetilde{F}"] \\ & M' \end{tikzcd}$$

La catégorie $W^{-1}M$ est construite en inversant formellement les morphismes appartenant à W.

Si l'on note W_∞ la partie de $\mathsf{Fl}(\mathcal{T}\!op)$ formée des *équivalences faibles topologiques*, autrement dit, des applications continues $f : X \longrightarrow Y$ telles que

(a) $\pi_0(f) : \pi_0(X) \longrightarrow \pi_0(Y)$ soit une application bijective,
(b) pour tout $n \geqslant 1$, et tout $x \in X$, $\pi_n(f, x) : \pi_n(X, x) \longrightarrow \pi_n(Y, f(x))$ soit un isomorphisme de groupes,

alors la catégorie homotopique Hot est équivalente à la catégorie $W_\infty^{-1}\mathcal{T}\!op$.

La définition simpliciale

La catégorie homotopique peut être également définie, à équivalence de catégories près, en termes d'ensembles simpliciaux. La catégorie des ensembles simpliciaux est la catégorie $\widehat{\Delta}$ des préfaisceaux (foncteurs contravariants à valeurs dans la catégorie $\mathcal{E}ns$ des ensembles) sur la catégorie Δ des simplexes, catégorie dont les objets sont les ensembles

$$\mathit{\Delta}_m = \{0, 1, \dots, m\} \ , \quad m \in \mathbb{N} \ ,$$

ordonnés par l'ordre naturel, et les morphismes les applications croissantes. Les simplexes topologiques standards

$$\mathit{\Delta}^{\mathcal{T}op}_m = \{(x_0, x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \sum_{i=0}^{m} x_i = 1 \, , \ x_i \geqslant 0 \, , \ 0 \leqslant i \leqslant m\}$$

forment un espace topologique cosimplicial $\mathit{\Delta}^{\mathcal{T}op}$ (foncteur covariant de Δ dans $\mathcal{T}op$), en définissant, pour tout morphisme $\varphi : \mathit{\Delta}_m \longrightarrow \mathit{\Delta}_n$ de Δ, une application continue

$$\mathit{\Delta}^{\mathcal{T}op}_\varphi \ : \ \mathit{\Delta}^{\mathcal{T}op}_m \longrightarrow \mathit{\Delta}^{\mathcal{T}op}_n$$

par

$$\mathit{\Delta}^{\mathcal{T}op}_\varphi(x_0, x_1, \dots, x_m) = (y_0, y_1, \dots, y_n) \quad , \quad \text{où} \quad y_j = \sum_{\varphi(i)=j} x_i \quad , \quad 0 \leqslant j \leqslant n \quad .$$

On en déduit un unique (à isomorphisme unique près) couple de foncteurs adjoints

$$|\ .\ | : \widehat{\Delta} \longrightarrow \mathcal{T}op \quad , \quad S : \mathcal{T}op \longrightarrow \widehat{\Delta}$$

(le foncteur de *réalisation topologique*, et le foncteur *ensemble simplicial singulier*) tel que la restriction de $|\ .\ |$ à la catégorie Δ (identifiée à une sous-catégorie pleine de $\widehat{\Delta}$, par le plongement de Yoneda) soit isomorphe au foncteur $\mathit{\Delta}^{\mathcal{T}op} : \Delta \longrightarrow \mathcal{T}op$. Pour tout ensemble simplicial K, l'espace topologique $|K|$ est le quotient

$$|K| = \coprod_m \mathit{\Delta}^{\mathcal{T}op}_m \times K_m \Big/ \sim \quad ,$$

où l'ensemble K_m est considéré comme espace topologique discret, et $\sim$ est la relation d'équivalence engendrée par les relations élémentaires

$$(x, K_\varphi(y)) \sim (\mathit{\Delta}^{\mathcal{T}op}_\varphi(x), y) \ , \quad \varphi : \mathit{\Delta}_m \longrightarrow \mathit{\Delta}_n \in \mathsf{Fl}(\Delta) \ , \quad x \in \mathit{\Delta}^{\mathcal{T}op}_m \ , \quad y \in K_n \quad .$$

Pour tout espace topologique X, l'ensemble simplicial $S(X)$ est défini par

$$(S(X))_m = \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}op}(\mathit{\Delta}^{\mathcal{T}op}_m, X) \quad , \qquad m \geqslant 0 \quad .$$

Une *équivalence faible simpliciale* est un morphisme d'ensembles simpliciaux dont la réalisation topologique est une équivalence d'homotopie. Si l'on note W_∞ la partie de $\mathsf{Fl}(\widehat{\Delta})$ formée des équivalences faibles, on démontre que la catégorie localisée $\mathsf{W}_\infty^{-1}\widehat{\Delta}$ est équivalente à la catégorie homotopique Hot. De façon plus précise, les foncteurs $|\ .\ |$ et S sont compatibles aux équivalences faibles, et induisent des équivalences de catégories

$$\mathsf{W}_\infty^{-1}\widehat{\Delta} \longrightarrow W_\infty^{-1}\mathcal{T}op \quad \text{et} \quad W_\infty^{-1}\mathcal{T}op \longrightarrow \mathsf{W}_\infty^{-1}\widehat{\Delta}$$

quasi-inverses l'une de l'autre (voir par exemple [**13**]).

La définition catégorique

La catégorie homotopique Hot peut être enfin obtenue, à équivalence de catégories près, comme localisation de la catégorie $\mathcal{C}at$ des petites catégories. L'inclusion $\Delta \hookrightarrow \mathcal{C}at$, définie en associant à l'ensemble ordonné $\varDelta_m$, $m \geqslant 0$, la catégorie correspondante, fournit un objet cosimplicial de $\mathcal{C}at$, d'où un couple de foncteurs adjoints

$$\mathsf{c} : \widehat{\Delta} \longrightarrow \mathcal{C}at \quad , \qquad \mathrm{N} : \mathcal{C}at \longrightarrow \widehat{\Delta}$$

(le foncteur de *réalisation catégorique*, et le foncteur *nerf*) tel que la restriction de c à Δ soit l'inclusion $\Delta \hookrightarrow \mathcal{C}at$. Pour toute petite catégorie C, l'ensemble simplicial $\mathrm{N}(C)$ (nerf de C) est défini par

$$(\mathrm{N}(C))_m = \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}at}(\varDelta_m, C) \quad , \qquad m \geqslant 0 \quad ,$$

l'ensemble ordonné $\varDelta_m$ étant considéré comme une catégorie. Plus concrètement, $(\mathrm{N}(C))_m$ est l'ensemble formé des suites de m flèches composables de C. Une *équivalence faible catégorique* est un foncteur entre petites catégories dont le nerf est une équivalence faible simpliciale. Si l'on note $\mathcal{W}_\infty$ la partie de $\mathsf{Fl}(\mathcal{C}at)$ formée des équivalences faibles, on démontre que la catégorie localisée $\mathcal{W}_\infty^{-1}\mathcal{C}at$ est équivalente à la catégorie homotopique Hot. De façon plus précise, le foncteur nerf est compatible aux équivalences faibles et induit une équivalence de catégories

$$\mathcal{W}_\infty^{-1}\mathcal{C}at \longrightarrow \mathsf{W}_\infty^{-1}\widehat{\Delta}$$

(voir par exemple [**17**] ou [**19**]). En revanche, contrairement au foncteur de réalisation topologique, le foncteur de réalisation catégorique n'est pas compatible aux équivalences faibles. Pour construire un quasi-inverse à l'équivalence de catégories définie par le foncteur nerf, on peut procéder comme suit. On définit un foncteur

$$\mathsf{Simpl} : \widehat{\Delta} \longrightarrow \mathcal{C}at$$

en associant à un ensemble simplicial K sa *catégorie des simplexes* $\mathsf{Simpl}(K)$, dont l'ensemble des objets est la somme disjointe

$$\mathsf{Ob}(\mathsf{Simpl}(K)) = \coprod_m K_m \quad ,$$

un morphisme de $x \in K_m$ vers $y \in K_n$ étant une application croissante $\varphi : \varDelta_m \longrightarrow \varDelta_n$ telle que $x = K_\varphi(y)$. On montre qu'on a l'égalité

$$\mathsf{W}_\infty = \mathsf{Simpl}^{-1}(\mathcal{W}_\infty) \quad ,$$

et que le foncteur Simpl définit une équivalence de catégories

$$\mathsf{W}_\infty^{-1}\widehat{\Delta} \longrightarrow \mathcal{W}_\infty^{-1}\mathcal{C}at \quad ,$$

quasi-inverse à celle induite par le foncteur nerf (voir par exemple [**17**] ou [**19**]).

La définition toposique

Les équivalences faibles catégoriques admettent aussi une caractérisation en termes de cohomologie à coefficients localement constants. Si $u : A \longrightarrow B$ est un foncteur entre petites catégories, alors u est une équivalence faible si et seulement si le morphisme de topos $(u^*, u_*) : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{B}$ (où $u^* : \widehat{B} \longrightarrow \widehat{A}$ désigne le foncteur image inverse de préfaisceaux $F \longmapsto u^*(F) = Fu$, $F \in \mathsf{Ob}(\widehat{B})$, et $u_* : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{B}$ son adjoint à droite) est une équivalence d'Artin-Mazur. Un morphisme de topos $\psi = (\psi^*, \psi_*) : X \longrightarrow Y$ est une *équivalence d'Artin-Mazur* [**3**] si pour tout $m \geqslant 0$, le morphisme

$$H^m(Y, \mathcal{F}) \longrightarrow H^m(X, \psi^*(\mathcal{F})) \quad ,$$

induit par ψ, est un isomorphisme pour tout faisceau localement constant $\mathcal{F}$ sur Y, d'ensembles si $m = 0$, de groupes si $m = 1$, de groupes abéliens si $m \geqslant 2$.

Une démonstration détaillée de cette caractérisation des équivalences faibles catégoriques est exposée dans [**23**]. L'idée de la démonstration est de comparer l'espace classifiant $|\,\mathrm{N}(A)|$, réalisation topologique du nerf d'une petite catégorie A, à son topos classifiant $\widehat{A}$. Pour cela, on définit un morphisme de topos, fonctoriel en A,

$$\mathcal{T}(|\,\mathrm{N}(A)|) \longrightarrow \widehat{A} \quad ,$$

où pour tout espace topologique X, $\mathcal{T}(X)$ désigne le topos des faisceaux d'ensembles sur X, et on démontre que ce morphisme est une équivalence d'Artin-Mazur. Ensuite, on montre que pour tout espace topologique "gentil" X, par exemple un CW-complexe, la cohomologie du topos $\mathcal{T}(X)$ est canoniquement isomorphe à celle de l'espace topologique X. Enfin, un théorème de Whitehead donne une caractérisation cohomologique des équivalences faibles topologiques, analogue à la définition des équivalences d'Artin-Mazur (les conditions sur le π_0 et le π_1 étant équivalentes aux conditions sur le H^0 et le H^1 non abélien), ce qui permet d'affirmer qu'une application continue $f : X \longrightarrow Y$ entre CW-complexes est une équivalence faible topologique si et seulement si le morphisme correspondant de topos $\mathcal{T}(X) \longrightarrow \mathcal{T}(Y)$, défini par les foncteurs image inverse et image directe de faisceaux, est une équivalence d'Artin-Mazur. On termine la démonstration, grâce à une propriété du type "deux sur trois" pour les équivalences d'Artin-Mazur, en considérant, pour un morphisme $A \longrightarrow B$ de $\mathcal{C}at$, le carré commutatif de morphismes de topos

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T}(|\,\mathrm{N}(A)|) \arrow[r] \arrow[d] & \widehat{A} \arrow[d] \\
\mathcal{T}(|\,\mathrm{N}(B)|) \arrow[r] & \widehat{B}
\end{tikzcd} \quad ,$$

dont les flèches horizontales sont des équivalences d'Artin-Mazur.

En conclusion, on dispose donc de plusieurs catégories, $\mathcal{T}op$, $\widehat{\Delta}$, $\mathcal{C}at$, dont les objets peuvent servir comme "modèles" pour les types d'homotopie.

Les modélisateurs et les catégories test

Le défi que Grothendieck se pose dans *Pursuing Stacks* [**14**] est de chercher *toutes* les catégories dont les objets sont des “modèles” pour les types d'homotopie. De façon plus précise, il s'agit de déterminer les couples (M, W), où M est une catégorie, et W une partie de $\mathsf{Fl}(M)$, tels que la localisation de M par W soit équivalente à la catégorie homotopique Hot. Grothendieck appelle *modélisateur* un tel couple, et *équivalences faibles* les flèches appartenant à W. Il s'intéresse plus particulièrement à la recherche des modélisateurs *canoniques*, autrement dit ceux dont les équivalences faibles sont déterminées canoniquement par la structure même de la catégorie sous-jacente. S'il ne parvient certes pas à donner une réponse complète à une question aussi générale, il obtient, moyennant quelques hypothèses restrictives, une caractérisation des modélisateurs (M, W) dans le cas où M est une catégorie de préfaisceaux sur une petite catégorie. Cela le conduit naturellement à dégager la très belle théorie des catégories test, généralisant celle des ensembles simpliciaux.

Les équivalences d'Artin-Mazur permettent de définir canoniquement une notion d'équivalence faible pour les morphismes d'un topos. Soit X un topos. Pour tout objet x de X, on note X/x le topos des objets de X “au-dessus” de x. On dit qu'un morphisme $\varphi : x \longrightarrow x'$ de X est une *équivalence faible* de X si le morphisme de topos $X/x \longrightarrow X/x'$, induit par φ, est une équivalence d'Artin-Mazur. En particulier, si A est une petite catégorie, et $X = \widehat{A}$ est le topos des préfaisceaux sur A, un morphisme de préfaisceaux $\varphi : F \longrightarrow F'$ est une équivalence faible de $\widehat{A}$ si le morphisme de topos

$$\widehat{A}/F = X/F \longrightarrow X/F' = \widehat{A}/F'$$

est une équivalence d'Artin-Mazur. Or, pour tout préfaisceau F sur A, on a un isomorphisme canonique $\widehat{A}/F \simeq \widehat{A/F}$, où A/F désigne la catégorie des objets de A, considérés comme préfaisceaux représentables sur A, au-dessus de F. Ainsi, un morphisme $\varphi : F \longrightarrow F'$ de $\widehat{A}$ est une équivalence faible si et seulement si le morphisme de topos $\widehat{A/F} \longrightarrow \widehat{A/F'}$ est une équivalence d'Artin-Mazur, autrement dit, si le foncteur $A/F \longrightarrow A/F'$, induit par φ, est dans $\mathcal{W}_\infty$. On obtient ainsi une définition élémentaire des équivalences faibles de $\widehat{A}$, indépendante de toute considération toposique. On note $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$ la partie de $\mathsf{Fl}(\widehat{A})$ formée des équivalences faibles de $\widehat{A}$. Si l'on note $i_A : \widehat{A} \longrightarrow \mathcal{C}at$ le foncteur associant à un préfaisceau F la catégorie A/F, et à un morphisme de préfaisceaux $\varphi : F \longrightarrow F'$ le foncteur $A/F \longrightarrow A/F'$, induit par φ, alors $\mathcal{W}_{\widehat{A}} = i_A^{-1}(\mathcal{W}_\infty)$. On remarque que si $A = \Delta$, alors le foncteur i_Δ est canoniquement isomorphe au foncteur Simpl, et par suite que $\mathcal{W}_{\widehat{\Delta}} = \mathsf{W}_\infty$.

La question que Grothendieck se pose est de dégager des conditions nécessaires et suffisantes sur une petite catégorie A pour que le foncteur

$$\overline{\imath}_A : \mathcal{W}_{\widehat{A}}^{-1}\widehat{A} \longrightarrow \mathcal{W}_\infty^{-1}\mathcal{C}at = \mathsf{Hot} \quad ,$$

induit par i_A, soit une équivalence de catégories. Mais il constate qu'il est difficile de trouver des critères pour caractériser les catégories satisfaisant à cette propriété. Il renforce donc cette dernière en demandant en outre que le foncteur

$$i_A^* : \mathcal{C}at \longrightarrow \widehat{A} \quad , \qquad C \mapsto \big(a \mapsto \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}at}(A/a, C)\big) \quad ,$$

adjoint à droite de i_A, respecte les équivalences faibles (autrement dit, que l'on ait $i_A^*(\mathcal{W}_\infty) \subset \mathcal{W}_{\widehat{A}}$). La catégorie A est alors appelée une *catégorie test faible*. Dans ce cas, le foncteur

$$\bar{\imath}_A^* : \mathsf{Hot} = \mathcal{W}_\infty^{-1}\mathcal{C}at \longrightarrow \mathcal{W}_{\widehat{A}}^{-1}\widehat{A} \quad ,$$

induit par i_A^*, est une équivalence de catégories quasi-inverse de $\bar{\imath}_A$. De plus, Grothendieck obtient une caractérisation simple des catégories test faibles : pour qu'une petite catégorie A soit une catégorie test faible, il faut et il suffit que pour toute petite catégorie C admettant un objet final, le préfaisceau $i_A^*(C)$ soit *asphérique* (on dit qu'un préfaisceau F sur A est asphérique si l'unique foncteur de la catégorie $i_A(F) = A/F$ vers la catégorie ponctuelle est dans $\mathcal{W}_\infty$). Il observe cependant que cette notion n'est pas locale, dans le sens que si A est une catégorie test faible, il n'en est pas nécessairement de même pour A/a, $a \in \mathsf{Ob}(A)$. Ainsi, il appelle *catégorie test locale* une petite catégorie A telle que pour tout objet a de A, A/a soit une catégorie test faible. Enfin, il dit que A est une *catégorie test*, et que $\widehat{A}$ est un *modélisateur élémentaire*, si A est à la fois une catégorie test locale et une catégorie test faible. Ce sont les notions de catégorie test locale et de catégorie test qui s'avèrent être les plus importantes. Ces catégories admettent des caractérisations étonnamment simples. Si on note $\varDelta_1$ la catégorie correspondant à l'ensemble ordonné $\{0 \leqslant 1\}$, alors pour qu'une petite catégorie A soit une catégorie test locale, il faut et il suffit que le préfaisceau $i_A^*(\varDelta_1)$ (qui est *l'objet de Lawvere* du topos $\widehat{A}$, représentant le foncteur $F \mapsto \{\text{sous-objets de } F\}$) soit *localement asphérique* (on dit qu'un préfaisceau F sur A est localement asphérique si pour tout objet a de A, la restriction de F à A/a est un préfaisceau asphérique sur A/a). De plus, une catégorie test locale est une catégorie test si et seulement si l'unique foncteur de A vers la catégorie ponctuelle est dans $\mathcal{W}_\infty$ (on dit alors que A est *asphérique*). Ces critères permettent facilement de trouver un grand nombre de catégories test et de catégories test locales. On peut par exemple en déduire que le produit d'une catégorie test par une petite catégorie asphérique (resp. arbitraire) est une catégorie test (resp. test locale). En particulier, tout type d'homotopie peut être représenté par une catégorie test locale. La catégorie des simplexes Δ est, comme on s'y attend, un exemple de catégorie test, et celle des ensembles simpliciaux $\widehat{\Delta}$ un exemple de modélisateur élémentaire. Il en est de même pour la catégorie des cubes et celle des ensembles cubiques [**10**]. Le slogan de Grothendieck est que toute catégorie test est aussi "bonne" que celle des ensembles simpliciaux pour "faire de l'homotopie".

La dernière (et plus forte) variante de catégorie test, introduite par Grothendieck, est celle de *catégorie test stricte*. Une catégorie test stricte est une catégorie test A telle que le foncteur $i_A : \widehat{A} \longrightarrow \mathcal{C}at$ soit compatible aux produits finis, à équivalence faible près. Cela revient aussi à demander que le foncteur de localisation $\widehat{A} \longrightarrow \mathsf{W}_{\widehat{A}}^{-1}\widehat{A}$ commute aux produits finis. On dit alors que la catégorie $\widehat{A}$ des préfaisceaux sur A

est un *modélisateur élémentaire strict.* Ainsi, dans un modélisateur élémentaire strict, le produit cartésien représente le produit des types d'homotopie. Toute petite sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}at$ formée de catégories non vides, stable par produits finis, et ayant un objet qui soit une catégorie comportant au moins deux objets (même éventuellement isomorphes) est une catégorie test stricte. Cela montre que les catégories test strictes abondent. Par exemple, une petite catégorie équivalente à celle des ensembles finis non vides, ou à celle des ensembles ordonnés finis non vides, ou encore à celle des catégories finies non vides est une catégorie test stricte. La catégorie des simplexes Δ est également une catégorie test stricte, et celle des ensembles simpliciaux $\widehat{\Delta}$ un modélisateur élémentaire strict. En revanche, la catégorie des cubes *n'est pas* une catégorie test stricte.

Les foncteurs test

Les foncteurs test généralisent, dans le cadre des catégories test, le foncteur nerf de la théorie simpliciale. Si A est une catégorie test faible, on aimerait appeler foncteur test faible un foncteur $i : A \longrightarrow \mathcal{C}at$ tel que si on note i^* le foncteur

$$i^* : \mathcal{C}at \longrightarrow \widehat{A} \quad , \qquad C \longmapsto \big(a \mapsto \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}at}(i(a), C)\big) \quad ,$$

on ait $i^*(\mathcal{W}_\infty) \subset \mathcal{W}_{\widehat{A}}$, et le foncteur $\overline{\imath}^* : \mathsf{Hot} = \mathcal{W}_\infty^{-1}\mathcal{C}at \longrightarrow \mathcal{W}_{\widehat{A}}^{-1}\widehat{A}$, induit par i^*, soit une équivalence de catégories. Par exemple, le foncteur $a \mapsto A/a$ satisfait à ces propriétés, puisque alors i^* est le foncteur i_A^*, déjà considéré, et si A est la catégorie des simplexes Δ, le foncteur d'inclusion $i : \Delta \hookrightarrow \mathcal{C}at$ satisfait aussi à ces conditions, puisque alors i^* est le foncteur nerf N. Néanmoins, il n'y a pas de caractérisation simple des foncteurs satisfaisant à ces propriétés. Or, on remarque que si le foncteur i est pleinement fidèle, alors ces conditions impliquent que pour tout objet a de A, la catégorie $i(a)$ est asphérique. Grothendieck ajoute cette dernière condition à la définition d'un foncteur test faible, et il obtient ainsi une notion qui peut être aisément caractérisée.

Plus précisément, il définit un *foncteur test faible* comme étant un foncteur $i : A \longrightarrow \mathcal{C}at$, d'une catégorie test faible A vers la catégorie des petites catégories, tel que pour tout objet a de A, $i(a)$ soit une catégorie asphérique, et tel que $i^*(\mathcal{W}_\infty) \subset \mathcal{W}_{\widehat{A}}$. Il démontre qu'alors le foncteur $\overline{\imath}^* : \mathsf{Hot} = \mathcal{W}_\infty^{-1}\mathcal{C}at \longrightarrow \mathcal{W}_{\widehat{A}}^{-1}\widehat{A}$, induit par i^*, est automatiquement une équivalence de catégories, quasi-inverse de $\overline{\imath}_A$, et il prouve le critère suivant. Soient A une catégorie test faible, et $i : A \longrightarrow \mathcal{C}at$ un foncteur tel que pour tout objet a de A, la catégorie $i(a)$ soit asphérique. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i) *i est un foncteur test faible ;*

(ii) *pour toute petite catégorie asphérique C, le préfaisceau $i^*(C)$ est asphérique.*

Ensuite, il définit un *foncteur test local* comme étant un foncteur $i : A \longrightarrow \mathcal{C}at$, de source une catégorie test locale, tel que pour tout objet a de A, le foncteur $A/a \longrightarrow \mathcal{C}at$, induit par i, soit un foncteur test faible, et il obtient la caractérisation suivante. Soient A une petite catégorie arbitraire, et $i : A \longrightarrow \mathcal{C}at$ un foncteur tel que pour tout objet a de A, la catégorie $i(a)$ soit asphérique. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i) *A est une catégorie test locale, et i un foncteur test local ;*
(ii) *pour toute petite catégorie asphérique C, le préfaisceau $i^*(C)$ est localement asphérique.*

Si en outre pour tout objet a de A, la catégorie $i(a)$ possède un objet final (ce qui est une condition suffisante d'asphéricité), alors ces deux conditions sont aussi équivalentes à la condition suivante :

(iii) *$i^*(\mathit{\Delta}_1)$ est un préfaisceau localement asphérique.*

Cette dernière condition est en général très facile à vérifier, et cette caractérisation est un outil puissant pour trouver des catégories test locales, et des foncteurs test locaux. Enfin, il démontre que si A est une catégorie test, et $i : A \longrightarrow \mathcal{C}at$ un foncteur test local, alors i est aussi un foncteur test faible. On dit alors que i est un *foncteur test.*

Le paradigme de foncteur test est l'inclusion $i : \Delta \hookrightarrow \mathcal{C}at$, qui donne naissance au foncteur nerf $N = i^*$. Les critères ci-dessus montrent facilement que si A est une petite sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}at$ formée de catégories ayant un objet final, stable par produits finis, et telle que la catégorie correspondant à l'ensemble ordonné $\mathit{\Delta}_1$ soit un objet de A, alors l'inclusion $A \hookrightarrow \mathcal{C}at$ est un foncteur test. De même, si $\widetilde{\Delta}$ est la sous-catégorie pleine de la catégorie des ensembles, formée des ensembles $\{0, 1, \dots, m\}$, $m \geqslant 0$, le foncteur associant à un tel ensemble la catégorie correspondant à l'ensemble ordonné (par inclusion) des ses parties non vides est un foncteur test. En revanche, si Δ' désigne la sous-catégorie (non pleine) de Δ, ayant mêmes objets que Δ, mais dont les morphismes sont les applications *strictement* croissantes, alors l'inclusion $i' : \Delta' \hookrightarrow \mathcal{C}at$ est un foncteur test faible mais *pas* un foncteur test, et Δ' est une catégorie test faible mais *pas* une catégorie test.

Les localisateurs fondamentaux

Dans son étude des catégories test, Grothendieck observe que ses démonstrations n'utilisent pas la définition même de $\mathcal{W}_\infty$, mais seulement quelques propriétés formelles de cette classe de flèches, dont la plus importante est le théorème A de Quillen :

> *Si $u : A \longrightarrow B$ est un morphisme de $\mathcal{C}at$ tel que pour tout objet b de B, $u/b : A/b \longrightarrow B/b$* [(1)] *soit dans $\mathcal{W}_\infty$, alors u est dans $\mathcal{W}_\infty$* [**25**].

Grothendieck remarque que dans le contexte toposique, ce résultat est extrêmement naturel. En effet, si $\psi : X \longrightarrow Y$ est un morphisme de topos, on dit que ψ est *asphérique* si pour tout objet y de Y, le morphisme de topos $\psi/y : X/y \longrightarrow Y/y$, induit par ψ, est une équivalence d'Artin-Mazur. Un argument cohomologique standard montre que pour vérifier l'asphéricité de ψ, on peut se limiter à des y appartenant à une famille génératrice du topos Y. En particulier, si $u : A \longrightarrow B$ est un morphisme de $\mathcal{C}at$, et si $X = \widehat{A}$, $Y = \widehat{B}$, et $\psi = (u^*, u_*)$, comme les objets de B forment une famille génératrice du topos Y, pour montrer que ψ est asphérique, il suffit de vérifier que pour tout objet b de B,

$$X/b = \widehat{A}/b \simeq \widehat{A/b} \longrightarrow \widehat{B/b} \simeq \widehat{B}/b = Y/b$$

est une équivalence d'Artin-Mazur, autrement dit, que $A/b \longrightarrow B/b$ est dans $\mathcal{W}_\infty$. Ainsi, cette dernière condition implique l'asphéricité du morphisme de topos $\psi : X \longrightarrow Y$, et en particulier, en prenant l'objet final de $Y = \widehat{B}$, on en déduit que $\widehat{A} \longrightarrow \widehat{B}$ est une équivalence d'Artin-Mazur, autrement dit que $u : A \longrightarrow B$ est dans $\mathcal{W}_\infty$, ce qui donne une esquisse de preuve cohomologique du théorème A de Quillen.

Un *localisateur fondamental faible* est une partie $\mathcal{W}$ de $\mathsf{Fl}(\mathcal{C}at)$ satisfaisant aux conditions suivantes :

- La (Saturation faible.) Les identités sont dans $\mathcal{W}$. Si deux des trois flèches d'un triangle commutatif sont dans $\mathcal{W}$, il en est de même pour la troisième. Si un morphisme i de $\mathcal{C}at$ admet une rétraction r telle que ir soit dans $\mathcal{W}$, alors i est dans $\mathcal{W}$.
- Lb (Objet final.) Si A est une petite catégorie admettant un objet final, alors l'unique foncteur de A vers la catégorie ponctuelle est dans $\mathcal{W}$.
- Lc (Théorème A de Quillen.) Si $u : A \longrightarrow B$ est un morphisme de $\mathcal{C}at$ tel que pour tout objet b de B, $u/b : A/b \longrightarrow B/b$ soit dans $\mathcal{W}$, alors u est dans $\mathcal{W}$.

Grothendieck reprend, dans ce cadre, la théorie des catégories test, en prenant comme équivalences faibles les flèches de $\mathcal{C}at$ appartenant à $\mathcal{W}$, et en introduisant la catégorie homotopique relative à $\mathcal{W}$, $\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}} = \mathcal{W}^{-1}\mathcal{C}at$, et les notions de $\mathcal{W}$-catégorie test, de $\mathcal{W}$-catégorie test faible ou locale, de $\mathcal{W}$-foncteur test *etc.* Il vérifie qu'on obtient les mêmes résultats, avec les mêmes démonstrations.

---

(1) Pour tout foncteur $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, et tout objet d de $\mathcal{D}$, on note $\mathcal{C}/d$ la catégorie des objets de $\mathcal{C}$ au-dessus de d, autrement dit, la catégorie dont les objets sont les couples $(c,\ s : F(c) \longrightarrow d)$, c étant un objet de $\mathcal{C}$, et s un morphisme de $\mathcal{D}$, et dont les flèches $(c, s) \longrightarrow (c', s')$ sont les morphismes $g : c \longrightarrow c'$ de $\mathcal{C}$ tels que $s'F(g) = s$. En particulier, pour toute catégorie $\mathcal{D}$, et tout objet d, on obtient ainsi la catégorie $\mathcal{D}/d$ des objets de $\mathcal{D}$ au-dessus de d, en considérant le foncteur identique $1_{\mathcal{D}} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$. Le foncteur $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ induit alors un foncteur $F/d : \mathcal{C}/d \longrightarrow \mathcal{D}/d$.

L'avantage de cette approche axiomatique est d'une part, sa grande clarté, et d'autre part, le fait qu'elle s'applique à d'autres contextes que celui de la catégorie homotopique classique. Elle s'applique, en particulier, à l'homotopie rationnelle, et plus généralement, à toutes sortes d'équivalences faibles définies par des conditions cohomologiques. Grothendieck propose de considérer les parties $\mathcal{W}$ de $\mathsf{Fl}(\mathcal{C}at)$, définies exactement comme $\mathcal{W}_\infty$, mais en remplaçant les équivalences d'Artin-Mazur par d'autres classes de morphismes de topos, définies par des conditions cohomologiques. Par exemple, si k désigne un anneau commutatif (on pense plus particulièrement à $k = \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$), on peut demander que le morphisme de topos $\psi : X \longrightarrow Y$ induise un isomorphisme sur la cohomologie à coefficients dans k, ou à coefficients dans un k-module arbitraire, ou dans les faisceaux localement constants de k-modules. On peut varier en prenant une famille d'anneaux k_i, ou une famille de groupes commutatifs constants, par exemple $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, pour n premier à un ensemble de nombres premiers, conditions qu'on peut éventuellement combiner avec des conditions sur la 1-cohomologie non-abélienne à coefficients dans des faisceaux localement constants de groupes...

Tous ces localisateurs fondamentaux faibles satisfont à une version relative du théorème A de Quillen exprimant que si une flèche de $\mathcal{C}at$ est une équivalence faible localement au-dessus d'une base, alors elle est une équivalence faible :

LC (Théorème A de Quillen relatif.) Si

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "v"'] & & B \arrow[dl, "w"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

est un triangle commutatif de $\mathcal{C}at$, et si pour tout objet c de C, le foncteur $u/c : A/c \longrightarrow B/c$, induit par u, est dans $\mathcal{W}$, alors u est dans $\mathcal{W}$.

Un *localisateur fondamental* est un localisateur fondamental faible satisfaisant à cette condition (qui implique la condition Lc). Cette hypothèse plus forte sur $\mathcal{W}$ est utile pour certains résultats plus fins que la simple caractérisation des catégories test. Elle sert, par exemple, pour démontrer que l'image directe d'une équivalence faible de préfaisceaux par un monomorphisme est une équivalence faible, ou pour montrer que la classe formée des équivalences faibles de préfaisceaux, qui sont des monomorphismes, est stable par images directes. Elle sert aussi pour prouver que les équivalences faibles (entre catégories ou préfaisceaux) sont stables par limites inductives filtrantes, ou par rétractes. Elle permet également d'établir l'existence des colimites homotopiques, et plus généralement des extensions de Kan homotopiques à gauche, dans $\mathcal{C}at$. Enfin, elle fournit le cadre naturel pour étudier deux classes importantes de morphismes de $\mathcal{C}at$, les foncteurs propres et les foncteurs lisses, qui sont caractérisés par des propriétés cohomologiques inspirées des théorèmes de changement de base propre ou lisse en géométrie algébrique.

Dans "Pursuing Stacks", Grothendieck conjecture que $\mathcal{W}_\infty$ est le plus petit localisateur fondamental. Cette conjecture, permettant une caractérisation purement axiomatique de $\mathcal{W}_\infty$, a été démontrée par Cisinski dans sa thèse. Il a depuis amélioré ce résultat, en prouvant que $\mathcal{W}_\infty$ est le plus petit localisateur fondamental *faible* [**10**].

Les extensions de Kan homotopiques

Le fil conducteur de la théorie de l'homotopie de Grothendieck est le concept d'extension de Kan homotopique, conduisant à la théorie des *dérivateurs* [**15**], [**16**], [**20**]. Un *localisateur* est un couple (M, W) formé d'une catégorie M, et d'une partie W de $\mathsf{Fl}(M)$ [(2)]. Étant donné un tel localisateur, on associe à toute petite catégorie I, la catégorie $\mathsf{Hot}_{(M,W)}(I)$, localisée de la catégorie des foncteurs de I vers M, relativement à la classe des morphismes de foncteurs qui sont dans W argument par argument. Pour tout foncteur entre petites catégories $u : I \longrightarrow J$, on en déduit un foncteur image inverse $u^* : \mathsf{Hot}_{(M,W)}(J) \longrightarrow \mathsf{Hot}_{(M,W)}(I)$, induit par la composition par u. Une *extension de Kan homotopique* à gauche ou à droite est un adjoint à gauche ou à droite de u^*. Un cas particulier important, correspondant aux colimites ou limites homotopiques, est celui où la catégorie J est réduite à la catégorie ponctuelle. Un théorème de Cisinski [**9**] affirme que si le localisateur (M, W) est *Quillenisable*, autrement dit, s'il existe une structure de catégorie de modèles fermée [**24**] sur M dont les équivalences faibles sont exactement les flèches de M appartenant à W, et si la catégorie M admet des petites limites inductives (resp. projectives), alors les extensions de Kan homotopiques à gauche (resp. à droite) existent. D'autre part, un théorème de Thomason assure que le localisateur $(\mathcal{C}at, \mathcal{W}_\infty)$ est Quillenisable [**28**], ce qui prouve l'existence des extensions homotopiques à gauche *et* à droite dans ce cas.

En fait, l'existence des extensions de Kan homotopiques *à gauche* pour ce localisateur est bien plus élémentaire, et se généralise aisément au cas d'un localisateur fondamental arbitraire $\mathcal{W}$. Pour toute petite catégorie I, notons plus simplement $\mathsf{Hot}_\mathcal{W}(I)$ la catégorie $\mathsf{Hot}_{(\mathcal{C}at,\mathcal{W})}(I)$, localisation de la catégorie des foncteurs de I vers la catégorie $\mathcal{C}at$ des petites catégories par les morphismes de foncteurs qui sont dans $\mathcal{W}$ argument par argument. Pour tout foncteur $F : I \longrightarrow \mathcal{C}at$, on désigne par $\int F \longrightarrow I$ la catégorie cofibrée sur I définie par ce foncteur, à l'aide de la "construction de Grothendieck". Si $u : I \longrightarrow J$ désigne un morphisme de $\mathcal{C}at$, on en déduit un morphisme composé $\int F \longrightarrow J$, d'où un foncteur

$$J \longrightarrow \mathcal{C}at \quad , \qquad j \longmapsto \big(\textstyle\int F\big)/j \quad .$$

On démontre que ce procédé, associant à F le foncteur $j \mapsto \big(\int F\big)/j$, induit par localisation un foncteur $u_! : \mathsf{Hot}_\mathcal{W}(I) \longrightarrow \mathsf{Hot}_\mathcal{W}(J)$, et que ce dernier est un adjoint à

(2) Quand il n'y a aucune ambiguïté sur la catégorie M, on dit parfois que W est un localisateur.

gauche du foncteur image inverse $u^* : \mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(J) \longrightarrow \mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(I)$. On généralise ainsi une construction des colimites homotopiques par Thomason [**27**].

La catégorie de modèles conjecturée par Grothendieck

Le problème de l'existence des extensions de Kan homotopiques *à droite*, pour un localisateur fondamental arbitraire, est bien plus délicat. Pour essayer de traiter ce problème, Grothendieck conjecture que pour toute $\mathcal{W}$-catégorie test, il existe une structure de catégorie de modèles fermée sur la catégorie des préfaisceaux sur A, dont les équivalences faibles sont les morphismes de $\widehat{A}$ appartenant à $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$, et dont les cofibrations sont les monomorphismes de $\widehat{A}$. En fait, cette conjecture n'est vérifiée que moyennant une hypothèse, au demeurant assez anodine, d'*accessibilité* du localisateur fondamental $\mathcal{W}$.

Soit α un cardinal. On dit qu'un ensemble ordonné I est *α-filtrant* si toute partie de I de cardinalité inférieure ou égale à α admet un majorant dans I. Une limite inductive *α-filtrante* est une limite inductive indexée par un ensemble ordonné α-filtrant. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie admettant des limites inductives α-filtrantes. On dit qu'un objet X de $\mathcal{C}$ est *α-présentable* si le foncteur

$$\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E}ns \quad , \qquad Y \longmapsto \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$$

commute aux limites inductives α-filtrantes. Une catégorie *α-accessible* est une catégorie $\mathcal{C}$ admettant des limites inductives α-filtrantes, telle que tout objet soit limite inductive α-filtrante d'objets α-présentables, et telle que la sous-catégorie pleine formée des objets α-présentables soit essentiellement petite (équivalente à une petite catégorie). Une catégorie $\mathcal{C}$ est *accessible* s'il existe un cardinal α tel que $\mathcal{C}$ soit α-accessible. Un foncteur $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, entre catégories accessibles, est *accessible* s'il existe un cardinal α tel que le foncteur F commute aux limites inductives α-filtrantes. Une classe d'objets d'une catégorie accessible est *accessible* si la sous-catégorie pleine formée de ces objets est accessible, et si le foncteur d'inclusion est accessible. Une classe de flèches d'une catégorie accessible est *accessible* si la classe correspondante d'objets de la catégorie des flèches est accessible.

La catégorie des préfaisceaux sur une petite catégorie, ainsi que la catégorie des petites catégories, sont accessibles. On dit qu'un localisateur fondamental est *accessible* s'il est accessible comme classe de flèches de $\mathcal{C}at$. Si $\mathcal{W}$ est un localisateur fondamental accessible, il résulte aussitôt de la théorie générale de l'accessibilité (voir par exemple [**1**]) que pour toute petite catégorie A, la classe $\mathcal{W}_{\widehat{A}} = i_A^{-1}(\mathcal{W})$ de flèches de $\widehat{A}$ est accessible. Un théorème de Jeffrey Smith (voir [**4**]) implique alors facilement que si A est une $\mathcal{W}$-catégorie test locale (et à plus forte raison si elle est une $\mathcal{W}$-catégorie test), alors il existe une structure de catégorie de modèles fermée à engendrement cofibrant sur $\widehat{A}$, dont les équivalences faibles sont les éléments de $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$, et dont les cofibrations sont les monomorphismes de $\widehat{A}$, ce qui prouve en particulier la conjecture de Grothendieck dans ce cas.

L'inconvénient de cette approche est que l'hypothèse qu'un localisateur fondamental $\mathcal{W}$ soit accessible est à première vue difficile à vérifier. C'est grâce à la belle théorie développée par Cisinski [**10**] que cette difficulté est surmontée. Il démontre la conjecture de Grothendieck en supposant simplement qu'il existe un *ensemble* de flèches de $\mathcal{C}at$ tel que $\mathcal{W}$ soit le plus petit localisateur fondamental contenant cet ensemble, hypothèse bien plus facile à vérifier. Il appelle un tel localisateur accessible, et il résulte de sa théorie que cette définition est finalement équivalente à la précédente, le théorème difficile étant justement cette équivalence. Il montre aussi une réciproque : si $\mathcal{W}$ est un localisateur fondamental, et s'il existe une catégorie test locale non vide A telle que $\widehat{A}$ admette une structure de catégorie de modèles fermée, à engendrement cofibrant, dont la classe des équivalences faibles est $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$, et dont les cofibrations sont les monomorphismes, alors $\mathcal{W}$ est accessible.

En fait, l'hypothèse qu'un localisateur fondamental soit accessible n'est pas très restrictive. Il semble en effet qu'on peut montrer, moyennant un axiome de grands cardinaux connu sous le nom de *principe de Vopěnka*, que *tout* localisateur fondamental est accessible (en utilisant les résultats de [**7**], ou de [**8**], ou encore de [**26**]). On ne s'attend donc pas à trouver un localisateur fondamental non accessible en utilisant uniquement les axiomes de ZFC (Zermelo-Fraenkel plus l'axiome du choix). En revanche, si l'on suppose qu'il n'existe pas de cardinaux mesurables, alors on peut construire un localisateur fondamental non accessible [**8**]. En particulier, l'axiome de constructibilité de Gödel implique l'existence de tels localisateurs, puisque tout cardinal mesurable est (fortement) inaccessible. Ainsi, l'affirmation "tout localisateur fondamental est accessible" aurait le même statut qu'un axiome de grands cardinaux.

Foncteurs propres, foncteurs lisses

Dans "Pursuing Stacks" [**14**], Grothendieck a introduit les notions de foncteur propre et de foncteur lisse, en s'inspirant des propriétés cohomologiques des morphismes propres et des morphismes lisses de schémas en géométrie algébrique. Une étude systématique de ces foncteurs a été entreprise par lui dans "Les dérivateurs" [**15**]. La construction des extensions de Kan homotopiques à gauche à l'aide des catégories cofibrées, exposée précédemment, rend cette théorie élémentaire.

Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental. On dit qu'un foncteur entre petites catégories $u : A \longrightarrow B$ (resp. $v : B' \longrightarrow B$) est *$\mathcal{W}$-propre* (resp. *$\mathcal{W}$-lisse*) si pour tout carré cartésien

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "w"] \arrow[d, "u'"'] & A \arrow[d, "u"] \\ B' \arrow[r, "v"'] & B \end{tikzcd} \quad ,$$

le morphisme de changement de base

$$u'_! w^* \longrightarrow v^* u_!$$

(où $u_! : \mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(A) \longrightarrow \mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(B)$ et $u'_! : \mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(A') \longrightarrow \mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(B')$ désignent les extensions de Kan homotopiques à gauche relatives à $\mathcal{W}$) est un isomorphisme, et cette propriété reste vraie après tout changement de base. Grothendieck obtient des caractérisations simples des foncteurs $\mathcal{W}$-propres et des foncteurs $\mathcal{W}$-lisses, et il est émerveillé par la découverte du fait qu'un foncteur $u : A \longrightarrow B$ est $\mathcal{W}$-propre si et seulement si le foncteur "dual" $u^\circ : A^\circ \longrightarrow B^\circ$, entre les catégories opposées, est $\mathcal{W}$-lisse, phénomène qui n'a bien entendu aucun analogue en géométrie algébrique. Si le foncteur $u : A \longrightarrow B$ fait de A une catégorie cofibrée sur B, alors u est un exemple de foncteur $\mathcal{W}$-propre. Dualement, si A est une catégorie fibrée sur B, alors u est un foncteur $\mathcal{W}$-lisse. Néanmoins, pour tout localisateur fondamental $\mathcal{W}$, il existe des foncteurs $\mathcal{W}$-propres qui ne sont pas des cofibrations (au sens des catégories cofibrées), et des foncteurs $\mathcal{W}$-lisses qui ne sont pas des fibrations (au sens des catégories fibrées). La manipulation des changements de base par des foncteurs propres ou lisses s'avère un outil de calcul extrêmement puissant en théorie de l'homotopie, ainsi qu'en algèbre homologique.

La théorie des foncteurs propres et des foncteurs lisses peut, en fait, être développée dans un cadre beaucoup plus général, celui des *structures d'asphéricité*, permettant d'englober aussi la théorie des catégories cofibrées et des catégories fibrées [**22**].

Le plan du livre

Le premier chapitre est consacré à l'étude des catégories test et des foncteurs test. Dans le premier paragraphe, on introduit le concept de localisateur fondamental faible, ainsi que les notions qui s'y attachent directement : équivalences faibles, catégories asphériques, foncteurs asphériques ou localement asphériques, et on étudie les propriétés élémentaires de ces notions. On démontre qu'un localisateur fondamental faible est stable par le foncteur "passage à la catégorie opposée", ce qui permet d'introduire les notions, "duales" aux précédentes, de foncteur coasphérique et de foncteur colocalement coasphérique. On prouve qu'un adjoint à gauche (resp. à droite) est asphérique (resp. coasphérique), et qu'une cofibration (resp. fibration) à fibres asphériques est un foncteur asphérique (resp. coasphérique). Un lemme "à la Mayer-Vietoris" est établi. Des exemples de localisateurs fondamentaux faibles sont présentés.

Dans le deuxième paragraphe, on définit les équivalences faibles et les morphismes asphériques de préfaisceaux, et on introduit les notions de préfaisceau asphérique et localement asphérique. Une caractérisation des foncteurs asphériques en termes de préfaisceaux est démontrée, et une version préfaisceautique du lemme de "Mayer-Vietoris" est établie.

Dans le paragraphe 3, on définit la catégorie homotopique relative à un localisateur fondamental, et on introduit les notions de catégorie pseudo-test et de catégorie test faible. Plusieurs caractérisations des catégories test faibles sont présentées.

Le paragraphe 4 est consacré aux "outils homotopiques". On introduit les notions de segment, de segment séparant, et on définit la relation d'homotopie relative à un ensemble de segments et les notions associées d'homotopisme et d'objet contractile. On établit le "lemme d'homotopie" qui relie les notions d'homotopie et d'équivalence faible. On présente l'exemple du segment de Lawvere, crucial pour la suite. On termine par l'étude de la relation d'homotopie dans la catégorie des petites catégories.

Dans le paragraphe 5, on introduit les notions importantes de catégorie test locale et de catégorie test, et on en donne plusieurs caractérisations. On établit une condition suffisante pour qu'une petite catégorie, admettant des produits finis, soit une catégorie test, ce qui permet de présenter une multitude d'exemples. On termine en démontrant que la catégorie des simplexes est une catégorie test.

Dans le paragraphe 6, on étudie la variante la plus forte de catégorie test, celle de catégorie test stricte. Dans ce but, on introduit la notion de petite catégorie totalement asphérique, caractérisée par plusieurs conditions équivalentes, une catégorie test stricte étant une catégorie test qui est totalement asphérique. On constate que la plupart des exemples de catégories test du paragraphe précédent sont en fait des catégories test strictes, et on présente des exemples de catégories test qui ne sont pas strictes. On définit le concept de contracteur, cas particulier de catégorie test stricte, et on démontre que la catégorie des simplexes est un contracteur.

Le paragraphe 7 est consacré à l'étude des foncteurs test. On introduit la notion de foncteur asphérique d'une petite catégorie vers la catégorie des petites catégories (notion à ne pas confondre avec celle de foncteur asphérique entre petites catégories), et on en donne plusieurs caractérisations. On en déduit les notions de foncteur test faible, de foncteur test local et de foncteur test, ainsi que des caractérisations de ces foncteurs. On présente plusieurs exemples de foncteurs test, dont l'inclusion de la catégorie des simplexes dans la catégorie des petites catégories, ce qui permet de retrouver la théorie du foncteur nerf. Enfin, on montre que la sous-catégorie de la catégorie des simplexes, ayant les mêmes objets, et comme morphismes les applications *strictement* croissantes, est une catégorie test faible, mais n'est pas une catégorie test.

Dans le paragraphe 8, on introduit la notion de décalage sur une petite catégorie, ce qui permet de donner d'autres exemples de catégories test. En particulier, on démontre que la catégorie cellulaire de Joyal est une catégorie test stricte.

Le deuxième chapitre est consacré au concept de localisateur fondamental (version renforcée de la notion de localisateur fondamental faible). Dans le premier paragraphe, on introduit ce concept, et on présente plusieurs définitions équivalentes. On démontre que la catégorie homotopique correspondante admet des produits finis, des sommes finies, et que le foncteur de localisation y commute.

Dans le deuxième paragraphe, on rappelle la "construction de Grothendieck", associant à un foncteur, à valeurs dans la catégorie des petites catégories, une catégorie cofibrée, qui est la "2-limite inductive" de ce foncteur. Dans le paragraphe suivant, on utilise cette construction pour prouver que pour tout localisateur fondamental, l'image directe d'une équivalence faible de préfaisceaux par un monomorphisme est une équivalence faible, et que la classe formée des équivalences faibles de préfaisceaux, qui sont des monomorphismes, est stable par images directes et composés transfinis. Dans le dernier paragraphe de ce chapitre, on montre que les catégories filtrantes sont asphériques, et que tout localisateur fondamental est stable par limites inductives filtrantes. On en déduit la stabilité par limites inductives filtrantes des foncteurs asphériques ou coasphériques. On présente un exemple d'ensemble ordonné qui est une catégorie test faible.

Dans le troisième chapitre, on présente certains aspects élémentaires de la théorie de l'homotopie dans la catégorie des petites catégories. Le premier paragraphe est consacré aux extensions de Kan homotopiques à gauche relatives à un localisateur fondamental arbitraire, et leur construction à l'aide des catégories cofibrées. On obtient une caractérisation des équivalences faibles en termes de colimites homotopiques, et un critère d'asphéricité pour les foncteurs, en termes d'extensions de Kan homotopiques à gauche.

Dans le second paragraphe, on introduit la notion de foncteur propre, ainsi que la notion duale de foncteur lisse, en adoptant une définition élémentaire ne faisant pas intervenir des extensions de Kan homotopiques. On démontre des propriétés de stabilité, et on en donne plusieurs caractérisations. En utilisant les propriétés des morphismes propres, on trouve une nouvelle caractérisation des morphismes coasphériques. On démontre également des théorèmes de changement de base, pour les morphismes propres ou lisses, analogues à ceux de la géométrie algébrique. Enfin, on montre que tout foncteur se décompose en une équivalence faible suivie d'un morphisme propre et lisse.

Dans le dernier paragraphe, on étudie l'incidence du changement de localisateur fondamental sur les diverses notions introduites dans le livre.

Notations

Les notations suivantes seront utilisées librement, sans autre explication. Pour toute catégorie $\mathcal{C}$, on notera $\mathsf{Ob}(\mathcal{C})$ la classe des objets de $\mathcal{C}$, $\mathsf{Fl}(\mathcal{C})$ la classe des flèches, ou morphismes, de $\mathcal{C}$, et $\mathcal{C}^\circ$ la catégorie opposée. Si c, c' sont deux objets de $\mathcal{C}$, l'ensemble des morphismes de c vers c' sera noté $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(c,c')$. Si $\mathcal{D}$ désigne une deuxième catégorie, on notera $\underline{\mathsf{Hom}}(\mathcal{C},\mathcal{D})$ la catégorie des foncteurs de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$. Si $F:\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{D}$ est un foncteur admettant une limite inductive (resp. projective), $\varinjlim F$ (resp. $\varprojlim F$) désignera un objet de $\mathcal{D}$ représentant cette limite. Pour toute petite catégorie A, on notera $\widehat{A}$ la catégorie $\underline{\mathsf{Hom}}(A^\circ,\mathcal{E}ns)$ des préfaisceaux sur A à valeurs dans la catégorie des ensembles $\mathcal{E}ns$. Pour tout ensemble E, le cardinal de E sera noté $\mathsf{card}(E)$.

CHAPITRE 1

LA THÉORIE DES CATÉGORIES TEST

1.1. Localisateurs fondamentaux faibles et asphéricité

1.1.1. — Soit M une catégorie. On dit qu'une partie W de $\mathsf{Fl}(M)$ est *faiblement saturée* si elle satisfait aux conditions suivantes :

FS1 Les identités sont dans W.

FS2 Si deux des trois flèches d'un triangle commutatif sont dans W, il en est de même de la troisième.

FS3 Si $i : X' \longrightarrow X$ et $r : X \longrightarrow X'$ sont deux morphismes de M tels que $ri = 1_{X'}$, et si ir est dans W, il en est de même de r (donc aussi de i, en vertu de FS1 et FS2).

Il résulte de FS1 et FS3 que les isomorphismes sont dans W.

On dit qu'un morphisme $u : A \longrightarrow B$ de M est *universellement dans* W si :

(i) u est *quarrable* (autrement dit, pour tout morphisme $B' \longrightarrow B$, le produit fibré $B' \times_B A$ est représentable dans M) ;

(ii) pour tout carré cartésien

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r] \arrow[d, "u'"'] & A \arrow[d, "u"] \\ B' \arrow[r] & B \end{tikzcd} \quad ,$$

le morphisme u' est dans W.

1.1.2. — Notons $\mathcal{C}at$ la catégorie des petites catégories, et e un objet final de $\mathcal{C}at$ (une catégorie ayant un seul objet, et l'identité de cet objet comme seul morphisme). On appelle *localisateur fondamental faible* une partie $\mathcal{W}$ de $\mathsf{Fl}(\mathcal{C}at)$ satisfaisant aux conditions suivantes :

La La partie $\mathcal{W}$ de $\mathsf{Fl}(\mathcal{C}at)$ est faiblement saturée.

Lb Si A est une petite catégorie admettant un objet final, alors $A \longrightarrow e$ est dans $\mathcal{W}$.

Lc Si $u : A \longrightarrow B$ est un morphisme de $\mathcal{C}at$ tel que pour tout objet b de B, le morphisme $u/b : A/b \longrightarrow B/b$ soit dans $\mathcal{W}$, alors u est dans $\mathcal{W}$.

On rappelle que A/b désigne la catégorie dont les objets sont les couples $(a, p : u(a) \longrightarrow b)$, où a est un objet de A et p un morphisme de B, un morphisme de (a, p) dans un deuxième objet (a', p') de A/b étant une flèche $f : a \longrightarrow a'$ de A telle que $p = p'u(f)$. Le morphisme u/b est le foncteur induit par u.

Les éléments de $\mathcal{W}$ sont appelés des *$\mathcal{W}$-équivalences*, ou des *équivalences faibles*. On dit qu'un morphisme $u : A \longrightarrow B$ de $\mathcal{C}at$ est *$\mathcal{W}$-asphérique*, ou plus simplement *asphérique*, si pour tout objet b de B, $u/b : A/b \longrightarrow B/b$ est une équivalence faible. La condition (Lc) ci-dessus peut donc s'énoncer : un morphisme asphérique de $\mathcal{C}at$ est une équivalence faible. On dit qu'une petite catégorie A est *$\mathcal{W}$-asphérique*, ou plus simplement *asphérique*, si le foncteur $A \longrightarrow e$ est asphérique, ou de façon équivalente une équivalence faible. La condition (Lb) affirme donc qu'une petite catégorie admettant un objet final est asphérique.

Dans la suite, on se fixe, une fois pour toutes, un localisateur fondamental faible $\mathcal{W}$.

Proposition 1.1.3. — *Soit $u : A \longrightarrow B$ un morphisme de $\mathcal{C}at$.*

(a) *Le foncteur u est asphérique si et seulement si, pour tout objet b de B, la catégorie A/b est asphérique.*
(b) *Si u est universellement dans $\mathcal{W}$, alors u est asphérique.*

Démonstration. — Pour tout objet b de B, la catégorie B/b admet un objet final $(b, 1_b)$. Il résulte donc des conditions (La) et (Lb) que $u/b : A/b \longrightarrow B/b$ est une équivalence faible si et seulement si $A/b \longrightarrow e$ l'est, ce qui prouve l'assertion (a). L'assertion (b) résulte de l'observation que le carré

$$\begin{tikzcd} A/b \arrow[r] \arrow[d, "u/b"'] & A \arrow[d, "u"] \\ B/b \arrow[r] & B \end{tikzcd} ,$$

où les flèches horizontales désignent les foncteurs canoniques, est cartésien. □

Proposition 1.1.4. — *Soit A une petite catégorie. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *$A \longrightarrow e$ est une équivalence faible ;*
(b) *$A \longrightarrow e$ est asphérique (autrement dit, A est asphérique) ;*
(c) *$A \longrightarrow e$ est universellement dans $\mathcal{W}$.*

Démonstration. — L'équivalence de (a) et (b) est évidente. L'implication $(c) \Rightarrow (b)$ résulte de la proposition 1.1.3, (b). Montrons que (a) implique (c). Il s'agit de montrer que pour toute petite catégorie B, la deuxième projection $A \times B \longrightarrow B$ est une équivalence faible. En vertu de (Lc) et de la proposition 1.1.3, (a), il suffit de montrer que pour tout objet b de B, la catégorie $(A \times B)/b$ est asphérique. Or, on a un isomorphisme de catégories $(A \times B)/b \simeq A \times (B/b)$, et comme par hypothèse A est asphérique, il suffit, en vertu de (La), de montrer que la première projection $A \times B/b \longrightarrow A$ est une équivalence faible. En vertu de (Lc) et de la proposition 1.1.3, (a), il suffit donc de montrer que pour tout objet a de A, la catégorie $(A \times B/b)/a$ est asphérique. Comme on a un isomorphisme $(A \times B/b)/a \simeq A/a \times B/b$, cela résulte de (Lb), puisque la catégorie $A/a \times B/b$ admet un objet final. □

Corollaire 1.1.5. — *Le produit de deux petites catégories asphériques est une catégorie asphérique.*

Démonstration. — Soient A et B deux petites catégories asphériques. En vertu de la proposition 1.1.4, la deuxième projection $A \times B \longrightarrow B$ est une équivalence faible, donc par (La), $A \times B \longrightarrow e$ est une équivalence faible, ce qui prouve le corollaire. □

Corollaire 1.1.6. — *Soient $u : A \longrightarrow B$, $u' : A' \longrightarrow B'$ deux morphismes asphériques de $\mathcal{C}at$. Alors le foncteur $u \times u' : A \times A' \longrightarrow B \times B'$ est asphérique.*

Démonstration. — Il s'agit de montrer que pour tout objet (b, b') de $B \times B'$, la catégorie $(A \times A')/(b, b')$ est asphérique. Or, $(A \times A')/(b, b')$ est canoniquement isomorphe à $(A/b) \times (A'/b')$, et par hypothèse, A/b et A'/b' sont asphériques. L'assertion résulte donc du corollaire 1.1.5. □

Lemme 1.1.7. — *Soit $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$ un couple de morphismes composables de $\mathcal{C}at$. Si u est asphérique, pour tout objet c de C, le morphisme $u/c : A/c \longrightarrow B/c$ induit par u est asphérique.*

Démonstration. — On vérifie aussitôt que pour tout objet $(b, p : v(b) \longrightarrow c)$ de B/c, la catégorie $(A/c)/(b, p)$ est canoniquement isomorphe à A/b, qui est asphérique puisque u est asphérique, ce qui prouve que u/c est asphérique. □

Proposition 1.1.8. — *Soit $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$ un couple de morphismes composables de $\mathcal{C}at$. Si u est asphérique, vu est asphérique si et seulement si v l'est.*

Démonstration. — Pour tout objet c de C, on a un triangle commutatif

$$\begin{tikzcd} A/c \arrow[rr, "u/c"] \arrow[dr, "vu/c"'] & & B/c \arrow[dl, "v/c"] \\ & C/c & \end{tikzcd}$$

et, en vertu du lemme 1.1.7, u/c est asphérique et en particulier une équivalence faible (Lc). On en déduit (La) que v/c est une équivalence faible si et seulement si vu/c l'est, ce qui prouve que v est asphérique si et seulement si vu l'est. □

Proposition 1.1.9. — *Un rétracte d'une catégorie asphérique est une catégorie asphérique, autrement dit, si A est une catégorie asphérique, et*

$$A' \xrightarrow{i} A \xrightarrow{r} A'$$

des morphismes de $\mathcal{C}at$ tels que $ri = 1_{A'}$, alors A' est une catégorie asphérique.

Démonstration. — En effet, en vertu de la propriété (FS3) de la faible saturation, le morphisme r est alors une équivalence faible, et par suite, la condition (FS2) implique que A' est une catégorie asphérique. □

Corollaire 1.1.10. — *Les morphismes asphériques de $\mathcal{C}at$ sont stables par rétractes, autrement dit, si $u : A \longrightarrow B$ est un morphisme asphérique, et*

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "u'"'] & A \arrow[r, "r"] \arrow[d, "u"] & A' \arrow[d, "u'"] \\ B' \arrow[r, "j"'] & B \arrow[r, "s"'] & B' \end{tikzcd}$$

un diagramme commutatif dans $\mathcal{C}at$ tel que $ri = 1_{A'}$ et $sj = 1_{B'}$, alors u' est un morphisme asphérique.

Démonstration. — La commutativité du diagramme ci-dessus implique aussitôt que pour tout objet b' de B', la catégorie A'/b' est un rétracte de A/b, où $b = j(b')$, et l'assertion résulte de la proposition précédente. □

Proposition 1.1.11. — *Soit $u : A \longrightarrow B$ un morphisme de $\mathcal{C}at$. Si u admet un adjoint à droite, alors u est asphérique.*

Démonstration. — Si $v : B \longrightarrow A$ désigne un adjoint à droite de u, la bijection fonctorielle

$$\mathsf{Hom}_B(u(a), b)) \simeq \mathsf{Hom}_A(a, v(b)), \quad a \in \mathsf{Ob}(A),\ b \in \mathsf{Ob}(B),$$

implique que pour tout objet b de B, la catégorie A/b est isomorphe à la catégorie $A/v(b)$ qui admet un objet final. On en déduit que A/b est asphérique, ce qui prouve la proposition. □

Corollaire 1.1.12. — *Une équivalence de petites catégories est asphérique.*

Corollaire 1.1.13. — *Une petite catégorie A admettant un objet initial est asphérique.*

Démonstration. — Soient $p_A : A \longrightarrow e$ l'unique foncteur de A vers l'objet final de $\mathcal{C}at$, et $s_A : e \longrightarrow A$ le foncteur associant à l'unique objet de e un objet initial de A. On vérifie aussitôt que p_A est un adjoint à droite de s_A. On en déduit que s_A est asphérique (1.1.11), donc une équivalence faible (Lc). Comme $p_A s_A = 1_e$, il résulte de (La) que p_A est une équivalence faible, ce qui prouve l'assertion. □

1.1.14. — Soit $u : A \longrightarrow B$ un foncteur. On rappelle que la *fibre* de u au-dessus d'un objet b de B est la sous-catégorie (non pleine) A_b de A dont les objets sont les objets a de A tels que $u(a) = b$, et dont les morphismes

sont les flèches f de A telles que $u(f) = 1_b$. Soit $c : a \longrightarrow a'$ un morphisme de A. On dit que c est *cocartésien* (relativement à u, ou au-dessus de B) si pour tout morphisme $f : a \longrightarrow a''$ tel que $u(f) = u(c)$, il existe un unique morphisme $g : a' \longrightarrow a''$ tel que $u(g) = 1_{u(a')}$ et $f = gc$.

$$\begin{tikzcd} & a'' \\ a \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "c"'] & a' \arrow[u, dashed, "g"'] \end{tikzcd}$$

On dit que u est une *précofibration* si pour tout morphisme $p : b \longrightarrow b'$ de B, et tout objet a de A au-dessus de b $\ (u(a) = b)$, il existe un morphisme cocartésien $c : a \longrightarrow a'$ au-dessus de p $\ (u(c) = p)$. On dit que u est une *cofibration* si u est une précofibration, et si le composé de deux morphismes cocartésiens composables de A est un morphisme cocartésien.

Dualement, on dit qu'un morphisme de A est *cartésien* (relativement à u, ou au-dessus de B) si le morphisme correspondant de A° (catégorie opposée de A) est cocartésien (relativement à $u^\circ : A^\circ \longrightarrow B^\circ$). On dit que le foncteur u est une *préfibration* (resp. une *fibration*) si le foncteur u° est une précofibration (resp. une cofibration).

Lemme 1.1.15. — *Un foncteur $u : A \longrightarrow B$ est une précofibration si et seulement si pour tout objet b de B, le foncteur canonique $A_b \longrightarrow A/b$, associant à un objet a de la fibre A_b de u au-dessus de b l'objet $(a, 1_b)$ de A/b, admet un adjoint à gauche.*

La démonstration est laissée au lecteur.

Proposition 1.1.16. — *Soit $u : A \longrightarrow B$ un morphisme de $\mathcal{C}at$, et supposons que u soit une précofibration. Pour que le foncteur u soit asphérique, il faut et il suffit que pour tout objet b de B, la fibre A_b de u au-dessus de b soit asphérique.*

Démonstration. — En vertu du lemme précédent, pour tout objet b de B, le foncteur

$$\begin{aligned} i_b : A_b &\longrightarrow A/b \\ a &\longmapsto (a, 1_b) \end{aligned}$$

admet un adjoint à gauche

$$j_b : A/b \longrightarrow A_b \quad .$$

Il résulte alors de la proposition 1.1.11 que le foncteur j_b est asphérique, donc qu'il est une équivalence faible, ce qui prouve la proposition. $\square$

1.1.17. — Soit A une catégorie. On définit une catégorie $S(A)$ comme suit :

$$\mathsf{Ob}(S(A)) = \mathsf{Fl}(A) \quad ,$$

et si $f : a \longrightarrow b$ et $f' : a' \longrightarrow b'$ sont deux objets de $S(A)$, l'ensemble $\mathsf{Hom}_{S(A)}(f, f')$ est formé des couples (g, h), $\;g : a' \longrightarrow a$, $\;h : b \longrightarrow b'$, tels que le diagramme :

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] & b \arrow[d, "h"] \\ a' \arrow[u, "g"] \arrow[r, "f'"'] & b' \end{tikzcd} \qquad\qquad f' = hfg$$

soit commutatif. L'identité de f est définie par $1_f = (1_a, 1_b)$, et si

$$(g, h) : f \longrightarrow f' \qquad \text{et} \qquad (g', h') : f' \longrightarrow f''$$

sont des morphismes de $S(A)$,

$$(g', h') \circ (g, h) = (gg', h'h) \quad .$$

On définit deux foncteurs :

$$A^\circ \xleftarrow{\;s_A\;} S(A) \xrightarrow{\;t_A\;} A$$

en posant pour tout objet f de $S(A)$,

$$s_A(f) = \text{source de } f \text{ comme morphisme de } A,$$
$$t_A(f) = \text{but de } f \text{ comme morphisme de } A,$$

et pour tout morphisme (g, h) de $S(A)$,

$$s_A(g, h) = g \quad , \qquad t_A(g, h) = h \quad .$$

On vérifie aussitôt que

$$\begin{aligned} I : S(A) &\longrightarrow S(A^\circ) \\ f &\longmapsto f \quad , \qquad\qquad f \in \mathsf{Ob}(S(A)) \ , \\ (g, h) &\longmapsto (h, g) \quad , \qquad (g, h) \in \mathsf{Fl}(S(A)) \ , \end{aligned}$$

définit un isomorphisme de catégories tel que

$$s_{A^\circ} I = t_A \qquad \text{et} \qquad t_{A^\circ} I = s_A \quad .$$

Lemme 1.1.18. — *Pour toute catégorie A, les foncteurs $s_A : S(A) \longrightarrow A^\circ$ et $t_A : S(A) \longrightarrow A$ sont des cofibrations.*

Démonstration. — Montrons que t_A est une cofibration. Soient $h : b \longrightarrow b'$ un morphisme de A, et $f : a \longrightarrow b$ un objet de $S(A)$ tel que $t_A(f) = b$. Notons $h_*(f)$ l'objet $h_*(f) = hf : a \longrightarrow b'$ de $S(A)$, et $c(h, f)$ le morphisme $c(h, f) = (1_a, h) : f \longrightarrow h_*(f)$

de $S(A)$.

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[d, "f"'] & a \arrow[l, "1_a"'] \arrow[d, "hf"] \\
b \arrow[r, "h"] & b'
\end{tikzcd}
\qquad\qquad c(h,f) : f \longrightarrow h^*(f)
$$

$$
b \xrightarrow{\ h\ } b'
$$

On a $t_A(c(h,f)) = h$, et on vérifie aussitôt que le morphisme $c(h,f)$ est cocartésien (relativement à t_A), ce qui prouve que t_A est une précofibration. En remarquant que pour tout morphisme $h' : b' \longrightarrow b''$ de A, on a

$$(h'h)_*(f) = h'hf = h'_*(h_*(f))$$

et

$$c(h', h_*(f))c(h,f) = (1_a, h')(1_a, h) = (1_a, h'h) = c(h'h, f) \quad ,$$

on en déduit que t_A est une cofibration.

En appliquant ce qui précède à la catégorie opposée, on en déduit que $s_A = t_{A^\circ} I$ est aussi une cofibration, ce qui prouve le lemme. □

Lemme 1.1.19. — *Pour toute petite catégorie A, les foncteurs $s_A : S(A) \longrightarrow A^\circ$ et $t_A : S(A) \longrightarrow A$ sont asphériques.*

Démonstration. — On vérifie aussitôt que les fibres de s_A et t_A admettent un objet initial. L'assertion résulte alors du corollaire 1.1.13, du lemme 1.1.18 et de la proposition 1.1.16. □

1.1.20. — Soit $u : A \longrightarrow B$ un foncteur. On en déduit un foncteur

$$
\begin{aligned}
S(u) : S(A) &\longrightarrow S(B) \\
f &\longmapsto u(f) \quad , & f \in \mathsf{Ob}(S(A)) \ , \\
(g,h) &\longmapsto (u(g), u(h)) \quad , & (g,h) \in \mathsf{Fl}(S(A)) \ ,
\end{aligned}
$$

rendant commutatif le diagramme suivant :

(1.1.20.1)
$$
\begin{tikzcd}
A^\circ \arrow[d, "u^\circ"'] & S(A) \arrow[l, "s_A"'] \arrow[r, "t_A"] \arrow[d, "S(u)"] & A \arrow[d, "u"] \\
B^\circ & S(B) \arrow[l, "s_B"] \arrow[r, "t_B"'] & B
\end{tikzcd}
\quad .
$$

Proposition 1.1.21. — *Soient $u : A \longrightarrow B$ un morphisme de $\mathcal{C}at$, et $u^\circ : A^\circ \longrightarrow B^\circ$ le foncteur opposé. Alors u est une équivalence faible si et seulement si u° l'est.*

Démonstration. — Considérons le diagramme commutatif 1.1.20.1 ci-dessus. En vertu du lemme 1.1.19 et de (Lc), les morphismes t_A, t_B, s_A et s_B sont des équivalences faibles. En utilisant la propriété de saturation (La), on en déduit que u est une équivalence faible si et seulement si $S(u)$ l'est, et $S(u)$ est une équivalence faible si et seulement si u° l'est, ce qui prouve la proposition. $\square$

Corollaire 1.1.22. — *Soit A une petite catégorie. Alors A est asphérique si et seulement si la catégorie opposée A° l'est.*

Corollaire 1.1.23. — *Soit $u : A \longrightarrow B$ un morphisme de $\mathcal{C}at$, et supposons que u soit une préfibration et que pour tout objet b de B, la fibre A_b de u au-dessus de b soit asphérique. Alors u est une équivalence faible.*

Démonstration. — Par définition, u étant une préfibration, le foncteur $u^\circ : A^\circ \longrightarrow B^\circ$ est une précofibration, et comme pour tout $b \in \mathsf{Ob}(B)$, $(A^\circ)_b = (A_b)^\circ$, l'assertion résulte du corollaire 1.1.22, de la proposition 1.1.16, de (Lc) et de la proposition 1.1.21. $\square$

Remarque 1.1.24. — La situation paraît dissymétrique. Cela vient du fait qu'on a privilégié les foncteurs asphériques, ce qui correspond à privilégier la cohomologie par rapport à l'homologie. Pour rétablir la symétrie, il suffit d'introduire la notion de foncteur coasphérique. On dit qu'un morphisme $u : A \longrightarrow B$ de $\mathcal{C}at$ est *$\mathcal{W}$-coasphérique*, ou plus simplement *coasphérique*, si le morphisme $u^\circ : A^\circ \longrightarrow B^\circ$ est asphérique. Pour tout objet b de B, notons $b\backslash A$ la catégorie dont les objets sont les couples $(a, p : b \longrightarrow u(a))$, où a est un objet de A et p un morphisme de B, un morphisme de (a, p) vers un deuxième objet (a', p') de $b\backslash A$ étant un morphisme $f : a \longrightarrow a'$ de A tel que le triangle

$$\begin{tikzcd} & b \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "p'"] & \\ u(a) \arrow[rr, "u(f)"'] & & u(a') \end{tikzcd}$$

soit commutatif. On a un isomorphisme canonique $A^\circ/b \simeq (b\backslash A)^\circ$, et le foncteur

$$b\backslash u : b\backslash A \longrightarrow b\backslash B \quad ,$$

induit par u, s'identifie au foncteur

$$(u^\circ/b)^\circ : (A^\circ/b)^\circ \longrightarrow (B^\circ/b)^\circ \quad .$$

Il résulte alors de la proposition 1.1.21 (resp. du corollaire 1.1.22 et de la proposition 1.1.3, (a)) que $u : A \longrightarrow B$ est coasphérique si et seulement si, pour tout objet b de B, le foncteur $b\backslash u : b\backslash A \longrightarrow b\backslash B$ est une équivalence faible (resp. la catégorie $b\backslash A$ est asphérique). En vertu de (Lc) et de la proposition 1.1.21, un foncteur coasphérique est une équivalence faible. En vertu de la proposition 1.1.11, un foncteur admettant un adjoint à gauche est coasphérique. Enfin, il résulte de la proposition 1.1.16 et du corollaire 1.1.22 que si u est une préfibration, alors u est coasphérique si et seulement s'il est à fibres asphériques.

1.1.25. — Soit A une catégorie. On rappelle qu'un *crible* de A est une sous-catégorie pleine U de A, telle que pour tout morphisme $a' \longrightarrow a$ de A, si a est un objet de U, il en est de même de a'. Un *cocrible* de A est une sous-catégorie pleine F de A telle que F° soit un crible de A°, autrement dit, telle que pour tout morphisme $a \longrightarrow a'$ de A, si a est un objet de F, il en est de même de a'. Si Δ_1 désigne la catégorie correspondant à l'ensemble ordonné $\{0 \leqslant 1\}$, alors pour tout foncteur $u : A \longrightarrow \Delta_1$, $u^{-1}(0)$ (resp. $u^{-1}(1)$) est un crible (resp. un cocrible) de A, et l'application :

$$u \longmapsto u^{-1}(0) \qquad (\text{resp.}\quad u \longmapsto u^{-1}(1)\ )$$

établit une bijection de la classe des foncteurs de A vers Δ_1 sur celle des cribles (resp. cocribles) de A.

Proposition 1.1.26. — *Soient A une petite catégorie, et U_1, U_2 deux cribles de A tels que $A = U_1 \cup U_2$. Alors si U_1, U_2 et $U_1 \cap U_2$ sont asphériques, il en est de même de A.*

Démonstration. — Se donner un crible de A équivaut à se donner un foncteur $A \longrightarrow \Delta_1$, le crible étant l'image réciproque de 0. La donnée des cribles U_1 et U_2 de A équivaut à la donnée d'un foncteur $A \longrightarrow \Delta_1 \times \Delta_1$, et dire que A est la réunion des cribles U_1 et U_2 équivaut à dire que ce foncteur se factorise par la sous-catégorie

$$B = \left\{ \begin{tikzcd} & (0,1) \\ (0,0) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & (1,0) \end{tikzcd} \right\}$$

de $\Delta_1 \times \Delta_1$, et alors $U_1 \simeq A/(0,1)$, $U_2 \simeq A/(1,0)$ et $U_1 \cap U_2 \simeq A/(0,0)$. L'hypothèse que U_1, U_2 et $U_1 \cap U_2$ sont asphériques implique donc que le foncteur $A \longrightarrow B$ est asphérique. Comme B admet un objet initial, il résulte du corollaire 1.1.13 que B est asphérique. Il résulte alors de (Lc) et (La) que A est asphérique, ce qui prouve la proposition. □

Corollaire 1.1.27. — *Soient A une petite catégorie, et F_1, F_2 deux cocribles de A tels que $A = F_1 \cup F_2$. Alors si F_1, F_2 et $F_1 \cap F_2$ sont asphériques, il en est de même de A.*

Démonstration. — Le corollaire résulte, en vertu de 1.1.22, de la proposition 1.1.26, appliquée à la catégorie opposée A°. □

Exemple 1.1.28. — La classe $\mathsf{Fl}(\mathcal{C}at)$ de toutes les flèches de $\mathcal{C}at$ est un localisateur fondamental faible appelé *localisateur fondamental trivial.* On dit qu'un localisateur fondamental faible $\mathcal{W}$ est *non trivial* si $\mathcal{W} \neq \mathsf{Fl}(\mathcal{C}at)$.

Proposition 1.1.29. — *Si le localisateur fondamental faible $\mathcal{W}$ n'est pas trivial, alors toute catégorie asphérique est non vide.*

Démonstration. — En effet, supposons que la catégorie vide $\varnothing$ soit asphérique. Pour toute petite catégorie C, le carré

$$\begin{tikzcd} \varnothing \arrow[r] \arrow[d] & \varnothing \arrow[d] \\ C \arrow[r] & e \end{tikzcd}$$

étant cartésien, il résulte de la proposition 1.1.4 que $\varnothing \longrightarrow C$ est une équivalence faible, ce qui implique que la catégorie C est asphérique. Ainsi, toute petite catégorie est asphérique, et on en déduit, par la condition de saturation (La), que tout morphisme de $\mathcal{C}at$ est une équivalence faible, ce qui contredit la non trivialité de $\mathcal{W}$. □

Exemple 1.1.30. — La partie $\mathcal{W}_{gr}$ de $\mathsf{Fl}(\mathcal{C}at)$ formée du foncteur identique de la catégorie vide, et de tous les foncteurs de source (donc aussi de but) une catégorie non vide est un localisateur fondamental faible. On dit qu'un localisateur fondamental faible $\mathcal{W}$ est *grossier* s'il contient $\mathcal{W}_{gr}$. Il résulte immédiatement de la proposition 1.1.29 que les seuls localisateurs fondamentaux faibles grossiers sont $\mathcal{W}_{gr}$ et le localisateur fondamental trivial $\mathsf{Fl}(\mathcal{C}at)$.

Exemple 1.1.31. — Soit π_0 le foncteur de $\mathcal{C}at$ vers la catégorie des ensembles, associant à une petite catégorie l'ensemble de ses composantes connexes. Pour toute petite catégorie A, l'ensemble $\pi_0(A)$ est le quotient de l'ensemble $\mathsf{Ob}(A)$ par la relation d'équivalence engendrée par la relation

$$a \sim a' \quad \Longleftrightarrow \quad \mathsf{Hom}_A(a, a') \neq \varnothing \quad , \qquad a, a' \in \mathsf{Ob}(A) \quad .$$

Le foncteur π_0 est adjoint à gauche du foncteur associant à un ensemble E la catégorie discrète correspondante, autrement dit, la catégorie ayant E comme ensemble d'objets et les identités de ces objets comme seuls morphismes. En particulier, le foncteur π_0 commute aux limites inductives. On pose

$$\mathcal{W}_0 = \{ u \in \mathsf{Fl}(\mathcal{C}at) \,|\, \pi_0(u) \text{ est bijectif} \} \quad .$$

Alors $\mathcal{W}_0$ est un localisateur fondamental faible. En effet, les conditions (La) et (Lb) sont évidentes, et la condition (Lc) résulte de la commutativité du foncteur π_0 aux limites inductives, et de l'observation que pour toute flèche $u : A \longrightarrow B$ de $\mathcal{C}at$, on a un isomorphisme canonique

$$\varinjlim_{b \in \mathsf{Ob}(B)} A/b \xrightarrow{\sim} A \quad ,$$

où la limite inductive ci-dessus désigne, par abus de notations, la limite inductive du foncteur

$$F_u : B \longrightarrow \mathcal{C}at \quad , \qquad b \longmapsto A/b \quad .$$

Définition 1.1.32. — On dit que le localisateur fondamental faible $\mathcal{W}$ est *géométrique* si il est contenu dans $\mathcal{W}_0$, autrement dit, si pour toute flèche $u : A \longrightarrow B$ de $\mathcal{C}at$ appartenant à $\mathcal{W}$, l'application $\pi_0(u) : \pi_0(A) \longrightarrow \pi_0(B)$ est bijective.

Exemple 1.1.33. — Il résulte aussitôt du théorème A de Quillen [**25**] que la partie $\mathcal{W}_\infty$ de $\mathsf{Fl}(\mathcal{C}at)$ formée des équivalences faibles usuelles de $\mathcal{C}at$, autrement dit, des morphismes de $\mathcal{C}at$ induisant une équivalence d'homotopie des espaces classifiants correspondants, est un localisateur fondamental faible. On démontre que $\mathcal{W}_\infty$ est le plus petit localisateur fondamental faible [**10**].

Exemple 1.1.34. — Soit n un entier, $n \geqslant 0$. On dit qu'une flèche de $\mathcal{C}at$ est une *n-équivalence* si elle appartient à $\mathcal{W}_0$, et si pour tout entier m, $1 \leqslant m \leqslant n$, elle induit un isomorphisme des m-ièmes groupes d'homotopie des espaces classifiants correspondants, et ceci pour tout choix de point base. Alors si l'on note $\mathcal{W}_n$ la partie de $\mathsf{Fl}(\mathcal{C}at)$ formée des n-équivalences, $\mathcal{W}_n$ est un localisateur fondamental faible [**10**].

1.2. Isomorphismes locaux et foncteurs localement asphériques

Définition 1.2.1. — On dit qu'un morphisme $u : A \longrightarrow B$ de $\mathcal{C}at$ est un *isomorphisme local* si pour tout objet a de A, le morphisme

$$A/a \longrightarrow B/b \quad , \qquad b = u(a) \quad ,$$

induit par u, est un isomorphisme.

Exemples 1.2.2. — *a*) Si $u : A \longrightarrow B$ est une *immersion ouverte*, autrement dit, si u induit un isomorphisme de A sur un crible de B, alors u est un isomorphisme local.

b) Pour toute petite catégorie A, et tout objet a de A, le morphisme canonique $A/a \longrightarrow A$ est un isomorphisme local.

c) Plus généralement, pour tout morphisme $u : A \longrightarrow B$ de $\mathcal{C}at$, et tout objet b de B, le morphisme canonique $A/b \longrightarrow A$ est un isomorphisme local.

Proposition 1.2.3. — *Soit* $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$ *un couple de morphismes composables de* $\mathcal{C}at$*. Si v est un isomorphisme local, alors le composé vu est un isomorphisme local si et seulement si u l'est. En particulier, les isomorphismes locaux sont stables par composition. De plus, si u induit une surjection sur les ensembles des objets, alors si u et vu sont des isomorphismes locaux, il en est de même de v.*

La démonstration (immédiate) est laissée au lecteur.

Proposition 1.2.4. — *Un produit arbitraire d'isomorphismes locaux dans $\mathcal{C}at$ est un isomorphisme local.*

Démonstration. — Comme pour toute famille de petites catégories $(A_i)_{i\in I}$ et tout objet $a = (a_i)_{i\in I}$ de $A = \prod_{i\in I} A_i$, on a un isomorphisme fonctoriel $A/a \simeq \prod_{i\in I}(A_i/a_i)$, l'assertion résulte aussitôt de la propriété analogue des isomorphismes. □

Proposition 1.2.5. — *Les isomorphismes locaux sont stables par changement de base, autrement dit, pour tout carré cartésien dans $\mathcal{C}at$*

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "w"] \arrow[d, "u'"'] & A \arrow[d, "u"] \\ B' \arrow[r, "v"'] & B \end{tikzcd} \quad ,$$

si u est un isomorphisme local, il en est de même de u'.

Démonstration. — On vérifie facilement que pour tout objet a' de A', le carré induit

$$\begin{tikzcd} A'/a' \arrow[r] \arrow[d] & A/a \arrow[d] \\ B'/b' \arrow[r] & B/b \end{tikzcd} \qquad \begin{array}{l} a = w(a') \\[2ex] b' = u'(a') \\[2ex] b = u(a) = v(b') \end{array}$$

est cartésien. L'assertion résulte donc du fait que les *isomorphismes* sont stables par changement de base □

Les isomorphismes locaux admettent la caractérisation classique suivante, dont la démonstration est laissée au lecteur.

Proposition 1.2.6. — *Soit $u : A \longrightarrow B$ un morphisme de $\mathcal{C}at$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *u est un isomorphisme local ;*
(b) *u est une préfibration à fibres discrètes ;*
(c) *u est une fibration à fibres discrètes ;*
(d) *pour tout objet a de A, et tout morphisme $g : b' \longrightarrow b = u(a)$ de B, il existe un unique morphisme $f : a' \longrightarrow a$ de A tel que $u(f) = g$.*

Définition 1.2.7. — Soient B une petite catégorie, et $(u_i : A_i \longrightarrow B)_{i\in I}$ une famille d'isomorphismes locaux dans $\mathcal{C}at$. On dit que cette famille est *couvrante* si pour tout objet b de B, il existe un élément i de I, et un objet a de A_i tels que $u_i(a) = b$, autrement dit, si la famille d'applications $\mathsf{Ob}(u_i) : \mathsf{Ob}(A_i) \longrightarrow \mathsf{Ob}(B)$, $i \in I$, est épimorphique.

Remarque 1.2.8. — Cette notion de famille couvrante définit une prétopologie sur $\mathcal{C}at$, et la topologie déduite de cette prétopologie, qu'on pourrait appeler *topologie étale*, est moins fine que la topologie canonique. La sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}at$ formée des catégories ayant un objet final est une sous-catégorie génératrice pour cette topologie, et le "lemme de comparaison" des sites [**2**, Exp. III, Th. 4.1] implique aussitôt que la catégorie des faisceaux sur $\mathcal{C}at$ pour la topologie étale s'identifie à la catégorie des *préfaisceaux* sur cette sous-catégorie. En particulier, cette catégorie de faisceaux sur $\mathcal{C}at$ n'est *pas* un topos, car elle n'admet pas une petite famille génératrice. Si on se limite au site des isomorphismes locaux au-dessus d'une petite catégorie fixée C, on peut montrer facilement que la catégorie correspondante des faisceaux n'est autre que la catégorie des préfaisceaux sur la catégorie C.

1.2.9. — Dualement, on dit qu'un morphisme $u : A \longrightarrow B$ de $\mathcal{C}at$ est un *isomorphisme colocal* si pour tout objet a de A, le morphisme

$$a\backslash A \longrightarrow b\backslash B \quad , \qquad b = u(a) \quad ,$$

induit par u, est un isomorphisme, autrement dit, si le morphisme $u^\circ : A^\circ \longrightarrow B^\circ$ est un isomorphisme local. Il résulte des propositions 1.2.3 et 1.2.5 que les isomorphismes colocaux sont stables par composition et changement de base, et de la proposition 1.2.6 qu'un morphisme $u : A \longrightarrow B$ de $\mathcal{C}at$ est un isomorphisme colocal si et seulement s'il est une précofibration (ou une cofibration) à fibres discrètes. De même, on dit qu'une famille d'isomorphismes colocaux $(u_i : A_i \longrightarrow B)_{i \in I}$ est *couvrante* si la famille d'isomorphismes locaux $(u_i^\circ : A_i^\circ \longrightarrow B^\circ)_{i \in I}$ l'est, ou de façon équivalente si la famille d'applications $\mathsf{Ob}(u_i) : \mathsf{Ob}(A_i) \longrightarrow \mathsf{Ob}(B)$, $i \in I$, est épimorphique.

Lemme 1.2.10. — *Soit*

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d, "u"] \\ B' \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

un carré cartésien de $\mathcal{C}at$. Alors pour tout objet a de A, $b = u(a)$, le carré induit

$$\begin{tikzcd} A'/a \arrow[r] \arrow[d] & A/a \arrow[d] \\ B'/b \arrow[r] & B/b \end{tikzcd}$$

est cartésien.

Démonstration. — Considérons le cube commutatif

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[rr] \arrow[dd] & & A \arrow[dd] & \\
& A'/a \arrow[ul] \arrow[rr] \arrow[dd] & & A/a \arrow[ul] \arrow[dd] \\
B' \arrow[rr] & & B & \\
& B'/b \arrow[ul] \arrow[rr] & & B/b \arrow[ul]
\end{tikzcd} .$$

La face arrière est cartésienne par hypothèse, et les faces horizontales sont cartésiennes par définition de A'/a et B'/b. On en déduit que la face avant est cartésienne, ce qui prouve le lemme. □

Dans la suite, on se fixe, une fois pour toutes, un localisateur fondamental faible $\mathcal{W}$.

Proposition 1.2.11. — *Les morphismes asphériques sont stables par changement de base par des morphismes de $\mathcal{C}at$ qui sont des isomorphismes locaux, autrement dit, si*

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, "w"] \arrow[d, "u'"'] & A \arrow[d, "u"] \\
B' \arrow[r, "v"'] & B
\end{tikzcd}$$

est un carré cartésien de $\mathcal{C}at$, et si v est un isomorphisme local et u un morphisme asphérique, alors u' est asphérique. Réciproquement, si $u : A \longrightarrow B$ est un morphisme de $\mathcal{C}at$, et s'il existe une famille couvrante d'isomorphismes locaux $(v_i : B_i \longrightarrow B)_{i \in I}$ telle que pour tout i dans I, si l'on forme le carré cartésien

$$\begin{tikzcd}
A_i \arrow[r, "w_i"] \arrow[d, "u_i"'] & A \arrow[d, "u"] \\
B_i \arrow[r, "v_i"'] & B
\end{tikzcd} ,$$

le morphisme u_i soit asphérique, alors u est asphérique.

Démonstration. — En vertu du lemme précédent, si

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, "w"] \arrow[d, "u'"'] & A \arrow[d, "u"] \\
B' \arrow[r, "v"'] & B
\end{tikzcd}$$

est un carré cartésien de $\mathcal{C}at$, pour tout objet b' de B', $b = v(b')$, le carré induit

$$\begin{tikzcd} A'/b' \arrow[r] \arrow[d] & A/b \arrow[d] \\ B'/b' \arrow[r] & B/b \end{tikzcd}$$

est cartésien. Si v est un isomorphisme local, la flèche horizontale du bas de ce carré cartésien est un isomorphisme, donc aussi celle du haut, et par suite, la catégorie A'/b' est asphérique si et seulement si A/b l'est, ce qui implique aussitôt les deux assertions de la proposition. □

1.2.12. — La proposition ci-dessus signifie que la notion de foncteur asphérique est locale pour la topologie étale sur le but d'un morphisme de $\mathcal{C}at$. Dans ce qui suit, on introduit la variante locale de cette notion, qui est à la fois locale sur la source et sur le but d'un morphisme.

Définition 1.2.13. — On dit qu'un morphisme $u : A \longrightarrow B$ de $\mathcal{C}at$ est *localement $\mathcal{W}$-asphérique*, ou plus simplement *localement asphérique*, si pour tout objet a de A, le morphisme

$$A/a \longrightarrow B/b \quad , \qquad b = u(a) \quad ,$$

induit par u est asphérique.

Exemples 1.2.14. — Voici quelques exemples évidents.

a) Un isomorphisme local est un foncteur localement asphérique.

b) Un foncteur asphérique pleinement fidèle est localement asphérique.

c) Pour toute petite catégorie C, le foncteur $C \longrightarrow e$ est localement asphérique.

d) Plus généralement, pour tout couple de petites catégories A et B, les projections

$$\begin{tikzcd} & A \times B \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ A & & B \end{tikzcd}$$

sont des foncteurs localement asphériques.

Proposition 1.2.15. — *Soit $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$ un couple de morphismes composables de $\mathcal{C}at$. Si u et v sont des morphismes localement asphériques, alors il en est de même de vu, autrement dit, les morphismes localement asphériques sont stables par composition. De plus, si u induit une surjection sur les ensembles des objets, alors si u et vu sont des morphismes localement asphériques, il en est de même de v.*

Démonstration. — C'est une conséquence formelle de la proposition 1.1.8. □

Proposition 1.2.16. — *Soient $u : A \longrightarrow B$, $u' : A' \longrightarrow B'$ deux morphismes localement asphériques de $\mathcal{C}at$. Alors le foncteur $u \times u' : A \times A' \longrightarrow B \times B'$ est localement asphérique.*

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate du corollaire 1.1.6. $\square$

Proposition 1.2.17. — a) *Pour tout carré commutatif dans $\mathcal{C}at$*

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "w"] \arrow[d, "u'"'] & A \arrow[d, "u"] \\ B' \arrow[r, "v"'] & B \end{tikzcd} \quad ,$$

si u est un morphisme localement asphérique, et v et w des isomorphismes locaux, alors u' est un morphisme localement asphérique.

b) *Soit $u : A \longrightarrow B$ un morphisme de $\mathcal{C}at$. S'il existe une famille de carrés commutatifs $(\mathcal{D}_i)_{i \in I}$,*

$$\mathcal{D}_i \ = \quad \begin{tikzcd} A_i \arrow[r, "w_i"] \arrow[d, "u_i"'] & A \arrow[d, "u"] \\ B_i \arrow[r, "v_i"'] & B \end{tikzcd} \quad ,$$

telle que pour tout i, $i \in I$, u_i soit un morphisme localement asphérique, et v_i et w_i des isomorphismes locaux, et telle que la famille d'isomorphismes locaux $(w_i : A_i \longrightarrow A)_{i \in I}$ soit couvrante, alors u est un morphisme localement asphérique.

c) *Soit $u : A \longrightarrow B$ un morphisme de $\mathcal{C}at$. Pour que le morphisme u soit localement asphérique, il faut et il suffit que pour tout carré commutatif*

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "w"] \arrow[d, "u'"'] & A \arrow[d, "u"] \\ B' \arrow[r, "v"'] & B \end{tikzcd}$$

tel que v et w soient des isomorphismes locaux, il existe une famille de carrés commutatifs $(\mathcal{D}_i)_{i \in I}$,

$$\mathcal{D}_i \ = \quad \begin{tikzcd} A'_i \arrow[r, "w'_i"] \arrow[d, "u'_i"'] & A' \arrow[d, "u'"] \\ B'_i \arrow[r, "v'_i"'] & B' \end{tikzcd} \quad ,$$

telle que pour tout i, $i \in I$, u'_i soit un morphisme asphérique, *et v'_i et w'_i des isomorphismes locaux, et telle que la famille $(w'_i : A'_i \longrightarrow A')_{i \in I}$ soit couvrante.*

Démonstration. — Soit

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "w"] \arrow[d, "u'"'] & A \arrow[d, "u"] \\ B' \arrow[r, "v"'] & B \end{tikzcd}$$

un carré commutatif dans $\mathcal{C}at$ tel que v et w soient des isomorphismes locaux. Pour tout objet a' de A', on déduit un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} A'/a' \arrow[r] \arrow[d] & A/a \arrow[d] \\ B'/b' \arrow[r] & B/b \end{tikzcd} \qquad \begin{aligned} a &= w(a') \\ b' &= u'(a') \\ b &= u(a) = v(b') \end{aligned}$$

dont les flèches horizontales sont des isomorphismes. On en déduit que la flèche verticale de gauche est un morphisme asphérique si et seulement si celle de droite l'est, ce qui implique aussitôt les assertions (a) et (b) de la proposition.

Montrons l'assertion (c). Pour tout morphisme $u : A \longrightarrow B$ de $\mathcal{C}at$, la famille de diagrammes $(\mathcal{D}_{u,a})_{a \in \mathsf{Ob}(A)}$,

$$\mathcal{D}_{u,a} \ = \ \begin{tikzcd} A/a \arrow[r] \arrow[d, "u/a"'] & A \arrow[d, "u"] \\ B/u(a) \arrow[r] & B \end{tikzcd} \quad ,$$

est formée de carrés commutatifs dont les flèches horizontales sont des isomorphismes locaux (exemples 1.2.2, (b) et (c)), et la famille d'isomorphismes locaux $A/a \longrightarrow A$, $a \in \mathsf{Ob}(A)$, est couvrante. Si le morphisme u est localement asphérique, alors par définition, pour tout objet a de A, le morphisme $A/a \longrightarrow B/u(a)$ est *asphérique*. En vertu de l'assertion (a) de la proposition, on en déduit que la condition énoncée dans (c) est *nécessaire* pour que le morphisme u soit localement asphérique. Montrons qu'elle est aussi *suffisante*. En effet, pour tout objet a de A, cette condition, appliquée au carré commutatif $\mathcal{D}_{u,a}$, implique l'existence d'une famille de carrés commutatifs $(\mathcal{D}_i)_{i \in I}$,

$$\mathcal{D}_i \ = \ \begin{tikzcd} A'_i \arrow[r, "w'_i"] \arrow[d, "u'_i"'] & A/a \arrow[d, "u/a"] \\ B'_i \arrow[r, "v'_i"'] & B/u(a) \end{tikzcd} \quad ,$$

formée de carrés dont les flèches horizontales sont des isomorphismes locaux et dont la flèche verticale de gauche est un morphisme asphérique, et telle que la famille d'isomorphismes locaux $w'_i : A'_i \longrightarrow A/a$, $i \in I$, soit couvrante. En particulier, il existe i, $i \in I$, et un objet a' de A'_i dont l'image par w'_i est l'objet final $(a, 1_a)$ de A/a, ce qui implique aussi que l'image par v'_i de $u'_i(a')$ est l'objet final $(u(a), 1_{u(a)})$ de $B/u(a)$. On en déduit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
A/a \simeq A'_i/a' \arrow[r] \arrow[d] & A'_i \arrow[r, "w'_i"] \arrow[d, "u'_i"] & A/a \arrow[d, "u/a"] \\
B/u(b) \simeq B'_i/u'_i(a') \arrow[r] & B'_i \arrow[r, "v'_i"'] & B/u(a)
\end{tikzcd}$$

dont les deux composés des flèches horizontales sont des isomorphismes. Le morphisme u/a est donc un rétracte de u'_i, ce qui implique en vertu du corollaire 1.1.10 que u/a est asphérique, et achève la démonstration. $\square$

Remarque 1.2.18. — Les assertions (a) et (b) de la proposition ci-dessus expriment le fait que la notion de morphisme localement asphérique est une notion locale sur le but *et* la source d'un morphisme, et l'assertion (c) que cette notion est la notion locale correspondant à celle de morphisme asphérique.

1.2.19. — De façon duale, on définit la notion *colocale* correspondant à celle de morphisme *coasphérique*. On dit qu'un morphisme $u : A \longrightarrow B$ de $\mathcal{C}at$ est *colocalement $\mathcal{W}$-coasphérique*, ou plus simplement *colocalement coasphérique*, si le morphisme $u^\circ : A^\circ \longrightarrow B^\circ$ est localement asphérique. Le foncteur u est donc colocalement coasphérique si et seulement si pour tout objet a de A, le foncteur $a\backslash A \longrightarrow u(a)\backslash B$, induit par u, est coasphérique. Les isomorphismes colocaux, ainsi que les foncteurs coasphériques pleinement fidèles, sont des morphismes colocalement coasphériques. Il résulte des propositions 1.2.15 et 1.2.16 que les morphismes colocalement coasphériques sont stables par composition et par produits binaires.

Remarque 1.2.20. — On aurait pu envisager d'étudier la notion de morphisme *colocalement asphérique*, ainsi que la notion duale de morphisme *localement coasphérique*. En fait, ces notions ne présentent aucun intérêt, car *tout* morphisme de $\mathcal{C}at$ est colocalement asphérique (et donc aussi localement coasphérique). Pour cela, on remarque d'abord que si $u : A \longrightarrow B$ est un morphisme de $\mathcal{C}at$ tel que les catégories A et B admettent respectivement des objets initiaux $\varnothing_A$ et $\varnothing_B$ tels que $u(\varnothing_A) = \varnothing_B$, alors le foncteur u est asphérique. En effet, pour tout objet b de B, le couple $(\varnothing_A, \varnothing_B \longrightarrow b)$ est alors un objet initial de la catégorie A/b, qui est donc asphérique en vertu du corollaire 1.1.13. On en déduit que si $u : A \longrightarrow B$ est un morphisme *arbitraire* de $\mathcal{C}at$, alors pour tout objet a de A, le morphisme $a\backslash A \longrightarrow u(a)\backslash B$, induit par u, est asphérique.

1.3. Les équivalences faibles dans une catégorie de préfaisceaux

Dans ce paragraphe, on se fixe, une fois pour toutes, un localisateur fondamental faible $\mathcal{W}$.

1.3.1. — On se fixe une petite catégorie A. On note $\widehat{A}$ la catégorie des préfaisceaux d'ensembles sur A. Pour tout objet a de A, on note aussi a le préfaisceau $x \mapsto \mathsf{Hom}_A(x,a)$ représenté par a, et on identifie A à une sous-catégorie pleine de $\widehat{A}$. On définit un couple de foncteurs :

$$i_A : \widehat{A} \longrightarrow \mathcal{C}at \quad , \qquad i_A^* : \mathcal{C}at \longrightarrow \widehat{A}$$

$$F \mapsto A/F \quad , \qquad C \mapsto \big(a \mapsto \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}at}(A/a, C)\big)$$

et des morphismes de foncteurs :

$$\varepsilon : i_A i_A^* \longrightarrow 1_{\mathcal{C}at} \quad , \qquad \eta : 1_{\widehat{A}} \longrightarrow i_A^* i_A \quad .$$

Pour toute petite catégorie C, le foncteur :

$$\varepsilon_C : A/i_A^*(C) \longrightarrow C$$

est défini par :

$$(a,\ A/a \xrightarrow{v} C\ ) \longmapsto v(a, 1_a) \quad ,$$

et pour tout préfaisceau F, et tout objet a de A, l'application :

$$\eta_F(a) : F(a) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}at}(A/a, A/F)$$

est définie par :

$$(\ a \xrightarrow{s} F\ ) \longmapsto (\ A/a \xrightarrow{s_*} A/F\ ) \quad ,$$

où s_* est défini par :

$$(x, p : x \longrightarrow a) \longmapsto (x, sp : x \longrightarrow F) \quad .$$

Proposition 1.3.2. — *Le couple des foncteurs (i_A, i_A^*) est un couple de foncteurs adjoints (le foncteur i_A est adjoint à gauche du foncteur i_A^*) et les morphismes de foncteurs*

(1.3.2.1) $$\varepsilon : i_A i_A^* \longrightarrow 1_{\mathcal{C}at} \quad , \qquad \eta : 1_{\widehat{A}} \longrightarrow i_A^* i_A$$

sont les morphismes d'adjonction.

La démonstration est laissée au lecteur.

1.3.3. — On dit qu'un morphisme de préfaisceaux sur A :

$$\varphi : F \longrightarrow G$$

est une *équivalence faible*, ou une $\mathcal{W}$-*équivalence*, si le foncteur correspondant :

$$i_A(\varphi) : A/F \longrightarrow A/G$$

est une équivalence faible. On note $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$ la classe des équivalences faibles de $\widehat{A}$:

(1.3.3.1) $$\mathcal{W}_{\widehat{A}} = i_A^{-1}(\mathcal{W}) \quad .$$

L'ensemble des équivalences faibles de $\widehat{A}$ est une partie faiblement saturée de $\mathsf{Fl}(\widehat{A})$. On dit qu'un morphisme de préfaisceaux :

$$\varphi : F \longrightarrow G$$

est $\mathcal{W}$-*asphérique*, ou plus simplement *asphérique*, si le foncteur correspondant :

$$i_A(\varphi) : A/F \longrightarrow A/G$$

est asphérique. En vertu de (Lc) (1.1.2), un morphisme asphérique de préfaisceaux est une équivalence faible.

Proposition 1.3.4. — *Soit $\varphi : F \longrightarrow G$ un morphisme de préfaisceaux. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *φ est asphérique ;*
(b) *pour tout objet a de A, et tout morphisme $a \longrightarrow G$ de $\widehat{A}$, la catégorie $A/(a \times_G F)$ est asphérique ;*
(c) *φ est universellement dans $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$* (1.1.1).

Démonstration. — Dire que φ est asphérique signifie que le foncteur $A/F \longrightarrow A/G$ est asphérique, autrement dit, que pour tout objet $(a, s : a \longrightarrow G)$ de A/G, la catégorie $(A/F)/(a, s) \simeq A/(a \times_G F)$ est asphérique (1.1.3), ce qui prouve l'équivalence de (a) et (b).

Si φ est universellement dans $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$, en particulier, pour tout morphisme $a \longrightarrow G$, avec a objet de A, le morphisme $a \times_G F \longrightarrow a$ est dans $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$, donc le foncteur $A/(a \times_G F) \longrightarrow A/a$ est une équivalence faible, et comme A/a admet un objet final, il en résulte que $A/(a \times_G F)$ est asphérique, ce qui prouve $(c) \Rightarrow (b)$.

Supposons maintenant φ asphérique, et soit $G' \longrightarrow G$ un morphisme arbitraire de préfaisceaux. Montrons que $G' \times_G F \longrightarrow G'$ est dans $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$. Il suffit de montrer qu'il est asphérique, autrement dit, en vertu de l'implication $(b) \Rightarrow (a)$, que pour tout morphisme $a \longrightarrow G'$ de $\widehat{A}$, $A/(a \times_{G'} G' \times_G F) \simeq A/(a \times_G F)$ est asphérique, ce qui résulte de l'asphéricité de φ et de l'implication $(a) \Rightarrow (b)$. On a donc $(a) \Rightarrow (c)$. □

1.3.5. — Soit F un objet de $\widehat{A}$. On dit que F est $\mathcal{W}$-*asphérique*, ou plus simplement *asphérique*, si la catégorie A/F est asphérique, autrement dit si $i_A(F)$ est asphérique. Si F est un préfaisceau représentable, la catégorie A/F admet un objet final, et il en résulte que F est asphérique. En vertu de la proposition 1.3.4, un morphisme $u : F \longrightarrow G$ de $\widehat{A}$ est asphérique si et seulement si pour tout morphisme $a \longrightarrow G$ de $\widehat{A}$, avec a objet de A, le préfaisceau $a \times_G F$ est asphérique.

1.3.6. — Pour toute petite catégorie A, on note $e_{\widehat{A}}$ un objet final de $\widehat{A}$. Considérons les propriétés :

(a) le préfaisceau F est asphérique ;
(b) le morphisme $F \longrightarrow e_{\widehat{A}}$ est une équivalence faible ;
(c) le morphisme $F \longrightarrow e_{\widehat{A}}$ est asphérique ;

(d) le morphisme $F \longrightarrow e_{\widehat{A}}$ est universellement dans $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$.

En vertu de la proposition 1.3.4, les conditions (c) et (d) sont équivalentes, et en vertu de (Lc) (1.1.2), ces conditions impliquent la condition (b) qui est, en général, strictement plus faible. Si la catégorie A n'est pas asphérique aucune des conditions (b), (c), (d) n'implique la condition (a). Si A est asphérique, ce qui équivaut à affirmer que $e_{\widehat{A}}$ est asphérique, alors les conditions (a) et (b) sont équivalentes (et l'équivalence de ces conditions pour tout F équivaut à l'asphéricité de A), mais toujours plus faibles, en général, que les conditions équivalentes (c) et (d). On verra que ces quatre conditions sont équivalentes si et seulement si A est totalement asphérique (1.7.2). On dit que F est *localement $\mathcal{W}$-asphérique*, ou plus simplement *localement asphérique*, s'il satisfait aux conditions équivalentes (c) et (d).

Cette terminologie est justifiée par l'observation suivante : un préfaisceau F est localement asphérique si et seulement si, pour tout $a \in \mathsf{Ob}(A)$, le préfaisceau $F|(A/a)$, induit par F sur A/a, est asphérique. En effet, on a des isomorphismes canoniques

$$(A/a)/(F|(A/a)) \simeq A/(a \times F) \simeq A/(a \times_{e_{\widehat{A}}} F) \quad .$$

Plus généralement, on dit qu'un morphisme $\varphi : F \longrightarrow G$ de préfaisceaux sur A est une *$\mathcal{W}$-équivalence locale*, ou une *équivalence faible locale*, si pour tout objet a de A, le morphisme de préfaisceaux

$$\varphi|(A/a) : F|(A/a) \longrightarrow G|(A/a) \quad ,$$

induit par φ, est une équivalence faible de $\widehat{A/a}$, autrement dit, si pour tout objet a de A, le morphisme

$$1_a \times \varphi : a \times F \longrightarrow a \times G$$

est une équivalence faible de $\widehat{A}$. Il résulte de la proposition 1.3.4 que si φ est un morphisme asphérique de préfaisceaux, alors il est une équivalence faible locale. On remarque qu'un préfaisceau F sur A est localement asphérique si et seulement si le morphisme $F \longrightarrow e_{\widehat{A}}$ est une équivalence faible locale. Si la catégorie A admet un objet final, alors toute équivalence faible locale est une équivalence faible. On verra que cela est vrai sans hypothèse sur A, à condition que le localisateur fondamental faible $\mathcal{W}$ soit un localisateur fondamental (2.1.1).

1.3.7. — Si $u : A \longrightarrow B$ est un morphisme de $\mathcal{C}at$, on note $u^* : \widehat{B} \longrightarrow \widehat{A}$ le foncteur "image inverse par u", associant à un préfaisceau F de $\widehat{B}$ le préfaisceau $F \circ u$ de $\widehat{A}$. La proposition suivante exprime que les notions de préfaisceau localement asphérique et d'équivalence faible locale sont bien des notions locales.

Proposition 1.3.8. — *Soient A une petite catégorie, et $(u_i : A_i \longrightarrow A)_{i \in I}$ une famille couvrante d'isomorphismes locaux.*

(a) *Pour qu'un préfaisceau F sur A soit localement asphérique, il faut et il suffit que pour tout i, $i \in I$, $u_i^*(F)$ soit un préfaisceau localement asphérique sur A_i.*

(b) *Pour qu'un morphisme de préfaisceaux φ sur A soit une équivalence faible locale, il faut et il suffit que pour tout i, $i \in I$, $u_i^*(\varphi)$ le soit.*

La démonstration (immédiate) est laissée au lecteur.

Proposition 1.3.9. — *Soient A une petite catégorie, F un préfaisceau sur A, et F_1 et F_2 deux sous-préfaisceaux de F tels que $F = F_1 \cup F_2$. Si les préfaisceaux F_1, F_2 et $F_1 \cap F_2$ sont asphériques, il en est de même du préfaisceau F.*

Démonstration. — Il s'agit de montrer que la catégorie A/F est asphérique. Par hypothèse, les catégories A/F_1, A/F_2 et $A/F_1 \cap F_2$ sont asphériques. Or, A/F_1 et A/F_2 s'identifient à des cribles de A/F, $A/F_1 \cap F_2$ s'identifiant au crible intersection. L'hypothèse $F = F_1 \cup F_2$ implique que A/F est la réunion des cribles A/F_1 et A/F_2. L'assertion résulte donc de la proposition 1.1.26. $\square$

1.3.10. — Soit $u : A \longrightarrow B$ un morphisme de $\mathcal{C}at$. Pour tout préfaisceau F de $\widehat{B}$, le foncteur $u : A \longrightarrow B$ induit un foncteur

$$u/F : A/F = A/u^*(F) \longrightarrow B/F$$

$$(a,\, a \xrightarrow{s} u^*(F)\,) \longmapsto (u(a),\, u(a) \xrightarrow{s} F\,)$$

(en considérant, par Yoneda, s comme un élément de $u^*(F)(a) = F(u(a))$). On définit ainsi un morphisme de foncteurs

$$\lambda := \lambda_u : i_A u^* \longrightarrow i_B \quad ,$$

en posant $\lambda_F = u/F$, pour F objet de $\widehat{B}$.

Si $u : A \longrightarrow B$ et $v : B \longrightarrow C$ sont deux morphismes composables de $\mathcal{C}at$, on vérifie aussitôt qu'on a $\lambda_{vu} = \lambda_v(\lambda_u \star v^*)$. Enfin, pour tout objet A de $\mathcal{C}at$, on a $\lambda_{1_A} = 1_{i_A}$.

Proposition 1.3.11. — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *u est asphérique ;*

(b) *pour qu'un préfaisceau F de $\widehat{B}$ soit asphérique, il faut et il suffit que le préfaisceau $u^*(F)$ de $\widehat{A}$ soit asphérique ;*

(b′) *si F est un préfaisceau asphérique de $\widehat{B}$, alors $u^*(F)$ est un préfaisceau asphérique de $\widehat{A}$;*

(b″) *pour tout objet b de B, le préfaisceau $u^*(b)$ de $\widehat{A}$ est asphérique ;*

(c) *pour tout préfaisceau F de $\widehat{B}$, le foncteur $\lambda_F : A/u^*(F) \longrightarrow B/F$ est une équivalence faible ;*

(c′) *pour tout préfaisceau F de $\widehat{B}$, le foncteur $\lambda_F : A/u^*(F) \longrightarrow B/F$ est asphérique ;*

(c″) *pour tout objet b de B, le foncteur $\lambda_b : A/u^*(b) \longrightarrow B/b$ est une équivalence faible ;*

et si ces conditions sont satisfaites, on a :

(d) *pour qu'un morphisme φ de $\widehat{B}$ soit une équivalence faible, il faut et il suffit que $u^*(\varphi)$ soit une équivalence faible de $\widehat{A}$.*

De plus, si A et B sont asphériques, les conditions (a) *à* (d) *sont équivalentes, et équivalentes à la condition :*

(d′) *si φ est une équivalence faible de $\widehat{B}$, alors $u^*(\varphi)$ est une équivalence faible de $\widehat{A}$.*

Démonstration. — L'implication $(b) \Rightarrow (b')$ est évidente, l'implication $(b') \Rightarrow (b'')$ résulte du fait qu'un préfaisceau représentable est asphérique (1.3.5), l'implication $(b'') \Rightarrow (c'')$ de La et Lb, (1.1.2), l'implication $(c'') \Rightarrow (c')$ de l'observation que pour tout préfaisceau F de $\widehat{B}$, et tout objet $(b, b \xrightarrow{s} F)$ de B/F, on a des isomorphismes canoniques $(B/F)/(b,s) \simeq B/b$ et $(A/u^*(F))/(b,s) \simeq A/b = A/u^*(b)$, l'implication $(c') \Rightarrow (c)$ de Lc (1.1.2), et l'implication $(c) \Rightarrow (b)$ de La (1.1.2). Enfin, on remarque que (c'') est une paraphrase de (a), ce qui prouve l'équivalence des conditions (a) à (c'').

L'implication $(c) \Rightarrow (d)$ résulte de la commutativité du carré

$$\begin{tikzcd} A/u^*(F) \arrow[r, "i_A(u^*(\varphi))"] \arrow[d, "\lambda_F"'] & A/u^*(G) \arrow[d, "\lambda_G"] \\ B/F \arrow[r, "i_B(\varphi)"'] & B/G \end{tikzcd} \quad ,$$

pour $\varphi : F \longrightarrow G$ morphisme de $\widehat{B}$, et de la condition de saturation La (1.1.2).

Si A et B sont asphériques, montrons l'implication $(d') \Rightarrow (b')$. Soit donc F un préfaisceau asphérique de $\widehat{B}$. Comme B est asphérique, le morphisme canonique $\varphi : F \longrightarrow e_{\widehat{B}}$ est une équivalence faible de $\widehat{B}$, et en vertu de (d'), $u^*(\varphi) : u^*(F) \longrightarrow u^*(e_{\widehat{B}}) = e_{\widehat{A}}$ est une équivalence faible de $\widehat{A}$. Comme A est asphérique, on en déduit que $u^*(F)$ est asphérique. L'implication $(d) \Rightarrow (d')$ étant évidente, ceci prouve, sous l'hypothèse de l'asphéricité de A et B, l'équivalence des conditions (a) à (d'), et achève la démonstration de la proposition. □

Corollaire 1.3.12. — *Soit $u : A \longrightarrow B$ un morphisme asphérique de $\mathcal{C}at$. Pour qu'un morphisme φ de $\widehat{B}$ soit asphérique, il suffit que $u^*(\varphi)$ soit un morphisme asphérique de $\widehat{A}$.*

Démonstration. — Soit $\varphi : F \longrightarrow G$ un morphisme de $\widehat{B}$ tel que $u^*(\varphi)$ soit un morphisme asphérique de $\widehat{A}$, et soit

$$\begin{tikzcd} F' \arrow[r] \arrow[d, "\varphi'"'] & F \arrow[d, "\varphi"] \\ G' \arrow[r] & G \end{tikzcd}$$

un carré cartésien de $\widehat{B}$. On en déduit un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} u^*(F') \arrow[r] \arrow[d, "u^*(\varphi')"'] & u^*(F) \arrow[d, "u^*(\varphi)"] \\ u^*(G') \arrow[r] & u^*(G) \end{tikzcd}$$

de $\widehat{A}$. Comme $u^*(\varphi)$ est un morphisme asphérique de $\widehat{A}$, il résulte de la proposition 1.3.4 que $u^*(\varphi')$ est une équivalence faible, et en vertu de la proposition précédente, il en est de même de φ'. Une nouvelle application de la proposition 1.3.4 implique alors que φ est un morphisme asphérique de $\widehat{B}$. □

Corollaire 1.3.13. — *Soit $u : A \longrightarrow B$ un morphisme localement asphérique de $\mathcal{C}at$.*

(a) *Pour tout préfaisceau localement asphérique F de $\widehat{B}$, $u^*(F)$ est un préfaisceau localement asphérique de $\widehat{A}$.*
(b) *Pour toute équivalence faible locale φ de $\widehat{B}$, $u^*(\varphi)$ est une équivalence faible locale de $\widehat{A}$.*

Démonstration. — Le corollaire est conséquence immédiate de la proposition 1.3.11, et du fait que pour tout préfaisceau F sur B, et tout objet a de A, on a un isomorphisme

$$u^*(F)|A/a \simeq (u/a)^*(F|B/u(a)) \qquad \begin{tikzcd} A/a \arrow[r] \arrow[d, "u/a"'] & A \arrow[d, "u"] \\ B/u(a) \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

fonctoriel en F. □

Corollaire 1.3.14. — *Soit $u : A \longrightarrow B$ un morphisme de $\mathcal{C}at$.*

(a) *Si u est asphérique, ou si u est localement asphérique et induit une surjection sur les objets, alors pour qu'un préfaisceau F de $\widehat{B}$ soit localement asphérique, il suffit que le préfaisceau $u^*(F)$ de $\widehat{A}$ le soit.*
(b) *Si u est localement asphérique et induit une surjection sur les objets, alors pour qu'un morphisme φ de $\widehat{B}$ soit une équivalence faible locale, il suffit que le morphisme $u^*(\varphi)$ de $\widehat{A}$ le soit.*

Démonstration. — Si u est asphérique, ou si u est localement asphérique et induit une surjection sur les objets, alors pour tout objet b de B, considérons le carré commutatif

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "w"] \arrow[d, "u'"'] & A \arrow[d, "u"] \\ B/b \arrow[r, "v"'] & B \end{tikzcd} ,$$

où si u est asphérique, $A' = A/b$, et si u est localement asphérique et induit une surjection sur les objets, $A' = A/a$, où a est un objet de A tel $u(a) = b$, et u' est le foncteur induit par u. Dans les deux cas u' est un foncteur asphérique, A' une catégorie asphérique, et w un isomorphisme local. Si F est un préfaisceau sur B tel que $u^*(F)$ soit un préfaisceau localement asphérique, il résulte du corollaire précédent que le préfaisceau $w^*u^*(F) = u'^*v^*(F)$ est localement asphérique. Comme la catégorie A' est asphérique, ce préfaisceau est donc asphérique, et comme le foncteur u' est asphérique, la proposition 1.3.11 implique que le préfaisceau $v^*(F) = F|(B/b)$ est également asphérique, ce qui prouve que F est localement asphérique.

De même, si u est localement asphérique et induit une surjection sur les objets, et si φ est un morphisme de B tel que $u^*(\varphi)$ soit une équivalence faible locale, en considérant le même carré commutatif, un raisonnement analogue montre qu'il en est de même de φ, vu que dans ce cas la catégorie $A' = A/a$ admet un objet final, et par suite, une équivalence faible locale de préfaisceaux sur A' est en particulier une équivalence faible. □

Remarque 1.3.15. — L'assertion (b) du corollaire précédent est également vrai avec l'hypothèse u asphérique, à condition que le localisateur fondamental faible $\mathcal{W}$ soit un localisateur fondamental (2.1.1), puisque alors toute équivalence faible locale est une équivalence faible (*loc. cit.*), et pour appliquer le raisonnement ci-dessus, on n'a donc pas besoin que A' admette un objet final.

1.3.16. — Soient maintenant A et B deux petites catégories. On définit un foncteur

$$\begin{aligned} \boxtimes : \widehat{A} \times \widehat{B} &\longrightarrow \widehat{A \times B} \\ (F, G) &\longmapsto pr_1^*(F) \times pr_2^*(G) \quad , \end{aligned}$$

où

$$\begin{tikzcd} & A \times B \arrow[dl, "pr_1"'] \arrow[dr, "pr_2"] & \\ A & & B \end{tikzcd}$$

désignent les projections. On vérifie aussitôt qu'on a un isomorphisme fonctoriel canonique :

$$i_{A\times B}(F \boxtimes G) = A \times B/F \boxtimes G \xrightarrow{\sim} A/F \times B/G = i_A(F) \times i_B(G) \quad .$$

Proposition 1.3.17. — a) *Soient F, G des préfaisceaux sur A, B respectivement. Si F et G sont asphériques* (resp. *localement asphériques*), *il en est de même de $F \boxtimes G$.*

b) *Soient $u : F \longrightarrow F'$, $v : G \longrightarrow G'$ des morphismes de préfaisceaux sur A, B respectivement. Si les morphismes u et v sont asphériques, il en est de même de $u \boxtimes v$.*

Démonstration. — La proposition résulte aussitôt de ce qui précède et des corollaires 1.1.5 et 1.1.6. □

Proposition 1.3.18. — *Soient A et B deux petites catégories et F un préfaisceau sur $A \times B$. On suppose que pour tout objet b de B le préfaisceau F_b sur A, défini par $a \mapsto F(a, b)$, est asphérique. Alors le préfaisceau F est asphérique si et seulement si la catégorie B est asphérique.*

Démonstration. — Il suffit de montrer que le foncteur composé

$$i_{A\times B}(F) = A \times B/F \longrightarrow A \times B \longrightarrow B$$

du foncteur d'oubli et de la deuxième projection est une équivalence faible. Or, ces deux foncteurs sont des fibrations, donc aussi leur composé. Comme pour tout objet b de B la fibre au-dessus de b de ce foncteur composé s'identifie à la catégorie $i_A(F_b)$ l'assertion résulte du corollaire 1.1.23. $\square$

1.4. Les catégories test faibles

Dans ce paragraphe, on se fixe, une fois pour toutes, un localisateur fondamental faible $\mathcal{W}$.

1.4.1. — Soient M une catégorie, et W une partie de $\mathsf{Fl}(M)$. On rappelle qu'il existe (quitte à agrandir l'univers de base) une catégorie $W^{-1}M$ et un foncteur $\gamma : M \longrightarrow W^{-1}M$ tel que, pour tout $w \in W$, $\gamma(w)$ soit un isomorphisme de $W^{-1}M$, et qui soient universels pour cette propriété. Autrement dit, pour tout foncteur $F : M \longrightarrow M'$ tel que, pour tout $w \in W$, $F(w)$ soit inversible, il existe un unique foncteur $\widetilde{F} : W^{-1}M \longrightarrow M'$ tel que $F = \widetilde{F}\gamma$.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dr, "F"'] & W^{-1}M \arrow[d, dashed, "\widetilde{F}"] \\ & M' \end{tikzcd}$$

On dit que $W^{-1}M$ est la *catégorie des fractions de M relativement à W*, ou la *localisation de M par W*, et que γ est le *foncteur de localisation.* On dit que la partie W de $\mathsf{Fl}(M)$ est *fortement saturée* si W est formée exactement des flèches qui deviennent inversibles par le foncteur de localisation. On vérifie aussitôt qu'une partie fortement saturée de $\mathsf{Fl}(M)$ est aussi faiblement saturée (cf. 1.1.1). On dit que le localisateur fondamental faible $\mathcal{W}$ est un *localisateur fondamental faible fortement saturé* si la partie $\mathcal{W}$ de $\mathsf{Fl}(\mathcal{C}at)$ est fortement saturée.

1.4.2. — On appelle *catégorie homotopique relative au localisateur fondamental faible $\mathcal{W}$*, ou plus simplement *catégorie homotopique*, et on note $\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}$, ou plus simplement Hot, la catégorie $\mathcal{W}^{-1}\mathcal{C}at$. On appelle *foncteur de localisation canonique* et on note $\gamma_{\mathcal{W}}$, ou plus simplement γ, le foncteur de localisation $\gamma : \mathcal{C}at \longrightarrow \mathsf{Hot}$.

Si $\mathcal{W}$ est le localisateur fondamental trivial (1.1.28), $\mathcal{W} = \mathsf{Fl}(\mathcal{C}at)$, alors la catégorie homotopique $\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}$ est équivalente à l'objet final de $\mathcal{C}at$. Si $\mathcal{W} = \mathcal{W}_{gr}$ (1.1.30), alors la catégorie $\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}$ est équivalente à la catégorie $\Delta_1 = \{0 \longrightarrow 1\}$. Si $\mathcal{W} = \mathcal{W}_0$ (1.1.31), alors la catégorie $\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}$ est équivalente à la catégorie des ensembles, et le foncteur de localisation canonique s'identifie au foncteur π_0. Si $\mathcal{W} = \mathcal{W}_\infty$ est formé des équivalences faibles usuelles (1.1.33), alors la catégorie $\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}$ est équivalente à la catégorie homotopique usuelle des CW-complexes. Si n est un entier, $n \geqslant 0$, et si $\mathcal{W} = \mathcal{W}_n$ est formé des n-équivalences (1.1.34), alors la catégorie $\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}$ est équivalente à la catégorie des n-types d'homotopie.

1.4.3. — On appelle $\mathcal{W}$-*modélisateur*, ou plus simplement *modélisateur*, un couple (M, W), où M est une catégorie et W une partie faiblement saturée de $\mathsf{Fl}(M)$, tel que la catégorie des fractions $W^{-1}M$ soit équivalente à la catégorie homotopique Hot. Si (M, W) et (M', W') sont deux modélisateurs, on dit qu'un foncteur $F : M \longrightarrow M'$ est un *morphisme de modélisateurs* si :

(a) $W = F^{-1}(W')$;

(b) le foncteur $\overline{F} : W^{-1}M \longrightarrow W'^{-1}M'$, induit par F, est une équivalence de catégories.

Le couple $(\mathcal{C}at, \mathcal{W})$ est un modélisateur, appelé le *modélisateur fondamental*.

1.4.4. — On se fixe une petite catégorie A. On rappelle que

$$i_A : \widehat{A} \longrightarrow \mathcal{C}at$$

désigne le foncteur canonique :

$$F \longmapsto A/F$$

(cf. 1.3.1), et que

$$\mathcal{W}_{\widehat{A}} = i_A^{-1}(\mathcal{W})$$

désigne la classe des équivalences faibles de $\widehat{A}$ (cf. 1.3.3). On note $\mathsf{Hot}_{\mathcal{W},A}$, ou plus simplement Hot_A, la catégorie des fractions $\mathcal{W}_{\widehat{A}}^{-1}\widehat{A}$ et $\gamma_A : \widehat{A} \longrightarrow \mathsf{Hot}_A$ le foncteur de localisation. On dit que A est une $\mathcal{W}$-*catégorie pseudo-test*, ou plus simplement une *catégorie pseudo-test*, si :

(a) A est asphérique ;

(b) le foncteur :

$$\overline{\imath}_A : \mathsf{Hot}_A = \mathcal{W}_{\widehat{A}}^{-1}\widehat{A} \longrightarrow \mathcal{W}^{-1}\mathcal{C}at = \mathsf{Hot}$$

induit par i_A est une équivalence de catégories.

Proposition 1.4.5. — *Si $\mathcal{W}$ est un localisateur fondamental faible fortement saturé, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *A est une catégorie pseudo-test ;*

(b) *$(\widehat{A}, \mathcal{W}_{\widehat{A}})$ est un modélisateur, et le foncteur i_A est un morphisme de modélisateurs vers le modélisateur fondamental $(\mathcal{C}at, \mathcal{W})$;*

(c) *le foncteur* $\overline{\imath}_A : \mathsf{Hot}_A \longrightarrow \mathsf{Hot}$, *induit par* i_A, *est une équivalence de catégories.*

Démonstration. — L'implication $(a)\Rightarrow(b)$ et l'équivalence $(b)\Leftrightarrow(c)$ sont évidentes. Pour montrer l'implication $(b)\Rightarrow(a)$, il suffit de montrer que la condition (b) implique que A est asphérique, autrement dit que le foncteur canonique $A \longrightarrow e$, où e désigne la catégorie ponctuelle, est une équivalence faible. Considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \widehat{A} \arrow[r, "i_A"] \arrow[d, "\gamma_A"'] & \mathcal{C}at \arrow[d, "\gamma"] \\ \mathsf{Hot}_A \arrow[r, "\overline{\imath}_A"'] & \mathsf{Hot} \end{tikzcd} \quad .$$

Le localisateur fondamental faible $\mathcal{W}$ étant fortement saturé, il suffit de montrer que $\gamma(A) \longrightarrow \gamma(e)$ est un isomorphisme. Or, on a $A \simeq A/e_{\widehat{A}} = i_A(e_{\widehat{A}})$, où $e_{\widehat{A}}$ désigne l'objet final de $\widehat{A}$, et $\gamma(A) \simeq \gamma i_A(e_{\widehat{A}}) = \overline{\imath}_A\gamma_A(e_{\widehat{A}})$, et comme par hypothèse $\overline{\imath}_A$ est une équivalence de catégories, l'assertion résulte du fait que l'image d'un objet final par une équivalence de catégories est un objet final, et du lemme suivant. $\square$

Lemme 1.4.6. — *Soient M une catégorie, W une classe de flèches de M, et $\gamma_M : M \longrightarrow W^{-1}M$ le foncteur de localisation. Si e_M est un objet final de M, alors $\gamma_M(e_M)$ est un objet final de $W^{-1}M$.*

La démonstration est laissée au lecteur.

1.4.7. — Dans la définition d'une catégorie pseudo-test, on a privilégié le foncteur i_A par rapport à son adjoint à droite i_A^* (cf. 1.3.2). De façon plus symétrique, on appelle *$\mathcal{W}$-catégorie test faible*, ou plus simplement *catégorie test faible*, une petite catégorie A telle qu'il existe une partie faiblement saturée W de $\mathsf{Fl}(\widehat{A})$ telle que :

(a) $(\widehat{A}, W)$ soit un modélisateur ;

(b) i_A et i_A^* soient des morphismes de modélisateurs
$$i_A : (\widehat{A}, W) \longrightarrow (\mathcal{C}at, \mathcal{W}) \quad , \qquad i_A^* : (\mathcal{C}at, \mathcal{W}) \longrightarrow (\widehat{A}, W) \quad ;$$

(c) pour toute petite catégorie $C \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C}at)$, on ait $\varepsilon_C \in \mathcal{W}$, et pour tout préfaisceau $F \in \mathsf{Ob}(\widehat{A})$, on ait $\eta_F \in W$, où
$$\varepsilon : i_A i_A^* \longrightarrow 1_{\mathcal{C}at} \quad , \qquad \eta : 1_{\widehat{A}} \longrightarrow i_A^* i_A$$
désignent les morphismes d'adjonction (1.3.2.1).

On remarque que la condition (b) implique en particulier que $W = i_A^{-1}(\mathcal{W}) = \mathcal{W}_{\widehat{A}}$, et que $\mathcal{W} = {i_A^*}^{-1}(W) = {i_A^*}^{-1}(\mathcal{W}_{\widehat{A}})$. En fait, les conditions (a), (b), (c) ci-dessus sont largement redondantes.

Lemme 1.4.8. — *Soient $i : M \longrightarrow M'$, $j : M' \longrightarrow M$ un couple de foncteurs adjoints,*
$$\varepsilon : ij \longrightarrow 1_{M'} \quad , \qquad \eta : 1_M \longrightarrow ji$$

les morphismes d'adjonction, et W (resp. W') *une partie faiblement saturée de* $\mathsf{Fl}(M)$ (resp. $\mathsf{Fl}(M')$)*. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) $W = i^{-1}(W')$*, et pour tout* $a' \in \mathsf{Ob}(M')$*, le morphisme* $\varepsilon_{a'} : ij(a') \longrightarrow a'$ *est dans* W' *;*

(a′) $W' = j^{-1}(W)$*, et pour tout* $a \in \mathsf{Ob}(M)$*, le morphisme* $\eta_a : a \longrightarrow ji(a)$ *est dans* W *;*

ces deux conditions impliquant la condition :

(b) $i(W) \subset W'$*,* $j(W') \subset W$ *et les foncteurs :*

$$\bar{\imath} : W^{-1}M \longrightarrow W'^{-1}M' \quad , \qquad \bar{\jmath} : W'^{-1}M' \longrightarrow W^{-1}M \quad ,$$

induits par i *et* j*, sont des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre, les isomorphismes d'adjonction étant déduits de* ε *et* η*.*

De plus, si les parties W *et* W' *sont fortement saturées, les conditions* (a), (a′) *et* (b) *sont équivalentes.*

Démonstration. — Montrons que $(a) \Rightarrow (a')$. Pour tout $a \in \mathsf{Ob}(M)$, on a :

$$\varepsilon_{i(a)} \circ i(\eta_a) = 1_{i(a)}$$

$$i(a) \xrightarrow{i(\eta_a)} iji(a) \xrightarrow{\varepsilon_{i(a)}} i(a) \quad ,$$

et comme $\varepsilon_{i(a)} \in W'$, on en déduit par saturation faible que $i(\eta_a) \in W'$, d'où $\eta_a \in W$. Montrons que $W' = j^{-1}(W)$. Soit $f' : a' \longrightarrow b'$ une flèche de M'. On a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} ij(a') \arrow[r, "\varepsilon_{a'}"] \arrow[d, "ij(f')"'] & a' \arrow[d, "f'"] \\ ij(b') \arrow[r, "\varepsilon_{b'}"'] & b' \end{tikzcd} \quad ,$$

et comme $\varepsilon_{a'}, \varepsilon_{b'} \in W'$, la saturation faible implique que $f' \in W'$ si et seulement si $ij(f') \in W'$. Or, par hypothèse, on a $ij(f') \in W'$ si et seulement si $j(f') \in W$, ce qui prouve (a').

L'implication $(a') \Rightarrow (a)$ résulte de l'implication précédente, appliquée aux catégories opposées.

Les autres assertions sont évidentes. □

Proposition 1.4.9. — *Soit* A *une petite catégorie. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) A *est une catégorie test faible ;*

(ii) A *satisfait aux conditions suivantes :*

  (a) A *est asphérique ;*

  (b) $i_A^*(\mathcal{W}) \subset \mathcal{W}_{\widehat{A}}$ *(autrement dit* $i_A i_A^*(\mathcal{W}) \subset \mathcal{W}$*) ;*

(iii) *pour toute petite catégorie C, le foncteur $\varepsilon_C : i_A i_A^*(C) \longrightarrow C$ est une équivalence faible ;*

(iii′) *pour toute petite catégorie C, le foncteur $\varepsilon_C : i_A i_A^*(C) \longrightarrow C$ est asphérique ;*

(iii″) *pour toute petite catégorie C ayant un objet final, le préfaisceau $i_A^*(C)$ est asphérique.*

(iii‴) *pour toute petite catégorie asphérique C, le préfaisceau $i_A^*(C)$ est asphérique.*

Démonstration. — L'implication $(i) \Rightarrow (ii)$, (b) est immédiate. Pour démontrer que $(i) \Rightarrow (ii)$, (a), on remarque que la condition (i) implique que le morphisme $\varepsilon_e : i_A i_A^*(e) \longrightarrow e$ est une équivalence faible. Or, i_A^* étant un adjoint à droite, il transforme un objet final en objet final. On a donc $i_A^*(e) \simeq e_{\widehat{A}}$ et $i_A i_A^*(e) \simeq i_A(e_{\widehat{A}}) \simeq A$, ce qui montre que A est asphérique, et prouve l'implication $(i) \Rightarrow (ii)$. Montrons l'implication $(ii) \Rightarrow (iii''')$. Soit C une petite catégorie asphérique. Le morphisme $C \longrightarrow e$ est une équivalence faible, et en vertu de (ii), (b), il en est de même de $i_A i_A^*(C) \longrightarrow i_A i_A^*(e) \simeq A$. Il résulte donc de (ii), (a) et (La), (1.1.2) que $i_A^*(C)$ est un préfaisceau asphérique. L'implication $(iii''') \Rightarrow (iii'')$ résulte de (Lb), (1.1.2), l'implication $(iii'') \Rightarrow (iii')$ de l'observation que pour toute petite catégorie C et tout $c \in \mathsf{Ob}(C)$, $i_A i_A^*(C)/c \simeq i_A i_A^*(C/c)$, l'implication $(iii') \Rightarrow (iii)$ de (Lc), (1.1.2), et l'implication $(iii) \Rightarrow (i)$ du lemme 1.4.8, ce qui prouve la proposition. □

Remarque 1.4.10. — Il résulte, en particulier, de la proposition précédente qu'une catégorie test faible est une catégorie pseudo-test.

Corollaire 1.4.11. — *Soient A une catégorie test faible, et B une petite catégorie asphérique. Alors la catégorie $A \times B$ est une catégorie test faible.*

Démonstration. — En vertu de la proposition précédente, il suffit de montrer que pour toute petite catégorie C admettant un objet final, le préfaisceau $i_{A\times B}^*(C)$ est asphérique. Or, on a des bijections fonctorielles en (a,b) objet de $A \times B$

$$\begin{aligned} i_{A\times B}^*(C)(a,b) &= \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}at}(A \times B/(a,b), C) \simeq \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}at}(A/a \times B/b, C) \\ &\simeq \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}at}(A/a, \underline{\mathsf{Hom}}(B/b, C) = i_A^*(\underline{\mathsf{Hom}}(B/b, C))(a)\,. \end{aligned}$$

Comme la catégorie C admet un objet final, il en est de même de la catégorie $\underline{\mathsf{Hom}}(B/b, C)$, et comme la catégorie A est une catégorie test faible, le préfaisceau $i_A^*(\underline{\mathsf{Hom}}(B/b, C))$ sur A est asphérique. Comme la catégorie B est asphérique, il résulte alors de la proposition 1.3.18, que le préfaisceau $i_{A\times B}^*(C)$ est asphérique, ce qui achève la démonstration. □

1.5. Segments et homotopie dans une catégorie

1.5.1. — Soit M une catégorie admettant un objet final e_M. On appelle *segment* de M un triplet $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$, où I est un objet de M, et $\partial_0, \partial_1 : e_M \rightrightarrows I$ des morphismes de M. Si M admet un objet initial $\varnothing_M$, on dit qu'un segment $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$

est *séparant* si le morphisme canonique $\varnothing_M \longrightarrow e_M$ est un noyau de la double flèche $(\partial_0, \partial_1) : e_M \rightrightarrows I$. Soient $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ et $\mathbb{I}' = (I', \partial'_0, \partial'_1)$ deux segments de M. On appelle *morphisme de segments* de $\mathbb{I}$ vers $\mathbb{I}'$ un morphisme $\varphi : I \longrightarrow I'$ de M tel que $\partial'_0 = \varphi\partial_0$ et $\partial'_1 = \varphi\partial_1$.

1.5.2. — On suppose dans la suite que M admet des produits finis. Soient $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ un segment de M, et $f, g : X \rightrightarrows Y$ deux morphismes de M. On dit que f est $\mathbb{I}$-*homotope de façon élémentaire* à g s'il existe un morphisme $h : I \times X \longrightarrow Y$ tel que $f = h(\partial_0 \times 1_X)$ et $g = h(\partial_1 \times 1_X)$

$$\begin{tikzcd} & I \times X \arrow[dd, "h"] & \\ X \arrow[ur, "\partial_0 \times 1_X"] \arrow[dr, "f"'] & & X \arrow[ul, "\partial_1 \times 1_X"'] \arrow[dl, "g"] \\ & Y & \end{tikzcd} ,$$

et on dit que h est une $\mathbb{I}$-*homotopie* de f à g (ou par abus de langage une I-homotopie). On remarque que 1_I est une $\mathbb{I}$-homotopie de ∂_0 à ∂_1 (en identifiant $I \times e_M$ à I). Plus généralement, un morphisme de segments $\varphi : \mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1) \longrightarrow \mathbb{I}' = (I', \partial'_0, \partial'_1)$ est une $\mathbb{I}$-homotopie de ∂'_0 à ∂'_1.

Soit $\mathcal{I}$ un ensemble de segments de M. On appelle relation de $\mathcal{I}$-*homotopie* la relation d'équivalence engendrée par la relation : “il existe un segment $\mathbb{I}$ appartenant à $\mathcal{I}$ tel que f soit $\mathbb{I}$-homotope à g de façon élémentaire”. On dit que deux morphismes sont $\mathcal{I}$-*homotopes* (ou $\mathbb{I}$-*homotopes* si $\mathcal{I} = \{\mathbb{I}\}$) s'ils sont en relation par la relation de $\mathcal{I}$-homotopie. Si $\mathcal{I} = \{(I, \partial_0, \partial_1)\}$, on dira parfois, par abus de langage, qu'ils sont I-homotopes.

1.5.3. — On vérifie immédiatement que la relation de $\mathcal{I}$-homotopie est compatible à la composition et au produit de morphismes :

a) Si $f_0, f_1 : X \rightrightarrows Y$, $g_0, g_1 : Y \rightrightarrows Z$ sont des morphismes de M, et si f_0 est $\mathcal{I}$-homotope à f_1 et g_0 $\mathcal{I}$-homotope à g_1, alors $g_0 f_0$ est $\mathcal{I}$-homotope à $g_1 f_1$.

b) Si $f_0, f_1 : X \rightrightarrows Y$, $f'_0, f'_1 : X' \rightrightarrows Y'$ sont des morphismes de M, et si f_0 est $\mathcal{I}$-homotope à f_1 et f'_0 $\mathcal{I}$-homotope à f'_1, alors $f_0 \times f'_0$ est $\mathcal{I}$-homotope à $f_1 \times f'_1$.

En vertu de la propriété (a), il existe une catégorie $M_{\mathcal{I}}$ ayant mêmes objets que M, et telle que pour tous objets X et Y, $\mathsf{Hom}_{M_{\mathcal{I}}}(X, Y)$ soit le quotient de l'ensemble $\mathsf{Hom}_M(X, Y)$ par la relation de $\mathcal{I}$-homotopie, la composition dans $M_{\mathcal{I}}$ étant déduite de celle de M par passage au quotient, ainsi qu'un foncteur $Q_{\mathcal{I}}$ induisant l'identité sur les ensembles des objets, associant à une flèche de M sa classe de $\mathcal{I}$-homotopie, et jouissant de la propriété universelle suivante. Pour toute catégorie M', et tout foncteur $F : M \longrightarrow M'$ tel que pour tout couple de morphismes $\mathcal{I}$-homotopes de M, on ait $F(f) = F(g)$, il existe un foncteur unique $\overline{F} : M_{\mathcal{I}} \longrightarrow M'$ rendant commutatif le triangle :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, "Q_{\mathcal{I}}"'] \arrow[dr, "F"] & \\ M_{\mathcal{I}} \arrow[r, "\overline{F}"'] & M' \end{tikzcd} .$$

L'assertion (b) implique que $M_{\mathcal{I}}$ admet des produits finis, et que le foncteur $Q_{\mathcal{I}}$ commute à ces produits.

On dit qu'un morphisme f de M est un $\mathcal{I}$-*homotopisme*, ou une $\mathcal{I}$-*équivalence d'homotopie* (ou un $\mathbb{I}$-*homotopisme*, ou une $\mathbb{I}$-*équivalence d'homotopie* si $\mathcal{I} = \{\mathbb{I}\}$), si $Q_{\mathcal{I}}(f)$ est un isomorphisme de $M_{\mathcal{I}}$. La classe des $\mathcal{I}$-*homotopismes* de M est donc stable par composition et par produits finis. On dit qu'un objet X de M est $\mathcal{I}$-*contractile* (ou $\mathbb{I}$-*contractile* si $\mathcal{I} = \{\mathbb{I}\}$) si $Q_{\mathcal{I}}(X)$ est un objet final de $M_{\mathcal{I}}$, ou de façon équivalente, si le morphisme canonique $X \longrightarrow e_M$ est un $\mathcal{I}$-homotopisme. Pour cela, il faut et il suffit que l'identité de X soit $\mathcal{I}$-homotope à un endomorphisme *constant* de X (se factorisant par l'objet final e_M de M). Si $\mathcal{I} = \{(I, \partial_0, \partial_1)\}$, on parlera parfois, par abus de langage, de I-homotopisme, de I-équivalence d'homotopie, ou d'objet I-contractile. La classe des objets $\mathcal{I}$-*contractiles* de M est stable par produits finis.

1.5.4. — On note $\widetilde{\mathcal{I}}$ la classe des segments $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ de M tels que ∂_0 et ∂_1 soient $\mathcal{I}$-homotopes. On a $\mathcal{I} \subset \widetilde{\mathcal{I}}$ (cf. 1.5.2), et il résulte de l'assertion (a) ci-dessus que la relation de $\widetilde{\mathcal{I}}$-homotopie coïncide avec la relation de $\mathcal{I}$-homotopie, et $\widetilde{\mathcal{I}}$ est la plus grande classe de segments ayant cette propriété. On a $M_{\widetilde{\mathcal{I}}} = M_{\mathcal{I}}$, $Q_{\widetilde{\mathcal{I}}} = Q_{\mathcal{I}}$, et en particulier, pour qu'un morphisme de M soit un $\widetilde{\mathcal{I}}$-homotopisme, il faut et il suffit qu'il soit un $\mathcal{I}$-homotopisme, et pour qu'un objet de M soit $\widetilde{\mathcal{I}}$-contractile, il faut et il suffit qu'il soit $\mathcal{I}$-contractile.

Si M admet des sommes amalgamées (il suffit des sommes amalgamées sous e_M), et si les foncteurs produit par un objet respectent les carrés cocartésiens, alors deux flèches $f, g : X \rightrightarrows Y$ de M sont $\mathcal{I}$-homotopes si et seulement s'il existe un segment $\mathbb{I}$ appartenant à $\widetilde{\mathcal{I}}$ et une $\mathbb{I}$-homotopie de f à g.

Si $\mathcal{I}'$ est une deuxième classe de segments de M, la relation de $\mathcal{I}$-homotopie est plus fine que celle de $\mathcal{I}'$-homotopie si et seulement si pour tout segment $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ appartenant à $\mathcal{I}$, ∂_0 et ∂_1 sont $\mathcal{I}'$-homotopes, autrement dit, si $\mathcal{I} \subset \widetilde{\mathcal{I}}'$, et alors un $\mathcal{I}$-homotopisme est aussi un $\mathcal{I}'$-homotopisme, et un objet $\mathcal{I}$-contractile est aussi $\mathcal{I}'$-contractile.

1.5.5. — Soient M et M' des catégories admettant des objets finaux e_M et $e_{M'}$ respectivement, et $F : M \longrightarrow M'$ un foncteur tel que $F(e_M) = e_{M'}$. Pour tout segment $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ de M, $(F(I), F(\partial_0), F(\partial_1))$ est un segment de M', noté $F(\mathbb{I})$. Supposons que M et M' admettent des produits finis, et que le foncteur F y commute. Alors si

$f, g : X \rightrightarrows Y$ sont deux morphismes de M, et $h : I \times X \longrightarrow Y$ une $\mathbb{I}$-homotopie de f à g,

$$F(h) : F(I) \times F(X) \simeq F(I \times X) \longrightarrow F(Y)$$

est une $F(\mathbb{I})$-homotopie de $F(f)$ à $F(g)$. On en déduit que si $\mathcal{I}$ est une classe de segments de M, et $\mathcal{I}'$ la classe des segments de M' formée des segments $F(\mathbb{I})$, pour $\mathbb{I}$ segment appartenant à $\mathcal{I}$, et si $f, g : X \rightrightarrows Y$ sont deux morphismes $\mathcal{I}$-homotopes de M, alors $F(f)$ et $F(g)$ sont $\mathcal{I}'$-homotopes. Ainsi, en vertu de la propriété universelle de la catégorie $M_{\mathcal{I}}$, le foncteur F induit un foncteur $\overline{F} : M_{\mathcal{I}} \longrightarrow M'_{\mathcal{I}'}$ rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "F"] \arrow[d, "Q_{\mathcal{I}}"'] & M' \arrow[d, "Q_{\mathcal{I}'}"] \\ M_{\mathcal{I}} \arrow[r, "\overline{F}"'] & M'_{\mathcal{I}'} \end{tikzcd} .$$

En particulier, si f est un $\mathcal{I}$-homotopisme de M, alors $F(f)$ est un $\mathcal{I}'$-homotopisme de M', et si X est un objet $\mathcal{I}$-contractile de M, $F(X)$ est un objet $\mathcal{I}'$-contractile de M'.

Lemme 1.5.6 (d'homotopie). — *Soient M une catégorie admettant des produits finis, W une partie faiblement saturée de $\mathsf{Fl}(M)$, et $\mathcal{I}$ un ensemble de segments de M, tel que pour tout segment $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ appartenant à $\mathcal{I}$, le morphisme canonique $p_I : I \longrightarrow e_M$, où e_M désigne l'objet final de M, soit universellement dans W. Si $f, g : X \rightrightarrows Y$ sont deux morphismes $\mathcal{I}$-homotopes de M, alors :*

(a) *$\gamma(f) = \gamma(g)$, où $\gamma : M \longrightarrow W^{-1}M$ désigne le foncteur canonique de localisation ;*
(b) *f est dans W si et seulement si g l'est ;*
(c) *si f est un isomorphisme, et g un morphisme constant (se factorisant par l'objet final e_M), alors le morphisme canonique $X \longrightarrow e_M$ (et $Y \longrightarrow e_M$) est universellement dans W.*

Démonstration. — Pour démontrer (a) et (b), on peut supposer qu'il existe un segment $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ appartenant à $\mathcal{I}$, et une $\mathbb{I}$-homotopie $h : I \times X \longrightarrow Y$ de f à g, de sorte que le diagramme

$$\begin{tikzcd} & I \times X \arrow[dd, "h"] & \\ X \arrow[ur, "\partial_0 \times 1_X"] \arrow[dr, "f"'] & & X \arrow[ul, "\partial_1 \times 1_X"'] \arrow[dl, "g"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

soit commutatif. Comme le morphisme canonique $p_I : I \longrightarrow e_M$ est universellement dans W, $pr_2 = p_I \times 1_X : I \times X \longrightarrow X$ est dans W, et comme

$$pr_2 \circ (\partial_0 \times 1_X) = 1_X = pr_2 \circ (\partial_1 \times 1_X) \ , \qquad (1.5.6.1)$$

on a

$$\gamma(pr_2)\gamma(\partial_0 \times 1_X) = 1_{\gamma(X)} = \gamma(pr_2)\gamma(\partial_1 \times 1_X) \ ,$$

d'où

$$\gamma(\partial_0 \times 1_X) = \gamma(\partial_1 \times 1_X) \ ,$$

ce qui implique que

$$\gamma(f) = \gamma(h)\gamma(\partial_0 \times 1_X) = \gamma(h)\gamma(\partial_1 \times 1_X) = \gamma(g) \ ,$$

et prouve l'assertion (a).

De même, l'égalité 1.5.6.1 implique, en vertu des conditions FS1 et FS2 de la saturation, que $\partial_0 \times 1_X$ et $\partial_1 \times 1_X$ sont dans W. On en déduit que f (resp. g) est dans W si et seulement si h l'est (condition FS2 de la saturation), ce qui prouve l'assertion (b).

Montrons l'assertion (c). Par hypothèse, $g = sp$, où $p : X \longrightarrow e_M$ désigne le morphisme canonique et $s : e_M \longrightarrow Y$ un morphisme de M. Il s'agit de montrer que pour tout objet T de M, la deuxième projection $pr_2 = p \times 1_T : X \times T \longrightarrow T$ est dans W. Or, en vertu de 1.5.3, (b), $f \times 1_T$ est homotope à $g \times 1_T = (s \times 1_T)(p \times 1_T)$, et comme f est un isomorphisme, il en est de même de $f \times 1_T$ qui est donc dans W (conditions FS1 et FS3 de la saturation). Il résulte donc de (b) que $(s \times 1_T)(p \times 1_T)$ est dans W, et comme $(p \times 1_T)(s \times 1_T) = 1_T$, $p \times 1_T$ est dans W (condition FS3 de la saturation), ce qui achève la démonstration. □

Remarque 1.5.7. — Dans la démonstration de 1.5.6, (c), on utilise pour la première fois de façon essentielle la condition FS3 de la saturation. Jusqu'à présent, la seule conséquence utilisée de cette condition (combinée avec la condition FS1) était que les isomorphismes sont dans W.

Proposition 1.5.8. — *Soient M une catégorie admettant des produits finis, W une partie faiblement saturée de* $\mathsf{Fl}(M)$, *et $\mathcal{I}$ un ensemble de segments de M, tel que pour tout segment $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ appartenant à $\mathcal{I}$, le morphisme canonique $p_I : I \longrightarrow e_M$, où e_M désigne l'objet final de M, soit universellement dans W. Si X est un objet $\mathcal{I}$-contractile de M, alors le morphisme canonique $X \longrightarrow e_M$ est universellement dans W.*

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate du lemme 1.5.6 (c). □

1.5.9. — On appelle *segment multiplicatif* d'une catégorie M admettant des produits finis, un segment $\mathbb{L} = (L, \lambda_0, \lambda_1)$ de M, muni d'une loi de composition

$$\Lambda : L \times L \longrightarrow L$$

admettant λ_0 comme unité à gauche et λ_1 comme zéro à gauche, autrement dit, telle que les diagrammes suivants soient commutatifs

$$\begin{tikzcd}
e_M \times L \arrow[r, "\lambda_0 \times 1_L"] \arrow[dr, "1_L"'] & L \times L \arrow[d, "\Lambda"] \\
& L
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
e_M \times L \arrow[r, "\lambda_1 \times 1_L"] \arrow[d] & L \times L \arrow[d, "\Lambda"] \\
e_M \arrow[r, "\lambda_1"'] & L
\end{tikzcd} .$$

En particulier, Λ est une $\mathbb{L}$-homotopie de l'identité de L à un endomorphisme constant, et L est un objet $\mathbb{L}$-contractile de M.

Lemme 1.5.10. — *Soient M une catégorie admettant des produits finis, d'objet final e_M, W une partie faiblement saturée de $\mathsf{Fl}(M)$, $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ un segment de M tel que le morphisme canonique $I \longrightarrow e_M$ soit universellement dans W, et $(\mathbb{L}, \Lambda)$, $\mathbb{L} = (L, \lambda_0, \lambda_1)$, un segment multiplicatif. S'il existe un morphisme de segments $\varphi : \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{L}$, alors le morphisme canonique $p_L : L \longrightarrow e_M$ est universellement dans W.*

Démonstration. — Posons $h = \Lambda(\varphi \times 1_L) : I \times L \longrightarrow L$

$$I \times L \xrightarrow{\varphi \times 1_L} L \times L \xrightarrow{\Lambda} L \quad .$$

On a

$$h(\partial_0 \times 1_L) = \Lambda(\varphi \times 1_L)(\partial_0 \times 1_L) = \Lambda(\lambda_0 \times 1_L) = 1_L$$

et

$$h(\partial_1 \times 1_L) = \Lambda(\varphi \times 1_L)(\partial_1 \times 1_L) = \Lambda(\lambda_1 \times 1_L) = \lambda_1 p_L \ ,$$

autrement dit, 1_L et $\lambda_1 p_L$ sont $\mathbb{I}$-homotopes. Il résulte donc du lemme 1.5.6, (c) que $p_L : L \longrightarrow e_M$ est universellement dans W. □

Remarque 1.5.11. — Voici une démonstration plus conceptuelle de ce lemme. Le morphisme de segments φ définit une $\mathbb{I}$-homotopie de λ_0 à λ_1 (cf. 1.5.2), et le segment $\mathbb{L}$ appartient donc à $\widetilde{\{\mathbb{I}\}}$ (cf. 1.5.4). Comme L est $\mathbb{L}$-contractile (cf. 1.5.9), on en déduit qu'il est aussi $\mathbb{I}$-contractile (1.5.4), et on conclut par la proposition 1.5.8.

Exemple 1.5.12. — Soit M une catégorie admettant des limites projectives finies, un objet initial *strict* $\varnothing_M$ (on dit qu'un objet initial est strict si tout morphisme de but cet objet est un isomorphisme), et un *objet de Lawvere* L (un objet de M représentant le préfaisceau $X \mapsto \{\text{sous-objets de } X\}$). Comme $\varnothing_M$ est un objet initial strict, pour tout objet X de M, le morphisme canonique $\varnothing_M \longrightarrow X$ est un monomorphisme. Si e_M désigne l'objet final de M, les monomorphismes $1_{e_M} : e_M \longrightarrow e_M$ et $\varnothing_M \longrightarrow e_M$ définissent deux morphismes $\lambda_0 : e_M \longrightarrow L$ et $\lambda_1 : e_M \longrightarrow L$, d'où un segment $\mathbb{L} = (L, \lambda_0, \lambda_1)$, appelé *segment de Lawvere* de M. On remarque que l'intersection des sous-objets

$$(X' \hookrightarrow X \ , \ X'' \hookrightarrow X) \longmapsto (X' \times_X X'' \hookrightarrow X)$$

définit une loi de composition sur L

$$\Lambda : L \times L \longrightarrow L \quad .$$

Lemme 1.5.13. — *Le segment* $\mathbb{L}$ *est séparant,* $(\mathbb{L}, \Lambda)$ *est un segment multiplicatif, et pour tout segment séparant* $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ *de* M*, il existe un morphisme de segments* $\varphi : \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{L}$ *(non nécessairement unique).*

Démonstration. — Montrons que $\mathbb{L}$ est séparant. En effet, supposons que le carré

(1.5.13.1)
$$\begin{tikzcd} & e_M \arrow[dr, "\lambda_0"] & \\ X \arrow[ur] \arrow[dr] & & L \\ & e_M \arrow[ur, "\lambda_1"'] & \end{tikzcd}$$

soit commutatif. Comme les carrés

(1.5.13.2)
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "1_X"'] & e_M \arrow[d] \\ X \arrow[r] & e_M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \varnothing_M \arrow[r] \arrow[d] & \varnothing_M \arrow[d] \\ X \arrow[r] & e_M \end{tikzcd}$$

sont cartésiens (le second parce que $\varnothing_M$ est un objet initial strict), la commutativité de 1.5.13.1 implique que $1_X : X \longrightarrow X$ et $\varnothing_M \longrightarrow X$ représentent le même sous-objet de X, autrement dit, que $\varnothing_M \longrightarrow X$ est un isomorphisme, ce qui prouve l'assertion.

Pour montrer que λ_0 (resp. λ_1) est une unité (resp. un zéro) à gauche pour Λ, comme les carrés 1.5.13.2 sont cartésiens, il suffit de remarquer que pour tout objet X de M, l'intersection du sous-objet “plein” (resp. “vide”) de X avec un sous-objet arbitraire X' de X est le sous-objet X' (resp. vide).

Montrons que pour tout segment séparant $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$, il existe un morphisme de segments $\varphi : \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{L}$. Il s'agit de montrer qu'il existe un morphisme $\varphi : I \longrightarrow L$ de M tel que

(1.5.13.3)
$$\lambda_0 = \varphi\partial_0 \ , \quad \lambda_1 = \varphi\partial_1 \quad .$$

Soit $\varphi : I \longrightarrow L$ le morphisme correspondant au sous-objet $\partial_0 : e_M \longrightarrow I$ de I. Les égalités 1.5.13.3 résultent alors du fait que les carrés suivants sont cartésiens :

$$\begin{tikzcd} e_M \arrow[r] \arrow[d] & e_M \arrow[d, "\partial_0"] \\ e_M \arrow[r, "\partial_0"'] & I \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \varnothing_M \arrow[r] \arrow[d] & e_M \arrow[d, "\partial_0"] \\ e_M \arrow[r, "\partial_1"'] & I \end{tikzcd}$$

(le deuxième puisque $\mathbb{I}$ est séparant). □

Proposition 1.5.14. — *Soit M une catégorie admettant des limites projectives finies, un objet initial strict, et un objet de Lawvere L, et soit W une partie faiblement saturée de $\mathsf{Fl}(M)$. Notons e_M un objet final de M. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *Le morphisme canonique $L \longrightarrow e_M$ est universellement dans W ;*
(b) *il existe un segment séparant $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ de M tel que le morphisme canonique $I \longrightarrow e_M$ soit universellement dans W.*

Démonstration. — La proposition résulte aussitôt des lemmes 1.5.13 et 1.5.10. □

Exemple 1.5.15. — Supposons que $M = \mathcal{C}at$, notons Δ_1 la catégorie correspondant à l'ensemble ordonné $\{0 \leqslant 1\}$, et $e_0, e_1 : e \rightrightarrows \Delta_1$ les foncteurs définis par 0 et 1 (correspondant aux cribles “plein” et “vide” de e (cf. 1.1.25)). On vérifie immédiatement que $\mathbf{\Delta}_1 := (\Delta_1, e_0, e_1)$ est un segment séparant de $\mathcal{C}at$, et on remarque que si $u_0, u_1 : A \rightrightarrows B$ sont deux flèches de $\mathcal{C}at$, les $\mathbf{\Delta}_1$-homotopies de u_0 à u_1 correspondent biunivoquement aux morphismes de foncteurs de u_0 vers u_1. On en déduit facilement que les segments appartenant à $\widetilde{\{\mathbf{\Delta}_1\}}$ (cf. 1.5.4) sont exactement les segments $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ tels que les images de ∂_0 et ∂_1 appartiennent à une même composante connexe de I, et que deux flèches $u_0, u_1 : A \rightrightarrows B$ de $\mathcal{C}at$ sont $\mathbf{\Delta}_1$-homotopes si et seulement s'il existe un segment $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ de $\mathcal{C}at$, avec I connexe, et une $\mathbb{I}$-homotopie $h : I \times A \longrightarrow B$ de u_0 à u_1. On dira plus simplement que u_0 et u_1 sont *homotopes.* De même, on dira qu'une flèche de $\mathcal{C}at$ est un *homotopisme*, pour $\mathbf{\Delta}_1$-homotopisme, et qu'une catégorie est *contractile*, pour $\mathbf{\Delta}_1$-contractile.

Lemme 1.5.16. — *Soit C une petite catégorie admettant un objet c_0 ayant une section globale dans $\widehat{C}$, autrement dit, tel qu'il existe un morphisme de préfaisceaux $\sigma : e_{\widehat{C}} \longrightarrow c_0$, de source l'objet final $e_{\widehat{C}}$ de $\widehat{C}$ et de but c_0. Alors la catégorie C est contractile.*

Démonstration. — La donnée du morphisme de préfaisceaux σ équivaut à la donnée, pour tout objet c de C, d'un morphisme $\sigma_c : c \longrightarrow c_0$ de sorte que pour toute flèche $f : c \longrightarrow c'$ de C, on ait un triangle commutatif

$$\begin{tikzcd} c \arrow[dr, "\sigma_c"] \arrow[dd, "f"'] & \\ & c_0 \\ c' \arrow[ur, "\sigma_{c'}"'] & \end{tikzcd} .$$

Soient $s : e \longrightarrow C$ le foncteur défini par l'objet c_0 de C et $p : C \longrightarrow e$ l'unique foncteur de C vers la catégorie ponctuelle. On a $ps = 1_e$, le composé sp est l'endofoncteur constant de C de valeur c_0, et la famille de morphismes σ_c, $c \in \mathsf{Ob}(C)$, définit un morphisme de foncteurs $1_C \longrightarrow sp$, qui correspond à une $\mathbf{\Delta}_1$-homotopie de 1_C à sp, ce qui prouve le lemme. □

Proposition 1.5.17. — *Si C est une petite catégorie admettant un objet final (ou initial), alors C est contractile.*

Démonstration. — Si e_C est un objet final de C, le préfaisceau représentable, représenté par e_C, noté également e_C, est un objet final de $\widehat{C}$, et le morphisme identique 1_{e_C} de e_C définit une section globale de e_C dans $\widehat{C}$. En vertu du lemme précédent, la catégorie C est donc contractile. L'assertion relative à l'objet initial se démontre de façon duale. $\square$

1.5.18. — Le segment $\mathbf{\Delta}_1$ admet une structure de segment multiplicatif. En effet, Δ_1 représente le préfaisceau

$$C \longmapsto \{\text{cribles de } C\}$$

sur $\mathcal{C}at$ (1.1.25), et le morphisme de C vers Δ_1 se factorisant par e_0 (resp. e_1) correspond au crible plein (resp. vide) de C. On en déduit que la loi de composition sur Δ_1 représentant l'intersection de deux cribles définit une structure de segment multiplicatif sur $\mathbf{\Delta}_1$. Explicitement, cette loi de composition est définie par

$$\begin{aligned} &\Delta_1 \times \Delta_1 \longrightarrow \Delta_1 \\ &\quad (a,b) \longmapsto a+b-ab \ , \quad a,b \in \mathsf{Ob}(\Delta_1) = \{0,1\} \ . \end{aligned}$$

C'est le morphisme qui correspond au crible $\{(0,0)\}$ de $\Delta_1 \times \Delta_1$.

Proposition 1.5.19. — *Pour tout localisateur fondamental faible $\mathcal{W}$, une petite catégorie contractile est $\mathcal{W}$-asphérique.*

Démonstration. — En vertu de Lb (1.1.2), et de la proposition 1.1.4, $\Delta_1 \longrightarrow e$ est universellement dans $\mathcal{W}$. Comme en vertu de La (1.1.2), $\mathcal{W}$ est faiblement saturé, la proposition 1.5.19 résulte de la proposition 1.5.8. $\square$

Corollaire 1.5.20. — *Pour tout localisateur fondamental faible $\mathcal{W}$, une petite catégorie C admettant un objet ayant une section globale dans $\widehat{C}$ est $\mathcal{W}$-asphérique.*

Démonstration. — En vertu du lemme 1.5.16, le corollaire est un cas particulier de la proposition précédente. $\square$

1.6. Les catégories test

Dans ce paragraphe, on se fixe, une fois pour toutes, un localisateur fondamental faible $\mathcal{W}$.

1.6.1. — La propriété d'être une catégorie test faible n'est pas une propriété locale : si A est une catégorie test faible, la catégorie A/a, pour a objet de A, n'est pas nécessairement une catégorie test faible, et si A est une petite catégorie telle que pour tout objet a de A, A/a soit une catégorie test faible, A n'est pas nécessairement une catégorie test faible. On est ainsi conduit à poser la définition suivante.

Définition 1.6.2. — On dit qu'une petite catégorie A est une $\mathcal{W}$-*catégorie test locale*, ou plus simplement une *catégorie test locale*, si pour tout objet a de A, A/a est une catégorie test faible. On dit que A est une $\mathcal{W}$-*catégorie test*, ou plus simplement une *catégorie test*, si elle est à la fois une $\mathcal{W}$-catégorie test locale et une $\mathcal{W}$-catégorie test faible.

Proposition 1.6.3. — *Soit A une petite catégorie. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *A est une catégorie test locale ;*
(b) *pour toute petite catégorie C admettant un objet final, $i_A^*(C)$ est un préfaisceau localement asphérique* (cf. 1.3.6) *;*
(c) *pour toute petite catégorie asphérique C, $i_A^*(C)$ est un préfaisceau localement asphérique ;*
(d) *pour toute équivalence faible u de $\mathcal{C}at$, $i_A^*(u)$ est une équivalence faible locale de préfaisceaux sur A* (cf. 1.3.6).

Démonstration. — On remarque que pour toute petite catégorie C, on a un isomorphisme fonctoriel $i_A^*(C)|(A/a) \simeq i_{A/a}^*(C)$. La proposition résulte donc de l'équivalence des conditions (i), (iii''), (iii''') et (ii) de la proposition 1.4.9. □

Remarque 1.6.4. — *a*) Une petite catégorie A est une catégorie test si et seulement si elle est une catégorie test locale asphérique. En effet, en vertu de la proposition 1.4.9, pour démontrer que sous ces hypothèses A est une catégorie test faible, il suffit de montrer que pour toute petite catégorie C ayant un objet final, $A/i_A^*(C) \longrightarrow A$ est asphérique, ce qui résulte de la proposition 1.6.3. Pour caractériser donc les catégories test, il suffit de caractériser les catégories test locales.

b) Si A est une catégorie test locale, alors pour tout préfaisceau F de $\widehat{A}$, la catégorie A/F est une catégorie test locale. En effet, pour tout objet $(a, p : a \longrightarrow F)$ de A/F, on a un isomorphisme canonique $(A/F)/(a,p) \simeq A/a$. Si de plus F est asphérique, il résulte de (a) que A/F est une catégorie test.

1.6.5. — Soit A une petite catégorie. On pose $L_A = i_A^*(\Delta_1)$, où Δ_1 désigne la catégorie correspondant à l'ensemble ordonné $\{0 \leqslant 1\}$. On remarque que si F désigne un préfaisceau sur A, on a des bijections fonctorielles

$$\begin{aligned}\mathsf{Hom}_{\widehat{A}}(F, L_A) &= \mathsf{Hom}_{\widehat{A}}(F, i_A^*(\Delta_1)) \simeq \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}at}(i_A(F), \Delta_1)\\ &= \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}at}(A/F, \Delta_1) \simeq \{\text{cribles de } A/F\} \simeq \{\text{sous-objets de } F\}\ .\end{aligned}$$

On en déduit que L_A représente le foncteur

$$F \longmapsto \{\text{sous-objets de } F\}\ ,$$

autrement dit, que L_A est un objet de Lawvere de $\widehat{A}$.

Théorème 1.6.6. — *Soit A une petite catégorie. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *A est une catégorie test locale ;*
(b) *L_A est localement asphérique ;*
(c) *il existe un segment séparant $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ de $\widehat{A}$ tel que I soit localement asphérique.*

Démonstration. — Comme Δ_1 admet un objet final, l'implication $(a) \Rightarrow (b)$ résulte de la proposition 1.6.3. Pour montrer l'implication $(b) \Rightarrow (a)$, supposons que L_A soit localement asphérique, autrement dit, que le morphisme canonique $L_A \longrightarrow e_{\widehat{A}}$, où $e_{\widehat{A}}$ désigne l'objet final de $\widehat{A}$, soit universellement dans $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$. Soit C une petite catégorie admettant un objet final. En vertu de la proposition 1.5.17, la catégorie C est $\boldsymbol{\Delta}_1$-contractile, où $\boldsymbol{\Delta}_1$ désigne le segment (Δ_1, e_0, e_1) (cf. 1.5.15). Comme le foncteur i^*_A, étant un adjoint à droite, commute aux limites projectives, on en déduit que $\mathbb{L}_A := (L_A, i^*_A(e_0), i^*_A(e_1))$ est un segment de $\widehat{A}$, et que $i^*_A(C)$ est $\mathbb{L}_A$-contractile (cf. 1.5.5). Il résulte donc de la proposition 1.5.8 que le morphisme canonique $i^*_A(C) \longrightarrow e_{\widehat{A}}$ est universellement dans $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$, autrement dit que $i^*_A(C)$ est localement asphérique, ce qui prouve, en vertu de la proposition 1.6.3, que A est une catégorie test locale. L'équivalence de (b) et (c) résulte de la proposition 1.5.14. □

Corollaire 1.6.7. — *Soient A une petite catégorie, $i : A \longrightarrow \mathcal{C}at$ un foncteur tel que pour tout objet a de A la catégorie $i(a)$ soit non vide* (resp. *asphérique*), *et $i^* : \mathcal{C}at \longrightarrow \widehat{A}$ le foncteur*

$$C \longmapsto (a \longmapsto \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}at}(i(a), C))\,.$$

Si $i^*(\Delta_1)$ est un préfaisceau localement asphérique de $\widehat{A}$, alors A est une catégorie test locale.

Démonstration. — Pour montrer que A est une catégorie test locale, on peut supposer que le localisateur fondamental faible $\mathcal{W}$ n'est pas trivial (car si $\mathcal{W} = \mathsf{Fl}(\mathcal{C}at)$, toute petite catégorie est une catégorie test locale). Alors en vertu de la proposition 1.1.29, toute catégorie asphérique est non vide, et il suffit de démontrer le corollaire sous l'hypothèse que pour tout objet a de A la catégorie $i(a)$ est non vide. Cette hypothèse implique aussitôt que le foncteur i^* transforme l'objet initial de $\mathcal{C}at$ en l'objet initial de $\widehat{A}$. Comme le foncteur i^* commute aux limites projectives, on en déduit que si $\boldsymbol{\Delta}_1 = (\Delta_1, e_0, e_1)$ désigne le segment séparant de $\mathcal{C}at$ de l'exemple 1.5.15, alors $i^*(\boldsymbol{\Delta}_1) = (i^*(\Delta_1), i^*(e_0), i^*(e_1))$ est un segment séparant de $\widehat{A}$. Comme par hypothèse le préfaisceau $i^*(\Delta_1)$ est localément asphérique, le corollaire résulte de la condition (c) du théorème précédent. □

Corollaire 1.6.8. — *Soit A une petite catégorie admettant des produits finis. S'il existe un segment séparant $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ de $\widehat{A}$ tel que I soit représentable, alors A est une catégorie test.*

Démonstration. — Comme A admet des produits finis, elle admet, en particulier, un objet final e_A, et elle est donc asphérique. Comme le préfaisceau I est représentable, pour tout objet a de A, le préfaisceau $a \times I$ est aussi représentable, donc asphérique (1.3.5), ce qui implique que le morphisme $I \longrightarrow e_A$ de $\widehat{A}$ est asphérique (1.3.5), autrement dit, que le préfaisceau I est localement asphérique (1.3.6). Il résulte donc du théorème 1.6.6 que A est une catégorie test locale, et comme elle est asphérique, elle est une catégorie test (1.6.4, (a)). $\square$

Remarque 1.6.9. — Si A est une petite catégorie admettant un objet final e_A, un segment séparant $(I, \partial_0, \partial_1)$ de $\widehat{A}$, tel que I soit représentable, n'est rien d'autre qu'une double flèche $\partial_0, \partial_1 : e_A \rightrightarrows I$ de A telle qu'il n'y ait aucun diagramme commutatif dans A de la forme

$$\begin{tikzcd}
& e_A \arrow[dr, "\partial_0"] & \\
X \arrow[ur] \arrow[dr] & & I \\
& e_A \arrow[ur, "\partial_1"'] &
\end{tikzcd} .$$

En particulier, cela exclut l'existence d'un objet initial dans A.

Exemples 1.6.10. — Le corollaire 1.6.8 fournit un grand nombre d'exemples de catégories test :

a) La catégorie dont les objets sont les ensembles

$$\{0, 1, \ldots, n\} , \quad n \geqslant 0 ,$$

et dont les morphismes sont toutes les applications entre ces ensembles (catégorie équivalente à celle des ensembles finis non vides) est une catégorie test.

b) Une petite catégorie équivalente à la catégorie des ensembles ordonnés (ou préordonnés) finis non vides est une catégorie test.

c) Une petite catégorie équivalente à celle des catégories finies non vides est une catégorie test.

d) Plus généralement, soit A une petite sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}at$ stable par produits finis. On suppose :

(i) la catégorie vide n'est pas un objet de A ;

(ii) il existe une catégorie ayant au moins deux objets, et qui est un objet de A.

Alors A est une catégorie test. En effet, soit I un objet de A ayant au moins deux objets distincts e_0, e_1. Alors les flèches $\partial_0, \partial_1 : e \rightrightarrows I$, définies par e_0, e_1, définissent en vertu de la remarque 1.6.9, un segment séparant de $\widehat{A}$, et l'assertion résulte du corollaire 1.6.8. On remarque que les exemples précédents peuvent être considérés comme des cas particuliers.

e) La sous-catégorie (non pleine) de la catégorie des ensembles dont les objets sont les puissances $\{0,1\}^n$, $n \geqslant 0$, de l'ensemble $\{0,1\}$, et les morphismes les applications

$$\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : \{0,1\}^m \longrightarrow \{0,1\}^n \ , \quad \varphi_i : \{0,1\}^m \longrightarrow \{0,1\} \ ,$$

où pour tout i, $0 \leqslant i \leqslant n$, φ_i est une projection ou une application constante, est une catégorie test.

Corollaire 1.6.11. — *Soient A une catégorie test locale* (resp. *une catégorie test*), *et B une petite catégorie arbitraire* (resp. *asphérique*). *Alors la catégorie $A \times B$ est une catégorie test locale* (resp. *une catégorie test*).

Démonstration. — Soient A une catégorie test locale, B une catégorie arbitraire, et notons $pr_1 : A \times B \longrightarrow A$ la première projection. En vertu du théorème 1.6.6, il existe un segment séparant $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ de $\widehat{A}$ tel que I soit localement asphérique. Comme le foncteur $pr_1^* : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{A \times B}$ est exact, $(pr_1^*(I), pr_1^*(\partial_0), pr_1^*(\partial_1))$ est un segment séparant de $\widehat{A \times B}$, et il résulte de la proposition 1.3.17 que $pr_1^*(I) = I \boxtimes e_{\widehat{B}}$ (où $e_{\widehat{B}}$ désigne l'objet final de $\widehat{B}$) est localement asphérique. Le théorème 1.6.6 implique donc que $A \times B$ est une catégorie test locale, ce qui prouve l'assertion relative aux catégories test locales. L'assertion relative aux catégories test en résulte, grâce à la remarque 1.6.4, (a) et au corollaire 1.1.5. $\square$

Exemple 1.6.12. — Notons Δ la *catégorie des simplexes*, sous-catégorie pleine de la catégorie des ensembles ordonnés dont les objets sont les ensembles

$$\varDelta_n = \{0, 1, \dots, n\} \ , \quad n \in \mathbb{N} \ ,$$

ordonnés par l'ordre naturel, de sorte que $\widehat{\Delta}$ soit la catégorie des *ensembles simpliciaux.*

Lemme 1.6.13. — *L'objet $\varDelta_1$ de $\widehat{\Delta}$ est localement asphérique.*

Démonstration. — Pour montrer que $\varDelta_1$ est localement asphérique, autrement dit, que le morphisme $\varDelta_1 \longrightarrow e_{\widehat{\Delta}} = \varDelta_0$ de $\widehat{\Delta}$ est asphérique (1.3.6), il suffit, en vertu de 1.3.5, de montrer que pour tout m, $m \geqslant 0$, le préfaisceau $\varDelta_m \times \varDelta_1$ est asphérique.

Notons

$$\varphi_k : \varDelta_{m+1} \longrightarrow \varDelta_m \times \varDelta_1 \ , \quad 0 \leqslant k \leqslant m \ ,$$

le morphisme de $\widehat{\Delta}$ défini par les morphismes

$$\varphi'_k : \varDelta_{m+1} \longrightarrow \varDelta_m \quad , \qquad \varphi''_k : \varDelta_{m+1} \longrightarrow \varDelta_1$$

de Δ, définis par

$$\varphi'_k(l) = \begin{cases} l \quad , & 0 \leqslant l \leqslant k \ , \\ l-1 \ , & k < l \leqslant m+1 \ , \end{cases} \qquad \varphi''_k(l) = \begin{cases} 0 \ , & 0 \leqslant l \leqslant k \ , \\ 1 \ , & k < l \leqslant m+1 \ . \end{cases}$$

Notons F_k le préfaisceau image de φ_k. Comme le morphisme φ_k est un monomorphisme de $\widehat{\Delta}$, on en déduit que F_k est isomorphe à $\mathit{\Delta}_{m+1}$, et en particulier, F_k est représentable, donc asphérique (1.3.5).

On pose

$$G_k = \bigcup_{0 \leqslant l \leqslant k} F_l \quad , \qquad 0 \leqslant k \leqslant m \quad .$$

On va montrer

(a) $\mathit{\Delta}_m \times \mathit{\Delta}_1 = G_m$;
(b) $G_k \cap F_{k+1} \simeq \mathit{\Delta}_m$, $0 \leqslant k < m$.

La condition (b) impliquera, par récurrence, que pour tout k, $0 \leqslant k \leqslant m$, G_k est asphérique (car $G_0 = F_0$ est asphérique, et si G_k est asphérique (pour un entier k, $0 \leqslant k < m$), $G_{k+1} = G_k \cup F_{k+1}$ est asphérique, en vertu de (b) et de la proposition 1.3.9), et la condition (a) impliquera alors que $\mathit{\Delta}_m \times \mathit{\Delta}_1$ est asphérique.

Or, la condition (a) est immédiate. Pour montrer la condition (b), considérons le morphisme

$$\psi_k : \mathit{\Delta}_m \longrightarrow \mathit{\Delta}_m \times \mathit{\Delta}_1 \ , \quad 0 \leqslant k < m \ ,$$

de $\widehat{\Delta}$ défini par les morphismes

$$\psi'_k : \mathit{\Delta}_m \longrightarrow \mathit{\Delta}_m \quad , \qquad \psi''_k : \mathit{\Delta}_m \longrightarrow \mathit{\Delta}_1$$

de Δ, définis par

$$\psi'_k = 1_{\mathit{\Delta}_m} \quad , \qquad \psi''_k(l) = \begin{cases} 0 \ , & 0 \leqslant l \leqslant k \ , \\ 1 \ , & k < l \leqslant m \ . \end{cases}$$

Notons F'_k le préfaisceau image de ψ_k. Comme le morphisme ψ_k est un monomorphisme de $\widehat{\Delta}$, on en déduit que F'_k est isomorphe à $\mathit{\Delta}_m$. D'autre part, on vérifie aussitôt que

$$F'_k = G_k \cap F_{k+1} \quad , \qquad 0 \leqslant k < m \ ,$$

ce qui prouve la condition (b), et achève la démonstration. □

Proposition 1.6.14. — *La catégorie Δ est une catégorie test.*

Démonstration. — Comme la catégorie Δ admet un objet final $\mathit{\Delta}_0$, elle est asphérique. Pour montrer donc que Δ est une catégorie test, il suffit, en vertu de 1.6.4, (a), de montrer qu'elle est une catégorie test locale. Notons

$$e_0, \, e_1 : \mathit{\Delta}_0 \rightrightarrows \mathit{\Delta}_1$$

les morphismes définis par

$$e_0(0) = 0 \ , \quad e_1(0) = 1 \quad .$$

En vertu du théorème 1.6.6, pour montrer que Δ est une catégorie test locale, il suffit de montrer que $(\mathit{\Delta}_1, e_0, e_1)$ est un segment séparant de $\widehat{\Delta}$, et que $\mathit{\Delta}_1$ est un objet localement asphérique de $\widehat{\Delta}$. La première assertion résulte immédiatement de la remarque 1.6.9, et la deuxième du lemme 1.6.13. □

Exemple 1.6.15. — Si $\mathcal{W}$ est le localisateur fondamental trivial (1.1.28), alors toute petite catégorie est une $\mathcal{W}$-catégorie test. Si $\mathcal{W}$ est le localisateur fondamental faible grossier non trivial $\mathcal{W}_{gr}$ (1.1.30), pour qu'une petite catégorie soit une $\mathcal{W}_{gr}$-catégorie test, il faut et il suffit qu'elle soit non vide. En effet, il résulte aussitôt de la proposition 1.1.29 qu'une petite catégorie est $\mathcal{W}_{gr}$-asphérique si et seulement si elle est non vide, et l'assertion est donc conséquence immédiate de la proposition 1.6.3.

1.7. Les catégories test strictes

Dans ce paragraphe, on se fixe, une fois pour toutes, un localisateur fondamental faible $\mathcal{W}$.

Proposition 1.7.1. — *Soit A une petite catégorie. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *pour tous objets a et b de A, le produit $a \times b$ dans $\widehat{A}$ est un préfaisceau asphérique ;*
(a′) *pour tout objet a de A le morphisme canonique d'oubli $A/_a \longrightarrow A$ est asphérique ;*
(a″) *le produit de deux préfaisceaux asphériques de $\widehat{A}$ est asphérique ;*
(b) *le foncteur $i_A : \widehat{A} \longrightarrow \mathcal{C}at$ commute aux produits binaires, à équivalence faible près, autrement dit, pour tous préfaisceaux F et G de $\widehat{A}$, le morphisme canonique*

$$A/(F \times G) \longrightarrow A/F \times A/G$$

est une équivalence faible ;
(b′) *pour tous préfaisceaux F et G de $\widehat{A}$, le morphisme canonique*

$$A/(F \times G) \longrightarrow A/F \times A/G$$

est asphérique ;
(c) *tout préfaisceau représentable de $\widehat{A}$ est localement asphérique ;*
(c′) *tout préfaisceau asphérique de $\widehat{A}$ est localement asphérique ;*
(d) *le foncteur diagonal $A \longrightarrow A \times A$ est asphérique.*

De plus, si A est non vide, chacune de ces conditions implique que la catégorie A est asphérique.

Démonstration. — La condition (a') est une reformulation de la condition (a). L'implication $(a) \Rightarrow (b')$ résulte de l'observation que pour tous objets $(a,\, p : a \longrightarrow F)$ et $(b,\, q : b \longrightarrow G)$ de A/F et A/G respectivement, on a un isomorphisme canonique

$$(A/(F \times G))/((a,p),(b,q)) \simeq A/a \times b \quad .$$

L'implication $(b') \Rightarrow (b)$ est évidente, et l'implication $(b) \Rightarrow (a'')$ résulte du corollaire 1.1.5. Dire qu'un préfaisceau F de $\widehat{A}$ est localement asphérique, c'est dire que pour tout objet a de A, le préfaisceau $a \times F$ est asphérique, ce qui montre l'implication $(a'') \Rightarrow (c')$. Les implications $(c') \Rightarrow (c)$ et $(c) \Rightarrow (a)$ sont immédiates, ce qui prouve l'équivalence des six premières conditions. L'équivalence de (a) et (d) résulte de l'observation que pour tout objet (a, b) de $A \times A$, on a un isomorphisme canonique $A/(a, b) \simeq A/a \times b$.

Montrons que si A est non vide, ces conditions impliquent que A est asphérique. Soit a un objet de A. En vertu de la condition (c), le morphisme canonique $a \longrightarrow e_{\widehat{A}}$ de $\widehat{A}$, où $e_{\widehat{A}}$ désigne l'objet final de $\widehat{A}$, est asphérique, ce qui implique que le préfaisceau $e_{\widehat{A}}$ est asphérique, autrement dit que la catégorie A est asphérique. □

Définition 1.7.2. — Soit A une petite catégorie. On dit que A est *totalement $\mathcal{W}$-asphérique*, ou plus simplement *totalement asphérique*, si elle est asphérique, et si pour tous objets a et b de A, le préfaisceau $a \times b$ de $\widehat{A}$ est asphérique.

Remarque 1.7.3. — Une catégorie totalement asphérique est donc une petite catégorie satisfaisant aux conditions équivalentes de la proposition 1.7.1 et qui est asphérique, et pour cela il suffit qu'elle soit non vide. En vertu de la proposition 1.1.29, si le localisateur fondamental faible $\mathcal{W}$ est non trivial, les catégories totalement asphériques sont exactement les petites catégories non vides satisfaisant aux conditions équivalentes de la proposition 1.7.1. Si A est une catégorie totalement asphérique, il résulte de l'équivalence des conditions (a) et (c') de la proposition 1.7.1 et de l'asphéricité de A qu'un préfaisceau de $\widehat{A}$ est asphérique si et seulement si il est localement asphérique.

Exemple 1.7.4. — Une petite catégorie admettant des produits finis est totalement asphérique, et de même si elle admet des produits binaires et elle est non vide.

Proposition 1.7.5. — a) *Un produit fini de petites catégories totalement asphériques est une catégorie totalement asphérique.*

b) *Soit $u : A \longrightarrow B$ un morphisme asphérique de $\mathcal{C}at$. Si A est totalement asphérique, il en est de même de B.*

c) *Soit $u : A \longrightarrow B$ un morphisme localement asphérique de $\mathcal{C}at$. Si u est pleinement fidèle, B totalement asphérique, et A non vide ou asphérique, alors A est totalement asphérique.*

Démonstration. — *a*) Comme la catégorie ponctuelle e est totalement asphérique, il suffit de montrer que le produit de deux catégories totalement asphériques A et B est totalement asphérique. Comme $A \times B$ est asphérique (1.1.5), il suffit, en vertu de la proposition 1.7.1, de montrer que le foncteur diagonal

$$\Delta_{A \times B} : A \times B \longrightarrow A \times B \times A \times B$$

est asphérique. Or, ce foncteur est le composé de $\Delta_A \times \Delta_B$ (où $\Delta_A : A \longrightarrow A \times A$ et $\Delta_B : B \longrightarrow B \times B$ désignent les foncteurs diagonaux) et de l'isomorphisme

$$A \times A \times B \times B \longrightarrow A \times B \times A \times B$$

permutant les deux facteurs du milieu. Comme A et B sont totalement asphériques, les foncteurs Δ_A et Δ_B sont asphériques (1.7.1), donc aussi $\Delta_A \times \Delta_B$ (1.1.6), ce qui prouve l'assertion.

b) Comme u est une équivalence faible et A asphérique, B est aussi asphérique. Pour montrer qu'elle est totalement asphérique, considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\Delta_A"'] & B \arrow[d, "\Delta_B"] \\ A \times A \arrow[r, "u \times u"'] & B \times B \end{tikzcd} \quad ,$$

où Δ_A et Δ_B désignent les foncteurs diagonaux. Les foncteurs Δ_A et $u \times u$ sont asphériques, en vertu de 1.7.1 et 1.1.6 respectivement. Comme u est aussi asphérique, il en est de même de Δ_B (1.1.8), ce qui achève la démonstration (1.7.1).

c) Le foncteur u étant pleinement fidèle, il en est de même de l'adjoint à gauche $u_! : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{B}$ de u^*. On en déduit que pour tout objet a de A, on a des isomorphismes

$$a \simeq u^* u_!(a) \simeq u^* u(a) \quad .$$

Comme la catégorie B est totalement asphérique, le préfaisceau représentable $u(a)$ de $\widehat{B}$ est localement asphérique (1.7.1), et il résulte du corollaire 1.3.13 que le préfaisceau $u^*u(a) \simeq a$ de $\widehat{A}$ est localement asphérique, ce qui achève la démonstration par une nouvelle application de la proposition 1.7.1 et la remarque 1.7.3. $\square$

Proposition 1.7.6. — *Soit A une petite catégorie. On suppose qu'il existe une classe $\mathcal{I}$ de segments de $\widehat{A}$ telle que pour tout segment $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ de $\widehat{A}$ appartenant à $\mathcal{I}$, le préfaisceau I soit localement asphérique, et telle que tout préfaisceau représentable soit $\mathcal{I}$-contractile. Alors A satisfait aux conditions équivalentes de la proposition 1.7.1. En particulier, si de plus A est non vide ou asphérique, alors A est totalement asphérique.*

Démonstration. — En vertu de la proposition 1.5.8, pour tout objet a de A, le préfaisceau représenté par a est localement asphérique, autrement dit, A satisfait à la condition (c) de la proposition 1.7.1. En vertu de cette même proposition, si A est de plus non vide, A est asphérique, donc totalement asphérique, ce qui achève la démonstration. $\square$

Définition 1.7.7. — On appelle *$\mathcal{W}$-catégorie test stricte*, ou plus simplement *catégorie test stricte*, une catégorie test totalement asphérique.

Proposition 1.7.8. — *Soit A une petite catégorie totalement asphérique. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *A est une catégorie test faible ;*
(b) *A est une catégorie test locale ;*
(c) *A est une catégorie test ;*
(d) *A est une catégorie test stricte ;*
(e) *il existe un segment séparant $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ de $\widehat{A}$ tel que I soit asphérique ;*
(f) *l'objet de Lawvere $L_A = i_A^*(\Delta_1)$ de $\widehat{A}$ est asphérique.*

Démonstration. — Comme A est totalement asphérique, l'équivalence $(c) \Leftrightarrow (d)$ est tautologique. L'équivalence des conditions (b), (e) et (f) résulte du théorème 1.6.6 et de la remarque 1.7.3. La catégorie A étant asphérique, l'équivalence $(b) \Leftrightarrow (c)$ résulte de la remarque 1.6.4, (a). L'implication $(c) \Rightarrow (a)$ est évidente. Il reste à prouver l'implication $(a) \Rightarrow (b)$. Soit C une petite catégorie admettant un objet final. En vertu de la proposition 1.4.9, le préfaisceau $i_A^*(C)$ est asphérique. Comme A est totalement asphérique, il résulte de la proposition 1.7.1 que $i_A^*(C)$ est localement asphérique. En vertu de la proposition 1.6.3, la catégorie A est donc une catégorie test locale. □

Corollaire 1.7.9. — *Soit A une petite catégorie totalement asphérique. S'il existe un segment séparant $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ de $\widehat{A}$ tel que I soit représentable, alors A est une catégorie test stricte.*

Ce corollaire, qui est conséquence immédiate de la proposition 1.7.8, généralise et précise le corollaire 1.6.8. Le corollaire suivant généralise et précise l'exemple 1.6.10, (d).

Corollaire 1.7.10. — *Soient A une petite catégorie totalement asphérique, et $i : A \longrightarrow \mathcal{C}at$ un foncteur pleinement fidèle tel que pour tout objet a de A, la catégorie $i(a)$ soit non vide. S'il existe un objet a de A tel que la catégorie $i(a)$ possède au moins deux objets distincts, alors A est une catégorie test stricte.*

Démonstration. — Soit a un objet de A tel qu'il existe deux objets distincts c_0 et c_1 de la catégorie $C = i(a)$. On en déduit un segment séparant $(C, \partial_0, \partial_1)$ de $\mathcal{C}at$, où $\partial_0\,, \partial_1 : e \longrightarrow C$ sont définis par les objets $c_0\,, c_1$ de C. Le foncteur

$$i^* : \mathcal{C}at \longrightarrow \widehat{A} \qquad C \longmapsto (a \mapsto \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}at}(i(a), C))$$

commute aux limites projectives, et comme pour tout objet a de A, la catégorie $i(a)$ est non vide, il transforme l'objet initial de $\mathcal{C}at$ en l'objet initial de $\widehat{A}$. On en déduit que $(i^*(C), i^*(\partial_0), i^*(\partial_1))$ est un segment séparant de $\widehat{A}$. Comme le foncteur i est pleinement fidèle, on a un isomorphisme $i^*(C) = i^*i(a) \simeq a$ dans $\widehat{A}$, et $i^*(C)$ est donc un préfaisceau représentable. On conclut alors grâce au corollaire précédent. □

Corollaire 1.7.11. — a) *Soient A une catégorie test stricte, et B une catégorie totalement asphérique. Alors la catégorie $A \times B$ est une catégorie test stricte.*

b) *Soit $u : A \longrightarrow B$ un morphisme asphérique de $\mathcal{C}at$. Si A est totalement asphérique et B une catégorie test locale, alors A et B sont des catégories test strictes.*

Démonstration. — L'assertion (a) résulte de la proposition 1.7.5, (a), et du corollaire 1.6.11. Montrons l'assertion (b). En vertu de la proposition 1.7.5, (b), B est totalement asphérique. Elle est donc une catégorie test stricte (1.7.8). On en déduit qu'il existe un segment séparant $(I, \partial_0, \partial_1)$ de $\widehat{B}$ tel que I soit un préfaisceau asphérique (1.7.8). Comme u est asphérique, $u^*(I)$ est un préfaisceau asphérique de $\widehat{A}$ (1.3.11), et comme u^* est un foncteur exact, $(u^*(I), u^*(\partial_0), u^*(\partial_1))$ est un segment séparant de $\widehat{A}$. Donc A est aussi une catégorie test stricte (1.7.8), ce qui prouve le corollaire. □

Exemple 1.7.12. — Les catégories test des exemples 1.6.10, (a) - (e) sont des catégories test strictes, car elles admettent des produits finis (1.7.4).

Lemme 1.7.13. — *Tout objet $\mathit{\Delta}_m$ de Δ est un objet $\mathbf{\Delta}_1$-contractile de $\widehat{\Delta}$, où $\mathbf{\Delta}_1$ désigne le segment $(\mathit{\Delta}_1, e_0, e_1)$ de $\widehat{\Delta}$ (e_0 et e_1 étant définis par $0 \longmapsto 0$ et $0 \longmapsto 1$ respectivement).*

Démonstration. — Le morphisme

$$h : \mathit{\Delta}_1 \times \mathit{\Delta}_m \longrightarrow \mathit{\Delta}_m$$

correspondant à l'application croissante

$$(i,k) \longmapsto \begin{cases} k & i = 0 \\ m & i = 1 \end{cases} \qquad 0 \leqslant k \leqslant m$$

est une $\mathbf{\Delta}_1$-homotopie de l'identité de $\mathit{\Delta}_m$ à l'endomorphisme constant de $\mathit{\Delta}_m$ défini par l'application croissante constante

$$k \longmapsto m \quad , \qquad 0 \leqslant k \leqslant m \quad ,$$

ce qui prouve le lemme. □

Proposition 1.7.14. — *La catégorie Δ est une catégorie test stricte.*

Démonstration. — Comme Δ est une catégorie test (proposition 1.6.14), il suffit de montrer que Δ est totalement asphérique. Comme le préfaisceau de $\widehat{\Delta}$ représenté par $\mathit{\Delta}_1$ est localement asphérique (lemme 1.6.13), cela résulte de la proposition 1.7.6 et du lemme 1.7.13. □

Exemple 1.7.15. — La catégorie Δ étant une catégorie test, elle est en particulier une catégorie test locale, autrement dit, pour tout m, $m \in \mathbb{N}$, la catégorie $\Delta/\mathit{\Delta}_m$ est aussi une catégorie test. Néanmoins, si le localisateur fondamental faible $\mathcal{W}$ est non trivial, et si $m \neq 0$, la catégorie $\Delta/\mathit{\Delta}_m$ n'est pas une catégorie test stricte. En effet, soit $a_i = (\mathit{\Delta}_0,\, s_i : \mathit{\Delta}_0 \longrightarrow \mathit{\Delta}_m)$ l'objet de $\Delta/\mathit{\Delta}_m$ défini par $s_i(0) = i$, $0 \leqslant i \leqslant m$. Comme $m \geqslant 1$, le produit $a_0 \times a_m$ dans $\widehat{\Delta/\mathit{\Delta}_m}$ est le préfaisceau vide, objet initial de $\widehat{\Delta/\mathit{\Delta}_m}$, la catégorie $\Delta/a_0 \times a_m$ est donc la catégorie vide, et comme le localisateur fondamental faible $\mathcal{W}$ est non trivial, cette catégorie n'est pas asphérique (proposition 1.1.29).

Exemple 1.7.16. — Plus généralement, si A est une catégorie test arbitraire, en vertu du théorème 1.6.6, il existe un segment séparant $(I, \partial_0, \partial_1)$ de $\widehat{A}$ tel que I soit localement asphérique, donc asphérique (puisque A est asphérique). On en déduit que A/I est une catégorie test (1.6.4, (b)). Néanmoins, si le localisateur fondamental faible $\mathcal{W}$ n'est pas trivial, A/I n'est pas une catégorie test stricte. En effet, les objets $(e_{\widehat{A}}, \partial_0)$ et $(e_{\widehat{A}}, \partial_1)$ de $\widehat{A}/I \simeq \widehat{A/I}$ sont des préfaisceaux asphériques de $\widehat{A/I}$, car $(A/I)/(e_{\widehat{A}}, \partial_i) \simeq A/e_{\widehat{A}} \simeq A$, $i = 0, 1$, mais leur produit dans $\widehat{A/I}$ est le préfaisceau vide, qui n'est pas asphérique (proposition 1.1.29), ce qui contredit la condition (a'') de la proposition 1.7.1.

Définition 1.7.17. — Soit A une petite catégorie, et notons $\mathcal{I}_A$ l'ensemble des segments

$$\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1) \quad , \qquad \partial_0, \partial_1 : e_{\widehat{A}} \rightrightarrows I \quad ,$$

de $\widehat{A}$, tels que I soit un objet de A. On dit que A est un *précontracteur* si A est *non vide*, et si tout préfaisceau représentable de $\widehat{A}$ est $\mathcal{I}_A$-contractile. On dit que A est un $\mathcal{W}$*-contracteur*, ou plus simplement un *contracteur*, si A est à la fois un précontracteur et une catégorie totalement asphérique. On remarque que la notion de précontracteur (contrairement à celle de contracteur) est indépendante du choix d'un localisateur fondamental faible. Il résulte du lemme 1.5.16 que tout précontracteur est une catégorie contractile, et en particulier asphérique (corollaire 1.5.20).

Exemple 1.7.18. — La catégorie ponctuelle, et plus généralement toute catégorie équivalente à la catégorie ponctuelle, est un contracteur. On dit qu'un précontracteur, ou un contracteur, est *non trivial* s'il n'est pas une catégorie équivalente à la catégorie ponctuelle.

Proposition 1.7.19. — *Soit A un précontracteur non trivial. Alors il existe un segment séparant $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ de $\widehat{A}$, avec I objet de A. Si de plus A est un contracteur, alors A est une catégorie test stricte.*

Démonstration. — Notons $\mathcal{I}_A$ l'ensemble des segments $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ de $\widehat{A}$ tels que I soit un objet de A. Soit F un préfaisceau de $\widehat{A}$. Si F est non vide, il existe une flèche $a \longrightarrow F$ de $\widehat{A}$, avec a objet de A. Comme a est $\mathcal{I}_A$-contractile, il existe, en particulier, un morphisme $e_{\widehat{A}} \longrightarrow a$, d'où un morphisme $e_{\widehat{A}} \longrightarrow F$. On en déduit que si $F \hookrightarrow e_{\widehat{A}}$ est un sous-objet de $e_{\widehat{A}}$, alors F est vide ou égal à $e_{\widehat{A}}$. En effet, en vertu de ce qui précède, si F est non vide, il existe une flèche $e_{\widehat{A}} \longrightarrow F$, ce qui implique que $F \hookrightarrow e_{\widehat{A}}$ est un isomorphisme. Soit donc $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ un segment appartenant à $\mathcal{I}_A$. Alors $\mathsf{Ker}(\partial_0, \partial_1)$ est vide ou égal à $e_{\widehat{A}}$, autrement dit, ou bien le segment $\mathbb{I}$ est séparant, ou bien $\partial_0 = \partial_1$. Si aucun segment de $\mathcal{I}_A$ n'était séparant, la relation de $\mathcal{I}_A$-homotopie serait donc l'égalité, et les $\mathcal{I}_A$-homotopismes les isomorphismes. Comme les objets de A sont $\mathcal{I}_A$-contractiles, les objets de A seraient isomorphes à l'objet final, ce qui est contraire à l'hypothèse de non-trivialité de A, et prouve la première assertion. La deuxième en résulte, grâce à la proposition 1.7.8. □

Exemple 1.7.20. — La catégorie Δ est un contracteur. En effet, en vertu du lemme 1.7.13, la catégorie Δ est un précontracteur, et en vertu de la proposition 1.7.14, elle est totalement asphérique.

Exemple 1.7.21. — Si $\mathcal{W}$ est le localisateur fondamental trivial (1.1.28), alors toute petite catégorie est une $\mathcal{W}$-catégorie test stricte. Si $\mathcal{W}$ est le localisateur fondamental faible grossier non trivial $\mathcal{W}_{gr}$ (1.1.30), toute petite catégorie A est une $\mathcal{W}$-catégorie test locale. Pour que A soit une $\mathcal{W}_{gr}$-catégorie test il faut et il suffit qu'elle soit non vide, et pour qu'elle soit une $\mathcal{W}_{gr}$-catégorie test stricte, il faut et il suffit qu'elle soit totalement $\mathcal{W}_{gr}$-asphérique, autrement dit, qu'elle soit non vide, et que pour tous objets a_1 et a_2 de A, il existe un objet a de A, et des flèches $a \longrightarrow a_1$ et $a \longrightarrow a_2$ de A (exemple 1.6.15, et proposition 1.7.8). Tout précontracteur est un $\mathcal{W}_{gr}$-contracteur. En effet, si A est un précontracteur et a_1, a_2 des objets de A, comme a_1 et a_2 sont $\mathcal{I}_A$-contractiles, il existe des flèches $e_{\widehat{A}} \longrightarrow a_1$, $e_{\widehat{A}} \longrightarrow a_2$ de $\widehat{A}$, et par suite, pour tout objet a de A, des flèches $a \longrightarrow a_1$, $a \longrightarrow a_2$ de A.

1.8. Les foncteurs test

Dans ce paragraphe, on se fixe, une fois pour toutes, un localisateur fondamental faible $\mathcal{W}$.

Définition 1.8.1. — Soient A une petite catégorie, $i : A \longrightarrow \mathcal{C}at$ un foncteur, et

$$i^* : \mathcal{C}at \longrightarrow \widehat{A} \qquad C \longmapsto (a \mapsto \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}at}(i(a), C))$$

le foncteur correspondant. On dit que i est un *foncteur $\mathcal{W}$-asphérique*, ou plus simplement un *foncteur asphérique*, si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(a) pour tout objet a de A, la catégorie $i(a)$ est asphérique ;
(b) pour qu'une petite catégorie C soit asphérique, il faut et il suffit que le préfaisceau $i^*(C)$ soit asphérique.

Remarque 1.8.2. — Cette notion de foncteur asphérique, de source une petite catégorie et à valeurs dans $\mathcal{C}at$, ne doit pas être confondue avec la notion de morphisme asphérique de $\mathcal{C}at$. Le lien entre ces deux notions vient de la proposition 1.3.11 qui affirme (entre autres) qu'un morphisme $u : A \longrightarrow B$ de $\mathcal{C}at$ est asphérique si et seulement si les préfaisceaux asphériques de $\widehat{B}$ sont exactement ceux dont l'image réciproque par u est un préfaisceau asphérique de $\widehat{A}$.

Exemple 1.8.3. — Soit A une catégorie test faible. Alors le foncteur $i_A : A \longrightarrow \mathcal{C}at$, $a \mapsto A/a$, est un foncteur asphérique. En effet, pour tout objet a de A, $i_A(a) = A/a$ admet un objet final, et est donc une catégorie asphérique. D'autre part, en vertu de la proposition 1.4.9, pour toute petite catégorie C, le morphisme d'adjonction

$i_A i_A^*(C) \longrightarrow C$ est une équivalence faible. On en déduit que la catégorie C est asphérique si et seulement si le préfaisceau $i_A^*(C)$ l'est, ce qui prouve que le foncteur i_A est asphérique. On remarque que réciproquement, si A est une petite catégorie telle que le foncteur i_A soit asphérique, la proposition 1.4.9 implique que A est une catégorie test faible.

Lemme 1.8.4. — *Soient $u : A \longrightarrow B$ un morphisme de $\mathcal{C}at$, $j : B \longrightarrow \mathcal{C}at$ un foncteur, et posons $i = ju : A \longrightarrow \mathcal{C}at$. On suppose que pour tout objet b de B, la catégorie $j(b)$ est asphérique.*

a) *Si u est un morphisme asphérique de $\mathcal{C}at$, le foncteur $j : B \longrightarrow \mathcal{C}at$ est asphérique si et seulement si le foncteur $i : A \longrightarrow \mathcal{C}at$ l'est.*

b) *Si le foncteur j est pleinement fidèle et i asphérique, alors u est un morphisme asphérique de $\mathcal{C}at$ et j un foncteur asphérique.*

Démonstration. — On vérifie immédiatement qu'on a un triangle commutatif

(1.8.4.1)
$$\begin{tikzcd} & \mathcal{C}at \arrow[dl, "j^*"'] \arrow[dr, "i^*"] & \\ \widehat{B} \arrow[rr, "u^*"'] & & \widehat{A} \end{tikzcd}$$

(où "l'étoile en haut" de i et j a un sens légèrement différent de celle de u).

a) Si u est asphérique, il résulte de la proposition 1.3.11 qu'un préfaisceau F de $\widehat{B}$ est asphérique si et seulement si le préfaisceau u^*F de $\widehat{A}$ l'est. L'équivalence de l'asphéricité des foncteurs i et j résulte alors immédiatement de la commutativité du triangle 1.8.4.1.

b) Supposons le foncteur j pleinement fidèle et i asphérique. Pour tout objet b de B, la pleine fidélité de j implique que $j^*j(b)$ est isomorphe à b, d'où $u^*(b) \simeq u^*j^*j(b) = i^*j(b)$. Comme $j(b)$ est une catégorie asphérique et i un foncteur asphérique, $u^*(b) \simeq i^*j(b)$ est un préfaisceau asphérique, ce qui prouve que le morphisme u est asphérique (1.3.11). Il résulte alors de (*a*) que j est un foncteur asphérique, ce qui achève la démonstration. □

1.8.5. — Soient A une petite catégorie, $i : A \longrightarrow \mathcal{C}at$ un foncteur tel que pour tout objet a de A, $i(a)$ soit asphérique, A_0 une catégorie test faible, et B une petite sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}at$ contenant $i(A)$ et $i_{A_0}(A_0)$, et formée de catégories asphériques. Les foncteurs i et i_A se factorisent par B, et on obtient ainsi un diagramme commutatif

(1.8.5.1)
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "i"'] & B \arrow[d, hook, "j"] & A_0 \arrow[l, "u_0"'] \arrow[dl, "i_{A_0}"] \\ & \mathcal{C}at & \end{tikzcd} .$$

Comme A_0 est une catégorie test faible, i_{A_0} est un foncteur asphérique (1.8.3), et il résulte du lemme 1.8.4, (b) que u_0 est un morphisme asphérique de $\mathcal{C}at$, et j un foncteur asphérique. En vertu du lemme 1.8.4, (a) et (b), on en déduit que le foncteur i est asphérique si et seulement si u est un morphisme asphérique de $\mathcal{C}at$. Le diagramme commutatif 1.8.5.1 permet de former un “2-diagramme”

(1.8.5.2)
$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{C}at \arrow[dl, "i^*"'] \arrow[d, "j^*"] \arrow[dr, "i^*_{A_0}"] & \\
\widehat{A} \arrow[dr, "i_A"'] \arrow[r, phantom, shift right=5, "\overset{\lambda_u}{\Longrightarrow}"] & \widehat{B} \arrow[l, "u^*"'] \arrow[r, "u_0^*"] \arrow[d, "i_B"] \arrow[r, phantom, shift right=5, "\overset{\lambda_{u_0}}{\Longleftarrow}"] & \widehat{A}_0 \arrow[dl, "i_{A_0}"] \\
 & \mathcal{C}at &
\end{tikzcd}
$$

dont les deux triangles supérieurs sont commutatifs, et les deux triangles inférieurs indiquent simplement les morphismes de foncteurs

$$\lambda_u : i_A u^* \longrightarrow i_B \quad , \qquad \lambda_{u_0} : i_{A_0} u_0^* \longrightarrow i_B \quad ,$$

définis dans 1.3.10. On en déduit une chaîne de morphismes d'endofoncteurs de $\mathcal{C}at$

(1.8.5.3)
$$i_A i^* \xrightarrow{\lambda_u \star j^*} i_B j^* \xleftarrow{\lambda_{u_0} \star j^*} i_{A_0} i^*_{A_0} \xrightarrow{\varepsilon_{A_0}} 1_{\mathcal{C}at} \quad ,$$

ε_{A_0} étant le morphisme d'adjonction (cf. 1.3.1), et pour toute petite catégorie C, des morphismes de $\mathcal{C}at$

(1.8.5.4)
$$i_A i^*(C) \xrightarrow{\lambda_u(j^*(C))} i_B j^*(C) \xleftarrow{\lambda_{u_0}(j^*(C))} i_{A_0} i^*_{A_0}(C) \xrightarrow{\varepsilon_{A_0}(C)} C \quad ,$$

les deux derniers étant des équivalences faibles ($\lambda_{u_0}(j^*(C))$ en vertu de la proposition 1.3.11, puisque le morphisme u_0 est asphérique, et ε_{A_0} en vertu de la proposition 1.4.9, puisque A_0 est une catégorie test faible). Si i est un foncteur asphérique, $\lambda_u(j^*(C))$ est aussi une équivalence faible, car u est alors un morphisme asphérique.

Proposition 1.8.6. — *Soient A une petite catégorie, et $i : A \longrightarrow \mathcal{C}at$ un foncteur tel que pour tout objet a de A, la catégorie $i(a)$ soit asphérique.*

(a) *Les conditions suivantes sont équivalentes :*
 - (i) *i est asphérique, autrement dit, une petite catégorie C est asphérique si et seulement si le préfaisceau $i^*(C)$ est asphérique ;*
 - (ii) *pour toute petite catégorie asphérique C, le préfaisceau $i^*(C)$ est asphérique ;*
 - (ii′) *pour toute petite catégorie contractile C, le préfaisceau $i^*(C)$ est asphérique, et pour tout objet a de A, le préfaisceau $i^*i(a)$ est asphérique ;*

(ii″) *pour toute petite catégorie C admettant un objet final, le préfaisceau $i^*(C)$ est asphérique, et pour tout objet a de A, le préfaisceau $i^*i(a)$ est asphérique ;*

(iii) *A est asphérique, et un morphisme w de $\mathcal{C}at$ est une équivalence faible si et seulement si $i^*(w)$ est une équivalence faible de préfaisceaux ;*

(iv) *A est asphérique, et pour toute équivalence faible w de $\mathcal{C}at$, $i^*(w)$ est une équivalence faible de préfaisceaux.*

(b) *Ces conditions équivalentes impliquent la condition :*

(v) *$i^*(\mathcal{W}) \subset \mathcal{W}_{\widehat{A}}$, et le foncteur $\overline{i^*} : \mathcal{W}^{-1}\mathcal{C}at \longrightarrow \mathcal{W}_{\widehat{A}}^{-1}\widehat{A}$, induit par i^*, est un quasi-inverse à droite du foncteur $\overline{\imath}_A : \mathcal{W}_{\widehat{A}}^{-1}\widehat{A} \longrightarrow \mathcal{W}^{-1}\mathcal{C}at$, induit par i_A ;*

et cette condition est équivalente aux précédentes si le localisateur fondamental faible $\mathcal{W}$ est fortement saturé (cf. 1.4.1).

Démonstration. — On choisit une catégorie test faible A_0 (par exemple une des catégories test de l'exemple 1.6.10, ou la catégorie des simplexes Δ (cf. 1.6.14)). On note B la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}at$ dont l'ensemble des objets est la réunion de l'ensemble des images par i des objets de A, et de l'ensemble des images par i_{A_0} des objets de A_0, et on désigne par $j : B \hookrightarrow \mathcal{C}at$ l'inclusion. On en déduit ainsi un diagramme 1.8.5.1, et on peut appliquer les considérations de 1.8.5, puisque B est formée de catégories asphériques.

Les implications $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (ii') \Rightarrow (ii'')$ sont évidentes (1.5.19, 1.5.17). Montrons l'implication $(ii'') \Rightarrow (i)$. En gardant les notations du diagramme 1.8.5.1, comme j est pleinement fidèle, pour tout objet b de B, on a un isomorphisme $u^*(b) \simeq u^*j^*j(b) = i^*(j(b))$. Comme $j(b)$ est de la forme A_0/a_0 ou $i(a)$, pour a_0 objet de A_0 et a objet de A respectivement, l'hypothèse (ii'') implique que dans les deux cas $i^*j(b)$ est asphérique. On en déduit que u est un morphisme asphérique de $\mathcal{C}at$ (1.3.11), et par suite, que i est un foncteur asphérique (cf. 1.8.5).

Montrons l'implication $(i) \Rightarrow (iii)$. Supposons donc que le foncteur i soit asphérique. En vertu de 1.8.5, pour toute flèche $w : C \longrightarrow C'$ de $\mathcal{C}at$, on a un diagramme commutatif

(1.8.6.1)
$$\begin{tikzcd} i_A i^*(C) \arrow[r, "\lambda_u(j^*(C))"] \arrow[d, "i_A i^*(w)"'] & i_B j^*(C) \arrow[d, "i_B j^*(w)"] & i_{A_0} i^*_{A_0}(C) \arrow[l, "\lambda_{u_0}(j^*(C))"'] \arrow[r, "\varepsilon_{A_0}(C)"] \arrow[d, "i_{A_0} i^*_{A_0}(w)"] & C \arrow[d, "w"] \\ i_A i^*(C') \arrow[r, "\lambda_u(j^*(C'))"'] & i_B j^*(C') & i_{A_0} i^*_{A_0}(C') \arrow[l, "\lambda_{u_0}(j^*(C'))"] \arrow[r, "\varepsilon_{A_0}(C')"'] & C' \end{tikzcd}$$

dont les flèches horizontales sont des équivalences faibles. On en déduit que w est une équivalence faible si et seulement si $i_A i^*(w)$ l'est, autrement dit si $i^*(w)$ est une équivalence faible de préfaisceaux. Il reste à prouver que A est une catégorie asphérique, et cela résulte de l'isomorphisme $A \simeq i_A i^*(e)$.

L'implication $(iii) \Rightarrow (iv)$ est évidente. Montrons l'implication $(iv) \Rightarrow (ii)$. Soit C une catégorie asphérique. Alors le morphisme $C \longrightarrow e$ de $\mathcal{C}at$ est une équivalence faible, et par (iv), $i_A^*(C) \longrightarrow i_A^*(e) \simeq e_{\widehat{A}}$ est une équivalence faible de préfaisceaux. Comme A est asphérique, $e_{\widehat{A}}$ est un préfaisceau asphérique, donc $i_A^*(C)$ aussi. Ceci achève la démonstration de l'assertion (a).

Démontrons que les conditions équivalentes (i)-(iv) impliquent la condition (v). Supposons donc ces conditions satisfaites. La condition (iv) implique que $i^*(\mathcal{W}) \subset \mathcal{W}_{\widehat{A}}$. Si l'on note $\gamma : \mathcal{C}at \longrightarrow \mathsf{Hot} = \mathcal{W}^{-1}\mathcal{C}at$ le foncteur de localisation, le diagramme commutatif 1.8.6.1, dont les flèches horizontales sont des équivalences faibles, montre que

$$C \longmapsto \gamma(\varepsilon_{A_0}(C))\gamma(\lambda_{u_0}(j^*(C)))^{-1}\gamma(\lambda_u(j^*(C)))$$

définit un isomorphisme du foncteur $\overline{i}_A\,\overline{i^*}$ et du foncteur identique 1_{Hot}. Réciproquement, pour montrer que si le localisateur fondamental faible $\mathcal{W}$ est fortement saturé, la condition (v) implique la condition (iv), il suffit de montrer que la condition (v) implique alors que A est asphérique. Or, $A \simeq i_A i^*(e)$, et par hypothèse, $\gamma(i_A i^*(e)) = \overline{i}_A\,\overline{i^*}(\gamma(e))$ est isomorphe à $\gamma(e)$, qui est un objet final de Hot (1.4.6). On en déduit que $\gamma(A)$ est aussi un objet final de Hot, et que l'image par γ du morphisme canonique $A \longrightarrow e$ est un isomorphisme. L'hypothèse que le localisateur fondamental faible $\mathcal{W}$ est fortement saturé implique alors que $A \longrightarrow e$ est une équivalence faible, ce qui achève la démonstration de la proposition. □

Corollaire 1.8.7. — *Soient A une petite catégorie, et $i : A \longrightarrow \mathcal{C}at$ un foncteur* pleinement fidèle *tel que pour tout objet a de A, la catégorie $i(a)$ soit asphérique. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *i est asphérique, autrement dit, une petite catégorie C est asphérique si et seulement si le préfaisceau $i^*(C)$ est asphérique ;*
(ii) *pour toute petite catégorie asphérique C, le préfaisceau $i^*(C)$ est asphérique ;*
(ii′) *pour toute petite catégorie contractile C, le préfaisceau $i^*(C)$ est asphérique ;*
(ii″) *pour toute petite catégorie C admettant un objet final, le préfaisceau $i^*(C)$ est asphérique.*

De plus, si ces conditions équivalentes sont satisfaites, la catégorie A est une catégorie test stricte.

Démonstration. — L'équivalence des conditions (i)-(ii'') est conséquence immédiate de la proposition précédente, puisque quand i est pleinement fidèle, pour tout objet a de A, le préfaisceau $i^*i(a)$ sur A est isomorphe au préfaisceau représentable représenté par a, et est donc asphérique. Si ces conditions sont satisfaites, et si a et b sont deux objets de A, comme en vertu du corollaire 1.1.5 la catégorie $i(a) \times i(b)$ est asphérique, le préfaisceau $i^*(i(a) \times i(b)) \simeq i^*i(a) \times i^*i(b) \simeq a \times b$ de $\widehat{A}$ est asphérique. On en déduit que la catégorie A est totalement asphérique. Ainsi le préfaisceau asphérique

$i^*(\Delta_1)$ est localement asphérique (cf. 1.7.1) et on conclut par le corollaire 1.6.7 et la proposition 1.7.8. □

Corollaire 1.8.8. — *Soient A une petite catégorie, $i : A \longrightarrow \mathcal{C}at$ un foncteur asphérique, B une petite sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}at$ formée d'objets asphériques par laquelle i se factorise (par exemple la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}at$ formée des $i(a)$, pour a objet de A), et $j : B \longrightarrow \mathcal{C}at$ le foncteur d'inclusion. Alors B est une catégorie test stricte et j un foncteur asphérique.*

Démonstration. — Comme i est un foncteur asphérique et j pleinement fidèle, j est un foncteur asphérique en vertu du lemme 1.8.4, (b). Le corollaire précédent implique alors que B est une catégorie test stricte. □

Corollaire 1.8.9. — *Soient A une petite catégorie, et $i : A \longrightarrow \mathcal{C}at$ un foncteur tel que pour tout objet a de A, la catégorie $i(a)$ admette un objet final. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *i est asphérique, autrement dit, une petite catégorie C est asphérique si et seulement si le préfaisceau $i^*(C)$ est asphérique ;*

(ii) *pour toute petite catégorie asphérique C, le préfaisceau $i^*(C)$ est asphérique ;*

(ii′) *pour toute petite catégorie contractile C, le préfaisceau $i^*(C)$ est asphérique ;*

(ii″) *pour toute petite catégorie C admettant un objet final, le préfaisceau $i^*(C)$ est asphérique ;*

et si l'on note

$$\alpha : i_A i^* \longrightarrow 1_{\mathcal{C}at}$$

le morphisme de foncteurs défini par

$$\alpha_C : i_A i^*(C) \longrightarrow C\,, \quad (a, i(a) \xrightarrow{v} C) \mapsto v(e_a)\,,\ C \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C}at)\,,\ a \in \mathsf{Ob}(A)\,,$$

les deux conditions suivantes sont encore équivalentes aux précédentes :

(α) *pour toute petite catégorie C, le foncteur $\alpha_C : i_A i^*(C) \longrightarrow C$ est une équivalence faible ;*

(α') *pour toute petite catégorie C, le foncteur $\alpha_C : i_A i^*(C) \longrightarrow C$ est asphérique.*

Démonstration. — L'équivalence des conditions (i) - (ii'') est conséquence immédiate des propositions 1.5.17 et 1.8.6. Il reste à prouver que les conditions (ii''), (α) et (α') sont équivalentes. Or, les implications $(\alpha') \Rightarrow (\alpha) \Rightarrow (ii'')$ sont évidentes, et l'implication $(ii'') \Rightarrow (\alpha')$ résulte de l'observation que pour toute petite catégorie C et tout objet c de C, on a un isomorphisme canonique $(i_A i^*(C))/c \simeq i_A i^*(C/c)$. □

Corollaire 1.8.10. — *Soient A une petite catégorie, et $i : A \longrightarrow \mathcal{C}at$ un foncteur asphérique tel que pour tout objet a de A, la catégorie $i(a)$ admette un objet final. Si M est une sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}at$ telle que le foncteur $i_A i^* : \mathcal{C}at \longrightarrow \mathcal{C}at$ se factorise par M, alors $(M, \mathcal{W} \cap \mathsf{Fl}(M))$ est un modélisateur, et l'inclusion de M*

dans $\mathcal{C}at$ un morphisme de modélisateurs de $(M, \mathcal{W} \cap \mathsf{Fl}(M))$ vers le modélisateur fondamental $(\mathcal{C}at, \mathcal{W})$.

Démonstration. — Comme, en vertu du corollaire précédent il existe un morphisme de foncteurs $\alpha : i_A i^* \longrightarrow 1_{\mathcal{C}at}$ tel que pour toute petite catégorie C, le foncteur $\alpha_C : i_A i^*(C) \longrightarrow C$ soit une équivalence faible, le corollaire résulte aussitôt du lemme suivant. □

Lemme 1.8.11. — *Soient N une catégorie, W une partie faiblement saturée de $\mathsf{Fl}(N)$, $f : N \longrightarrow N$ un foncteur, $\alpha : f \longrightarrow 1_N$ un morphisme de foncteurs tel que pour tout objet a de N, $\alpha_a \in W$, M une sous-catégorie pleine de N, et $i : M \longrightarrow N$ le foncteur d'inclusion. On suppose que le foncteur f se factorise par M, de sorte qu'on ait un triangle commutatif*

$$\begin{tikzcd} N \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & N \\ & M \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd} .$$

Alors les foncteurs g et i induisent des équivalences de catégories

$$\overline{g} : W^{-1}N \longrightarrow (W \cap \mathsf{Fl}(M))^{-1}M \quad \textit{et} \quad \overline{\imath} : (W \cap \mathsf{Fl}(M))^{-1}M \longrightarrow W^{-1}N$$

quasi-inverses l'une de l'autre.

Démonstration. — Pour toute flèche $u : a \longrightarrow a'$ de N, on a un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} g(a) = f(a) \arrow[r, "\alpha_a"] \arrow[d, "g(u)=f(u)"'] & a \arrow[d, "u"] \\ g(a') = f(a') \arrow[r, "\alpha_{a'}"'] & a' \end{tikzcd} .$$

Si $u \in W$, comme $\alpha_a, \alpha_{a'} \in W$, on a par saturation $g(u) \in W \cap \mathsf{Fl}(M)$, et g induit un foncteur $\overline{g} : W^{-1}N \longrightarrow (W \cap \mathsf{Fl}(M))^{-1}M$. De même, comme $i(W \cap \mathsf{Fl}(M)) \subset W$, le foncteur i induit un foncteur $\overline{\imath} : (W \cap \mathsf{Fl}(M))^{-1}M \longrightarrow W^{-1}N$. Le morphisme de foncteurs α définit un isomorphisme de foncteurs $\overline{\alpha} : \overline{\imath}\,\overline{g} \longrightarrow 1_{W^{-1}N}$, et la restriction de α à M induit un morphisme de foncteurs $\beta : gi \longrightarrow 1_M$, qui définit un isomorphisme de foncteurs $\overline{\beta} : \overline{g}\,\overline{\imath} \longrightarrow 1_{(W \cap \mathsf{Fl}(M))^{-1}M}$. □

Corollaire 1.8.12. — *Soient A une catégorie test faible, et M la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}at$ dont les objets sont les petites catégories C localement isomorphes à A, autrement dit, telles que pour tout objet c de C, il existe un objet a de A tel que les catégories C/c et A/a soient isomorphes. Alors $(M, \mathcal{W} \cap \mathsf{Fl}(M))$ est un modélisateur, et l'inclusion de M dans $\mathcal{C}at$ un morphisme de modélisateurs.*

Démonstration. — On applique le corollaire 1.8.10 au foncteur asphérique

$$i = i_A : A \longrightarrow \mathcal{C}at \quad , \qquad a \longmapsto A/a \quad ,$$

(1.8.3), en remarquant que pour tout préfaisceau F de $\widehat{A}$, la catégorie A/F est localement isomorphe à A. $\square$

Corollaire 1.8.13. — *Soient A une catégorie pseudo-test, et $i : A \longrightarrow \mathcal{C}at$ un foncteur tel que pour tout objet a de A, la catégorie $i(a)$ soit asphérique. Alors le foncteur i est asphérique si et seulement si $i^* : \mathcal{C}at \longrightarrow \widehat{A}$ est un morphisme de modélisateurs, du modélisateur fondamental $(\mathcal{C}at, \mathcal{W})$ vers le modélisateur $(\widehat{A}, \mathcal{W}_{\widehat{A}})$, autrement dit, si*

(a) $\mathcal{W} = {i^*}^{-1}(\mathcal{W}_{\widehat{A}})$;
(b) *le foncteur i^* induit une équivalence de catégories :*

$$\overline{i^*} : \mathcal{W}^{-1}\mathcal{C}at \longrightarrow \mathcal{W}_{\widehat{A}}^{-1}\widehat{A} \quad .$$

Démonstration. — Si le foncteur i est asphérique, en vertu de la proposition 1.8.6, (*iii*), on a $\mathcal{W} = {i^*}^{-1}(\mathcal{W}_{\widehat{A}})$, et en vertu de 1.8.6 (*v*), le foncteur $\overline{i^*}$, induit par i^*, est un quasi-inverse à droite du foncteur $\overline{\imath}_A$, induit par i_A. La catégorie A étant une catégorie pseudo-test, le foncteur $\overline{\imath}_A$ est une équivalence de catégories, et il en est donc de même de $\overline{i^*}$. La réciproque résulte du fait que la condition $\mathcal{W} = {i^*}^{-1}(\mathcal{W}_{\widehat{A}})$ implique la condition (*iii*) de la proposition 1.8.6, puisque une catégorie pseudo-test est, par définition, asphérique. $\square$

Ce corollaire justifie la terminologie suivante.

Définition 1.8.14. — On appelle *$\mathcal{W}$-foncteur pseudo-test* (resp. *$\mathcal{W}$-foncteur test faible*), ou plus simplement *foncteur pseudo-test* (resp. *foncteur test faible*), un foncteur asphérique dont la catégorie source est une catégorie pseudo-test (resp. une catégorie test faible). On appelle *$\mathcal{W}$-foncteur test local*, ou plus simplement *foncteur test local*, un foncteur $i : A \longrightarrow \mathcal{C}at$ tel que pour tout objet a de A, le foncteur $A/a \longrightarrow \mathcal{C}at$, induit par i, soit un foncteur test faible, autrement dit, si A est une catégorie test locale, et pour tout objet a de A, $A/a \longrightarrow \mathcal{C}at$ un foncteur asphérique. On dit que le foncteur $i : A \longrightarrow \mathcal{C}at$ est un *$\mathcal{W}$-foncteur test*, ou plus simplement un *foncteur test*, s'il est à la fois un foncteur test local et un foncteur test faible, autrement dit, si A est une catégorie test, et les foncteurs $A \longrightarrow \mathcal{C}at$ et $A/a \longrightarrow \mathcal{C}at$, $a \in \mathsf{Ob}(A)$, asphériques.

Exemple 1.8.15. — Il résulte de l'exemple 1.8.3 que si A est une catégorie test faible (resp. une catégorie test locale, resp. une catégorie test), alors le foncteur $i_A : \widehat{A} \longrightarrow \mathcal{C}at$, $a \longmapsto A/a$, est un foncteur test faible (resp. un foncteur test local, resp. un foncteur test).

Lemme 1.8.16. — *Soient A une petite catégorie, et $i : A \longrightarrow \mathcal{C}at$ un foncteur. Si le préfaisceau $i^*(\Delta_1)$ de $\widehat{A}$ est localement asphérique, alors pour toute petite catégorie contractile C, le préfaisceau $i^*(C)$ est localement asphérique.*

Démonstration. — Si C est une catégorie contractile, elle est par définition $\mathbf{\Delta}_1$-contractile, où $\mathbf{\Delta}_1$ désigne le segment $(\mathit{\Delta}_1, e_0, e_1)$ de l'exemple 1.5.15. Comme le foncteur i^* commute aux limites projectives, on en déduit que le préfaisceau $i^*(C)$ est $i^*(\mathbf{\Delta}_1)$-contractile, où $i^*(\mathbf{\Delta}_1) = (i^*(\mathit{\Delta}_1), i^*(e_0), i^*(e_1))$ (1.5.5). Comme par hypothèse le préfaisceau $i^*(\mathit{\Delta}_1)$ est localement asphérique, en vertu de la proposition 1.5.8, il en est de même de $i^*(C)$. □

Théorème 1.8.17. — *Soient A une petite catégorie, $i : A \longrightarrow \mathcal{C}at$ un foncteur tel que pour tout objet a de A, $i(a)$ soit une catégorie asphérique, et*

$$i^* : \mathcal{C}at \longrightarrow \widehat{A} \quad , \qquad C \longmapsto (a \mapsto \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}at}(i(a), C))$$

le foncteur correspondant. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) *A est une catégorie test locale,*[1] *et i est un foncteur test local ;*
(i′) *pour tout objet a de A, le foncteur $i|A/a : A/a \longrightarrow \mathcal{C}at$ est asphérique ;*
(i″) *pour tout objet a de A, le foncteur $i|A/a : A/a \longrightarrow \mathcal{C}at$ est un foncteur test local ;*
(i‴) *pour tout objet a de A, le foncteur $i|A/a : A/a \longrightarrow \mathcal{C}at$ est un foncteur test ;*
(ii) *pour toute petite catégorie asphérique C, le préfaisceau $i^*(C)$ est localement asphérique ;*
(ii′) *pour toute petite catégorie contractile C, le préfaisceau $i^*(C)$ est localement asphérique, et pour tout objet a de A, le préfaisceau $i^*i(a)$ est localement asphérique ;*
(ii″) *pour toute petite catégorie C admettant un objet final, le préfaisceau $i^*(C)$ est localement asphérique, et pour tout objet a de A, le préfaisceau $i^*i(a)$ est localement asphérique ;*
(ii‴) *$i^*(\mathit{\Delta}_1)$ est un préfaisceau localement asphérique, et pour tout objet a de A, le préfaisceau $i^*i(a)$ est localement asphérique ;*
(iii) *pour toute équivalence faible w de $\mathcal{C}at$, $i^*(w)$ est une équivalence faible locale de préfaisceaux* (cf. 1.3.6).

De plus, si ces conditions sont satisfaites, les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) *A est une catégorie test,*[1] *et i un foncteur test ;*
(2) *i est un foncteur asphérique ;*
(3) *A est une catégorie asphérique.*

Démonstration. — Pour a objet de A, on note i_a le foncteur $i|A/a : A/a \longrightarrow \mathcal{C}at$. On remarque que pour tout objet $(a', f : a' \longrightarrow a)$ de A/a, on a $i_a^* i_a(a', f) = i^*i(a')|A/a$. Ainsi, pour que le préfaisceau $i^*i(a)$ de $\widehat{A}$ soit localement asphérique (1.3.6) pour tout objet a de A, il faut et il suffit que pour tout objet a de A et tout objet $(a', f : a' \longrightarrow a)$ de A/a, le préfaisceau $i_a^* i_a(a', f)$ de $\widehat{A/a}$ soit asphérique. L'équivalence des conditions (i'), (ii), (ii'), (ii''), et (iii) résulte alors de la proposition 1.8.6. L'implication $(ii'') \Rightarrow (ii''')$ est évidente et l'implication $(ii''') \Rightarrow (ii')$ résulte du lemme précédent.

[1] pléonasme volontaire

La condition (i) implique trivialement la condition (i'), et la réciproque résulte du corollaire 1.6.7 (puisque la condition (i') implique que le préfaisceau $i^*(\Delta_1)$ est localement asphérique). Enfin, on vérifie aussitôt que la condition (i) implique la condition (i''), que la conjonctions des conditions (i) et (i'') implique la condition (i'''), et que la condition (i''') implique la condition (i). On a donc prouvé l'équivalence de toutes les conditions (i) - (iii).

Supposons maintenant que ces conditions équivalentes (i)-(iii) sont satisfaites, et montrons l'équivalence des conditions (1), (2) et (3). La condition (ii) implique que pour toute petite catégorie asphérique C, $i^*(C) \longrightarrow e_{\widehat{A}}$ est une équivalence faible de préfaisceaux. Si A est une catégorie asphérique, cela implique que le préfaisceau $i^*(C)$ est asphérique. En vertu de la proposition 1.8.6, le foncteur i est donc asphérique, ce qui prouve l'implication (3) $\Rightarrow$ (2). Comme le foncteur i est déjà par hypothèse un foncteur test local, et comme une catégorie test locale asphérique est une catégorie test (1.6.4, (a)), on en déduit aussi l'implication (3) $\Rightarrow$ (1). L'implication (1) $\Rightarrow$ (2) étant évidente, et l'implication (2) $\Rightarrow$ (3) résultant de la proposition 1.8.6, cela achève la démonstration du théorème. □

Corollaire 1.8.18. — *Soient A une petite catégorie, et $i : A \longrightarrow \mathcal{C}at$ un foncteur tel que pour tout objet a de A, $i(a)$ soit une catégorie contractile. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *A est une catégorie test locale,*[(2)] *et i est un foncteur test local ;*

(i′) *pour tout objet a de A, le foncteur $i|A/a : A/a \longrightarrow \mathcal{C}at$ est asphérique ;*

(ii) *pour toute petite catégorie asphérique C, le préfaisceau $i^*(C)$ est localement asphérique ;*

(ii′) *pour toute petite catégorie contractile C, le préfaisceau $i^*(C)$ est localement asphérique ;*

(ii″) *pour toute petite catégorie C admettant un objet final, le préfaisceau $i^*(C)$ est localement asphérique ;*

(ii‴) *$i^*(\Delta_1)$ est un préfaisceau localement asphérique.*

Démonstration. — L'équivalence des conditions (i) - (ii') résulte directement du théorème précédent. Les implications $(ii') \Rightarrow (ii'')$ et $(ii'') \Rightarrow (ii''')$ sont évidentes, et l'implication $(ii''') \Rightarrow (ii')$ résulte du lemme 1.8.16. □

Corollaire 1.8.19. — *Soient A une petite catégorie totalement asphérique, et $i : A \longrightarrow \mathcal{C}at$ un foncteur tel que pour tout objet a de A, $i(a)$ soit une catégorie asphérique. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *A est une catégorie test stricte et i un foncteur test ;*

(b) *i est un foncteur test local ;*

(c) *i est un foncteur asphérique.*

[(2)] pléonasme volontaire

Démonstration. — Les implications $(a) \Rightarrow (b)$ et $(a) \Rightarrow (c)$ sont évidentes. Comme la catégorie A est totalement asphérique, et en particulier asphérique, il résulte de l'équivalence des conditions (1) et (3) du théorème 1.8.17 que la condition (b) implique la condition (a). Enfin, si le foncteur i est asphérique, comme A est totalement asphérique, la condition (ii) du théorème 1.8.17 est satisfaite, ce qui prouve l'implication $(c) \Rightarrow (b)$. □

Corollaire 1.8.20. — *Soient A une catégorie test locale non vide, $i : A \longrightarrow \mathcal{C}at$ un foncteur test local, B une petite sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}at$ formée d'objets asphériques par laquelle i se factorise (par exemple la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}at$ formée des $i(a)$, pour a objet de A), et $j : B \longrightarrow \mathcal{C}at$ le foncteur d'inclusion. Alors B est une catégorie test stricte et j un foncteur test.*

Démonstration. — Soit a un objet de A. En vertu du théorème 1.8.17, le foncteur $i|A/a : A/a \longrightarrow \mathcal{C}at$ est asphérique. Comme ce foncteur se factorise par B, il résulte du corollaire 1.8.8 que B est une catégorie test stricte et j un foncteur asphérique. L'assertion résulte alors du corollaire précédent. □

Corollaire 1.8.21. — *Soient $u : A \longrightarrow B$ un morphisme de $\mathcal{C}at$, $j : B \longrightarrow \mathcal{C}at$ un foncteur, et $i = ju : A \longrightarrow \mathcal{C}at$ le foncteur composé.*

(a) *Si u est localement asphérique et j un foncteur test local, alors i est aussi un foncteur test local, et en particulier A est une catégorie test locale.*
(b) *Si u est asphérique, ou si u est localement asphérique et u induit une surjection sur les objets, alors si i est un foncteur test local, j est aussi un foncteur test local, et en particulier B est une catégorie test locale.*

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate de la caractérisation (ii) des foncteurs test locaux du théorème 1.8.17, et des corollaires 1.3.13 et 1.3.14. □

Corollaire 1.8.22. — *Soit $u : A \longrightarrow B$ un morphisme localement asphérique de $\mathcal{C}at$.*

(a) *Si B est une catégorie test locale, il en est de même de A.*
(b) *Si B est une catégorie test, et u une équivalence faible, alors A est une catégorie test.*
(c) *Si B est une catégorie test stricte, u pleinement fidèle, et A non vide ou asphérique, alors A est une catégorie test stricte.*

Démonstration. — L'assertion (a) résulte aussitôt du corollaire 1.8.21, (a), appliqué au foncteur test local i_B. L'assertion (b) est conséquence immédiate de l'assertion (a), et de la remarque 1.6.4, (a). En vertu de (a), et de la proposition 1.7.8, l'assertion (c) résulte de la proposition 1.7.4, (c). □

Corollaire 1.8.23. — *Soient A une petite catégorie, $i : A \longrightarrow \mathcal{C}at$ un foncteur tel que pour tout objet a de A, $i(a)$ soit une catégorie contractile, et*

$$i_! : \widehat{A} \longrightarrow \mathcal{C}at \quad , \qquad i^* : \mathcal{C}at \longrightarrow \widehat{A}$$

le couple de foncteurs adjoints correspondant à i, $i_!$ étant l'unique (à isomorphisme unique près) foncteur prolongeant i et commutant aux limites inductives. On suppose que A admet un objet final e_A, que $i(e_A) = \Delta_0 = e$, objet final de $\mathcal{C}at$, et qu'il existe un segment $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ de $\widehat{A}$ tel que I soit localement asphérique, et un morphisme de segments de $\mathcal{C}at$

$$\varphi : i_!(\mathbb{I}) = (i_!(I), i_!(\partial_0), i_!(\partial_1)) \longrightarrow \mathbf{\Delta}_1 = (\Delta_1, e_0, e_1)$$

(e_0 et e_1 étant définis par $0 \mapsto 0$ et $0 \mapsto 1$ respectivement). Alors A est une catégorie test,[(3)] *et i un foncteur test.*

Démonstration. — Comme A admet un objet final, elle est asphérique. En vertu du théorème 1.8.17 et de son corollaire 1.8.18, il suffit donc de montrer que le préfaisceau $i^*(\Delta_1)$ est localement asphérique. Le morphisme φ définit par adjonction un morphisme de segments $\psi : \mathbb{I} \longrightarrow i^*(\mathbf{\Delta}_1) = (i^*(\Delta_1), i^*(e_0), i^*(e_1))$ de $\widehat{A}$. En vertu du lemme 1.5.10, il suffit donc de montrer que $i^*(\mathbf{\Delta}_1)$ admet une structure de segment multiplicatif. Comme le foncteur i^* commute aux limites projectives, cela résulte de 1.5.18. □

Exemple 1.8.24. — Soient A la catégorie test de l'exemple 1.6.10, (a), sous-catégorie pleine de la catégorie des ensembles ayant pour objets les ensembles

$$\{0, 1, \ldots, n\} \quad , \qquad n \in \mathbb{N} \ ,$$

et $i : A \longrightarrow \mathcal{C}at$ le foncteur associant à un objet a de A la catégorie associée à l'ensemble ordonné formé des parties non vides de a, ordonnées par inclusion. Pour tout objet a de A, la catégorie $i(a)$ est contractile, puisqu'elle admet un objet final (1.5.17), et le corollaire 1.8.23 montre que i est un foncteur test. Considérons, en effet, le segment $(\{0, 1\}, \partial_0, \partial_1)$ de $\widehat{A}$, ∂_0 et ∂_1 étant définis par $0 \mapsto 0$ et $0 \mapsto 1$ respectivement. Comme A est une catégorie test stricte (1.7.12), les préfaisceaux représentables, et en particulier celui représenté par $\{0, 1\}$, sont localement asphériques (1.7.1). Pour pouvoir appliquer le corollaire, il suffit donc de définir un foncteur

$$\varphi : i_!(\{0, 1\}) = i(\{0, 1\}) \longrightarrow \Delta_1$$

induisant un morphisme de segments. Or,

$$i(\{0,1\}) = \begin{tikzcd} \{0\} \arrow[dr] & \\ & \{0,1\} \\ \{1\} \arrow[ur] & \end{tikzcd} \quad ,$$

et il suffit donc de définir φ par

$$\varphi(\{0\}) = 0 \quad , \qquad \varphi(\{1\}) = \varphi(\{0, 1\}) = 1 \quad .$$

(3) pléonasme volontaire

Exemple 1.8.25. — Soit $i : \Delta \longrightarrow \mathcal{C}at$ l'inclusion canonique de la catégorie des simplexes (1.6.12) dans la catégorie des petites catégories. Alors $i^* : \mathcal{C}at \longrightarrow \widehat{\Delta}$ est le foncteur *nerf*, noté habituellement N, et i est un foncteur test. En effet, pour tout m, $m \in \mathbb{N}$, $i(\Delta_m) = \Delta_m$ admet un objet final, et est donc contractile (1.5.17), et en particulier asphérique (1.5.19). D'autre part, $i^*(\Delta_1)$ n'est autre que le préfaisceau représenté par Δ_1, et en vertu du lemme 1.6.13, ce préfaisceau est localement asphérique, et l'assertion résulte du théorème 1.8.17, (a) et (b). De plus, le théorème 1.8.17 implique alors que pour tout m, $m \in \mathbb{N}$, $i^*(\Delta_m)$, qui n'est autre que le préfaisceau représenté par Δ_m, est localement asphérique, ce qui, en vertu de la proposition 1.7.1, fournit une deuxième démonstration du fait que Δ est une catégorie test stricte (1.7.14).

Exemple 1.8.26. — Soit A une petite sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}at$ formée de catégories contractiles, stable par produits finis, et telle que Δ_1 soit un objet de A. Alors le foncteur d'inclusion $i : A \longrightarrow \mathcal{C}at$ est un foncteur test. En effet, comme une catégorie contractile est non vide, la catégorie vide n'est pas un objet de A. La catégorie A est donc une catégorie test stricte (cf. 1.6.10, (d) et 1.7.12). On en déduit que le préfaisceau $i^*(\Delta_1)$, qui est représentable (puisque Δ_1 est un objet de A), est localement asphérique (1.7.1), ce qui prouve que i est un foncteur test local (1.8.17, (b)), donc un foncteur test (1.8.17, (a)).

Exemple 1.8.27. — Plus généralement, si A est une petite sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}at$ formée de catégories contractiles, stable par produits finis, et satisfaisant à la condition :

(H) il existe une petite catégorie C appartenant à $\mathsf{Ob}(A)$ et possédant deux objets c_0 et c_1 tels qu'il n'y ait aucune flèche de C de source c_1 et de but c_0 ;

alors le foncteur d'inclusion $i : A \longrightarrow \mathcal{C}at$ est un foncteur test. En effet, A est alors une catégorie test stricte (cf. 1.6.10, (d) et 1.7.12), et le préfaisceau représentable de $\widehat{A}$ représenté par C est localement asphérique (1.7.1). Considérons le segment $\mathbb{I} = (C, \partial_0, \partial_1)$ de $\widehat{A}$, où les foncteurs $\partial_0, \partial_1 : e \rightrightarrows C$ sont définis par les objets c_0 et c_1 respectivement. Le crible de C engendré par c_0 (sous-catégorie pleine de C formée des objets c tels qu'il existe une flèche $c \longrightarrow c_0$ de C) définit un foncteur $i_!(C) = C \longrightarrow \Delta_1$ (1.1.25), qui en vertu de l'hypothèse (H), est un morphisme de segments

$$i_!(\mathbb{I}) = (C, \partial_0, \partial_1) \longrightarrow \mathbf{\Delta}_1 = (\Delta_1, e_0, e_1)$$

(e_0 et e_1 étant définis respectivement par les objets 0 et 1 de Δ_1). L'assertion résulte alors du corollaire 1.8.23.

Exemple 1.8.28. — Dans l'exemple précédent, l'hypothèse (H) est essentielle. En effet, soit par exemple A la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}at$ dont les objets sont les catégories I^m, $m \geqslant 0$, où $I = \{0 \rightleftarrows 1\}$ désigne la catégorie ayant comme objets 0 et 1 et équivalente à la catégorie e, objet final de $\mathcal{C}at$ (autrement dit, les seuls morphismes non identiques de I sont deux isomorphismes inverses l'un de l'autre $0 \longrightarrow 1$ et $1 \longrightarrow 0$). On vérifie facilement que cette catégorie est formée de catégories contractiles. D'autre part, elle satisfait aux conditions de 1.6.10, (d) et est donc une catégorie test stricte (1.7.12). Montrons que si le localisateur fondamental faible $\mathcal{W}$ n'est pas grossier (1.1.30), le foncteur d'inclusion $i : A \hookrightarrow \mathcal{C}at$ n'est pas un foncteur test (ni même un foncteur test faible). Pour cela, il suffit de montrer que le préfaisceau $i^*(\mathit{\Delta}_1)$ n'est pas asphérique. Or, $i^*(\mathit{\Delta}_1)$ est le préfaisceau

$$I^m \longmapsto \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}at}(I^m, \mathit{\Delta}_1) \simeq \{\text{cribles de } I^m\}$$

(1.1.25), et on a donc $i^*(\mathit{\Delta}_1) \simeq e_{\widehat{A}} \amalg e_{\widehat{A}}$ (où $e_{\widehat{A}}$ désigne l'objet final de $\widehat{A}$), car les seuls cribles de I^m sont le crible plein et le crible vide. On en déduit que $i_A i^*(\mathit{\Delta}_1) \simeq A \amalg A$, et il résulte du lemme suivant que $i^*(\mathit{\Delta}_1)$ n'est pas asphérique.

Lemme 1.8.29. — *Si le localisateur fondamental faible $\mathcal{W}$ n'est pas grossier, alors toute catégorie asphérique est 0-connexe (connexe non vide).*

Démonstration. — Soit C une catégorie asphérique. Le localisateur fondamental faible $\mathcal{W}$ n'étant pas grossier, il est *a fortiori* non trivial, et il résulte de la proposition 1.1.29 que la catégorie C est non vide. Montrons qu'elle est connexe. Supposons que $C = C_0 \amalg C_1$, avec $C_0, C_1 \neq \varnothing$, choisissons des objets c_0 et c_1 de C_0 et C_1 respectivement, et notons $\partial_0 : e \longrightarrow C$ et $\partial_1 : e \longrightarrow C$ les morphismes définis par c_0 et c_1 respectivement, où e désigne l'objet final de $\mathcal{C}at$. On définit ainsi un segment $\mathbb{I} = (C, \partial_0, \partial_1)$. Soit A une catégorie non vide, $p : A \longrightarrow e$ le foncteur canonique, a un objet de A, $s : e \longrightarrow A$ le morphisme défini par l'objet a, et $c = sp$ l'endomorphisme constant correspondant de A. Notons

$$p_0 : C_0 \times A \longrightarrow A \qquad \text{et} \qquad p_1 : C_1 \times A \longrightarrow A$$

les premières projections. On définit un foncteur

$$h : C \times A = (C_0 \times A) \amalg (C_1 \times A) \longrightarrow A$$

par

$$h \mid C_0 \times A = p_0 \qquad \text{et} \qquad h \mid C_1 \times A = cp_1 \quad .$$

On constate immédiatement que h est une $\mathbb{I}$-homotopie de 1_A vers c, autrement dit, la catégorie A est $\mathbb{I}$-contractile. Comme la catégorie C est asphérique, il résulte des propositions 1.1.4 et 1.5.8 que A est asphérique. Ainsi, on a montré que toute catégorie non vide est asphérique, ce qui implique que tout foncteur entre catégories non vides est une équivalence faible, et contredit l'hypothèse que le localisateur fondamental faible $\mathcal{W}$ n'est pas grossier. $\square$

Exemple 1.8.30. — Notons Δ' la sous-catégorie (non pleine) de Δ ayant mêmes objets que Δ, et dont les morphismes sont les applications strictement croissantes.

Lemme 1.8.31. — *La catégorie Δ' est asphérique.*

Démonstration. — On définit un foncteur $D : \Delta' \longrightarrow \Delta'$, en posant pour tout m, $m \in \mathbb{N}$,

$$D\mathit{\Delta}_m = \mathit{\Delta}_{m+1} \quad ,$$

et en définissant, pour toute application strictement croissante $\varphi : \mathit{\Delta}_m \longrightarrow \mathit{\Delta}_n$, $D(\varphi)$ par

$$D(\varphi)(k) = \begin{cases} \varphi(k) \ , & 0 \leqslant k \leqslant m \ , \\ n+1 \ , & k = m+1 \ . \end{cases}$$

L'inclusion $\mathit{\Delta}_m \hookrightarrow \mathit{\Delta}_{m+1}$ définit un morphisme fonctoriel $1_{\Delta'} \longrightarrow D$, et l'application

$$\mathit{\Delta}_0 \longrightarrow \mathit{\Delta}_{m+1} \quad , \qquad 0 \longmapsto m+1 \quad ,$$

un morphisme fonctoriel de l'endofoncteur constant de Δ', de valeur $\mathit{\Delta}_0$, vers D. La catégorie Δ' est donc contractile, et le lemme résulte de la proposition 1.5.19. $\square$

Proposition 1.8.32. — *La catégorie Δ' est une catégorie test faible, et le foncteur d'inclusion $i' : \Delta' \hookrightarrow \mathcal{C}at$ est un foncteur test faible.*

Démonstration. — Considérons les foncteurs

$$\Delta' \xrightarrow{\ u\ } \Delta \xrightarrow{\ v\ } \widetilde{\Delta} \xrightarrow{\ i\ } \mathcal{C}at \quad ,$$

où $\widetilde{\Delta}$ désigne la catégorie test de l'exemple 1.6.10, (a), sous-catégorie pleine de la catégorie des ensembles, ayant mêmes objets que Δ (mais comme morphismes toutes les applications, au lieu de seulement les applications croissantes), et où u et v désignent les foncteurs d'inclusion et i le foncteur test de l'exemple 1.8.24, associant à un objet E de $\widetilde{\Delta}$ l'ensemble ordonné formé des parties non vides de E. On remarque que le foncteur

$$i_{\Delta'} : \Delta' \longrightarrow \mathcal{C}at$$

$$\mathit{\Delta}_m \longmapsto \Delta'/\mathit{\Delta}_m$$

est canoniquement isomorphe à ivu. Pour montrer que Δ' est une catégorie test faible, il suffit de montrer que le foncteur $i_{\Delta'}$ est asphérique (cf. 1.8.3). Le foncteur i étant un foncteur test, et en particulier un foncteur asphérique, il suffit donc de montrer que v et u sont des morphismes asphériques de $\mathcal{C}at$ (1.8.4, (a)). Comme l'inclusion $i' : \Delta' \hookrightarrow \mathcal{C}at$ est le composé du foncteur u suivi de l'inclusion $\Delta \hookrightarrow \mathcal{C}at$, qui est un foncteur test (1.8.25), donc un foncteur asphérique, cela prouvera aussi que i' est un foncteur test faible (1.8.4, (a)).

a) *Le morphisme v de $\mathcal{C}at$ est asphérique.* En vertu de la proposition 1.3.11, il suffit de montrer que pour tout objet E de $\widetilde{\Delta}$, le préfaisceau

$$F = v^*(E) \quad , \qquad \mathit{\Delta}_m \longmapsto \mathsf{Hom}_{\widetilde{\Delta}}(\mathit{\Delta}_m, E) = \mathsf{Hom}_{\mathcal{E}ns}(\mathit{\Delta}_m, E) \quad ,$$

de $\widehat{\Delta}$ est asphérique. Comme E est non vide, on choisit $a \in E$, et on définit un morphisme de préfaisceaux

$$h : \mathit{\Delta}_1 \times F \longrightarrow F$$

comme suit. Pour tout m-simplexe $\varphi : \Delta_m \longrightarrow \Delta_1$ de Δ_1, et tout m-simplexe $\psi : \Delta_m \longrightarrow E$ de F, le m-simplexe $h(\varphi, \psi) : \Delta_m \longrightarrow E$ de F est défini par

$$h(\varphi, \psi)(k) = \begin{cases} \psi(k) & \text{si } \varphi(k) = 0 \\ a & \text{si } \varphi(k) = 1 \end{cases} \qquad 0 \leqslant k \leqslant m \; .$$

Notons $\mathbb{I}$ le segment (Δ_1, e_0, e_1) de $\widehat{\Delta}$ (e_0 et e_1 étant définis par $0 \mapsto 0$ et $0 \mapsto 1$ respectivement). On remarque que h est une $\mathbb{I}$-homotopie de l'identité de F vers un endomorphisme constant de F, ce qui implique que F est $\mathbb{I}$-contractile. Comme Δ_1 est localement asphérique (1.6.13), il résulte de la proposition 1.5.8 que F est un préfaisceau localement asphérique, donc asphérique, de $\widehat{\Delta}$, ce qui prouve l'assertion.

b) Le morphisme u de $\mathcal{C}at$ est asphérique. Il s'agit de montrer que pour tout m, $m \in \mathbb{N}$, $\Delta'/u^*(\Delta_m)$ est une catégorie asphérique. Notons $\overline{\Delta'}$ la catégorie obtenue en adjoignant un objet initial $\varnothing$ à Δ'. Ainsi Δ' s'identifie au cocrible $\overline{\Delta'} - \{\varnothing\}$ de $\overline{\Delta'}$. Notons

$$\varnothing_n = (\underbrace{\varnothing, \varnothing, \ldots, \varnothing}_{n \text{ fois}})$$

l'objet initial de $\overline{\Delta'}^{\,n}$, $n \geqslant 1$. On définit un isomorphisme de catégories

$$\Delta'/u^*(\Delta_m) \longrightarrow \overline{\Delta'}^{\,m+1} - \{\varnothing_{m+1}\}$$

de $\Delta'/u^*(\Delta_m)$ sur le cocrible $\overline{\Delta'}^{\,m+1} - \{\varnothing_{m+1}\}$ de $\overline{\Delta'}^{\,m+1}$, en associant à tout objet $(\Delta_n, \varphi : \Delta_n \longrightarrow \Delta_m)$ de $\Delta'/u^*(\Delta_m)$, l'objet $(a_0, a_1, \ldots, a_m)$ de $\overline{\Delta'}^{\,m+1} - \{\varnothing_{m+1}\}$, où

$$a_i = \begin{cases} \Delta_{\mathsf{card}(\varphi^{-1}\{i\})-1} & \text{si } \varphi^{-1}\{i\} \neq \varnothing \\ \varnothing & \text{sinon} \end{cases} \qquad 0 \leqslant i \leqslant m \; .$$

Il suffit donc de prouver que la catégorie $\overline{\Delta'}^{\,m+1} - \{\varnothing_{m+1}\}$ est asphérique. On raisonne par récurrence sur m. Pour $m = 0$, $\overline{\Delta'} - \{\varnothing\}$ s'identifie à Δ' qui est asphérique (lemme 1.8.31). Supposons donc que $\overline{\Delta'}^{\,m} - \{\varnothing_m\}$ soit asphérique, et montrons que $\overline{\Delta'}^{\,m+1} - \{\varnothing_{m+1}\}$ l'est aussi. La catégorie $\overline{\Delta'}^{\,m+1} - \{\varnothing_{m+1}\}$ est réunion des cocribles $\overline{\Delta'}^{\,m} \times (\overline{\Delta'} - \{\varnothing\})$ et $(\overline{\Delta'}^{\,m} - \{\varnothing_m\}) \times \overline{\Delta'}$, et l'intersection de ces deux cocribles est $(\overline{\Delta'}^{\,m} - \{\varnothing_m\}) \times (\overline{\Delta'} - \{\varnothing\})$. Ces trois cocribles sont asphériques, en vertu de l'hypothèse de récurrence, du lemme 1.8.31, et des corollaires 1.1.5 et 1.1.13. Il résulte alors du corollaire 1.1.27 que $\overline{\Delta'}^{\,m+1} - \{\varnothing_{m+1}\}$ est asphérique, ce qui prouve l'assertion, et achève la démonstration. □

Remarque 1.8.33. — Si le localisateur fondamental faible $\mathcal{W}$ n'est pas grossier, alors Δ' n'est pas une catégorie test. En effet, si Δ' était une catégorie test, il en serait de même de $\Delta'/\Delta_0 \simeq e$. Or, pour toute petite catégorie C, $i_e i_e^*(C)$ est la catégorie discrète ayant même ensemble d'objets que C. Si e était une catégorie test, et en particulier une catégorie test faible, la catégorie discrète $\{0,1\} = i_e i_e^*(\Delta_1)$ serait asphérique (1.4.9), et le localisateur fondamental faible $\mathcal{W}$ serait grossier (1.8.29).

Exemple 1.8.34. — Pour tout entier n, $n \geqslant 0$, on note $\Delta_{\leqslant n}$ la sous-catégorie pleine de Δ formée des Δ_m, pour $0 \leqslant m \leqslant n$, et $i_n : \Delta_{\leqslant n} \longrightarrow \Delta$ le foncteur d'inclusion. On démontre que si $n \geqslant 1$, et si $\mathcal{W} = \mathcal{W}_{n-1}$, alors le foncteur i_n est $\mathcal{W}_{n-1}$-asphérique [**10**]. Comme le foncteur i_n est pleinement fidèle, on en déduit qu'il est localement $\mathcal{W}_{n-1}$-asphérique (cf. exemple 1.2.14, (a)), et il résulte de la proposition 1.7.14 et du corollaire 1.8.22, (c) que $\Delta_{\leqslant n}$ est une $\mathcal{W}_{n-1}$-catégorie test stricte.

1.9. Décalages et exemples de catégories test

Ce long paragraphe est largement et librement inspiré d'idées de D.-C. Cisinski [**11**], *et d'une description de la catégorie cellulaire de Joyal* [**18**]*, due à Clemens Berger* [**6**]. *Il a fait l'objet d'un article en commun avec D.-C. Cisinski* [**12**].

1.9.1. — Soit A une petite catégorie. Un *décalage sur* A est la donnée d'un endofoncteur $D : A \longrightarrow A$, d'un objet a_0 de A, et de morphismes de foncteurs

$$1_A \xrightarrow{\alpha} D \xleftarrow{\beta} a_0$$

(où a_0 désigne aussi l'endofoncteur constant de A de valeur a_0). On dira parfois que le quintuplet $\mathcal{D} = (A, a_0, D, \alpha, \beta)$ est un décalage, et que le quadruplet (a_0, D, α, β), ou plus simplement, quand aucune confusion n'en résulte, le couple (α, β), est un décalage sur A. On dit que l'objet a_0 de A est le *centre* du décalage $\mathcal{D}$, ou que le décalage $\mathcal{D}$ est *centré* sur a_0. Un *scindage* du décalage $\mathcal{D}$ est la donnée pour tout objet a de A, d'une rétraction $r_a : D(a) \longrightarrow a$ de α_a. (On ne demande *pas* que le morphisme r_a soit fonctoriel en a). On dit qu'un décalage est *scindable* s'il admet un scindage, et qu'il est *scindé* s'il est *muni* d'un scindage. Le décalage sous-jacent à un décalage scindé est scindable.

1.9.2. — Soient $\mathcal{D} = (A, a_0, D, \alpha, \beta)$ et $\mathcal{E} = (B, b_0, E, \gamma, \delta)$ deux décalages,

$$1_A \xrightarrow{\alpha} D \xleftarrow{\beta} a_0 \quad , \qquad 1_B \xrightarrow{\gamma} E \xleftarrow{\delta} b_0 \quad .$$

Un *morphisme de décalages* du premier vers le second est un foncteur $u : A \longrightarrow B$ satisfaisant aux relations

$$Eu = uD \quad , \qquad b_0 = u(a_0) \quad , \qquad \gamma \star u = u \star \alpha \quad , \qquad \delta \star u = u \star \beta \quad .$$

Si p et q sont des scindages de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$ respectivement, on dit que u est un *morphisme de décalages scindés* si u est un morphisme de décalages, et si pour tout objet a de A, on a l'égalité $q_{u(a)} = u(p_a)$. La catégorie des décalages, ainsi que celle de décalages scindés, admet des petites limites inductives et projectives qui se "calculent argument par argument". En revanche, la sous-catégorie pleine de la catégorie des décalages formée des décalages scindables n'est *pas* stable par limites inductives ou projectives.

1.9.3. — Soit A une petite catégorie. Un *décalage séparant sur A* est un décalage

$$1_A \xrightarrow{\ \alpha\ } D \xleftarrow{\ \beta\ } a_0$$

sur A tel que :

(i) pour tout objet a de A, la flèche $\alpha_a : a \longrightarrow D(a)$ est un monomorphisme ;

(ii) pour toute flèche $f : a \longrightarrow a'$ de A, le carré

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "\alpha_a"] \arrow[d, "f"'] & D(a) \arrow[d, "D(f)"] \\ a' \arrow[r, "\alpha_{a'}"'] & D(a') \end{tikzcd}$$

est cartésien ;

(iii) pour tout objet a de A, il n'existe aucun carré commutatif dans A de la forme

$$\begin{tikzcd} a' \arrow[r] \arrow[d] & a_0 \arrow[d, "\beta_a"] \\ a \arrow[r, "\alpha_a"'] & D(a) \end{tikzcd} ,$$

autrement dit, le produit fibré $(a, \alpha_a) \times_{D(a)} (a_0, \beta_a)$ dans la catégorie $\widehat{A}$ des préfaisceaux sur A est le préfaisceau vide.

En présence de la condition (i), la condition (ii) équivaut à la condition :

(ii') pour toute flèche $f : a \longrightarrow a'$ de A, si un morphisme $a'' \longrightarrow D(a)$ de A ne se factorise pas par $\alpha_a : a \longrightarrow D(a)$, alors le morphisme composé

$$a'' \longrightarrow D(a) \xrightarrow{D(f)} D(a')$$

ne se factorise pas par $\alpha_{a'} : a' \longrightarrow D(a')$.

On dit que le décalage (α, β) sur A est *cartésien* s'il satisfait aux seules deux premières conditions (i) et (ii) ci-dessus, ou de façon équivalente aux conditions (i) et (ii').

Proposition 1.9.4. — *Une limite inductive filtrante de décalages séparants* (resp. *cartésiens*) *est un décalage séparant* (resp. *cartésien*).

Démonstration. — La proposition résulte facilement de la propriété de commutativité des limites inductives filtrantes et des limites projectives finies dans la catégorie des ensembles, et du “calcul” des limites inductives filtrantes dans la catégorie des petites catégories. Les détails sont laissés au lecteur. □

1.9.5. — La notion de décalage admet la généralisation suivante, qui sera utile par la suite. Soit $I : A' \longrightarrow A$ un foncteur entre petites catégories. Un *décalage* sur I est la donnée d'un foncteur $D : A' \longrightarrow A$, d'un objet a_0 de A, et de morphismes de foncteurs

$$I \xrightarrow{\ \alpha\ } D \xleftarrow{\ \beta\ } a_0$$

(où a_0 désigne aussi le foncteur constant de A' vers A de valeur a_0). On dit que l'objet a_0 de A est le *centre* du décalage, ou que le décalage est *centré* sur a_0. On dira parfois que le quadruplet (a_0, D, α, β), ou plus simplement, quand aucune confusion n'en résulte, le couple (α, β), est un décalage sur I, et que le quintuplet $\mathcal{D} = (I, a_0, D, \alpha, \beta)$ est un *décalage généralisé*. Un *scindage* du décalage généralisé $\mathcal{D}$ est la donnée pour tout objet a de A', d'une rétraction $r_a : D(a) \longrightarrow I(a)$ de α_a. On dit qu'un décalage généralisé est *scindable* s'il admet un scindage, et qu'il est *scindé* s'il est *muni* d'un scindage. On dit que le décalage généralisé $\mathcal{D} = (I, a_0, D, \alpha, \beta)$ est *séparant* si les conditions suivantes sont satisfaites :

(i) pour tout objet a de A', la flèche $\alpha_a : I(a) \longrightarrow D(a)$ est un monomorphisme de A ;

(ii) pour toute flèche $f : a \longrightarrow a'$ de A', le carré

$$\begin{tikzcd} I(a) \arrow[r, "\alpha_a"] \arrow[d, "I(f)"'] & D(a) \arrow[d, "D(f)"] \\ I(a') \arrow[r, "\alpha_{a'}"'] & D(a') \end{tikzcd}$$

est un carré cartésien de A ;

(iii) pour tout objet a de A', il n'existe aucun carré commutatif dans A de la forme

$$\begin{tikzcd} a' \arrow[r] \arrow[d] & a_0 \arrow[d, "\beta_a"] \\ I(a) \arrow[r, "\alpha_a"'] & D(a) \end{tikzcd} \quad ,$$

autrement dit, le produit fibré $(I(a), \alpha_a) \times_{D(a)} (a_0, \beta_a)$ dans la catégorie $\widehat{A}$ des préfaisceaux sur A est le préfaisceau vide.

On dit que le décalage généralisé $\mathcal{D} = (I, a_0, D, \alpha, \beta)$ est *cartésien* s'il satisfait aux seules deux premières conditions (i) et (ii) ci-dessus.

Soient $\mathcal{D} = (I : A' \longrightarrow A, a_0, D, \alpha, \beta)$ et $\mathcal{E} = (J : B' \longrightarrow B, b_0, E, \gamma, \delta)$ deux décalages généralisés,

$$I \xrightarrow{\alpha} D \xleftarrow{\beta} a_0 \quad , \qquad J \xrightarrow{\gamma} E \xleftarrow{\delta} b_0 \quad .$$

Un *morphisme de décalages généralisés* du premier vers le second est un couple de foncteurs (u', u), $u' : A' \longrightarrow B'$, $u : A \longrightarrow B$, satisfaisant aux relations

$$Ju' = uI \ , \quad Eu' = uD \ , \quad b_0 = u(a_0) \ , \quad \gamma \star u' = u \star \alpha \ , \quad \delta \star u' = u \star \beta \quad .$$

Si p et q sont des scindages de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$ respectivement, on dit que (u', u) est un *morphisme de décalages généralisés scindés* si (u', u) est un morphisme de décalages généralisés, et si pour tout objet a de A', on a l'égalité $q_{u'(a)} = u(p_a)$. La catégorie des décalages généralisés, ainsi que celle des décalages généralisés scindés, admet des petites limites inductives et projectives qui se "calculent argument par argument". La sous-catégorie pleine de la catégorie des décalages généralisés formée des décalages généralisés séparants (resp. cartésiens) est stable par limites inductives filtrantes. On remarque qu'un décalage sur une petite catégorie A n'est rien d'autre qu'un décalage sur l'endofoncteur identique de A. La catégorie des décalages s'identifie ainsi à une sous-catégorie pleine de la catégorie des décalages généralisés.

Dans la suite, on se fixe, une fois pour toutes, un localisateur fondamental faible $\mathcal{W}$.

Proposition 1.9.6. — *Soit A une petite catégorie. Si A admet un décalage, alors A est asphérique. Si A admet un décalage scindable, alors A est totalement asphérique.*

Démonstration. — Si la catégorie A admet un décalage elle est contractile, et la première assertion résulte de la proposition 1.5.19. Pour montrer la deuxième assertion, il suffit donc de prouver qu'un décalage scindé sur A induit pour tout couple d'objets a_1, a_2 de A, un décalage sur $A/a_1 \times a_2$. Soit donc

$$\begin{tikzcd} 1_A \arrow[r, "\alpha"] & D \arrow[l, bend left, "r"] & a_0 \arrow[l, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

(r non nécessairement fonctoriel) un décalage scindé sur A. On rappelle qu'un objet de $A/a_1 \times a_2$ est un triplet

$$(a,\, p_1 : a \longrightarrow a_1,\, p_2 : a \longrightarrow a_2) \quad , \qquad a \in \mathsf{Ob}\, A \ , \quad p_1, p_2 \in \mathsf{Fl}\, A \quad ,$$

un morphisme $f : (a, p_1, p_2) \longrightarrow (a', p'_1, p'_2)$ étant une flèche $f : a \longrightarrow a'$ telle que

$$\begin{tikzcd} a \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p_1"'] & & a' \arrow[dl, "p'_1"] \\ & a_1 & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} a \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p_2"'] & & a' \arrow[dl, "p'_2"] \\ & a_2 & \end{tikzcd} \qquad \begin{aligned} p_1 &= p'_1 f \\ p_2 &= p'_2 f \quad . \end{aligned}$$

On définit

$$D' : A/a_1 \times a_2 \longrightarrow A/a_1 \times a_2$$

par

$$D'(a, p_1, p_2) = \big(D(a),\, r_{a_1} D(p_1),\, r_{a_2} D(p_2)\big) \quad , \qquad D'(f) = D(f) \quad .$$

On définit des morphismes de foncteurs

$$1_{A/a_1 \times a_2} \xrightarrow{\alpha'} D' \xleftarrow{\beta'} (a_0,\, r_{a_1}\beta_{a_1},\, r_{a_2}\beta_{a_2})$$

par

$$\alpha'_{(a,p_1,p_2)} = \alpha_a \quad , \qquad \beta'_{(a,p_1,p_2)} = \beta_a \quad ,$$

qui sont bien des morphismes de $A/a_1 \times a_2$

$$(a, p_1, p_2) \xrightarrow{\alpha_a} D'(a, p_1, p_2) = \big(D(a),\, r_{a_1} D(p_1),\, r_{a_2} D(p_2)\big) \xleftarrow{\beta_a} (a_0,\, r_{a_1}\beta_{a_1},\, r_{a_2}\beta_{a_2}) \quad ,$$

car en vertu de la fonctorialité de α et β, on a

$$r_{a_i} D(p_i)\alpha_a = r_{a_i}\alpha_{a_i} p_i = p_i \quad \text{et} \quad r_{a_i} D(p_i)\beta_a = r_{a_i}\beta_{a_i} \quad , \qquad i = 1, 2 \quad .$$

La fonctorialité de α' et β' résulte de celle de α et β. □

Corollaire 1.9.7. — *Soit A une petite catégorie admettant un décalage scindable. S'il existe un segment séparant $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ de $\widehat{A}$ tel que I soit asphérique, alors A est une catégorie test stricte.*

Démonstration. — Le corollaire résulte aussitôt des propositions 1.7.8 et 1.9.6. □

Proposition 1.9.8. — *Soient A, B deux petites catégories,*

$$1_A \xrightarrow{\alpha} D \xleftarrow{\beta} a_0 \quad , \qquad 1_B \xrightarrow{\gamma} E \xleftarrow{\delta} b_0$$

des décalages sur A et B respectivement, et $u : A \longrightarrow B$ un morphisme de décalages. Si le décalage (γ, δ) est scindable, alors u est un foncteur asphérique.

Démonstration. — Soit b un objet de B. Il s'agit de montrer que la catégorie A/b est asphérique, et pour cela, en vertu de la proposition 1.9.6, il suffit de construire un décalage sur A/b. Choisissons un scindage q (non nécessairement fonctoriel) du décalage scindable (γ, δ). On définit un décalage

$$1_{A/b} \xrightarrow{\alpha'} D' \xleftarrow{\beta'} a'_0$$

sur la catégorie A/b comme suit. L'objet a'_0 de A/b est défini par $a'_0 = (a_0,\, q_b\delta_b)$.

$$u(a_0) = b_0 \xrightarrow{\delta_b} E(b) \xrightarrow{q_b} b$$

Le foncteur $D' : A/b \longrightarrow A/b$ est défini en posant, pour tout objet $(a, g : u(a) \longrightarrow b)$ de A/b,

$$D'(a, g) = (D(a), q_b E(g)) \quad , \qquad u(D(a)) = E(u(a)) \xrightarrow{E(g)} E(b) \xrightarrow{q_b} b \quad ,$$

et pour toute flèche $f : (a, g) \longrightarrow (a', g')$ de A/b, $D'(f) = D(f)$. Les morphismes de foncteurs α' et β' sont définis par

$$\alpha'_{(a,g)} = \alpha_a \quad , \qquad \beta'_{(a,g)} = \beta_a \quad , \qquad (a, g) \in \mathsf{Ob}(A/b) \quad ,$$

qui sont bien des morphismes de A/b

$$(a, g) \xrightarrow{\alpha_a} D'(a, g) = \big(D(a),\, q_b E(g)\big) \xleftarrow{\beta_a} (a_0,\, q_b\delta_b) \quad ,$$

car le fait que u soit un morphisme de décalages et la fonctorialité de γ et δ impliquent les égalités

$$q_b E(g) u(\alpha_a) = q_b E(g)\gamma_{u(a)} = q_b\gamma_b g = g$$

$$q_b E(g) u(\beta_a) = q_b E(g)\delta_{u(a)} = q_b\delta_b \quad .$$

La fonctorialité de α' et β' résulte de celle de α et β, ce qui achève la preuve. □

1.9.9. — Soient A une catégorie et U un crible de A. On note $A-U$ la sous-catégorie pleine de A définie par $\mathsf{Ob}(A-U) = \mathsf{Ob}\, A - \mathsf{Ob}\, U$, et on vérifie aussitôt que $A-U$ est un cocrible de A. Cette convention permet d'énoncer le lemme suivant, dont la démonstration est immédiate.

Lemme 1.9.10. — *Soient A une catégorie, U un crible de A, et $u : U \longrightarrow C$ un foncteur dont le but est une catégorie admettant un objet final e_C. Alors il existe un unique foncteur $v : A \longrightarrow C$ tel que $v\,|\,U = u$ et tel que $v\,|\,A-U$ soit le foncteur constant de valeur e_C.*

Proposition 1.9.11. — *Une petite catégorie admettant un décalage séparant est une catégorie test faible.*

Démonstration. — Soit A une petite catégorie admettant un décalage séparant

$$1_A \xrightarrow{\ \alpha\ } D \xleftarrow{\ \beta\ } a_0 \quad .$$

En vertu de la proposition 1.4.9, pour montrer que la catégorie A est une catégorie test faible, il suffit de prouver que pour toute petite catégorie C admettant un objet final e_C, la catégorie $A/i_A^*(C)$ est asphérique, et pour cela il suffit de montrer qu'elle admet un décalage (1.9.6). On définit un foncteur $D_C : A/i_A^*(C) \longrightarrow A/i_A^*(C)$ comme suit. Soit $(a, p : A/a \longrightarrow C)$ un objet de $A/i_A^*(C)$. Comme $\alpha_a : a \longrightarrow D(a)$ est un monomorphisme, le foncteur $A/\alpha_a : A/a \longrightarrow A/D(a)$, induit par α_a, identifie A/a à un crible de $A/D(a)$, et il résulte du lemme 1.9.10 que le foncteur $p : A/a \longrightarrow C$ se prolonge en un foncteur unique $\overline{p} : A/D(a) \longrightarrow C$, induisant p sur le crible A/a, et le foncteur constant de valeur l'objet final e_C de C sur le cocrible complémentaire. On pose $D_C(a,p) = (D(a), \overline{p})$. Soit

$$(a, p : A/a \longrightarrow C) \xrightarrow{\ \ f\ \ } (a', p' : A/a' \longrightarrow C)$$

un morphisme de $A/i_A^*(C)$, autrement dit, une flèche $f : a \longrightarrow a'$ de A telle que le triangle

$$\begin{tikzcd} A/a \arrow[rr, "A/f"] \arrow[dr, "p"'] & & A/a' \arrow[dl, "p'"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

soit commutatif. Il résulte aussitôt de la fonctorialité de α et de la condition (ii'), 1.9.3, que le triangle

$$\begin{tikzcd} A/D(a) \arrow[rr, "A/D(f)"] \arrow[dr, "\overline{p}"'] & & A/D(a') \arrow[dl, "\overline{p'}"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

est commutatif, autrement dit que $D(f) : (D(a), \overline{p}) \longrightarrow (D(a'), \overline{p'})$ est un morphisme de $A/i_A^*(C)$. On pose $D_C(f) = D(f)$, définissant ainsi un foncteur $D_C : A/i_A^*(C) \longrightarrow A/i_A^*(C)$. Comme par construction, pour tout objet (a, p) de $A/i_A^*(C)$, le triangle

$$\begin{tikzcd} A/a \arrow[rr, "A/\alpha_a"] \arrow[dr, "p"'] & & A/D(a) \arrow[dl, "\overline{p}"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

est commutatif, le morphisme de foncteurs α induit un morphisme de foncteurs $\alpha_C : 1_{A/i_A^*(C)} \longrightarrow D_C$. Enfin, la condition (*iii*), 1.9.3, implique que pour tout objet (a, p) de $A/i_A^*(C)$, le triangle

$$\begin{tikzcd} A/a_0 \arrow[rr, "A/\beta_a"] \arrow[dr, "e_C"'] & & A/D(a) \arrow[dl, "\overline{p}"] \\ & C & \end{tikzcd} \quad ,$$

où $e_C : A/a_0 \longrightarrow C$ désigne aussi le foncteur constant de valeur e_C, est commutatif, ce qui implique que le morphisme de foncteurs $\beta : a_0 \longrightarrow D$ induit un morphisme de foncteurs $\beta_C : (a_0, e_C) \longrightarrow D_C$, ce qui achève la démonstration. □

Corollaire 1.9.12. — *Une petite catégorie admettant un décalage à la fois séparant et scindable est une catégorie test stricte.*

Démonstration. — Le corollaire est conséquence immédiate des propositions 1.7.8, 1.9.6 et 1.9.11. □

Exemple 1.9.13. — Soit $D : \Delta \longrightarrow \Delta$ le foncteur défini en posant pour tout m, $m \in \mathbb{N}$,

$$D(\mathit{\Delta}_m) = \mathit{\Delta}_{m+1} \quad ,$$

et en définissant pour toute application croissante $\varphi : \mathit{\Delta}_m \longrightarrow \mathit{\Delta}_n$, $D(\varphi)$ par

$$D(\varphi)(k) = \begin{cases} \varphi(k) \ , & 0 \leqslant k \leqslant m \ , \\ n+1 \ , & k = m+1 \ . \end{cases}$$

L'inclusion naturelle

$$\mathit{\Delta}_m \hookrightarrow \mathit{\Delta}_{m+1} \quad , \qquad k \longmapsto k \quad , \quad 1 \leqslant k \leqslant m \quad ,$$

définit un morphisme fonctoriel $\alpha : 1_\Delta \longrightarrow D$, et l'application

$$\mathit{\Delta}_0 \longrightarrow \mathit{\Delta}_{m+1} \quad , \qquad 0 \longmapsto m+1 \quad ,$$

un morphisme fonctoriel β de l'endofoncteur constant de Δ, de valeur $\mathit{\Delta}_0$, vers D. On obtient ainsi un décalage de centre $\mathit{\Delta}_0$

$$1_\Delta \xrightarrow{\ \alpha\ } D \xleftarrow{\ \beta\ } \mathit{\Delta}_0 \quad .$$

Ce décalage est scindable. En effet, pour tout entier $m \geqslant 0$, l'application croissante $r_m : \mathit{\Delta}_{m+1} \longrightarrow \mathit{\Delta}_m$ définie par

$$r_m(k) = \begin{cases} k\ , & 0 \leqslant k \leqslant m\ , \\ m\ , & k = m+1\ , \end{cases}$$

est une rétraction (non fonctorielle) de $\alpha_{\mathit{\Delta}_m}$. Comme il est facile de vérifier que ce décalage est également séparant, le corollaire 1.9.12 fournit une troisième preuve du fait que Δ est une catégorie test stricte (1.7.14 et 1.8.25).

Exemple 1.9.14. — Le foncteur $D : \Delta \longrightarrow \Delta$ de l'exemple précédent induit par restriction un foncteur $D' : \Delta' \longrightarrow \Delta'$, et les morphismes de foncteurs α, β des morphismes de foncteurs

$$1_{\Delta'} \xrightarrow{\ \alpha'\ } D' \xleftarrow{\ \beta'\ } \mathit{\Delta}_0 \quad .$$

On vérifie aussitôt que le décalage ainsi défini sur Δ' (considéré déjà dans 1.8.31) est un décalage séparant, et la proposition 1.9.11 fournit une deuxième preuve du fait que Δ' est une catégorie test faible (1.8.32). En revanche, on remarque que les rétractions r_m ne sont pas des morphismes de Δ', et que le décalage induit n'est pas scindable. L'inclusion $\Delta' \hookrightarrow \Delta$ est un morphisme de décalages de $(\Delta', \mathit{\Delta}_0, D', \alpha', \beta')$ vers $(\Delta, \mathit{\Delta}_0, D, \alpha, \beta)$. En particulier, la proposition 1.9.8 implique que cette inclusion est un foncteur asphérique (ce qui a déjà été prouvé par une autre méthode dans la démonstration de la proposition 1.8.32).

Exemple 1.9.15. — Soit A la sous-catégorie pleine de celle des ensembles ordonnés, et applications croissantes, dont le seul objet est l'ensemble ordonné $\mathbb{N}$ des entiers naturels. En d'autres termes, A est le monoïde des applications croissantes $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, considéré comme catégorie à un seul objet. On définit un décalage scindé sur A

$$\begin{tikzcd} 1_A \arrow[r, "\alpha"] & D \arrow[l, bend left, "r"] & a_0 \arrow[l, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

comme suit. Le foncteur D est défini en posant pour toute application croissante $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$,

$$D(\varphi)(i) = \begin{cases} 0\ , & i = 0\ , \\ \varphi(i-1)+1\ , & i \geqslant 1\ . \end{cases}$$

Le morphisme de foncteurs α, qui est tout simplement une application croissante $\alpha : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, est défini par $\alpha(i) = i+1$, $i \geqslant 0$. L'objet a_0 est l'unique objet $a_0 = \mathbb{N}$

de A, et le morphisme β est l'application constante de valeur 0. Enfin, le scindage r est défini par

$$r(i) = \begin{cases} 0 \ , & i = 0 \ , \\ i-1 \ , & i \geqslant 1 \ . \end{cases}$$

On vérifie aussitôt que ce décalage est séparant. Le corollaire 1.9.12 implique alors que la catégorie A est une catégorie test stricte. En particulier, la catégorie des ensembles munis d'une action à droite du monoïde des applications croissantes $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ modélise les types d'homotopie !

Exemple 1.9.16. — Pour toute catégorie C, on note $C^\star$ la catégorie obtenue de C par adjonction formelle d'un objet final. On remarque que C s'identifie à un crible de $C^\star$, et que si C a déjà un objet final, ce dernier n'est plus un objet final de $C^\star$. Soit A une petite sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}at$ satisfaisant aux conditions suivantes :

(i) la catégorie ponctuelle e est dans A ;
(ii) pour tout objet a de A, la catégorie $a^\star$ est dans A.

Soit $D : A \longrightarrow A$ le foncteur défini en posant pour tout objet a de A, $D(a) = a^\star$, et en définissant pour tout morphisme $f : a \longrightarrow a'$ de A, $D(f)$ comme étant le foncteur envoyant l'objet final de $D(a)$ sur l'objet final de $D(a')$ et induisant f sur le crible de $D(a)$ défini par l'inclusion $a \hookrightarrow D(a)$. On note α_a cette inclusion, et $\beta_a : e \longrightarrow D(a)$ le foncteur défini par l'objet final de $D(a)$. On définit ainsi un décalage sur A, de centre la catégorie ponctuelle e,

$$1_A \xrightarrow{\alpha} D \xleftarrow{\beta} e \quad ,$$

où e désigne aussi l'endofoncteur constant de A de valeur e. On vérifie aussitôt que ce décalage est cartésien, et qu'il est séparant si la catégorie vide n'est pas dans A. En particulier, la catégorie A est alors, en vertu de la proposition 1.9.11, une catégorie test faible. Si tout objet de A admet un objet final, alors ce décalage est scindable. En effet, en vertu du lemme 1.9.10, pour tout objet a de A, le morphisme identique de a se prolonge alors en une rétraction $D(a) \longrightarrow a$ de l'inclusion $a \hookrightarrow D(a)$, envoyant l'objet final de $D(a)$ sur un objet final de a. Ainsi, le corollaire 1.9.12 implique que sous ces hypothèses, A est une catégorie test strict. On remarque que cet exemple généralise l'exemple 1.9.13.

Exemple 1.9.17. — Soit A une catégorie ayant un objet *initial* a_0. Alors

$$\begin{tikzcd} 1_A \arrow[r, "1_{1_A}"] & 1_A \arrow[l, bend left, "1_{1_A}"] & a_0 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

est un décalage scindé cartésien (mais pas séparant) sur A, de centre l'objet initial de A. En particulier, il résulte de la proposition 1.9.6 que la catégorie A est totalement asphérique. D'ailleurs, ce dernier résultat est *a priori* évident, puisque pour tout couple d'objets a_1, a_2 de A, l'objet initial de A induit un objet initial de $A/a_1 \times a_2$, et par suite cette catégorie est asphérique (1.1.13). En revanche, si le localisateur fondamental faible $\mathcal{W}$ n'est pas grossier, une telle catégorie A n'est *jamais* une catégorie test, ni même une catégorie test faible. En effet, soit $L_A = i_A^*(\Delta_1)$ l'objet de Lawvere de $\widehat{A}$ (cf. 1.6.5). Pour tout objet a de A, l'ensemble $L_A(a)$ est formé des sous-objets X du préfaisceau représentable représenté par a, et comme a_0 est un objet initial de A, un tel sous-objet est non vide si et seulement si l'ensemble $X(a_0)$ est non vide. On en déduit facilement que

$$\begin{aligned} a \longmapsto & \{\text{sous-objets non vides du préfaisceau représentable } a\} \\ \simeq & \{\text{cribles non vides de la catégorie } A/a\} \\ = & \{\text{cribles de la catégorie } A/a \text{ contenant l'objet } (a_0, a_0 \longrightarrow a)\} \end{aligned}$$

définit un sous-préfaisceau de L_A, et que le préfaisceau L_A est somme disjointe de ce sous-préfaisceau et du sous-préfaisceau défini par les sous-objets vides, ce qui prouve que L_A n'est pas connexe. Le lemme 1.8.29 implique alors que si le localisateur fondamental faible $\mathcal{W}$ n'est pas grossier, alors $L_A = i_A^*(\Delta_1)$ n'est pas asphérique, et par suite, en vertu de la proposition 1.4.9, que A n'est *pas* une catégorie test faible.

1.9.18. — Soit m un entier, $m \geqslant 0$. On note $\mathcal{P}_m$ l'ensemble des parties de l'ensemble

$$\mathit{\Gamma}_m = \{1, 2, \dots, m\} \qquad (\mathit{\Gamma}_m = \varnothing \ \text{ si } \ m = 0)$$

(y compris la partie pleine et la partie vide). On rappelle que la *catégorie de Segal* Γ est la catégorie dont les objets sont les ensembles $\mathit{\Gamma}_m$, $m \geqslant 0$, un morphisme $\mathit{\Gamma}_m \longrightarrow \mathit{\Gamma}_n$ étant une application $\varphi : \mathit{\Gamma}_m \longrightarrow \mathcal{P}_n$ telle que pour tout couple i, i', $1 \leqslant i < i' \leqslant m$, on ait $\varphi(i) \cap \varphi(i') = \varnothing$. Le composé de deux morphismes composables

$$\mathit{\Gamma}_m \xrightarrow{\varphi} \mathit{\Gamma}_n \xrightarrow{\psi} \mathit{\Gamma}_r$$

de Γ est défini par

$$(\psi \circ \varphi)(i) = \bigcup_{j \in \varphi(i)} \psi(j) \quad , \qquad 1 \leqslant i \leqslant m \quad .$$

On remarque que $\mathit{\Gamma}_0$ est un objet *nul* (à la fois initial et final) de Γ. La catégorie Γ est équivalente à la catégorie opposée à celle des ensembles finis pointés, et plus précisément, isomorphe à la catégorie opposée de celle dont les objets sont les ensembles $\{0, 1, \dots, m\}$, $m \geqslant 0$, et les morphismes les applications envoyant 0 sur 0. À une telle application

$$\{0, 1, \dots, n\} \xrightarrow{f} \{0, 1, \dots, m\} \quad ,$$

on associe le morphisme $\mathit{\Gamma}_m \longrightarrow \mathit{\Gamma}_n$ de Γ, défini par $i \mapsto f^{-1}(i)$, $1 \leqslant i \leqslant m$, et à un morphisme $\varphi : \mathit{\Gamma}_m \longrightarrow \mathit{\Gamma}_n$ de Γ, on associe l'application

$$f : \{0, 1, \dots, n\} \longrightarrow \{0, 1, \dots, m\} \quad ,$$

définie par

$$f(j) = \begin{cases} i \quad , & \text{si} \quad j \in \varphi(i) \quad , \\ 0 \quad , & \text{si} \quad j \notin \bigcup\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} \varphi(i) \quad . \end{cases}$$

Exemple 1.9.19. — L'objet $\mathit{\Gamma}_0$ de la catégorie de Segal Γ étant en particulier un objet initial, cette catégorie admet un décalage scindé "évident" (exemple 1.9.17). Mais elle admet aussi un décalage scindé non trivial, également centré sur $\mathit{\Gamma}_0$,

$$\begin{tikzcd} 1_\Gamma \arrow[r, "\gamma"] & E \arrow[l, bend left, "r"] & \mathit{\Gamma}_0 \arrow[l] \end{tikzcd} \quad ,$$

défini comme suit. Le foncteur $E : \Gamma \longrightarrow \Gamma$ est défini en posant pour tout m, $m \in \mathbb{N}$,

$$E(\mathit{\Gamma}_m) = \mathit{\Gamma}_{m+1} \quad ,$$

et en définissant pour tout morphisme $g : \mathit{\Gamma}_m \longrightarrow \mathit{\Gamma}_n$ de Γ, $E(g)$ par

$$E(g)(k) = \begin{cases} \quad g(k) \ , & 0 \leqslant k \leqslant m \ , \\ \{n+1\} \ , & k = m+1 \ . \end{cases}$$

Pour tout entier $m \geqslant 0$, les morphismes

$$\begin{tikzcd} \mathit{\Gamma}_m \arrow[r, "\gamma_{\mathit{\Gamma}_m}"] & E(\mathit{\Gamma}_m) \arrow[l, bend left, "r_m"] \end{tikzcd}$$

sont définis par

$$\gamma_{\mathit{\Gamma}_m}(k) = \{k\} \quad , \qquad 1 \leqslant k \leqslant m \quad ,$$

$$r_m(k) = \begin{cases} \{k\} \ , & 0 \leqslant k \leqslant m \ , \\ \ \varnothing \ , & k = m+1 \ . \end{cases}$$

On remarque que dans cet exemple la rétraction r est fonctorielle, et on vérifie facilement que le décalage ainsi défini est cartésien (mais pas séparant).

1.9.20. — Soient A une catégorie, et $F : B \longrightarrow \Gamma$ un foncteur. Le *produit en couronnes* $F \int A$, noté parfois $B \int A$, quand il n'y a aucune ambiguïté sur le foncteur F, est la catégorie dont les objets sont les couples $[b; (a_1, \dots, a_m)]$, où b est un objet de B tel que $F(b) = \mathit{\Gamma}_m$, et $(a_1, \dots, a_m)$ un m-uplet d'objets de A. Un morphisme

$$[b; (a_1, \dots, a_m)] \longrightarrow [b'; (a'_1, \dots, a'_{m'})]$$

est un couple $[g; \mathbf{f}]$, où $g : b \longrightarrow b'$ est un morphisme de B, et

$$\mathbf{f} = (f_{i'i} : a_i \longrightarrow a_{i'})_{1 \leqslant i \leqslant m,\, i' \in F(g)(i)}$$

une famille de morphismes de A. Si

$$[b; (a_1, \dots, a_m)] \xrightarrow{[g;\mathbf{f}]} [b'; (a'_1, \dots, a'_{m'})] \xrightarrow{[g';\mathbf{f}']} [b''; (a''_1, \dots, a''_{m''})]$$

est un couple de morphismes composables,

$$\mathbf{f} = (f_{i'i})_{1\leqslant i\leqslant m,\, i'\in F(g)(i)} \quad , \qquad \mathbf{f}' = (f'_{i''i'})_{1\leqslant i'\leqslant m',\, i''\in F(g')(i')} \quad ,$$

le composé

$$[\,g'';\mathbf{f}''\,] := [\,g';\mathbf{f}'\,] \circ [\,g;\mathbf{f}\,]$$

est défini par

$$g'' = g'g \quad , \qquad \mathbf{f}'' = (f''_{i''i})_{1\leqslant i\leqslant m,\, i''\in F(g'')(i)} \quad ,$$

où $f''_{i''i} = f'_{i''i'}f_{i'i}$, i' étant l'unique entier dans $F(g)(i)$ tel que $i'' \in F(g')(i')$.

On remarque que si A est la catégorie ponctuelle e, alors le produit en couronnes $B\smallint e$ est canoniquement isomorphe à la catégorie B.

1.9.21. — La construction du produit en couronnes est fonctorielle : Soient A, A' et B des petites catégories, et

$$A' \xrightarrow{\ G\ } A \quad , \qquad B' \xrightarrow{\ H\ } B \xrightarrow{\ F\ } \Gamma$$

des foncteurs. On en déduit un foncteur

$$K = H\smallint G \,:\, B'\smallint A' = FH\smallint A' \longrightarrow F\smallint A = B\smallint A \quad ,$$

en posant

$$K[\,b;(a_1,\dots,a_m)\,] = [\,H(b);(G(a_1),\dots,G(a_m))\,] \,, \quad [\,b;(a_1,\dots,a_m)\,] \in \mathsf{Ob}\big(B'\smallint A'\big) \;,$$

et

$$K[\,g;\,\mathbf{f} = (f_{ji})_{i,j}\,] = [\,H(g);\,G(\mathbf{f}) = (G(f_{ji}))_{i,j}\,] \quad , \qquad [\,g;\mathbf{f}\,] \in \mathsf{Fl}\big(B'\smallint A'\big) \quad .$$

Si les foncteurs G et H sont fidèles (resp. pleinement fidèles), alors il en est de même du foncteur $H\smallint G$.

En particulier, soit a un objet de A, et notons aussi $a : e \longrightarrow A$ le foncteur de la catégorie ponctuelle vers A, défini par cet objet. On en déduit un foncteur fidèle

$$I_a = 1_B\smallint a : B\smallint e \simeq B \longrightarrow B\smallint A \quad ,$$

qui est pleinement fidèle si a est un objet *rigide* de A (n'admettant pas d'autre endomorphisme que l'identité). Explicitement, pour tout objet b de B tel que $f(b) = \mathit{\Gamma}_m$,

$$I_a(b) = [\,b;\underbrace{(a,a,\dots,a)}_{m \text{ fois}}\,] \quad ,$$

et pour tout morphisme $g : b \longrightarrow b'$ de B tel que $F(b) = \mathit{\Gamma}_m$ et $F(b') = \mathit{\Gamma}_{m'}$,

$$I_a(g) : [\,b;\underbrace{(a,a,\dots,a)}_{m \text{ fois}}\,] \longrightarrow [\,b';\underbrace{(a,a,\dots,a)}_{m' \text{ fois}}\,]$$

est défini par

$$I_a(g) = [\,g;(1_a)_{1\leqslant i\leqslant m,\, i'\in F(g)(i)}\,] \quad .$$

1.9.22. — Soient B une petite catégorie, b un objet de B, et $F : B \longrightarrow \Gamma$ un foncteur. En vertu de ce qui précède, le foncteur $b : e \longrightarrow B$ définit un foncteur fidèle

$$I_b : B \longrightarrow B\int B \quad ,$$

d'où, par fonctorialité du produit en couronnes, un foncteur

$$1_B \int I_b : B\int B \longrightarrow B\int\big(B\int B\big) \quad ,$$

et par suite, un foncteur

$$1_B\int\big(1_B\int I_b\big) : B\int\big(B\int B\big) \longrightarrow B\int\Big(B\int\big(B\int B\big)\Big) \quad ,$$

et ainsi de suite. De façon plus précise, on définit une suite de catégories B_n, $n \geqslant 0$, par

$$B_0 = e = \text{catégorie ponctuelle}\,,$$

$$B_{n+1} = B\int B_n \quad ,$$

et une suite de foncteurs $I_n : B_n \longrightarrow B_{n+1}$, $n \geqslant 0$, par

$$I_0 = b : e \longrightarrow B \quad , \quad \text{foncteur défini par l'objet } b \text{ de } B\,,$$

$$I_{n+1} = 1_B \int I_n \quad .$$

On obtient ainsi une tour de catégories

$$B_0 = e \xrightarrow{I_0=b} B_1 = B \xrightarrow{I_1=I_b} B_2 = B\int B \xrightarrow{I_2} \cdots \xrightarrow{I_{n-1}} B_n \xrightarrow{I_n} B_{n+1} \xrightarrow{I_{n+1}} \cdots \quad .$$

Le *produit en couronnes infini*, défini par la catégorie pointée (B, b) (et le foncteur $F : B \longrightarrow \Gamma$), est la catégorie limite inductive

$$\mathsf{C}(B, b) := \mathsf{C}(B, b, F) := B_\infty := \varinjlim B_n \quad .$$

La fonctorialité du produit en couronnes implique que cette construction est fonctorielle. Si $H : (B', b') \longrightarrow (B, b)$ est un morphisme de catégories pointées (un foncteur $H : B' \longrightarrow B$ tel que $H(b') = b$), on en déduit un foncteur

$$\mathsf{C}(H) : \mathsf{C}(B', b') = \mathsf{C}(B', b', FH) \longrightarrow \mathsf{C}(B, b) \quad .$$

Si le foncteur H est fidèle (resp. pleinement fidèle), il en est de même du foncteur $\mathsf{C}(H)$.

Exemple 1.9.23. — On définit un foncteur $F : \Delta \longrightarrow \Gamma$ par

$$F(\mathit{\Delta}_m) = \mathit{\Gamma}_m \quad , \qquad m \geqslant 0 \quad ,$$

$$F(\varphi)(i) = \{j \mid \varphi(i-1) < j \leqslant \varphi(i)\} \ , \quad \varphi : \mathit{\Delta}_m \longrightarrow \mathit{\Delta}_n \in \mathsf{Fl}(\Delta) \ , \quad 1 \leqslant i \leqslant m \ .$$

On pose

$$\Theta = \mathsf{C}(\Delta, \mathit{\Delta}_0) = \mathsf{C}(\Delta, \mathit{\Delta}_0, F) \quad .$$

Il résulte des considérations développées dans [**5**] et [**6**] que cette catégorie coïncide avec la *catégorie cellulaire* introduite par Joyal dans [**18**].

L'inclusion $\Delta' \hookrightarrow \Delta$ induit un foncteur $F' = F|\Delta' : \Delta' \longrightarrow \Gamma$, d'où une catégorie

$$\Theta' = \mathsf{C}(\Delta', \mathit{\Delta}_0) = \mathsf{C}(\Delta', \mathit{\Delta}_0, F') \quad ,$$

et un foncteur fidèle $\Theta' \longrightarrow \Theta$. En vertu de la définition des produits en couronnes infinis, on a un diagramme commutatif de foncteurs fidèles

$$\begin{tikzcd}
\Theta'_0 \arrow[r] \arrow[d] & \Theta'_1 \arrow[r] \arrow[d] & \Theta'_2 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & \Theta'_n \arrow[r] \arrow[d] & \Theta'_{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\Theta_0 \arrow[r] & \Theta_1 \arrow[r] & \Theta_2 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \Theta_n \arrow[r] & \Theta_{n+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd} \quad ,$$

avec $\Theta'_0 = \Theta_0 = e$ la catégorie ponctuelle, $\Theta'_1 = \Delta'$, $\Theta_1 = \Delta$, et

$$\Theta'_{n+1} = \Delta' \textstyle\int \Theta'_n \quad , \qquad \Theta_{n+1} = \Delta \textstyle\int \Theta_n \quad , \qquad n \geqslant 0 \quad ,$$
$$\Theta' = \varinjlim \Theta'_n \quad , \qquad \Theta = \varinjlim \Theta_n \quad .$$

Comme $\mathit{\Delta}_0$ est un objet rigide, aussi bien de Δ' que de Δ, les flèches horizontales sont des foncteurs pleinement fidèles, et les catégories Θ'_n (resp. Θ_n) s'identifient à des sous-catégories pleines de Θ' (resp. de Θ).

1.9.24. — Soient B une petite catégorie, et $F : B \longrightarrow \Gamma$ un foncteur. On dit qu'un décalage

$$1_B \xrightarrow{\ \beta\ } L \xleftarrow{\ \beta'\ } b_0$$

sur la catégorie B est *adapté* au foncteur F, ou plus simplement, quand il n'y a aucune ambiguïté sur le foncteur F, qu'il est un Γ-*décalage*, si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(i) $F(b_0) = \mathit{\Gamma}_0$;
(ii) pour tout objet b de B tel que $F(b) = \mathit{\Gamma}_m$, on a $FL(b) = \mathit{\Gamma}_{m+1}$, et pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant m$, $F(\beta_b)(i) = \{i\}$.

On dit qu'il est *strictement adapté* au foncteur F, ou qu'il est un Γ-*décalage strict*, si de plus la condition suivante est satisfaite :

(iii) pour tout couple d'objets b, b' de B tels que $F(b) = \mathit{\Gamma}_m$ et $F(b') = \mathit{\Gamma}_{m'}$, et toute flèche $g : b \longrightarrow b'$ de B, on a $m'+1 \in FL(g)(m+1)$.

Si le foncteur F est un morphisme de décalages, du décalage $\mathcal{L} = (B, b_0, L, \beta, \beta')$ sur B vers le décalage sur la catégorie Γ défini dans l'exemple 1.9.19, alors le décalage $\mathcal{L}$ est strictement adapté au foncteur F, mais la réciproque n'est pas vraie en général. En particulier, le décalage de l'exemple 1.9.19 est strictement adapté au foncteur identique de Γ.

Exemple 1.9.25. — Les décalages des exemples 1.9.13 et 1.9.14 sur Δ et Δ' sont strictement adaptés respectivement aux foncteurs $F : \Delta \longrightarrow \Gamma$ et $F' : \Delta' \longrightarrow \Gamma$ de l'exemple 1.9.23. En revanche, les foncteurs F et F' ne sont *pas* des morphismes de décalages, de ces décalages vers le décalage sur Γ de l'exemple 1.9.19.

Lemme 1.9.26. — *Soient B une petite catégorie, $F : B \longrightarrow \Gamma$ un foncteur, et*

$$1_B \xrightarrow{\beta} L \xleftarrow{\beta'} b_0$$

un Γ-décalage sur la catégorie B. Si $g : b \longrightarrow b'$ est une flèche de B et si $F(b) = \mathit{\Gamma}_m$, alors pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant m$, on a $FL(g)(i) = F(g)(i)$. De plus, si $(q_b : L(b) \longrightarrow b)_{b \in \mathsf{Ob}(B)}$ est un scindage du décalage (β, β'), et b un objet de B tel que $F(b) = \mathit{\Gamma}_m$, alors pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant m$, on a $F(q_b)(i) = \{i\}$ et $F(q_b)(m+1) = \varnothing$.

Démonstration. — Soit $g : b \longrightarrow b'$ une flèche de B telle que $F(b) = \mathit{\Gamma}_m$, $F(b') = \mathit{\Gamma}_{m'}$. En vertu de la fonctorialité de β, on a un carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
F(b) \arrow[r, "F(\beta_b)"] \arrow[d, "F(g)"'] & FL(b) \arrow[d, "FL(g)"] \\
F(b') \arrow[r, "F(\beta_{b'})"'] & FL(b')
\end{tikzcd} \qquad ,$$

et comme (β, β') est un Γ-décalage, on a

$$F(\beta_b)(i) = \{i\} \ , \quad 1 \leqslant i \leqslant m \ , \qquad \text{et} \qquad F(\beta_{b'})(i') = \{i'\} \ , \quad 1 \leqslant i' \leqslant m' \ .$$

On en déduit que pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant m$, on a

$$\big(FL(g) \circ F(\beta_b)\big)(i) = \bigcup_{i' \in F(\beta_b)(i)} FL(g)(i') = FL(g)(i) \quad ,$$

$$\big(F(\beta_{b'}) \circ F(g)\big)(i) = \bigcup_{i' \in F(g)(i)} F(\beta_{b'})(i') = F(g)(i) \quad ,$$

d'où $FL(g)(i) = F(g)(i)$.

Soient maintenant $(q_b : L(b) \longrightarrow b)_{b \in \mathsf{Ob}(B)}$ un scindage du décalage (β, β'), et b un objet de B tel que $F(b) = \mathit{\Gamma}_m$. Comme (β, β') est un Γ-décalage, pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant m$, on a $F(\beta_b)(i) = \{i\}$, et la relation $q_b \beta_b = 1_b$ implique que

$$\{i\} = F(q_b \beta_b)(i) = \bigcup_{j \in F(\beta_b)(i)} F(q_b)(j) = F(q_b)(i) \quad ,$$

ce qui implique en particulier que $F(q_b)(m+1) = \varnothing$ (puisque par définition des morphismes de Γ, les ensembles $F(q_b)(j)$, $1 \leqslant j \leqslant m+1$, sont deux à deux disjoints). $\square$

Proposition 1.9.27. — *Soient A, A', B des petites catégories, $I : A' \longrightarrow A$ et $F : B \longrightarrow \Gamma$ des foncteurs, $C = B \textstyle\int A$, $C' = B \textstyle\int A'$, et*

$$I \xrightarrow{\alpha} K \xleftarrow{\alpha'} a_0 \qquad (\text{resp.} \quad 1_B \xrightarrow{\beta} L \xleftarrow{\beta'} b_0 \quad)$$

un décalage sur le foncteur I (resp. *un Γ-décalage sur la catégorie B*). *Alors il existe un unique décalage sur le foncteur $J = 1_B \textstyle\int I : C' \longrightarrow C$*

$$J \xrightarrow{\gamma} M \xleftarrow{\gamma'} [b_0; (\,)]$$

(où ( ) désigne l'unique "0-uplet" d'objets de A) *tel que pour tout objet* $[\,b;(a_1,\dots,a_m)\,]$ *de* C'*, on ait*

(1.9.27.1) $$M[\,b;(a_1,\dots,a_m)\,]=[\,L(b);(K(a_1),\dots,K(a_m),a_0)\,]\quad ,$$

(1.9.27.2) $$\gamma_{[\,b;(a_1,\dots,a_m)\,]}=[\,\beta_b;(\alpha_{a_i})_{1\leqslant i\leqslant m}\,]\quad ,$$

(1.9.27.3) $$\gamma'_{[\,b;(a_1,\dots,a_m)\,]}=[\,\beta'_b;(\,)\,]\quad ,$$

et pour toute flèche

$$[\,b;(a_1,\dots,a_m)\,]\xrightarrow{[g;\mathbf{f}]}[\,b';(a'_1,\dots,a'_{m'})\,],\ g:b\longrightarrow b',\ \mathbf{f}=(f_{i'i}:a_i\longrightarrow a'_{i'})_{1\leqslant i\leqslant m,\,i'\in F(g)(i)}$$

de C'*, on ait*

(1.9.27.4) $$M[\,g;\mathbf{f}\,]=[\,g';\mathbf{f}'\,]\ ,\quad g'=L(g)\ ,\quad \mathbf{f}'=(f'_{i'i})_{1\leqslant i\leqslant m+1,\,i'\in FL(g)(i)}\ ,$$

où pour tout i*,* $1\leqslant i\leqslant m+1$*, et tout* i'*,* $i'\in FL(g)(i)$*,*

(1.9.27.5) $$f'_{i'i}=\begin{cases}K(f_{i'i})\ , & si\ \ i\leqslant m\ ,\\ \alpha'_{a'_{i'}}\ , & si\ \ i=m+1\ \ et\ \ i'\neq m'+1\ ,\\ 1_{a_0}\ , & si\ \ i=m+1\ \ et\ \ i'=m'+1\ .\end{cases}$$

De plus, si les décalages (α,α') *et* (β,β') *admettent des scindages* p *et* q *respectivement, alors le décalage* (γ,γ') *admet un scindage* r *défini en posant, pour tout objet* $[\,b;(a_1,\dots,a_m)\,]$ *de* C'*,*

(1.9.27.6) $$r_{[\,b;(a_1,\dots,a_m)\,]}=[\,q_b;(p_{a_i})_{1\leqslant i\leqslant m}\,]\quad .$$

Enfin, si le décalage (α,α') *est cartésien, et si* (β,β') *est un* Γ*-décalage* strict *et s'il est séparant, alors le décalage* (γ,γ') *est séparant.*

Démonstration. — ***a*) Définition du foncteur *M*.** Pour tout objet $[\,b;(a_1,\dots,a_m)\,]$ de C', on définit $M[\,b;(a_1,\dots,a_m)\,]$ par l'égalité 1.9.27.1. Soit

$$[\,g;\mathbf{f}\,]:[\,b;(a_1,\dots,a_m)\,]\longrightarrow[\,b';(a'_1,\dots,a'_{m'})\,]$$

un morphisme de C', où $g:b\longrightarrow b'$ est une flèche de B, $F(b)=\mathit{\Gamma}_m$, $F(b')=\mathit{\Gamma}_{m'}$, et

$$\mathbf{f}=(f_{i'i}:a_i\longrightarrow a'_{i'})_{1\leqslant i\leqslant m,\,i'\in F(g)(i)}$$

est une famille de flèches de A'. Vérifions que les formules 1.9.27.4 et 1.9.27.5 définissent bien un morphisme $M[\,g;\mathbf{f}\,]$ de C. En vertu de la première partie du lemme précédent, pour tout i, $1\leqslant i\leqslant m$, on a $FL(g)(i)=F(g)(i)$, et par suite, on peut définir un morphisme

$$\begin{array}{ccccc}M[\,g;\mathbf{f}\,] & : & M[\,b;(a_1,\dots,a_m)\,] & \longrightarrow & M[\,b';(a'_1,\dots,a'_{m'})\,]\\ \| & & \| & & \|\\ [\,g';\mathbf{f}'\,] & : & [\,L(b);(K(a_1),\dots,K(a_m),a_0)\,] & \longrightarrow & [\,L(b');(K(a'_1),\dots,K(a'_{m'}),a_0)\,]\ ,\end{array}$$

en posant $g' = L(g) : L(b) \longrightarrow L(b')$ et en définissant

$$\mathbf{f}' = (f'_{i'i})_{1 \leqslant i \leqslant m+1,\, i' \in F(g')(i) = FL(g)(i)} \quad ,$$

comme suit. Pour i tel que $1 \leqslant i \leqslant m$, et $i' \in FL(g)(i) = F(g)(i)$, on pose

$$f'_{i'i} = K(f_{i'i}) : K(a_i) \longrightarrow K(a'_{i'}) \quad ,$$

et pour $i = m+1$, $i' \in FL(g)(m+1)$, on pose

$$f'_{i',m+1} = \alpha'_{a'_{i'}} : a_0 \longrightarrow K(a'_{i'}) \ , \quad \text{si} \quad i' \neq m'+1 \ ,$$

et

$$f'_{i',m+1} = 1_{a_0} : a_0 \longrightarrow a_0 \quad , \qquad \text{si} \quad i' = m'+1 \ ,$$

(chacun de ces deux cas pouvant se présenter ou pas). La compatibilité de M aux unités est évidente, et sa compatibilité à la composition résulte de celle de K et L, et de la fonctorialité de α'. Cela achève la définition du foncteur $M : C' \longrightarrow C$.

***b*) Définition du morphisme de foncteurs $\boldsymbol{\gamma}$.** Comme (β, β') est un Γ-décalage, la condition (*ii*) de la définition d'un tel décalage implique aussitôt que pour tout objet $[\,b; (a_1, \dots, a_m)\,]$ de C', la formule 1.9.27.2 définit un morphisme

$$\begin{array}{ccc} \gamma_{[\,b;(a_1,\dots,a_m)\,]} : J[\,b;(a_1,\dots,a_m)\,] & \longrightarrow & M[\,b;(a_1,\dots,a_m)\,] \\ \| & & \| \\ [\,b;(I(a_1),\dots,I(a_m))\,] & \longrightarrow & [\,L(b);(K(a_1),\dots,K(a_m),a_0)\,] \end{array}$$

de C, et la fonctorialité de α et β implique immédiatement celle de γ.

***c*) Définition du morphisme de foncteurs $\boldsymbol{\gamma'}$.** Comme (β, β') est un Γ-décalage, on a $F(b_0) = \mathit{\Gamma}_0$, et par suite $[\,b_0; (\,)\,]$ est un objet de C, et la formule 1.9.27.3 définit un morphisme

$$\gamma'_{[\,b;(a_1,\dots,a_m)\,]} : [\,b_0;(\,)\,] \longrightarrow M[\,b;(a_1,\dots,a_m)\,] = [\,L(b);(K(a_1),\dots,K(a_m),a_0)\,]$$

de C. La fonctorialité de β' implique aussitôt celle de γ'.

***d*) Le cas scindé.** Soient maintenant p et q des scindages des décalages (α, α') et (β, β') respectivement, et $[\,b; (a_1, \dots, a_m)\,]$ un objet de C'. En vertu de la deuxième partie du lemme précédent, la formule 1.9.27.6 définit un morphisme

$$\begin{array}{ccc} r_{[\,b;(a_1,\dots,a_m)\,]} : M[\,b;(a_1,\dots,a_m)\,] & \longrightarrow & J[\,b;(a_1,\dots,a_m)\,] \\ \| & & \| \\ [\,L(b);(K(a_1),\dots,K(a_m),a_0)\,] & \longrightarrow & [\,b;(I(a_1),\dots,I(a_m))\,] \end{array}$$

de C, et il est alors immédiat que ce morphisme est une rétraction de $\gamma_{[\,b;(a_1,\dots,a_m)\,]}$.

***e*) Le cas séparant.** Il reste à montrer que si le décalage (α, α') est cartésien, et si (β, β') est un Γ-décalage *strict* et séparant, alors le décalage (γ, γ') est séparant.

***i*)** Soit $[\,b; (a_1, \dots, a_m)\,]$ un objet de C'. Montrons que

$$\gamma_{[\,b;(a_1,\dots,a_m)\,]} : [\,b;(I(a_1),\dots,I(a_m))\,] \longrightarrow [\,L(b);(K(a_1),\dots,K(a_m),a_0)\,]$$

est un monomorphisme de C. Pour toute flèche

$$[\,t;\mathbf{s}=(s_{ij})_{1\leqslant j\leqslant n,\,i\in F(t)(j)}\,]:[\,y;(x_1,\dots,x_n)\,]\longrightarrow[\,b;(I(a_1),\dots,I(a_m))\,]$$

de but $[\,b;(I(a_1),\dots,I(a_m))\,]$ de C, on a

$$\gamma_{[\,b;(a_1,\dots,a_m)\,]}[\,t;\mathbf{s}\,]=[\,\beta_b t;(\alpha_{a_i}s_{ij})_{1\leqslant j\leqslant n,\,i\in F(t)(j)}\,]\quad .$$

Comme par hypothèse les flèches β_b et α_{a_i}, $1\leqslant i\leqslant m$, sont des monomorphismes, il en est de même de $\gamma_{[\,b;(a_1,\dots,a_m)\,]}$.

ii) Soit $[\,g;\mathbf{f}\;=\;(f_{i'i})_{1\leqslant i\leqslant m,\,i'\in F(g)(i)}\,]\;:\;[\,b;(a_1,\dots,a_m)\,]\longrightarrow[\,b';(a'_1,\dots,a'_{m'})\,]$ une flèche de C'. Montrons que le carré

$$\begin{tikzcd}
{[\,b;(I(a_1),\dots,I(a_m))\,]} \arrow[r, "\gamma_{[\,b;(a_1,\dots,a_m)\,]}"] \arrow[d, "{J[\,g;\mathbf{f}\,]}"'] & {[\,L(b);(K(a_1),\dots,K(a_m),a_0)\,]} \arrow[d, "{M[\,g;\mathbf{f}\,]}"] \\
{[\,b';(I(a'_1),\dots,I(a'_{m'}))\,]} \arrow[r, "\gamma_{[\,b';(a'_1,\dots,a'_{m'})\,]}"'] & {[\,L(b');(K(a'_1),\dots,K(a'_{m'}),a_0)\,]}
\end{tikzcd}$$

est un carré cartésien de C. Soient donc

$$[\,l;\mathbf{k}=(k_{ij})_{1\leqslant j\leqslant n,\,i\in F(l)(j)}\,]:[\,y;(x_1,\dots,x_n)\,]\longrightarrow[\,L(b);(K(a_1),\dots,K(a_m),a_0)\,]\ ,$$

$$[\,t';\mathbf{s}'=(s'_{i'j})_{1\leqslant j\leqslant n,\,i'\in F(t')(j)}\,]:[\,y;(x_1,\dots,x_n)\,]\longrightarrow[\,b';(I(a'_1),\dots,I(a'_{m'}))\,]$$

deux flèches de C telles que

(1.9.27.7) $$M[\,g;\mathbf{f}\,]\circ[\,l;\mathbf{k}\,]=\gamma_{[\,b';(a'_1,\dots,a'_{m'})\,]}\circ[\,t';\mathbf{s}'\,]\quad .$$

Cette égalité implique en particulier que

(1.9.27.8) $$L(g)l=\beta_{b'}t'\quad ,$$

d'où $FL(g)F(l)=F(\beta_{b'})F(t')$. Comme (β,β') est un Γ-décalage, la condition (ii) de la définition de cette notion implique donc que pour tout j, $1\leqslant j\leqslant n$,

$$\bigcup_{i\in F(l)(j)}FL(g)(i)=F(t')(j)\quad .$$

En particulier, comme (β,β') est un Γ-décalage *strict*, on en déduit que

$$m+1\notin\bigcup_{1\leqslant j\leqslant n}F(l)(j)\quad .$$

L'égalité 1.9.27.7 implique donc que pour tout j, $1\leqslant j\leqslant n$, tout $i\in F(l)(j)$, et tout $i'\in FL(g)(i)$ ($=F(g)(i)$ par le lemme 1.9.26), on a $i'\in F(t')(j)$ et

(1.9.27.9) $$K(f_{i'i})k_{ij}=\alpha_{a'_{i'}}s'_{i'j}\quad .$$

Comme le décalage (β,β') est séparant, et en particulier cartésien, l'égalité 1.9.27.8 implique l'existence d'un morphisme unique $t:y\longrightarrow b$ de B tel que

(1.9.27.10) $$l=\beta_b t\qquad\text{et}\qquad t'=gt\quad .$$

La première de ces deux égalités implique alors que $F(\beta_b)F(t) = F(l)$, et par suite, comme (β, β') est un Γ-décalage, que pour tout j, $1 \leqslant j \leqslant n$, $F(t)(j) = F(l)(j)$. Ainsi, comme le décalage (α, α') est cartésien, pour tout entier j, $1 \leqslant j \leqslant n$, tout $i \in F(t)(j) = F(l)(j)$, et tout $i' \in F(g)(i) = FL(g)(i)$, l'égalité 1.9.27.9 implique l'existence d'un morphisme unique $s_{i'ij} : x_j \longrightarrow I(a_i)$ de A tel que

$$k_{ij} = \alpha_{a_i} s_{i'ij} \qquad \text{et} \qquad s'_{i'j} = I(f_{i'i}) s_{i'ij} \quad . \tag{1.9.27.11}$$

Comme α_{a_i} est un monomorphisme, la première de ces deux égalités implique que le morphisme $s_{i'ij}$ est indépendant de $i' \in F(g)(i)$, et on pose donc $s_{ij} = s_{i'ij}$. On définit ainsi un morphisme

$$[t; \mathbf{s} = (s_{ij})_{1 \leqslant j \leqslant n,\, i \in F(t)(j)}] : [y; (x_1, \dots, x_n)] \longrightarrow [b; (I(a_1), \dots, I(a_m))]$$

de C, qui en vertu des égalités 1.9.27.10 et 1.9.27.11, satisfait aux relations

$$[l; \mathbf{k}] = \gamma_{[b;(a_1,\dots,a_m)]}[t; \mathbf{s}] \qquad \text{et} \qquad [t'; \mathbf{s}'] = J[g; \mathbf{f}] \circ [t; \mathbf{s}] \quad ,$$

ce qui prouve l'assertion. La vérification de la dernière propriété d'un décalage séparant étant immédiate, ceci achève la démonstration de la proposition. □

Remarque 1.9.28. — On vérifie aussitôt que le décalage (γ, γ') défini dans la proposition précédente dépend fonctoriellement des décalages (α, α') et (β, β') en un sens facile à préciser.

Corollaire 1.9.29. — *Soient A et B deux petites catégories, et $F : B \longrightarrow \Gamma$ un foncteur.*

(a) *Si A admet un décalage et B un Γ-décalage, alors $B \int A$ admet un décalage.*
(b) *Si A admet un décalage, B un Γ-décalage, et si ces deux décalages sont scindables, alors $B \int A$ admet un décalage scindable.*
(c) *Si A admet un décalage cartésien et B un Γ-décalage strict et séparant, alors $B \int A$ admet un décalage séparant.*

Démonstration. — Le corollaire est conséquence immédiate de la proposition précédente appliquée à $A' = A$, et à $I = 1_A$, l'endofoncteur identique de A. □

Corollaire 1.9.30. — *Soient A et B deux petites catégories, et $F : B \longrightarrow \Gamma$ un foncteur.*

(a) *Si A admet un décalage et B un Γ-décalage, alors $B \int A$ est une catégorie asphérique.*
(b) *Si A admet un décalage, B un Γ-décalage, et si ces deux décalages sont scindables, alors $B \int A$ est une catégorie totalement asphérique.*
(c) *Si A admet un décalage cartésien et B un Γ-décalage strict et séparant, alors $B \int A$ est une catégorie test faible.*
(d) *Si A admet un décalage cartésien, B un Γ-décalage strict et séparant, et si ces deux décalages sont scindables, alors $B \int A$ est une catégorie test stricte.*

Démonstration. — Ce corollaire résulte du corollaire précédent, des propositions 1.9.6, 1.9.11, et du corollaire 1.9.12. □

Exemple 1.9.31. — Le corollaire 1.9.29 implique aussitôt par récurrence que comme Δ admet un Γ-décalage strict séparant et scindable (exemples 1.9.13 et 1.9.25), pour tout entier $n \geqslant 1$, la catégorie Θ_n de l'exemple 1.9.23 admet un décalage séparant et scindable, et est donc en vertu du corollaire 1.9.12, une catégorie test stricte. De même, comme Δ' admet un Γ-décalage strict séparant (exemples 1.9.14 et 1.9.25), pour tout entier $n \geqslant 1$, la catégorie Θ'_n de l'exemple 1.9.23 admet un décalage séparant, et est donc en vertu de la proposition 1.9.11, une catégorie test faible. De plus, en vertu de la proposition 1.9.8 et de la remarque 1.9.28, l'inclusion $\Theta'_n \longrightarrow \Theta_n$ (exemple 1.9.23) est un foncteur asphérique.

Exemple 1.9.32. — Soit A une catégorie admettant un objet initial. Alors le produit en couronnes $\Delta \textstyle\int A$ est une catégorie test stricte. En effet, la catégorie Δ admet un Γ-décalage strict séparant et scindable (exemples 1.9.13 et 1.9.25), et A un décalage cartésien (exemple 1.9.17). L'assertion résulte donc du corollaire 1.9.30, (d). De même, comme Δ' admet un Γ-décalage strict séparant (exemples 1.9.14 et 1.9.25), le corollaire 1.9.30, (c) implique que $\Delta' \textstyle\int A$ est une catégorie test faible.

Proposition 1.9.33. — *Soient B une petite catégorie, $F : B \longrightarrow \Gamma$ un foncteur, et b_0 un objet de B.*

(a) *Si B admet un Γ-décalage, centré sur b_0, alors le produit en couronnes infini $\mathsf{C}(B, b_0)$ admet un décalage ;*
(b) *Si B admet un Γ-décalage scindable, centré sur b_0, alors le produit en couronnes infini $\mathsf{C}(B, b_0)$ admet un décalage scindable ;*
(c) *Si B admet un Γ-décalage strict séparant, centré sur b_0, alors le produit en couronnes infini $\mathsf{C}(B, b_0)$ admet un décalage séparant.*

Esquisse de la preuve. — Considérons la tour de catégories

$$A_0 = e \xrightarrow{I_0 = b_0} A_1 = B \xrightarrow{I_1 = I_{b_0}} A_2 = B \textstyle\int B \xrightarrow{I_2} \cdots \xrightarrow{I_{n-1}} A_n \xrightarrow{I_n} A_{n+1} \xrightarrow{I_{n+1}} \cdots$$

(où $A_{n+1} = B \textstyle\int A_n$, $I_{n+1} = 1_B \textstyle\int I_n$, $n \geqslant 0$) définissant le produit en couronnes infini

$$A = \mathsf{C}(B, b_0) = \varinjlim A_n \quad ,$$

et soit

$$1_B \xrightarrow{\beta} L \xleftarrow{\beta'} b_0$$

un Γ-décalage sur B. On définit par récurrence une suite de décalages sur les foncteurs I_n, $n \geqslant 0$,

$$\mathcal{D}_n = \qquad I_n \xrightarrow{\alpha_n} K_n \xleftarrow{\alpha'_n} e_n \quad ,$$

(où $K_n : A_n \longrightarrow A_{n+1}$ est un foncteur, e_n un objet de A_{n+1}, considéré comme foncteur constant $A_n \longrightarrow A_{n+1}$, et α_n et α'_n des morphismes de foncteurs) comme suit :

$$\mathcal{D}_0 = \qquad b_0 \xrightarrow{\beta_{b_0}} L(b_0) \xleftarrow{\beta'_{b_0}} b_0 \quad ,$$

et pour tout $n \geqslant 0$, le décalage $\mathcal{D}_{n+1}$ sur $I_{n+1} = 1_B \int I_n$ est obtenu du Γ-décalage donné sur B, et du décalage $\mathcal{D}_n$ sur I_n, par le procédé de la proposition 1.9.27. Un calcul direct montre par récurrence que pour tout $n \geqslant 0$, le couple (I_n, I_{n+1}) est un morphisme de décalages généralisés de $\mathcal{D}_n$ vers $\mathcal{D}_{n+1}$. On obtient ainsi un système inductif de décalages généralisés, et par passage à la limite, on déduit un décalage sur le foncteur $\varinjlim I_n : \varinjlim A_n \longrightarrow \varinjlim A_{n+1}$, qui n'est autre que le foncteur identique de $A = \varinjlim A_n = \mathsf{C}(B, b_0)$. On obtient ainsi un décalage sur $\mathsf{C}(B, b_0)$, ce qui prouve déjà l'assertion (a) de la proposition.

Si le décalage donné sur B admet un scindage $r = (r_b : L(b) \longrightarrow b)_{b \in B}$, ce scindage induit un scindage r_{b_0} du décalage généralisé $\mathcal{D}_0$

$$\begin{tikzcd} b_0 \arrow[r, "\beta_{b_0}"] & L(b_0) \arrow[l, bend left, "r_{b_0}"] & b_0 \arrow[l, "\beta'_{b_0}"'] \end{tikzcd} \quad ,$$

et le procédé de la proposition 1.9.27 permet de définir, par récurrence, des scindages sur les décalages $\mathcal{D}_n$. On vérifie alors facilement que les couples (I_n, I_{n+1}) sont des morphismes de décalages généralisés scindés, d'où par passage à la limite, un scindage du décalage sur $\mathsf{C}(B, b_0)$, ce qui prouve l'assertion (b). Enfin, si le décalage donné sur B est un Γ-décalage strict séparant, il résulte de la proposition 1.9.27 que les décalages $\mathcal{D}_n$ sont séparants. La stabilité des décalages séparants par limites inductives filtrantes implique alors que le décalage sur $\mathsf{C}(B, b_0)$ l'est également, ce qui démontre la dernière assertion de la proposition. □

Corollaire 1.9.34. — *Soient B une petite catégorie, $F : B \longrightarrow \Gamma$ un foncteur, et b_0 un objet de B.*

(a) *Si B admet un Γ-décalage, centré sur b_0, alors le produit en couronnes infini $\mathsf{C}(B, b_0)$ est une catégorie asphérique ;*
(b) *Si B admet un Γ-décalage scindable, centré sur b_0, alors le produit en couronnes infini $\mathsf{C}(B, b_0)$ est une catégorie totalement asphérique ;*
(c) *Si B admet un Γ-décalage strict séparant, centré sur b_0, alors le produit en couronnes infini $\mathsf{C}(B, b_0)$ est une catégorie test faible ;*
(d) *Si B admet un Γ-décalage strict séparant et scindable, centré sur b_0, alors le produit en couronnes infini $\mathsf{C}(B, b_0)$ est une catégorie test stricte.*

Démonstration. — Ce corollaire résulte de la proposition précédente, des propositions 1.9.6, 1.9.11, et du corollaire 1.9.12. □

Exemple 1.9.35. — Comme la catégorie Δ admet un Γ-décalage strict séparant et scindable, centré sur $\varDelta_0$ (exemples 1.9.13 et 1.9.25), il résulte du corollaire précédent que la catégorie Θ (exemple 1.9.23) est une catégorie test stricte. De même, comme la catégorie Δ' admet un Γ-décalage strict séparant, centré sur $\varDelta_0$ (exemples 1.9.14 et 1.9.25), il résulte du corollaire précédent que la catégorie Θ' (exemple 1.9.23) est une catégorie test faible. D'ailleurs, la proposition 1.9.33 implique que les catégories Θ et Θ' admettent des décalages séparant, celui sur Θ étant même scindable, et grâce à la fonctorialité des constructions (*cf.* remarque 1.9.28) l'inclusion $\Theta' \longrightarrow \Theta$ est un morphisme de décalages. Il résulte donc de la proposition 1.9.8 que cette inclusion est un foncteur asphérique.

Exemple 1.9.36. — Une catégorie *directe finie* est une catégorie C dont le nerf est un ensemble simplicial *fini*, autrement dit, ayant un nombre fini de simplexes non dégénérés. De façon équivalente, cela signifie que le graphe orienté ayant comme sommets les objets de C, et comme arêtes les flèches non identiques de C, est fini et n'a pas de cycles orientés, ou encore que la catégorie libre engendrée par ce graphe est finie. On peut alors définir une fonction *dimension* $\lambda_C : \mathsf{Ob}(C) \longrightarrow \mathbb{N}$ comme suit. Pour tout objet c de C, $\lambda_C(c)$ est le plus grand entier n tel qu'il existe un n-simplexe non dégénéré du nerf de C (autrement dit une suite composable de n flèches non identiques de C)

$$c_0 \longrightarrow c_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow c_n$$

tel que $c = c_n$. On vérifie facilement que pour toute flèche non identique $c \longrightarrow c'$ de C, on a $\lambda_C(c) < \lambda_C(c')$. Si la catégorie C est non vide, on désigne par m_C l'entier naturel $m_C = \max\{\lambda_C(c) \,|\, c \in \mathsf{Ob}(C)\}$, et on remarque que l'application λ_C induit alors une surjection $\mathsf{Ob}(C) \longrightarrow \varDelta_{m_C}$, et définit un foncteur noté aussi $\lambda_C : C \longrightarrow \varDelta_{m_C}$.

Soient A une petite sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}at$ formée de catégories directes finies non vides, et A' la sous-catégorie de A ayant mêmes objets que A, et dont les flèches sont les morphismes $f : a \longrightarrow a'$ de A satisfaisant à la condition suivante :

(H) Si x, y sont deux objets de a tels que $\lambda_a(x) = \lambda_a(y)$, alors $\lambda_{a'}(f(x)) = \lambda_{a'}(f(y))$.

La condition (H) implique aussitôt que pour toute flèche $f : a \longrightarrow a'$ de A', il existe un unique morphisme $\overline{f} : \varDelta_{m_a} \longrightarrow \varDelta_{m_{a'}}$ de Δ tel que le carré suivant de foncteurs

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\lambda_a"'] & a' \arrow[d, "\lambda_{a'}"] \\ \varDelta_{m_a} \arrow[r, "\overline{f}"'] & \varDelta_{m_{a'}} \end{tikzcd}$$

soit commutatif. On en déduit un foncteur

$$A' \longrightarrow \Delta \quad , \qquad a \longmapsto \varDelta_{m_a} \, , \quad f \longmapsto \overline{f} \quad ,$$

et en composant avec le foncteur $\Delta \longrightarrow \Gamma$ de l'exemple 1.9.23, on obtient un foncteur $A' \longrightarrow \Gamma$. Pour tout objet $a_0 \in \mathsf{Ob}(A') = \mathsf{Ob}(A)$, on peut donc considérer le produit en couronnes infini $\mathsf{C}(A', a_0)$.

Supposons maintenant que la catégorie A satisfait aussi aux conditions (i) et (ii) de l'exemple 1.9.16, et considérons le décalage sur A,

$$1_A \xrightarrow{\ \alpha\ } D \xleftarrow{\ \beta\ } e \quad ,$$

défini dans cet exemple, qui est séparant puisque A est formée de catégories non vides. Pour tout objet a de A, α_a et β_a satisfont à la condition (H), et si $f : a \longrightarrow a'$ est une flèche de A satisfaisant à cette condition, il en est de même de $D(f)$, et par suite le décalage (α, β) sur A induit un décalage séparant,

$$1_{A'} \xrightarrow{\ \alpha'\ } D' \xleftarrow{\ \beta'\ } e \quad ,$$

sur A'. En particulier, il résulte de la proposition 1.9.11 que A' est une catégorie test faible. D'autre part, le foncteur $A' \longrightarrow \Delta$, défini ci-dessus, est un morphisme de décalages du décalage (α', β') sur A' vers le décalage de l'exemple 1.9.13 sur Δ. Comme ce dernier est un Γ-décalage strict (cf. exemple 1.9.25), on en déduit facilement qu'il en est de même de (α', β'), et par suite, en vertu du corollaire 1.9.34 (c), le produit en couronnes infini $\mathsf{C}(A', e)$ est une catégorie test faible.

Enfin, supposons de plus que tout objet de A admet un objet final. Alors, conformément à l'exemple 1.9.16, le décalage (α, β) est scindable, et on remarque que la rétraction de α_a, $a \in \mathsf{Ob}(A)$, définie dans cet exemple satisfait à la condition (H). On en déduit que le décalage (α', β') sur A' est également scindable, et par suite A', et le produit en couronnes infini $\mathsf{C}(A', e)$ sont des catégories test strictes (corollaires 1.9.12 et 1.9.34 (d)).

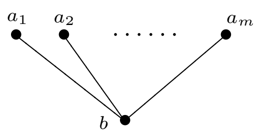
Un exemple remarquable de catégorie A satisfaisant à toutes les conditions ci-dessus est la catégorie A_0, définie comme suit. On dit qu'une sous-catégorie pleine A de $\mathcal{C}at$ formée de catégories directes finies est *stable par regroupement familial* si pour toute famille finie $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$, $m \geqslant 0$, d'objets de A, telle que $m_{a_i} = m_{a_{i'}}$, pour $1 \leqslant i, i' \leqslant m$, la catégorie $(\amalg_{1 \leqslant i \leqslant m} a_i)^\star$ est encore dans A. La catégorie A_0 est la plus petite sous-catégorie pleine de la catégorie des catégories directes finies, stable par regroupement familial. Les objets de A_0 sont les ensembles ordonnés correspondant aux arbres finis "bien taillés". Voici un exemple d'un tel ensemble ordonné

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[dr] & \bullet \arrow[d] & \bullet \arrow[dl] & \bullet \arrow[d] & \bullet \arrow[dr] & & \bullet \arrow[dl] \\
& \bullet \arrow[drr] & & \bullet \arrow[d] & & \bullet \arrow[dll] & \\
& & & \bullet & & . &
\end{tikzcd}$$

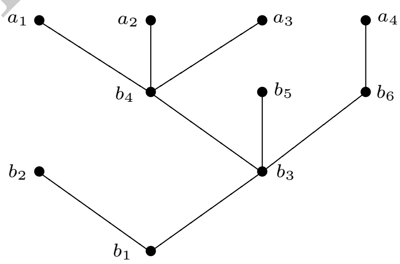
Les morphismes de A_0 sont les applications croissantes entre ces ensembles ordonnés. La catégorie A'_0 a les mêmes objets que A_0, et comme morphismes les applications croissantes envoyant les sommets de "même hauteur" sur des sommets de même hauteur.

Les paragraphes 1.9.37 *à* 1.9.39 *ci-dessous, plus heuristiques, esquissent une description combinatoire du produit en couronnes, du produit en couronnes infini, ainsi que des décalages des propositions* 1.9.27 *et* 1.9.33. *Ces paragraphes sont simplement destinés à guider l'intuition du lecteur et ne seront pas utilisés dans la suite.*

1.9.37. — Soient A une catégorie, et $F : B \longrightarrow \Gamma$ un foncteur. On représente un objet $[b;(a_1,\dots,a_m)]$ du produit en couronnes $B\int A$ par l'arbre planaire de hauteur au plus un avec m "branches"



dont les "feuilles" sont décorées par les objets $a_1,\dots,a_m$ de A, et la "racine" par l'objet b de B, et qui est réduit à sa simple racine si $m = 0$. Plus généralement, si on définit par récurrence les catégories produit en couronnes itéré B_n en posant $B_0 = A$, et pour $n > 0$, $B_n = B\int B_{n-1}$, les objets de B_n sont représentés par des arbres planaires de hauteur au plus n, dont les sommets de hauteur n sont décorés par des objets de A et les sommets de hauteur strictement plus petite par des objets b de B tels que si $F(b) = \mathit{\Gamma}_m$, alors il y a exactement m branches (le "tronc" n'étant pas considéré comme une branche) partant du sommet décoré par b. En particulier, si $m = 0$, ce sommet est un sommet maximal. On remarque que l'orientation du plan induit un ordre total sur les ensembles de sommets de même hauteur. Voici un exemple pour $n = 3$:



,

où $a_i \in \mathsf{Ob}(A)$, $1 \leqslant i \leqslant 4$, $b_j \in \mathsf{Ob}(B)$, $1 \leqslant j \leqslant 6$, et

$$F(b_2) = F(b_5) = \mathit{\Gamma}_0 \ , \quad F(b_6) = \mathit{\Gamma}_1 \ , \quad F(b_1) = \mathit{\Gamma}_2 \ , \quad F(b_3) = F(b_4) = \mathit{\Gamma}_3 \quad .$$

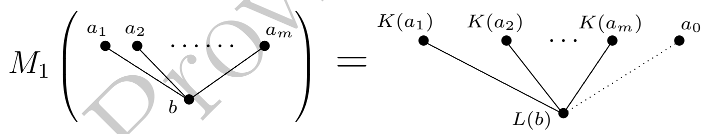
Revenons au cas général. La description des morphismes est plus délicate. Soient X et X' deux arbres ainsi décorés. Les morphismes de B_n de source l'objet représenté par X et de but l'objet représenté par X' sont en bijection avec les couples $(E, \mathbf{g})$, où

E est un ensemble de couples (s', s) formés d'un sommet s' de X' et d'un sommet s de X de *même hauteur*, et $\mathbf{g} = (g_{s's})_{(s',s)\in E}$ est une famille indexée par l'ensemble E, avec $g_{s's} : x_s \longrightarrow x'_{s'}$, où x_s (resp. $x'_{s'}$) est la décoration du sommet s (resp. s'), et $g_{s's}$ un morphisme de A ou de B, selon que la hauteur commune de s et s' est égale à n ou strictement inférieure, ces données étant assujetties aux deux conditions suivantes :

i) le couple formé par la racine de X' et la racine de X appartient à l'ensemble E ;

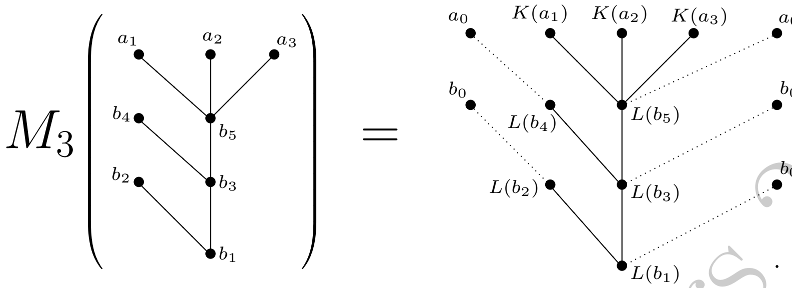
ii) pour tout couple $(s', s) \in E$, si la hauteur commune p de s et s' est strictement plus petite que n, et si $F(x_s) = \mathit{\Gamma}_m$ et $F(x'_{s'}) = \mathit{\Gamma}_{m'}$, alors pour tous i, i', $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant i' \leqslant m'$, on a l'équivalence
$$i' \in F(g_{s's})(i) \iff (s'_{i'}, s_i) \in E \quad ,$$
où s_i (resp. $s'_{i'}$) désigne le sommet de hauteur $p+1$, extrémité de la i-ème (resp. i'-ème) branche issue du sommet s (resp. s'), pour l'ordre induit par l'orientation du plan.

1.9.38. — En gardant les notations du paragraphe précédent, supposons que
$$1_A \xrightarrow{\alpha} K \xleftarrow{\alpha'} a_0 \qquad (\text{resp.} \quad 1_B \xrightarrow{\beta} L \xleftarrow{\beta'} b_0 \quad)$$
soit un décalage (resp. un Γ-décalage) sur la catégorie A (resp. B), et soit
$$1_{B_1} \xrightarrow{\gamma_1} M_1 \xleftarrow{\gamma'_1} [b_0; (\,)]$$
le décalage sur $B_1 = B\textstyle\int A$ obtenu en appliquant la construction de la proposition 1.9.27 au foncteur identique $I = 1_A$ de A. Alors on a

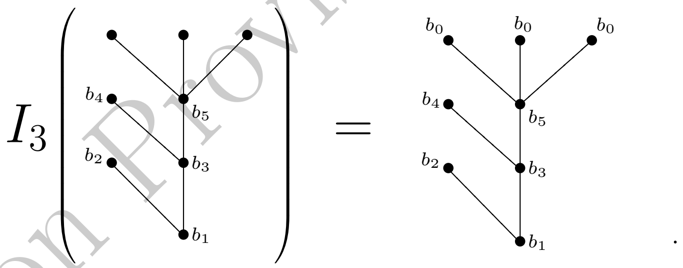


(le tracé en pointillé de la dernière branche étant purement pictural, et n'ayant pas une signification mathématique particulière) et
$$[b_0; (\,)] \quad = \quad \overset{b_0}{\bullet} \qquad .$$
Soit maintenant
$$1_{B_n} \xrightarrow{\gamma_n} M_n \xleftarrow{\gamma'_n} [b_0; (\,)]$$
le décalage sur B_n obtenu par itération de cette construction. Si X est l'arbre décoré associé à un objet de B_n, alors l'arbre décoré correspondant à l'image de cet objet par le foncteur de décalage M_n, noté aussi $M_n(X)$, est obtenu comme suit. On forme d'abord l'arbre décoré X' obtenu de X en remplaçant les décorations des sommets de hauteur n (qui sont des objets de A) par leurs images par le décalage K, et celles des sommets de hauteur strictement plus petite (qui sont des objets de B) par leurs images par le décalage L. Alors $M_n(X)$ s'obtient de X' en ajoutant à chaque sommet

de hauteur strictement plus petite que n une nouvelle branche, à droite de toutes les autres issues de ce sommet, dont on décore l'autre extrémité par a_0 si elle est de hauteur n, par b_0 sinon. Voici un exemple pour $n = 3$:



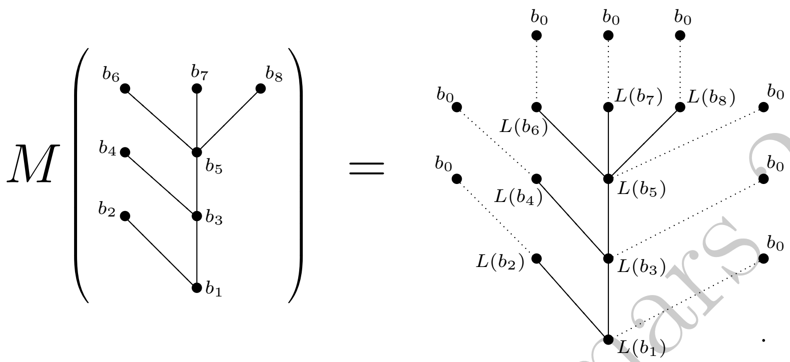
1.9.39. — En gardant toujours les notations du paragraphe 1.9.37, on suppose désormais que la catégorie A est la catégorie ponctuelle. Dans ce cas, les sommets de hauteur n d'un arbre décoré représentant un objet de B_n n'ont plus besoin d'être décorés, puisqu'il n'y a aucune ambiguïté sur l'objet de A qui les décore. De plus, dans ce cas, le choix d'un objet b_0 de B définit, conformément au paragraphe 1.9.22, pour tout n, $n \geqslant 0$, un foncteur fidèle (pleinement si b_0 est un objet rigide de B) $I_n : B_n \longrightarrow B_{n+1}$. Si X est un arbre décoré représentant un objet de B_n, l'arbre décoré représentant l'image dans B_{n+1} de cet objet par le foncteur I_n est obtenu de X en décorant tous les sommets (non décorés) de hauteur n par b_0, et en laissant les décorations des autres sommets inchangées. Par exemple, pour $n = 3$,



Ainsi, par passage à la limite inductive, les objets du produit en couronnes infini $\mathsf{C}(B, b_0)$ sont en bijection avec les arbres finis de hauteur arbitraire, dont *tous* les sommets sont décorés par des objets de B, avec la seule restriction que si un sommet est décoré par un objet b de B tel que $F(b) = \mathit{\Gamma}_m$, alors il y a exactement m branches partant de ce sommet. Soit maintenant

$$1_B \xrightarrow{\beta} L \xleftarrow{\beta'} b_0$$

un Γ-décalage sur B, de centre b_0. Conformément à la preuve de la proposition 1.9.33, en itérant la construction de la proposition 1.9.27 et en passant à la limite inductive, on en déduit un décalage M sur le produit en couronnes infini $\mathsf{C}(B, b_0)$. Si X est un arbre décoré représentant un objet de $\mathsf{C}(B, b_0)$, l'arbre décoré représentant l'image de cet objet par le foncteur M est obtenu en remplaçant les décorations des sommets de X par leurs images par le décalage L, et en ajoutant à chaque sommet de X une nouvelle branche, à droite de toutes les autres issues de ce sommet, dont on décore l'autre extrémité par b_0. Voici un exemple pour $n = 3$:



CHAPITRE 2

LES LOCALISATEURS FONDAMENTAUX

2.1. Les propriétés élémentaires des localisateurs fondamentaux

2.1.1. — On appelle *localisateur fondamental* une partie $\mathcal{W}$ de $\mathsf{Fl}(\mathcal{C}at)$ satisfaisant aux conditions suivantes :

LA La partie $\mathcal{W}$ de $\mathsf{Fl}(\mathcal{C}at)$ est faiblement saturée.

LB Si A est une petite catégorie admettant un objet final, alors $A \longrightarrow e$, où e désigne l'objet final de $\mathcal{C}at$, est dans $\mathcal{W}$.

LC Si

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "v"'] & & B \arrow[dl, "w"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

est un triangle commutatif de $\mathcal{C}at$, et si pour tout objet c de C, le foncteur $u/c : A/c \longrightarrow B/c$ induit par u est dans $\mathcal{W}$, alors u est dans $\mathcal{W}$.

On remarque qu'un localisateur fondamental est en particulier un localisateur fondamental faible. En effet, les conditions La (1.1.2) et Lb (1.1.2) coïncident aux conditions LA et LB respectivement, et la condition Lc (1.1.2) est le cas particulier de la condition LC correspondant à $B = C$ et $w = 1_B$ (et $v = u$).

Ainsi, on dispose, en particulier, des notions d'équivalence faible, de foncteur asphérique et de catégorie asphérique, introduites en 1.1.2. Si C est une petite catégorie, $v : A \longrightarrow C$, $w : B \longrightarrow C$ deux objets de $\mathcal{C}at/C$ et $u : A \longrightarrow B$ un morphisme de $\mathcal{C}at/C$, de sorte que $v = wu$, on dit que u est une *$\mathcal{W}$-équivalence* (ou une *équivalence faible*) *localement sur* C si pour tout objet c de C, le foncteur $u/c : A/c \longrightarrow B/c$, induit par u, est une équivalence faible. La condition LC affirme donc que pour toute petite catégorie C, un foncteur qui est une équivalence faible localement sur C est une équivalence faible. Dualement, on dit que le foncteur u est une *$\mathcal{W}$-équivalence* (ou une *équivalence faible*) *colocalement sur* C si u° est une $\mathcal{W}$-équivalence localement sur C° (A° et B° étant considérées comme catégories au-dessus de C° par v° et w°

respectivement). Il résulte de la proposition 1.1.21 et de LC qu'un foncteur qui est une équivalence faible colocalement sur C est une équivalence faible. Le foncteur u est une équivalence faible colocalement sur C si et seulement si pour tout objet c de C, le foncteur $c\backslash u : c\backslash A \longrightarrow c\backslash B$, induit par u, est une équivalence faible (cf. 1.1.24).

On remarque qu'un foncteur entre petites catégories $u : A \longrightarrow B$ est asphérique (resp. coasphérique) si et seulement s'il est une équivalence faible localement (resp. colocalement) sur B (A et B étant considérées comme catégories au-dessus de B par u et 1_B respectivement).

Soient C une petite catégorie, et $A \longrightarrow C$ un objet de $\mathcal{C}at/C$. On dit qu'un morphisme $\varphi : F \longrightarrow G$ de préfaisceaux sur A est une $\mathcal{W}$-*équivalence* (ou une *équivalence faible*) *localement sur* C si le morphisme

$$\begin{tikzcd} A/F \arrow[rr, "i_A(\varphi)"] \arrow[dr] & & A/G \arrow[dl] \\ & C & \end{tikzcd}$$

de $\mathcal{C}at/C$ est une $\mathcal{W}$-équivalence localement sur C. Il résulte de la condition LC que si le morphisme φ est une équivalence faible localement sur C, alors il est une équivalence faible. On remarque que φ est une $\mathcal{W}$-équivalence locale (cf 1.3.6) si et seulement si φ est une $\mathcal{W}$-équivalence localement sur A, autrement dit, si le morphisme

$$\begin{tikzcd} A/F \arrow[rr, "i_A(\varphi)"] \arrow[dr] & & A/G \arrow[dl] \\ & A & \end{tikzcd}$$

de $\mathcal{C}at/A$ est une $\mathcal{W}$-équivalence localement sur A. Ainsi, la condition LC implique qu'une $\mathcal{W}$-équivalence locale de préfaisceaux est une $\mathcal{W}$-équivalence.

Exemple 2.1.2. — On vérifie immédiatement que les localisateurs fondamentaux faibles des exemples 1.1.28, 1.1.30 et 1.1.31 sont des localisateurs fondamentaux, et il résulte d'une version relative du théorème A de Quillen [**10**] qu'il en est de même de $\mathcal{W}_\infty$ (exemple 1.1.33). Pour tout entier n, $n \geqslant 0$, on démontre que $\mathcal{W}_n$ (exemple 1.1.34) est aussi un localisateur fondamental [**10**].

Dans la suite, on se fixe, une fois pour toutes, un localisateur fondamental.

Proposition 2.1.3. — *Un produit fini d'équivalences faibles de* $\mathcal{C}at$ *est une équivalence faible.*

Démonstration. — Il suffit de montrer que le produit de deux équivalences faibles $u_1 : A_1 \longrightarrow B_1$, $u_2 : A_2 \longrightarrow B_2$ de $\mathcal{C}at$ est une équivalence faible. Comme

$$u_1 \times u_2 = (1_{B_1} \times u_2)(u_1 \times 1_{A_2}) \quad ,$$

il suffit de montrer que pour toute équivalence faible $u : A \longrightarrow B$ de $\mathcal{C}at$, et toute petite catégorie C, le morphisme $u \times 1_C$ est une équivalence faible. On a un triangle commutatif

$$\begin{tikzcd} A \times C \arrow[rr, "u\times 1_C"] \arrow[dr, "p"'] & & B \times C \arrow[dl, "q"] \\ & C & \end{tikzcd},$$

où p et q désignent les deuxièmes projections. En vertu de LC, il suffit donc de montrer que pour tout objet c de C, le morphisme

$$(A \times C)/c \simeq A \times C/c \xrightarrow{(u\times 1_C)/c = u\times 1_{C/c}} B \times C/c \simeq (B \times C)/c$$

est une équivalence faible. Or, on a un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} A \times C/c \arrow[r, "u\times 1_{C/c}"] \arrow[d] & B \times C/c \arrow[d] \\ A \arrow[r, "u"'] & B \end{tikzcd},$$

où les flèches verticales désignent les premières projections qui sont des équivalences faibles, en vertu de LB et de 1.1.4. Comme u est une équivalence faible, on en déduit qu'il en est de même de $u \times 1_{C/c}$, ce qui achève la démonstration. $\square$

Proposition 2.1.4. — *Une somme arbitraire d'équivalences faibles de $\mathcal{C}at$ est une équivalence faible.*

Démonstration. — Soit $u_i : A_i \longrightarrow B_i$, $i \in I$, une famille d'équivalences faibles de $\mathcal{C}at$. Notons aussi I la catégorie discrète correspondant à l'ensemble I. On a un triangle commutatif évident

$$\begin{tikzcd} A = \coprod_{i\in I} A_i \arrow[rr, "u=\coprod_{i\in I} u_i"] \arrow[dr] & & \coprod_{i\in I} B_i = B \arrow[dl] \\ & I & \end{tikzcd},$$

et on remarque que pour tout objet i de I, le morphisme $u/i : A/i \longrightarrow B/i$ s'identifie à $u_i : A_i \longrightarrow B_i$. En vertu de LC, u est donc une équivalence faible, ce qui démontre la proposition. $\square$

2.1.5. — Soient M une catégorie, W une partie de $\mathsf{Fl}(M)$, et $\gamma : M \longrightarrow W^{-1}M$ le foncteur de localisation (cf. 1.4.1). On rappelle que la propriété universelle du foncteur de localisation γ (cf. 1.4.1) se précise par la propriété "2-universelle" suivante : Pour toute catégorie N, le foncteur

$$\underline{\mathsf{Hom}}(W^{-1}M, N) \xrightarrow{\gamma^*} \underline{\mathsf{Hom}}(M, N)$$

de la catégorie des foncteurs de $W^{-1}M$ vers N dans celle des foncteurs de M vers N, associant à un foncteur F le foncteur $F\gamma$, et à un morphisme de foncteurs α le morphisme de foncteurs $\alpha \star \gamma$, établit un *isomorphisme* de la catégorie $\underline{\mathsf{Hom}}(W^{-1}M, N)$ sur la sous-catégorie pleine $\underline{\mathsf{Hom}}_W(M, N)$ de $\underline{\mathsf{Hom}}(M, N)$ formée des foncteurs $G : M \longrightarrow N$ tels que, pour tout $w \in W$, $G(w)$ soit un isomorphisme de N. On pose $\mathsf{Hom}_W(M, N) = \mathsf{Ob}(\underline{\mathsf{Hom}}_W(M, N))$.

Lemme 2.1.6. — *Soient (i, j) un couple de foncteurs adjoints, $i : M \longrightarrow M'$, $j : M' \longrightarrow M$,*

$$\varepsilon : ij \longrightarrow 1_{M'} \quad , \qquad \eta : 1_M \longrightarrow ji$$

les morphismes d'adjonction, et W, W' des parties de $\mathsf{Fl}(M)$ et $\mathsf{Fl}(M')$ respectivement telles que

$$i(W) \subset W' \qquad et \qquad j(W') \subset W \quad .$$

Notons $\gamma : M \longrightarrow W^{-1}M$ et $\gamma' : M' \longrightarrow W'^{-1}M'$ les foncteurs de localisation, et $\bar\imath : W^{-1}M \longrightarrow W'^{-1}M'$ et $\bar\jmath : W'^{-1}M' \longrightarrow W^{-1}M$ les foncteurs induits par i et j respectivement, de sorte qu'on ait des carrés commutatifs

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\gamma"'] & M' \arrow[d, "\gamma'"] \\ W^{-1}M \arrow[r, "\bar\imath"'] & W'^{-1}M' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M' \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\gamma'"'] & M \arrow[d, "\gamma"] \\ W'^{-1}M' \arrow[r, "\bar\jmath"'] & W^{-1}M \end{tikzcd} \quad .$$

Alors $(\bar\imath, \bar\jmath)$ est un couple de foncteurs adjoints, les morphismes d'adjonction étant déduits de ε et η.

Démonstration. — Le lemme est une conséquence formelle de la “2-fonctorialité” de la localisation, elle même conséquence de la propriété “2-universelle”. Les détails sont laissés au lecteur. □

Lemme 2.1.7. — *Soient I un ensemble fini, $(M_i)_{i \in I}$ une famille de catégories, et pour tout i, $i \in I$, W_i une partie de $\mathsf{Fl}(M_i)$ contenant les identités. Alors le foncteur canonique*

$$\Big(\prod_{i \in I} W_i\Big)^{-1} \prod_{i \in I} M_i \longrightarrow \prod_{i \in I} (W_i^{-1} M_i)$$

est un isomorphisme de catégories.

Démonstration. — Le lemme étant évident pour un ensemble I vide, ou ayant un seul élément, il suffit, par récurrence, de l'établir pour $I = \{1, 2\}$. Or, pour toute catégorie N, on a des bijections fonctorielles :

$$\begin{aligned} \mathsf{Hom}(W_1^{-1}M_1 \times W_2^{-1}M_2, N) &\simeq \mathsf{Hom}(W_1^{-1}M_1, \underline{\mathsf{Hom}}(W_2^{-1}M_2, N)) \\ &\simeq \mathsf{Hom}(W_1^{-1}M_1, \underline{\mathsf{Hom}}_{W_2}(M_2, N)) \simeq \mathsf{Hom}_{W_1}(M_1, \underline{\mathsf{Hom}}_{W_2}(M_2, N)) \\ &\simeq \mathsf{Hom}_{W_1 \times W_2}(M_1 \times M_2, N) \simeq \mathsf{Hom}((W_1 \times W_2)^{-1}(M_1 \times M_2), N) \quad , \end{aligned}$$

l'avant dernière résultant de l'hypothèse que W_1 et W_2 contiennent les identités, ce qui prouve le lemme. □

Proposition 2.1.8. — *Soient M une catégorie admettant des produits* (resp. *des sommes*) *binaires, et W une partie de $\mathsf{Fl}(M)$ contenant les identités et stable par produit* (resp. *somme*) *de deux flèches. Alors $W^{-1}M$ admet des produits* (resp. *des sommes*) *binaires, et le foncteur de localisation $\gamma : M \longrightarrow W^{-1}M$ commute à ces produits* (resp. *sommes*).

Démonstration. — Si la catégorie M admet des produits binaires, le foncteur diagonal $\Delta : M \longrightarrow M \times M$ admet un adjoint à droite $\Pi : M \times M \longrightarrow M$ (foncteur produit). On a $\Delta(W) \subset W \times W$, et comme W est stable par produit de deux flèches, $\Pi(W \times W) \subset W$. En vertu du lemme 2.1.6, les foncteurs

$$\overline{\Delta} : W^{-1}M \longrightarrow (W \times W)^{-1}(M \times M) \ , \quad \overline{\Pi} : (W \times W)^{-1}(M \times M) \longrightarrow W^{-1}M \ ,$$

induits par Δ et Π respectivement, forment un couple de foncteurs adjoints. Or, en vertu du lemme 2.1.7, la catégorie $(W \times W)^{-1}(M \times M)$ est canoniquement isomorphe au produit $W^{-1}M \times W^{-1}M$, et on vérifie facilement que $\overline{\Delta}$ s'identifie par cet isomorphisme au foncteur diagonal. On en déduit que $W^{-1}M$ admet des produits binaires, $\overline{\Pi}$ étant un foncteur produit, ce qui achève la démonstration, la partie concernant les sommes se déduisant par passage aux catégories opposées. □

Proposition 2.1.9. — *La catégorie $\mathsf{Hot} = \mathsf{Hot}_{\mathcal{W}} = \mathcal{W}^{-1}\mathcal{C}at$ admet des produits finis et des sommes finies, et le foncteur de localisation canonique $\gamma : \mathcal{C}at \longrightarrow \mathsf{Hot}$ y commute.*

Démonstration. — La proposition résulte des propositions 2.1.8, 2.1.3, 2.1.4, du lemme 1.4.6, et de son dual. □

Proposition 2.1.10. — *Soit A une petite catégorie. La classe $\mathcal{W}_{\widehat{A}} = i_A^{-1}(\mathcal{W})$ des équivalences faibles de $\widehat{A}$* (cf. 1.3.3) *est stable par petites sommes arbitraires, la catégorie $\mathsf{Hot}_A = \mathsf{Hot}_{\mathcal{W},A} = \mathcal{W}_{\widehat{A}}^{-1}\widehat{A}$ admet des sommes finies, et le foncteur de localisation $\gamma_A : \widehat{A} \longrightarrow \mathsf{Hot}_A$, ainsi que le foncteur $\overline{\imath}_A : \mathsf{Hot}_A \longrightarrow \mathsf{Hot}$, induit par i_A, y commutent.*

Démonstration. — La première assertion résulte de la commutativité du foncteur i_A aux limites inductives et de la proposition 2.1.4. Les autres assertions s'en déduisent en vertu de la proposition 2.1.8, du dual du lemme 1.4.6, et de la proposition précédente. □

Proposition 2.1.11. — *Soit A une petite catégorie asphérique. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *A est totalement asphérique ;*
(b) *$\mathcal{W}_{\widehat{A}}$ est stable par produits binaires.*

De plus, si ces conditions équivalentes sont satisfaites, la catégorie Hot_A *admet des produits finis et le foncteur de localisation* $\gamma_A : \widehat{A} \longrightarrow \mathsf{Hot}_A$*, ainsi que le foncteur* $\overline{\imath}_A : \mathsf{Hot}_A \longrightarrow \mathsf{Hot}$*, induit par* i_A*, y commutent.*

Démonstration. — Soient $\varphi : F \longrightarrow F'$ et $\psi : G \longrightarrow G'$ deux équivalences faibles de $\widehat{A}$. On a un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} i_A(F \times G) \arrow[r] \arrow[d, "i_A(\varphi\times\psi)"'] & i_A(F) \times i_A(G) \arrow[d, "i_A(\varphi)\times i_A(\psi)"] \\ i_A(F' \times G') \arrow[r] & i_A(F') \times i_A(G') \end{tikzcd}$$

dont les flèches horizontales sont les morphismes canoniques, la flèches verticale de droite étant une équivalence faible de $\mathcal{C}at$, en vertu de la proposition 2.1.3. Si la catégorie A est totalement asphérique, la proposition 1.7.1, (b), implique que les flèches horizontales sont des équivalences faibles de $\mathcal{C}at$, ce qui prouve que la flèche vertical de gauche l'est aussi, et par suite, que $\varphi \times \psi$ est une équivalence faible de $\widehat{A}$, d'où la condition (b) de la proposition. Réciproquement, supposons que $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$ soit stable par produits binaires et soient a, b deux objet de A. Comme A est asphérique, si $e_{\widehat{A}}$ désigne un objet final de $\widehat{A}$, les morphismes $a \longrightarrow e_{\widehat{A}}$ et $b \longrightarrow e_{\widehat{A}}$ sont des équivalences faibles de $\widehat{A}$, donc aussi $a \times b \longrightarrow e_{\widehat{A}} \times e_{\widehat{A}} \simeq e_{\widehat{A}}$, ce qui implique que le préfaisceau $a \times b$ est asphérique, et montre que la catégorie A est totalement asphérique, en vertu de la proposition 1.7.1, (a).

Si ces conditions équivalentes sont satisfaites, l'existence des produits finis dans Hot_A, ainsi que la commutativité du foncteur de localisation $\gamma_A : \widehat{A} \longrightarrow \mathsf{Hot}_A$ auxdits produits, résultent de la proposition 2.1.8 et du lemme 1.4.6. La commutativité du foncteur $\overline{\imath}_A : \mathsf{Hot}_A \longrightarrow \mathsf{Hot}$ aux produits finis résulte alors des propositions 1.7.1, (b) et 2.1.9, et de l'asphéricité de A (pour la compatibilité à l'objet final). □

Proposition 2.1.12. — *Soit*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "v"'] & & B \arrow[dl, "w"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

un triangle commutatif de $\mathcal{C}at$*. On suppose que pour tout objet* c *de* C*, le morphisme* $u_c : A_c \longrightarrow B_c$*, induit par* u *dans les fibres, est une équivalence faible.*

(a) *Si* v *et* w *sont des précofibrations, alors le foncteur* u *est une équivalence faible localement sur* C*.*

(b) *Si* v *et* w *sont des préfibrations, alors le foncteur* u *est une équivalence faible colocalement sur* C*.*

En particulier, dans les deux cas (a) *ou* (b)*, le foncteur* u *est une équivalence faible.*

Démonstration. — Pour tout objet c de C, on a un carré commutatif dans $\mathcal{C}at$

$$\begin{tikzcd} A_c \arrow[r, "u_c"] \arrow[d, "i_c"'] & B_c \arrow[d, "j_c"] \\ A/c \arrow[r, "u/c"'] & B/c \end{tikzcd} ,$$

où i_c et j_c désignent les foncteurs canoniques. Si v et w sont des précofibrations, en vertu du lemme 1.1.15, les foncteurs i_c et j_c admettent des adjoints à gauche, et sont donc coasphériques, et en particulier des équivalences faibles (1.1.24). Comme par hypothèse u_c est une équivalence faible, il en est de même de u/c, ce qui prouve l'assertion (a). L'assertion (b) en résulte par passage aux catégories opposées, en vertu de la proposition 1.1.21. □

Théorème 2.1.13. — *Soit $\mathcal{W}$ une partie de $\mathsf{Fl}(\mathcal{C}at)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *$\mathcal{W}$ est un localisateur fondamental.*

(b) *$\mathcal{W}$ satisfait aux conditions suivantes :*

LA° *La partie $\mathcal{W}$ de $\mathsf{Fl}(\mathcal{C}at)$ est faiblement saturée.*

LB° *Si A est une petite catégorie admettant un objet initial, alors $A \longrightarrow e$ est dans $\mathcal{W}$.*

LC° *Si*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "v"'] & & B \arrow[dl, "w"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

est un triangle commutatif de $\mathcal{C}at$, et si pour tout objet c de C, le foncteur $c\backslash u : c\backslash A \longrightarrow c\backslash B$, induit par u, est dans $\mathcal{W}$, alors u est dans $\mathcal{W}$.

(c) *$\mathcal{W}$ satisfait aux conditions suivantes :*

Lα *La partie $\mathcal{W}$ de $\mathsf{Fl}(\mathcal{C}at)$ est faiblement saturée.*

Lβ *Le morphisme canonique $\Delta_1 \longrightarrow e$ est dans $\mathcal{W}$.*

Lγ *Si*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "p"'] & & B \arrow[dl, "q"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

est un triangle commutatif de $\mathcal{C}at$, p et q des cofibrations, u un foncteur cocartésien *(transformant morphismes cocartésiens en morphismes cocartésiens), et si pour tout objet c de C, le foncteur $u_c : A_c \longrightarrow B_c$, induit par u dans les fibres, est dans $\mathcal{W}$, alors u est dans $\mathcal{W}$.*

(d) *$\mathcal{W}$ satisfait aux conditions suivantes :*

Lα° *La partie $\mathcal{W}$ de $\mathsf{Fl}(\mathcal{C}at)$ est faiblement saturée.*

Lβ° *Le morphisme canonique $\Delta_1 \longrightarrow e$ est dans $\mathcal{W}$.*

Lγ° *Si*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "p"'] & & B \arrow[dl, "q"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

est un triangle commutatif de $\mathcal{C}at$, p et q des fibrations, u un foncteur cartésien *(transformant morphismes cartésiens en morphismes cartésiens), et si pour tout objet c de C, le foncteur $u_c : A_c \longrightarrow B_c$, induit par u dans les fibres, est dans $\mathcal{W}$, alors u est dans $\mathcal{W}$.*

Démonstration. — L'implication $(a) \Rightarrow (c)$ résulte de la proposition 2.1.12. Pour montrer l'implication $(c) \Rightarrow (b)$, soit $\mathcal{W}$ une partie de $\mathsf{Fl}(\mathcal{C}at)$ satisfaisant aux conditions Lα, Lβ, Lγ. La condition LA$^\circ$ coïncide avec la condition Lα, et est donc satisfaite. Pour montrer les conditions LB$^\circ$ et LC$^\circ$, on procède par plusieurs étapes.

i) Montrons que le morphisme canonique $\Delta_1 \longrightarrow e$ est universellement dans $\mathcal{W}$, autrement dit, que pour toute petite catégorie A, la première projection $pr_1 : A \times \Delta_1 \longrightarrow A$ est dans $\mathcal{W}$. On a un triangle commutatif

$$\begin{tikzcd} A \times \Delta_1 \arrow[rr, "pr_1"] \arrow[dr, "pr_1"'] & & A \arrow[dl, "1_A"] \\ & A & \end{tikzcd} \quad ,$$

les flèches obliques étant des cofibrations, et la flèche horizontale un foncteur cocartésien, induisant dans les fibres au-dessus d'un objet a de A un foncteur s'identifiant au foncteur canonique $\Delta_1 \longrightarrow e$, qui est dans $\mathcal{W}$ en vertu de Lβ. Il résulte donc de Lγ que pr_1 est dans $\mathcal{W}$.

ii) Montrons que $\mathcal{W}$ satisfait à la condition LB$^\circ$, autrement dit, que pour toute petite catégorie A admettant un objet initial, le morphisme canonique $A \longrightarrow e$ est dans $\mathcal{W}$. En effet, en vertu de la proposition 1.5.17, la catégorie A est contractile, et comme $\mathcal{W}$ est faiblement saturé, l'assertion résulte de (i) et de la proposition 1.5.8.

iii) Introduisons une version relative de la catégorie $S(A)$ introduite dans 1.1.17. Soit $u : A \longrightarrow B$ un morphisme de $\mathcal{C}at$. On définit une catégorie $S(u)$ comme suit :

$$\mathsf{Ob}(S(u)) = \{(a,b,f) \mid a \in \mathsf{Ob}(A),\, b \in \mathsf{Ob}(B),\, f : b \longrightarrow u(a) \in \mathsf{Fl}(B)\} \quad ,$$

et si (a,b,f) et (a',b',f') sont deux objets de $S(u)$, l'ensemble des morphismes $\mathsf{Hom}_{S(u)}((a,b,f),(a',b',f'))$ est formé des couples (g,h), $g : a \longrightarrow a' \in \mathsf{Fl}(A)$,

$h : b' \longrightarrow b \in \mathsf{Fl}(B)$ tels que le diagramme :

$$\begin{tikzcd} b \arrow[r, "f"] & u(a) \arrow[d, "u(g)"] \\ b' \arrow[u, "h"] \arrow[r, "f'"'] & u(a') \end{tikzcd} \qquad f' = u(g)fh$$

soit commutatif. L'identité de (a, b, f) est définie par $1_{(a,b,f)} = (1_a, 1_b)$, et si

$$(g, h) : (a, b, f) \longrightarrow (a', b', f') \qquad \text{et} \qquad (g', h') : (a', b', f') \longrightarrow (a'', b'', f'')$$

sont des morphismes de $S(u)$,

$$(g', h') \circ (g, h) = (g'g, hh') \quad .$$

On définit deux foncteurs :

$$B^\circ \xleftarrow{\ s_u\ } S(u) \xrightarrow{\ t_u\ } A$$

en posant pour tout objet (a, b, f) de $S(u)$,

$$s_u(a, b, f) = b \quad , \qquad t_u(a, b, f) = a \quad ,$$

et pour tout morphisme (g, h) de $S(u)$,

$$s_u(g, h) = h \quad , \qquad t_u(g, h) = g \quad .$$

(On remarque que la catégorie $S(A)$ et les foncteurs s_A et t_A introduits dans 1.1.17 s'identifient à $S(u)$, s_u et t_u respectivement, pour $A = B$ et $u = 1_A$.) On vérifie facilement que les foncteurs s_u et t_u sont des cofibrations, en remarquant qu'un morphisme (g, h) de $S(u)$ est cocartésien relativement à s_u (resp. t_u) si et seulement si g (resp. h) est un isomorphisme, et que si $h : b' \longrightarrow b$ (resp. $g : a \longrightarrow a'$) est un morphisme de B (resp. A) et (a, b, f) un objet de $S(u)$ au-dessus de b (resp. a), alors

$$(1_a, h) : (a, b, f) \longrightarrow (a, b', fh)$$

$$(\text{resp.} \qquad (g, 1_b) : (a, b, f) \longrightarrow (a', b, u(g)f)\ )$$

est un morphisme cocartésien relativement à s_u (resp. t_u) au-dessus de h (resp. g). On remarque que la fibre $S(u)_b$ (resp. $S(u)_a$) de s_u (resp. t_u), au-dessus d'un objet b (resp. a) de B° (resp. A), est la catégorie $b \backslash A$ (resp. $(B/u(a))^\circ \simeq u(a) \backslash B^\circ$). En particulier, les fibres de t_u possèdent un objet initial, ce qui implique, en vertu de (ii) et de Lγ, que t_u est dans $\mathcal{W}$.

Soit

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] & B \arrow[d, "w"] \\ A' \arrow[r, "u'"'] & B' \end{tikzcd}$$

un carré commutatif de $\mathcal{C}at$. On définit un foncteur $S(v,w) : S(u) \longrightarrow S(u')$ comme suit :

$$S(v,w)(a,b,f) = (v(a), w(b), w(f)) \quad , \qquad (a,b,f) \in \mathsf{Ob}(S(u)) \quad ,$$
$$f : b \longrightarrow u(a) \quad , \qquad w(f) : w(b) \longrightarrow wu(a) = u'v(a) \quad ,$$
$$S(v,w)(g,h) = (v(g), w(h) \quad , \qquad (g,h) \in \mathsf{Fl}(S(u)) \quad .$$

On vérifie aussitôt qu'on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
B^{\circ} \arrow[d, "w^{\circ}"'] & S(u) \arrow[l, "s_u"'] \arrow[r, "t_u"] \arrow[d, "S(v,w)"] & A \arrow[d, "v"] \\
B'^{\circ} & S(u') \arrow[l, "s_{u'}"] \arrow[r, "t_{u'}"'] & A'
\end{tikzcd} \quad .$$

iv) Montrons que $\mathcal{W}$ satisfait à la condition LC°. Soit donc

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "v"'] & & B \arrow[dl, "w"] \\
& C &
\end{tikzcd}$$

un triangle commutatif de $\mathcal{C}at$, et supposons que pour tout objet c de C, le foncteur $c\backslash u : c\backslash A \longrightarrow c\backslash B$, induit par u, est dans $\mathcal{W}$. En vertu de ce qui précède, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
C^{\circ} \arrow[d, "1_{C^{\circ}}"'] & S(v) \arrow[l, "s_v"'] \arrow[r, "t_v"] \arrow[d, "S(u,1_C)"] & A \arrow[d, "u"] \\
C^{\circ} & S(w) \arrow[l, "s_w"] \arrow[r, "t_w"'] & B
\end{tikzcd} \quad .$$

En particulier, on a un triangle commutatif

$$\begin{tikzcd}
S(v) \arrow[rr, "S(u,1_C)"] \arrow[dr, "s_v"'] & & S(w) \arrow[dl, "s_w"] \\
& C^{\circ} &
\end{tikzcd} \quad ,$$

où s_v et s_w sont des cofibrations, et on vérifie immédiatement que $S(u,1_C)$ est un foncteur cocartésien. Comme pour tout objet c de C, $S(u,1_C)$ induit un foncteur dans les fibres au-dessus de c s'identifiant à $c\backslash u : c\backslash A \longrightarrow c\backslash B$ qui est par hypothèse dans $\mathcal{W}$, il résulte de la condition Lγ que $S(u,1_C)$ est dans $\mathcal{W}$. Comme t_v et t_w sont dans $\mathcal{W}$, il en est de même de u. Ceci achève la démonstration de l'implication $(c) \Rightarrow (b)$.

Montrons l'implication $(b) \Rightarrow (a)$. Soit donc $\mathcal{W}$ une partie de $\mathsf{Fl}(\mathcal{C}at)$ satisfaisant aux conditions LA°, LB° et LC°. Notons $\mathcal{W}^{\circ}$ la partie de $\mathsf{Fl}(\mathcal{C}at)$ définie par

$$\mathcal{W}^{\circ} := \{u \in \mathsf{Fl}(\mathcal{C}at) \mid u^{\circ} \in \mathcal{W}\} \quad .$$

Il est immédiat que $\mathcal{W}^{\circ}$ est un localisateur fondamental. En vertu de 1.1.13, une petite catégorie admettant un objet initial est $\mathcal{W}^{\circ}$-asphérique, ce qui implique la condition LB pour $\mathcal{W}$. De même, pour toute petite catégorie C, un morphisme de $\mathcal{C}at/C$ qui est une $\mathcal{W}^{\circ}$-équivalence colocalement sur C est dans $\mathcal{W}^{\circ}$ (cf. 2.1.1), ce qui implique la condition LC pour $\mathcal{W}$, et achève la démonstration de l'équivalence des conditions (a), (b) et (c).

En appliquant cette équivalence à $\mathcal{W}^{\circ}$, pour une partie $\mathcal{W}$ de $\mathsf{Fl}(\mathcal{C}at)$, on déduit l'équivalence des conditions (a), (b) et (d) pour $\mathcal{W}$, ce qui achève la démonstration du théorème. □

2.2. Foncteurs d'intégration et de coïntégration

2.2.1. — Soient I une petite catégorie, et $F : I \longrightarrow \mathcal{C}at$ un foncteur. On rappelle une construction de Grothendieck d'une catégorie $\int F$ et d'une cofibration $\theta_F : \int F \longrightarrow I$ associées au foncteur F. Les objets de $C = \int F$ sont les couples (i, a), où i est un objet de I et a un objet de $F(i)$. Un morphisme de (i, a) vers (i', a') est un couple (k, f), où $k : i \longrightarrow i'$ est un morphisme de I et $f : F(k)(a) \longrightarrow a'$ un morphisme de $F(i')$. Le composé d'un morphisme $(k, f) : (i, a) \longrightarrow (i', a')$ et d'un morphisme $(k', f') : (i', a') \longrightarrow (i'', a'')$ est défini par

$$(k', f') \circ (k, f) = (k'k, f' \circ F(k')(f))$$

$$F(k'k)(a) = F(k')F(k)(a) \xrightarrow{F(k')(f)} F(k')(a') \xrightarrow{\quad f' \quad} a'' \quad .$$

Le foncteur θ_F est défini par

$$\theta_F(i, a) = i \ , \quad (i, a) \in \mathsf{Ob}(C) \ , \qquad \theta_F(k, f) = k \ , \quad (k, f) \in \mathsf{Fl}(C) \ .$$

On vérifie facilement que les morphismes cocartésiens de C relativement à θ_F sont les flèches (k, f) de C telles que f soit un isomorphisme, et que $\theta_F : C \longrightarrow I$ est une cofibration dont les fibres C_i s'identifient aux catégories $F(i)$. Quand le foncteur F est donné par une formule explicite, la catégorie $\int F$ est parfois notée $\int_I F$, ou encore $\int_{i \in \mathsf{Ob}(I)} F(i)$, pour indiquer le domaine de définition du foncteur F.

Exemple 2.2.2. — Soient A une petite catégorie et H_A le foncteur

$$H_A : A^{\circ} \times A \longrightarrow \mathcal{C}at \quad , \qquad (b, a) \longmapsto \mathsf{Hom}_A(b, a) \quad ,$$

où l'ensemble $\mathsf{Hom}_A(b, a)$ est considéré comme une catégorie discrète. Alors $\int H_A$ s'identifie à la catégorie $S(A)$ introduite dans 1.1.17, et la cofibration $\theta_{H_A} : \int H_A \longrightarrow A^{\circ} \times A$ au foncteur $(s_A, t_A) : S(A) \longrightarrow A^{\circ} \times A$ (cf. 1.1.17). Cela explique et redémontre le lemme 1.1.18, affirmant que s_A et t_A sont des cofibrations (puisque les projections sont des cofibrations, et les cofibrations sont stables par composition). Plus généralement, si $u : A \longrightarrow B$ est un morphisme de $\mathcal{C}at$, et H_u le foncteur

$$H_u : B^\circ \times A \longrightarrow \mathcal{C}at \quad , \qquad (b,a) \longmapsto \mathsf{Hom}_B(b, u(a)) \quad ,$$

alors $\int H_u$ s'identifie à la catégorie $S(u)$ considérée dans la démonstration du théorème 2.1.13.

2.2.3. — Soient I une petite catégorie, $F : I \longrightarrow \mathcal{C}at$ un foncteur, et $C = \int F$. Pour tout objet i de I, on définit un foncteur

$$l_i : F(i) \longrightarrow C$$

par

$$l_i(a) = (i,a) \ , \quad a \in \mathsf{Ob}(F(i)) \ ,$$

$$l_i(f) = (1_i, f) \ , \quad f \in \mathsf{Fl}(F(i)) \ ,$$

qui identifie $F(i)$ à la fibre C_i de θ_F au-dessus de i. De plus, pour tout morphisme $k : i \longrightarrow i'$ de I, on définit un morphisme de foncteurs

$$\begin{tikzcd} F(i) \arrow[rr, "F(k)"] \arrow[dr, "l_i"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\beta_k}{\nearrow\!\!\!\nearrow}"] & F(i') \arrow[dl, "l_{i'}"] \\ & C & \end{tikzcd} \qquad \beta_k : l_i \longrightarrow l_{i'}F(k)$$

par

$$\beta_{k,a} = (k, 1_{F(k)(a)}) : (i,a) \longrightarrow (i', F(k)(a)) \quad , \qquad a \in \mathsf{Ob}(F(i)) \quad .$$

On remarque que si $k : i \longrightarrow i'$, $k' : i' \longrightarrow i''$ sont deux morphismes composables de I, on a la condition de cocycle :

$$\beta_{k'k} = (\beta_{k'} \star F(k))\beta_k \quad , \qquad \beta_{1_i} = 1_{l_i} \quad . \tag{2.2.3.1}$$

$$\begin{tikzcd} F(i) \arrow[rr, "F(k)"] \arrow[drr, "l_i"'] & \arrow[dr, phantom, "\overset{\beta_k}{\Longrightarrow}"] & F(i') \arrow[rr, "F(k')"] \arrow[d, "l_{i'}"] & \arrow[dl, phantom, "\overset{\beta_{k'}}{\Longrightarrow}"] & F(i'') \arrow[dll, "l_{i''}"] \\ & & C & & \end{tikzcd}$$

Ces données satisfont à la propriété universelle suivante, analogue à celle des limites inductives. Pour toute catégorie D, toute famille de foncteurs $m_i : F(i) \longrightarrow D$, $i \in \mathsf{Ob}(I)$, et toute famille de morphismes de foncteurs $\gamma_k : m_i \longrightarrow m_{i'}F(k)$, $k : i \longrightarrow i'$, $k \in \mathsf{Fl}(I)$, satisfaisant à la condition de cocycle

$$\gamma_{k'k} = (\gamma_{k'} \star F(k))\gamma_k \quad , \qquad \gamma_{1_i} = 1_{m_i} \quad ,$$

pour $k : i \longrightarrow i'$, $k' : i' \longrightarrow i''$ morphismes composables de I, il existe un foncteur unique $H : C \longrightarrow D$ tel que

(2.2.3.2) $$m_i = Hl_i \ , \quad i \in \mathsf{Ob}(I) \ , \qquad \text{et} \qquad \gamma_k = H \star \beta_k \ , \quad k \in \mathsf{Fl}(I) \ .$$

Explicitement, on a

(2.2.3.3) $$\begin{aligned} H(i,a) &= m_i(a) \ , & (i,a) &\in \mathsf{Ob}(C) \ , \\ H(k,f) &= m_{i'}(f)\gamma_{k,a} \ , & (k,f) : (i,a) &\longrightarrow (i',a') \in \mathsf{Fl}(C) \ . \end{aligned}$$

En particulier, il existe un foncteur unique

$$K_F : \textstyle\int F \longrightarrow \varinjlim F$$

tel que si $\varepsilon_i : F(i) \longrightarrow \varinjlim F$, $i \in \mathsf{Ob}(I)$, désigne le morphisme canonique,

(2.2.3.4) $$\varepsilon_i = K_F \circ l_i \ , \ i \in \mathsf{Ob}(I) \ , \quad \text{et} \quad K_F \star \beta_k = 1_{\varepsilon_i} \ , \ k : i \longrightarrow i' \in \mathsf{Fl}(I) \ .$$

Explicitement :

(2.2.3.5) $$\begin{aligned} K_F(i,a) &= \varepsilon_i(a) \ , & (i,a) &\in \mathsf{Ob}(C) \ , \\ K_F(k,f) &= \varepsilon_{i'}(f) \ , & (k,f) : (i,a) &\longrightarrow (i',a') \in \mathsf{Fl}(C) \ . \end{aligned}$$

2.2.4. — La propriété universelle décrite dans 2.2.3 se précise par une propriété "2-universelle" faisant de $C = \int F$ une "2-limite inductive" : Pour tout couple de foncteurs $H, H' : C \rightrightarrows C'$ définissant

$$m_i = Hl_i \ , \quad i \in \mathsf{Ob}(I) \ , \qquad \gamma_k = H \star \beta_k \ , \quad k \in \mathsf{Fl}(I) \ ,$$

$$m'_i = H'l_i \ , \quad i \in \mathsf{Ob}(I) \ , \qquad \gamma'_k = H' \star \beta_k \ , \quad k \in \mathsf{Fl}(I) \ ,$$

et toute famille de morphismes de foncteurs

$$\alpha_i : m_i \longrightarrow m'_i \quad , \qquad i \in \mathsf{Ob}(I) \quad ,$$

satisfaisant aux relations

(2.2.4.1) $$\gamma'_k \alpha_i = (\alpha_{i'} \star F(k))\gamma_k \quad , \qquad k : i \longrightarrow i' \in \mathsf{Fl}(I) \quad ,$$

$$\begin{tikzcd} m_i \arrow[r, "\gamma_k"] \arrow[d, "\alpha_i"'] & m_{i'}F(k) \arrow[d, "\alpha_{i'} \star F(k)"] \\ m'_i \arrow[r, "\gamma'_k"'] & m'_{i'}F(k) \end{tikzcd}$$

il existe un unique morphisme de foncteurs $\alpha' : H \longrightarrow H'$ tel que

(2.2.4.2) $$\alpha_i = \alpha' \star l_i \quad , \qquad i \in \mathsf{Ob}(I) \quad .$$

2.2.5. — Soient maintenant $F' : I \longrightarrow \mathcal{C}at$ un deuxième foncteur,

$$\theta_{F'} : C' = \textstyle\int F' \longrightarrow I$$

la cofibration correspondante, et $\alpha : F \longrightarrow F'$ un morphisme de foncteurs, de sorte que pour tout objet i de I, $\alpha_i : F(i) \longrightarrow F'(i)$ soit un foncteur. On définit un foncteur $u = \int \alpha : C \longrightarrow C'$ en posant

$$u(i,a) = (i, \alpha_i(a)) \quad , \qquad (i,a) \in \mathsf{Ob}(C) \quad ,$$

$$u(k,f) = (k, \alpha_{i'}(f)) \quad , \qquad (k,f) \in \mathsf{Hom}_C((i,a),(i',a')) \quad .$$

(Comme (k,f) est un morphisme de C de (i,a) vers (i',a'), $f : F(k)(a) \longrightarrow a'$ est un morphisme de $F(i')$ et $\alpha_{i'}(f) : \alpha_{i'}F(k)(a) \longrightarrow \alpha_{i'}(a')$ un morphisme de $F'(i')$. Comme α est un morphisme de foncteurs, $\alpha_{i'}F(k)(a) = F'(k)\alpha_i(a)$, donc $(k, \alpha_{i'}(f))$ est bien un morphisme de C', de $(i, \alpha_i(a))$ vers $(i', \alpha_{i'}(a'))$.) On a un triangle commutatif de foncteurs

$$\begin{tikzcd} C = \int F \arrow[rr, "u = \int \alpha"] \arrow[dr, "\theta_F"'] & & \int F' = C' \arrow[dl, "\theta_{F'}"] \\ & I & \end{tikzcd} ,$$

et on vérifie facilement que u est un foncteur cocartésien (transformant morphismes cocartésiens en morphismes cocartésiens).

Le foncteur $u = \int \alpha$ peut être aussi défini par la propriété universelle de C. Notons

$$l'_i : F'(i) \longrightarrow C' \quad , \qquad i \in \mathsf{Ob}(I) \quad ,$$

$$\beta'_k : l'_i \longrightarrow l'_{i'}F'(k) \quad , \qquad k : i \longrightarrow i' \in \mathsf{Fl}(I) \quad ,$$

les foncteurs et morphismes de foncteurs canoniques correspondant au foncteur F', et définissons

$$m_i = l'_i\alpha_i \ , \quad i \in \mathsf{Ob}(I) \ , \qquad \gamma_k = \beta'_k \star \alpha_i \ , \quad k : i \longrightarrow i' \in \mathsf{Fl}(I) \ ,$$

$$\begin{tikzcd} F(i) \arrow[r, "\alpha_i"] \arrow[dr, "m_i"'] & F'(i) \arrow[d, "l'_i"] \\ & C' \end{tikzcd} \qquad m_i = l'_i\alpha_i \xrightarrow{\gamma_k = \beta'_k \star \alpha_i} l'_{i'}F'(k)\alpha_i = l'_{i'}\alpha_{i'}F(k) = m_{i'}F(k) \ .$$

Soient $k : i \longrightarrow i'$ et $k' : i' \longrightarrow i''$ deux morphismes composables de I. On a

$$\begin{aligned} \gamma_{k'k} &= \beta'_{k'k} \star \alpha_i = \big((\beta'_{k'} \star F'(k))\beta'_k\big) \star \alpha_i = \big(\beta'_{k'} \star (F'(k)\alpha_i)\big)(\beta'_k \star \alpha_i) \\ &= \big(\beta'_{k'} \star (\alpha_{i'}F(k))\big)(\beta'_k \star \alpha_i) = \big((\beta'_{k'} \star \alpha_{i'}) \star F(k)\big)(\beta'_k \star \alpha_i) = (m_{k'} \star F(k))m_k \end{aligned}$$

et

$$\gamma_{1_i} = \beta'_{1_i} \star \alpha_i = 1_{l'_i} \star \alpha_i = 1_{l'_i\alpha_i} = 1_{m_i} \quad .$$

La propriété universelle de C implique par conséquent l'existence d'un unique foncteur $u : C \longrightarrow C'$ tel que

$$l'_i \alpha_i = u l_i \ , \quad i \in \mathsf{Ob}(I) \ , \qquad \text{et} \qquad \beta'_k \star \alpha_i = u \star \beta_k \ , \quad k : i \longrightarrow i' \in \mathsf{Fl}(I) \quad ,$$

et on vérifie facilement que ce foncteur coïncide au foncteur $\int \alpha$ défini précédemment. On a ainsi défini un *foncteur d'intégration*

$$\textstyle\int_I = \int : \underline{\mathsf{Hom}}(I, \mathcal{C}at) \longrightarrow \mathcal{C}at/I$$

de source la catégorie des foncteurs de I vers $\mathcal{C}at$ et de but celle des petites catégories au-dessus de I, se factorisant par la sous-catégorie des catégories cofibrées sur I et des foncteurs cocartésiens.

2.2.6. — Dualement, pour toute petite catégorie I, on définit un *foncteur de coïntégration*

$$\nabla_I = \nabla : \underline{\mathsf{Hom}}(I^\circ, \mathcal{C}at) \longrightarrow \mathcal{C}at/I$$

associant à un foncteur contravariant $F : I^\circ \longrightarrow \mathcal{C}at$ de I vers $\mathcal{C}at$ la catégorie *fibrée* $\zeta_F : \nabla F \longrightarrow I$ définie comme suit. Les objets de ∇F sont les couples (i, a), où i est un objet de I et a un objet de $F(i)$. Un morphisme de (i, a) vers (i', a') est un couple (k, f), où $k : i \longrightarrow i'$ est un morphisme de I et $f : a \longrightarrow F(k)(a')$ un morphisme de $F(i)$. Le composé d'un morphisme $(k, f) : (i, a) \longrightarrow (i', a')$ et d'un morphisme $(k', f') : (i', a') \longrightarrow (i'', a'')$ est défini par

$$(k', f') \circ (k, f) = (k'k, F(k)(f') \circ f)$$

$$a \xrightarrow{\ f\ } F(k)(a') \xrightarrow{F(k)(f')} F(k)F(k')(a'') = F(k'k)(a'') \quad .$$

Le foncteur ζ_F est défini par

$$\zeta_F(i, a) = i \ , \quad (i, a) \in \mathsf{Ob}(\nabla F) \ , \qquad \zeta_F(k, f) = k \ , \quad (k, f) \in \mathsf{Fl}(\nabla F) \ .$$

Si $F' : I^\circ \longrightarrow \mathcal{C}at$ est un deuxième foncteur, et $\alpha : F \longrightarrow F'$ un morphisme de foncteurs, on définit un foncteur $\nabla\alpha$

$$\begin{tikzcd} \nabla F \arrow[rr, "\nabla\alpha"] \arrow[dr, "\zeta_F"'] & & \nabla F' \arrow[dl, "\zeta_{F'}"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

cartésien au-dessus de I (transformant morphismes cartésiens en morphismes cartésiens) par

$$\nabla\alpha(i, a) = (i, \alpha_i(a)) \quad , \qquad (i, a) \in \mathsf{Ob}(\nabla F) \quad ,$$

$$\nabla\alpha(k, f) = (k, \alpha_i(f)) \quad , \qquad (k, f) \in \mathsf{Hom}_{\nabla F}((i, a), (i', a')) \quad .$$

On vérifie facilement que pour tout foncteur $F : I^\circ \longrightarrow \mathcal{C}at$, on a

$$\nabla_I F = (\textstyle\int_{I^\circ} F^\circ)^\circ \qquad \text{et} \qquad \zeta_F = (\theta_{F^\circ})^\circ \quad ,$$

où *par abus de notations,* F° *ne désigne pas le foncteur opposé à* F*, mais le foncteur composé de* $F : I^\circ \longrightarrow \mathcal{C}at$ *et de l'automorphisme* $?^\circ : \mathcal{C}at \longrightarrow \mathcal{C}at$ *associant à une petite catégorie la catégorie opposée.* En revanche, $(\theta_{F^\circ})^\circ$ désigne bien le foncteur opposé au foncteur $\theta_{F^\circ} : \int_{I^\circ} F^\circ \longrightarrow I^\circ$. De façon plus précise, on a un diagramme commutatif de foncteurs

$$
\begin{tikzcd}
\underline{\mathsf{Hom}}(I^\circ, \mathcal{C}at) \arrow[r, "\nabla_I"] \arrow[d, "\underline{\mathsf{Hom}}(1_{I^\circ}, ?^\circ)"'] & \mathcal{C}at/I \\
\underline{\mathsf{Hom}}(I^\circ, \mathcal{C}at) \arrow[r, "\int_{I^\circ}"'] & \mathcal{C}at/I^\circ \arrow[u, "?^\circ/I"']
\end{tikzcd}
\tag{2.2.6.1}
$$

dont les flèches verticales sont des isomorphismes de catégories induits par l'involution $?^\circ$. On laisse le soin au lecteur d'énoncer et vérifier la propriété universelle satisfaite par la coïntégration.

2.3. Images directes et composés transfinis d'équivalences faibles

Dans ce paragraphe, on se fixe, une fois pour toutes, un localisateur fondamental $\mathcal{W}$.

Proposition 2.3.1. — *Soient* I *une petite catégorie,* $F, F' : I \rightrightarrows \mathcal{C}at$ *deux foncteurs, et* $\alpha : F \longrightarrow F'$ *un morphisme de foncteurs. Si* α *est une* équivalence faible argument par argument, *autrement dit, si pour tout objet* i *de* I*, le foncteur* $\alpha_i : F(i) \longrightarrow F'(i)$ *est une équivalence faible, alors* $\int a : \int F \longrightarrow \int F'$ *est une équivalence faible localement sur* I*, et en particulier, une équivalence faible.*

Démonstration. — La proposition est une conséquence immédiate de 2.2.5, et de la proposition 2.1.12. □

2.3.2. — Dans la suite, on va s'intéresser au cas où la catégorie I est la catégorie engendrée par le graphe

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & 2 \\
1 &
\end{tikzcd}
,
$$

de sorte que la donnée d'un foncteur $I \longrightarrow \mathcal{C}at$ équivaut à la donnée d'un diagramme

$$
\begin{tikzcd}
C_0 \arrow[r, "u_2"] \arrow[d, "u_1"'] & C_2 \\
C_1 &
\end{tikzcd}
$$

de $\mathcal{C}at$. Si on pose

$$
C = \int \begin{smallmatrix} C_0 & \xrightarrow{u_2} & C_2 \\ {\scriptstyle u_1}\downarrow & & \\ C_1 & & \end{smallmatrix} \qquad ,
$$

on a

$$\begin{aligned}
&\mathsf{Ob}(C) = \{(i,a) \mid i=0,1,2,\ a \in \mathsf{Ob}(C_i)\}\ ,\\
&\mathsf{Hom}_C((i,a),(i,a')) \simeq \mathsf{Hom}_{C_i}(a,a')\ , \quad i=0,1,2, \quad a,a' \in \mathsf{Ob}(C_i)\ ,\\
&\mathsf{Hom}_C((0,a),(i,b)) \simeq \mathsf{Hom}_{C_i}(u_i(a),b)\ , \quad i=1,2, \quad a \in \mathsf{Ob}(C_0)\ , \quad b \in \mathsf{Ob}(C_i)\ ,\\
&\mathsf{Hom}_C((i,a),(j,b)) = \varnothing \qquad \text{sinon.}
\end{aligned}$$

En vertu des considérations du numéro 2.2.3, on a un "2-diagramme"

$$\begin{tikzcd}
C_0 \arrow[r, "u_2"] \arrow[d, "u_1"'] \arrow[dr, "l_0"] \arrow[dr, phantom, shift left=3, "\overset{\beta_2}{\Longrightarrow}"] \arrow[dr, phantom, shift right=3, "\overset{\beta_1}{\Longleftarrow}"] & C_2 \arrow[d, "l_2"] \\
C_1 \arrow[r, "l_1"'] & C
\end{tikzcd} \quad ,$$

et dans ce cas particulier, la propriété universelle affirme que pour tout "2-diagramme"

$$\begin{tikzcd}
C_0 \arrow[r, "u_2"] \arrow[d, "u_1"'] \arrow[dr, "m_0"] \arrow[dr, phantom, shift left=3, "\overset{\gamma_2}{\Longrightarrow}"] \arrow[dr, phantom, shift right=3, "\overset{\gamma_1}{\Longleftarrow}"] & C_2 \arrow[d, "m_2"] \\
C_1 \arrow[r, "m_1"'] & D
\end{tikzcd} \quad ,$$

il existe un foncteur unique $g : C \longrightarrow D$ tel que

$$m_i = gl_i\ , \quad i=0,1,2, \qquad\qquad \gamma_i = g \star \beta_i\ , \quad i=1,2\ .$$

La propriété "2-universelle" (cf. 2.2.4) affirme que si on a un deuxième "2-diagramme"

$$\begin{tikzcd}
C_0 \arrow[r, "u_2"] \arrow[d, "u_1"'] \arrow[dr, "m'_0"] \arrow[dr, phantom, shift left=3, "\overset{\gamma'_2}{\Longrightarrow}"] \arrow[dr, phantom, shift right=3, "\overset{\gamma'_1}{\Longleftarrow}"] & C_2 \arrow[d, "m'_2"] \\
C_1 \arrow[r, "m'_1"'] & D
\end{tikzcd} \quad ,$$

définissant un foncteur $g' : C \longrightarrow D$ tel que

(2.3.2.1) $$m'_i = g'l_i\ , \quad i=0,1,2, \qquad\qquad \gamma'_i = g' \star \beta_i\ , \quad i=1,2\ ,$$

alors pour tout triplet de morphismes de foncteurs

$$
\begin{tikzcd}
C_0 \arrow[d, bend right, "m_0"'] \arrow[d, bend left, "m'_0"] \arrow[d, phantom, "\overset{\alpha_0}{\Rightarrow}"] \\
D
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
C_1 \arrow[d, bend right, "m_1"'] \arrow[d, bend left, "m'_1"] \arrow[d, phantom, "\overset{\alpha_1}{\Rightarrow}"] \\
D
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
C_2 \arrow[d, bend right, "m_2"'] \arrow[d, bend left, "m'_2"] \arrow[d, phantom, "\overset{\alpha_2}{\Rightarrow}"] \\
D
\end{tikzcd}
$$

tels que

(2.3.2.2) $$\gamma'_i\alpha_0 = (\alpha_i \star u_i)\gamma_i \quad , \qquad i = 1, 2 \quad ,$$

il existe un morphisme de foncteurs unique $\alpha' : g \longrightarrow g'$ tel que

(2.3.2.3) $$\alpha_i = \alpha' \star l_i \quad , \qquad i = 0, 1, 2 \quad .$$

Proposition 2.3.3. — *En gardant les notations ci-dessus, si u_1 est une équivalence faible, il en est de même de l_2.*

Démonstration. — Le foncteur l_2 est le composé

$$C_2 \xrightarrow{\ l'_2\ } \int \begin{smallmatrix} C_0 & \xrightarrow{u_2} & C_2 \\ {\scriptstyle 1_{C_0}}\downarrow & & \\ C_0 & & \end{smallmatrix} \xrightarrow{\ \int \alpha\ } \int \begin{smallmatrix} C_0 & \xrightarrow{u_2} & C_2 \\ {\scriptstyle u_1}\downarrow & & \\ C_1 & & \end{smallmatrix} \qquad ,$$

où l'_2 est le morphisme canonique, et α est le morphisme de foncteurs

$$
\begin{tikzcd}
C_0 \arrow[r, "u_2"] \arrow[d, "1_{C_0}"'] \arrow[dr, "1_{C_0}"] & C_2 \arrow[dr, "1_{C_2}"] & \\
C_0 \arrow[dr, "u_1"'] & C_0 \arrow[r, "u_2"] \arrow[d, "u_1"] & C_2 \\
& C_1 &
\end{tikzcd}
\qquad .
$$

Comme u_1, 1_{C_0} et 1_{C_2} sont des équivalences faibles, il résulte de la proposition 2.3.1 que $\int \alpha$ est une équivalence faible.

Il suffit donc de montrer que l'_2 est une équivalence faible. Or, le diagramme commutatif

$$
\begin{tikzcd}
C_0 \arrow[r, "u_2"] \arrow[d, "1_{C_0}"'] \arrow[dr, "u_2"] \arrow[dr, phantom, shift right=3ex, "\overset{=}{\Leftarrow}"] \arrow[dr, phantom, shift left=3ex, "\overset{=}{\Rightarrow}"] & C_2 \arrow[d, "1_{C_2}"] \\
C_0 \arrow[r, "u_2"'] & C_2
\end{tikzcd}
$$

définit, en vertu de la propriété universelle (cf. 2.3.2), un foncteur

$$\int \begin{smallmatrix} C_0 & \xrightarrow{u_2} & C_2 \\ {\scriptstyle 1_{C_0}}\downarrow & & \\ C_0 & & \end{smallmatrix} \xrightarrow{\ \ r\ \ } C_2$$

tel que si

$$\begin{tikzcd} C_0 \arrow[r, "u_2"] \arrow[d, "1_{C_0}"'] \arrow[dr, "l'_0"] & C_2 \arrow[d, "l'_2"] \arrow[dl, phantom, "\overset{\beta'_2}{\Rightarrow}" near end] \\ C_0 \arrow[r, "l'_1"'] \arrow[ur, phantom, "\overset{\beta'_1}{\Leftarrow}" near end] & C' \end{tikzcd}$$

désigne le "2-diagramme" canonique associé à

$$C' = \int \begin{array}{l} C_0 \xrightarrow{u_2} C_2 \\ {}^{1_{C_0}}\downarrow \\ C_0 \end{array} \qquad ,$$

on ait

$$rl'_0 = u_2 = rl'_1 \ , \quad rl'_2 = 1_{C_2} \ , \quad r \star \beta'_1 = 1_{u_2} = r \star \beta'_2 \quad .$$

En particulier, r est une rétraction de l'_2. On va montrer que $l'_2 r$ est $\mathbb{I}$-homotope à $1_{C'}$, où $\mathbb{I} = (I, \partial_1, \partial_2)$, les foncteurs $\partial_1, \partial_2 : e \rightrightarrows I$ étant définis par les objets 1 et 2 de I. Pour définir une $\mathbb{I}$-homotopie

$$\begin{array}{l} 0 \longrightarrow 2 \\ \downarrow \\ 1 \end{array} \times \int \begin{array}{l} C_0 \xrightarrow{u_2} C_2 \\ {}^{1_{C_0}}\downarrow \\ C_0 \end{array} \xrightarrow{\ \ h\ \ } \int \begin{array}{l} C_0 \xrightarrow{u_2} C_2 \\ {}^{1_{C_0}}\downarrow \\ C_0 \end{array} \qquad ,$$

il suffit, en vertu de l'identification

$$\mathsf{Hom}(I \times C', C') \simeq \mathsf{Hom}(I, \underline{\mathsf{Hom}}(C', C')) \quad ,$$

de définir des foncteurs

$$h_i : C' \longrightarrow C' \quad , \qquad i = 0, 1, 2 \quad ,$$

et des morphismes de foncteurs

$$\alpha_j : h_0 \longrightarrow h_j \quad , \qquad j = 1, 2 \quad .$$

En vertu de la propriété universelle (cf. 2.3.2), $h_1 = 1_{C'}$ est défini par le "2-diagramme"

$$\begin{tikzcd} C_0 \arrow[r, "u_2"] \arrow[d, "1_{C_0}"'] \arrow[dr, "l'_0"] & C_2 \arrow[d, "l'_2"] \arrow[dl, phantom, "\overset{\beta'_2}{\Rightarrow}" near end] \\ C_0 \arrow[r, "l'_1"'] \arrow[ur, phantom, "\overset{\beta'_1}{\Leftarrow}" near end] & C' \end{tikzcd} \quad ,$$

$h_2 = l'_2 r$ est défini par le “2-diagramme”

$$\begin{tikzcd}
C_0 \arrow[r, "u_2"] \arrow[d, "1_{C_0}"'] \arrow[dr, "l'_2 u_2" description] & C_2 \arrow[d, "l'_2"] \arrow[dl, phantom, "\overset{=}{\Longrightarrow}", shift left=3ex] \\
C_0 \arrow[r, "l'_2 u_2"'] \arrow[ur, phantom, "\overset{=}{\Longleftarrow}", shift right=3ex] & C'
\end{tikzcd} ,$$

et on définit h_0 par le “2-diagramme”

$$\begin{tikzcd}
C_0 \arrow[r, "u_2"] \arrow[d, "1_{C_0}"'] \arrow[dr, "l'_0" description] & C_2 \arrow[d, "l'_2"] \arrow[dl, phantom, "\overset{\beta'_2}{\Longrightarrow}", shift left=3ex] \\
C_0 \arrow[r, "l'_0"'] \arrow[ur, phantom, "\overset{=}{\Longleftarrow}", shift right=3ex] & C'
\end{tikzcd} .$$

Les trois morphismes de foncteurs

$$\begin{tikzcd}
C_0 \arrow[d, bend right=40, "l'_0"'] \arrow[d, bend left=40, "l'_0"] \arrow[d, phantom, "\overset{=}{\Rightarrow}"] \\
C'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C_0 \arrow[d, bend right=40, "l'_0"'] \arrow[d, bend left=40, "l'_1"] \arrow[d, phantom, "\overset{\beta'_1}{\Rightarrow}"] \\
C'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C_2 \arrow[d, bend right=40, "l'_2"'] \arrow[d, bend left=40, "l'_2"] \arrow[d, phantom, "\overset{=}{\Rightarrow}"] \\
C'
\end{tikzcd}$$

vérifient les relations 2.3.2.2 de la propriété “2-universelle”, et définissent ainsi un morphisme de foncteurs $\alpha_1 : h_0 \longrightarrow h_1$. De même, les trois morphismes de foncteurs

$$\begin{tikzcd}
C_0 \arrow[d, bend right=40, "l'_0"'] \arrow[d, bend left=40, "l'_2 u_2"] \arrow[d, phantom, "\overset{\beta'_2}{\Rightarrow}"] \\
C'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C_0 \arrow[d, bend right=40, "l'_0"'] \arrow[d, bend left=40, "l'_2 u_2"] \arrow[d, phantom, "\overset{\beta'_2}{\Rightarrow}"] \\
C'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C_2 \arrow[d, bend right=40, "l'_2"'] \arrow[d, bend left=40, "l'_2"] \arrow[d, phantom, "\overset{=}{\Rightarrow}"] \\
C'
\end{tikzcd}$$

permettent de définir un morphisme de foncteurs $\alpha_2 : h_0 \longrightarrow h_2$, par la propriété “2-universelle”. On a donc prouvé que $1_{C'}$ est $\mathbb{I}$-homotope à $l'_2 r$. Or, I admet un objet initial, et est donc asphérique (1.1.13). On en déduit que $I \longrightarrow e$ est universellement dans $\mathcal{W}$ (proposition 1.1.4), et il résulte donc du lemme d'homotopie 1.5.6, (b) que $l'_2 r$ est une équivalence faible. Comme $r l'_2 = 1_{C_2}$, cela prouve, en vertu de la propriété de saturation faible FS3, que l'_2 est une équivalence faible, et achève la démonstration. □

Remarque 2.3.4. — Au cours de la démonstration précédente, on a montré en particulier que si u_1 est un isomorphisme, alors l_2 est un homotopisme (cf. 1.5.15).

2.3.5. — Revenons au cas où I est une petite catégorie arbitraire. Soient A une petite catégorie, et $F : I \longrightarrow \widehat{A}$ un foncteur noté indiciellement :

$$F_i := F(i) \ , \quad i \in \mathsf{Ob}(I) \ , \qquad F_k := F(k) \ , \quad k \in \mathsf{Fl}(I) \quad .$$

On se propose d'étudier le foncteur canonique (cf. 2.2.3)

$$K = K_{i_A F} : C = \textstyle\int i_A F \longrightarrow \varinjlim i_A F \simeq i_A(F') = A/F' \quad ,$$

où F' désigne la limite inductive $\varinjlim F$. Explicitons le foncteur K. Pour tout i, $i \in \mathsf{Ob}(I)$, notons $\varepsilon_i : F_i \longrightarrow F'$ le morphisme canonique, de sorte que pour tout morphisme $k : i \longrightarrow i'$ de I, le triangle

$$\begin{tikzcd} F_i \arrow[rr, "F_k"] \arrow[dr, "\varepsilon_i"'] & & F_{i'} \arrow[dl, "\varepsilon_{i'}"] \\ & F' & \end{tikzcd}$$

soit commutatif. Un objet de C est un triplet $(i, a, x : a \longrightarrow F_i)$, où $i \in \mathsf{Ob}(I)$, $a \in \mathsf{Ob}(A)$, $x \in \mathsf{Fl}(\widehat{A})$. On a

$$K(i, a, x : a \longrightarrow F_i) = (a, \varepsilon_i x : a \longrightarrow F')$$

$$a \xrightarrow{x} F_i \xrightarrow{\varepsilon_i} F' \quad .$$

Un morphisme

$$(i, a, x : a \longrightarrow F_i) \xrightarrow{(k,f)} (i', a', x' : a' \longrightarrow F_{i'})$$

de C est un couple (k, f), où $k : i \longrightarrow i'$ est une flèche de I, et $f : a \longrightarrow a'$ une flèche de A, rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "x"'] & a' \arrow[d, "x'"] \\ F_i \arrow[r, "F_k"'] & F_{i'} \end{tikzcd} \quad .$$

On a

$$K(k, f) = f \quad , \qquad \begin{tikzcd} a \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\varepsilon_i x"'] & & a' \arrow[dl, "\varepsilon_{i'} x'"] \\ & F' & \end{tikzcd} \qquad \varepsilon_{i'} x' f = \varepsilon_{i'} F_k x = \varepsilon_i x \quad .$$

Proposition 2.3.6. — *Le foncteur* $K : \int i_A F \longrightarrow \varinjlim i_A F$ *est une fibration.*

Démonstration. — On vérifie facilement qu'un morphisme (k, f) de $C = \int i_A F$ est cartésien relativement à K si et seulement si k est un isomorphisme. En particulier, la partie de $\mathsf{Fl}(C)$ formée des morphismes cartésiens est stable par composition. Soient maintenant $(i, a, x : a \longrightarrow F_i)$ un objet de C et

$$\begin{tikzcd} a' \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & a \arrow[dl, "\varepsilon_i x"] \\ & F' & \end{tikzcd}$$

un morphisme de A/F', $F' = \varinjlim F$, de but l'image de cet objet par K. Alors

$$(i, a', xf : a' \longrightarrow F_i) \xrightarrow{(1_i, f)} (i, a, x : a \longrightarrow F_i)$$

est un morphisme cartésien de C dont le but est l'objet donné de C, et dont l'image par K est le morphisme donné de A/F', ce qui démontre la proposition. $\square$

2.3.7. — Soit $(a, s : a \longrightarrow F')$ un objet de A/F'. On se propose d'étudier la fibre

$$C_s = \left(\textstyle\int i_A F\right)_s$$

du foncteur K au-dessus de cet objet. Les objets de C_s sont les objets $(i, a, x : a \longrightarrow F_i)$ de C tels que $\varepsilon_i x = s$, et les morphismes entre tels objets, les morphismes

$$(i, a, x : a \longrightarrow F_i) \xrightarrow{(k, 1_a)} (i', a, x' : a \longrightarrow F'_i)$$

de C (de sorte que le triangle

$$\begin{tikzcd} & a \arrow[dl, "x"'] \arrow[dr, "x'"] & \\ F_i \arrow[rr, "F_k"'] & & F_{i'} \end{tikzcd}$$

soit commutatif). Pour tout objet i de I, considérons la fibre $(A/F_i)_s$ du morphisme $i_A(\varepsilon_i) : A/F_i \longrightarrow A/F'$ au-dessus de $(a, s : a \longrightarrow F')$. Les objets de $(A/F_i)_s$ sont les couples $(a, x : a \longrightarrow F_i)$ tels que $\varepsilon_i x = s$, et les seuls morphismes sont les identités. Pour tout morphisme $k : i \longrightarrow i'$ de I, on en déduit un foncteur

$$(A/F_i)_s \xrightarrow{(i_A(F_k))_s} (A/F_{i'})_s \quad ,$$

associant à un objet $(a, x : a \longrightarrow F_i)$ de $(A/F_i)_s$ l'objet $(a, F_k x : a \longrightarrow F_{i'})$ de $(A/F_{i'})_s$. On définit ainsi un foncteur $(i_A F)_s : I \longrightarrow \mathcal{C}at$, et par suite, on peut former la catégorie

$$\textstyle\int (i_A F)_s \quad ,$$

dont les objets sont les triplets $(i, a, x : a \longrightarrow F_i)$, $i \in \mathsf{Ob}(I)$, tels que $(a, x : a \longrightarrow F_i)$ soit un objet de $(A/F_i)_s$, autrement dit tels que $\varepsilon_i x = s$, et les morphismes les couples

$$(i, a, x : a \longrightarrow F_i) \xrightarrow{(k, 1_a)} (i', a, x' : a \longrightarrow F_{i'}) \quad , \qquad k : i \longrightarrow i' \in \mathsf{Fl}(I) \quad ,$$

(puisque les seuls morphismes de $(A/F_{i'})_s$ sont les identités) tels que le triangle

$$\begin{tikzcd} & a \arrow[dl, "x"'] \arrow[dr, "x'"] & \\ F_i \arrow[rr, "F_k"'] & & F_{i'} \end{tikzcd}$$

soit commutatif. On a donc démontré :

Lemme 2.3.8. — *Soit* $(a, s : a \longrightarrow F')$ *un objet de* A/F'*. Alors on a un isomorphisme canonique*

$$\left(\textstyle\int i_A F\right)_s \;\simeq\; \textstyle\int (i_A F)_s \quad .$$

2.3.9. — Supposons maintenant que la catégorie I soit la catégorie engendrée par le graphe

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & 2 \\ 1 & \end{tikzcd} ,$$

de sorte que la donnée du foncteur $F : I \longrightarrow \widehat{A}$ soit équivalente à la donnée d'un diagramme

$$\begin{tikzcd} F_0 \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[d, "\varphi_1"'] & F_2 \\ F_1 & \end{tikzcd}$$

de $\widehat{A}$, la limite inductive F' du foncteur F étant la somme amalgamée, de sorte qu'on ait un carré cocartésien

$$\begin{tikzcd} F_0 \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[d, "\varphi_1"'] & F_2 \arrow[d, "\varepsilon_2"] \\ F_1 \arrow[r, "\varepsilon_1"'] & F' \end{tikzcd} .$$

Proposition 2.3.10. — *En gardant les notations ci-dessus, si* φ_1 *est un monomorphisme, alors le foncteur canonique*

$$K : C = \int \begin{smallmatrix} A/F_0 \longrightarrow A/F_2 \\ \downarrow \\ A/F_1 \end{smallmatrix} \longrightarrow A/F'$$

est une fibration à fibres contractiles.

Démonstration. — Comme en vertu de la proposition 2.3.6, le foncteur K est une fibration, il suffit de montrer que pour tout objet $(a, s : A \longrightarrow F')$ de A/F', la fibre C_s de K au-dessus de cet objet est contractile. En vertu du lemme 2.3.8, on a

$$C_s = \int \begin{smallmatrix} (A/F_0)_s \longrightarrow (A/F_2)_s \\ \downarrow \\ (A/F_1)_s \end{smallmatrix} \quad .$$

En considérant s comme un élément de $F'(a) = F_1(a) \amalg_{F_0(a)} F_2(a)$, on distingue deux cas.

a) L'élément s de $F'(a)$ n'appartient pas à l'image de $F_0(a)$ dans $F'(a)$. Alors on vérifie immédiatement que

$$C_s = \int \begin{smallmatrix} \varnothing & \longrightarrow & \varnothing \\ \downarrow & & \\ e & & \end{smallmatrix} \qquad \text{ou} \qquad C_s = \int \begin{smallmatrix} \varnothing & \longrightarrow & e \\ \downarrow & & \\ \varnothing & & \end{smallmatrix} \qquad ,$$

et C_s est réduite à la catégorie ayant un seul objet, et l'identité de cet objet comme seul morphisme.

b) L'élément s de $F'(a)$ appartient à l'image de $F_0(a)$ dans $F'(a)$. Alors on vérifie facilement que $(A/F_0)_s \longrightarrow (A/F_1)_s$ est un isomorphisme (on utilise que $\varphi_1 : F_0 \longrightarrow F_1$ est un monomorphisme). En vertu de la remarque 2.3.4, le morphisme canonique

$$(A/F_2)_s \longrightarrow \int \begin{smallmatrix} (A/F_0)_s & \longrightarrow & (A/F_2)_s \\ \downarrow & & \\ (A/F_1)_s & & \end{smallmatrix} \simeq C_s$$

est donc un homotopisme. Or, le morphisme $\varepsilon_2 : F_2 \longrightarrow F'$ est un monomorphisme (car φ_1 est un monomorphisme), et par suite $(A/F_2)_s$ est la catégorie ponctuelle. On en déduit que la catégorie C_s est contractile, ce qui prouve la proposition. $\square$

Remarque 2.3.11. — En vertu de la proposition 1.5.19, si φ_1 est un monomorphisme, le foncteur K ci-dessus est donc coasphérique (cf. 1.1.24), et en particulier une équivalence faible.

Corollaire 2.3.12. — *Soient A une petite catégorie,*

$$\begin{tikzcd} F_0 \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[d, "\varphi_1"'] & F_2 \arrow[d, "\varepsilon_2"] \\ F_1 \arrow[r, "\varepsilon_1"'] & F' \end{tikzcd}$$

un carré cocartésien de $\widehat{A}$, et supposons que φ_1 soit un monomorphisme. Alors si φ_1 (resp. φ_2) *est une équivalence faible, il en est de même de ε_2* (resp. ε_1).

Démonstration. — Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd} A/F_0 \arrow[r, "u_2 = i_A(\varphi_2)"] \arrow[d, "u_1 = i_A(\varphi_1)"'] & A/F_2 \arrow[d, "l_2"] \arrow[ddr, "i_A(\varepsilon_2)"] & \\ A/F_1 \arrow[r, "l_1"] \arrow[drr, "i_A(\varepsilon_1)"'] & \int \begin{smallmatrix} A/F_0 & \longrightarrow & A/F_2 \\ \downarrow & & \\ A/F_1 & & \end{smallmatrix} \arrow[dr, "K"] & \\ & & A/F' \end{tikzcd} \quad ,$$

où l_1, l_2 et K désignent les foncteurs canoniques (cf. 2.3.2 et 2.3.5), et dont les deux triangles sont commutatifs (mais pas le carré). Si φ_1 (resp. φ_2) est une équivalence faible, alors u_1 (resp. u_2) est une équivalence faible, et en vertu de la proposition 2.3.3, il en est de même de l_2 (resp. l_1). Or, comme φ_1 est un monomorphisme, en vertu de la remarque précédente, K est une équivalence faible. On en déduit que $i_A(\varepsilon_2)$ (resp. $i_A(\varepsilon_1)$) est une équivalence faible de $\mathcal{C}at$, autrement dit, que ε_2 (resp. ε_1) est une équivalence faible de $\widehat{A}$, ce qui achève la démonstration. $\square$

Corollaire 2.3.13. — *Soient A une petite catégorie, et*

$$\begin{tikzcd}
F_0 \arrow[rr, "\varphi_2"] \arrow[dr, "\varphi_1"] \arrow[dd, "\chi_0"'] & & F_2 \arrow[dr, "\varepsilon_2"] \arrow[dd, "\chi_2" near start] & \\
& F_1 \arrow[rr, "\varepsilon_1" near start] \arrow[dd, "\chi_1" near start] & & F' \arrow[dd, "\chi'"] \\
G_0 \arrow[rr, "\psi_2" near end] \arrow[dr, "\psi_1"'] & & G_2 \arrow[dr, "\eta_2"] & \\
& G_1 \arrow[rr, "\eta_1"'] & & G'
\end{tikzcd}$$

un cube commutatif de $\widehat{A}$ dont les faces horizontales sont cocartésiennes, et tel que φ_1, ψ_1 soient des monomorphismes, et χ_0, χ_1, χ_2 des équivalences faibles. Alors χ' est une équivalence faible.

Démonstration. — On a un carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
\displaystyle\int \begin{smallmatrix} A/F_0 \longrightarrow A/F_2 \\ \downarrow \\ A/F_1 \end{smallmatrix} \arrow[rr, "K"] \arrow[d, "\int i_A \star \chi"'] & & A/F' \arrow[d, "i_A(\chi')"] \\
\displaystyle\int \begin{smallmatrix} A/G_0 \longrightarrow A/G_2 \\ \downarrow \\ A/G_1 \end{smallmatrix} \arrow[rr, "K'"'] & & A/G'
\end{tikzcd} \quad ,$$

où χ désigne le morphisme de foncteurs défini par χ_0, χ_1, χ_2, et K et K' les foncteurs canoniques (cf. 2.3.5). En vertu de la proposition 2.3.1 et de la remarque 2.3.11, les foncteurs $\int i_A \star \chi$, K et K' sont des équivalences faible, et il en est donc de même de $i_A(\chi')$, ce qui prouve le corollaire. $\square$

Proposition 2.3.14. — *Soient I un ensemble bien ordonné, A une petite catégorie, et $F : I \longrightarrow \widehat{A}$ un foncteur (où I désigne aussi la catégorie associée à l'ensemble ordonné I) tel que pour tout $i \leqslant j$, le morphisme $F_i \longrightarrow F_j$ soit un monomorphisme. Alors le foncteur canonique*

$$K : C = \textstyle\int i_A F \longrightarrow A/F' \quad ,$$

où $F' = \varinjlim F$, est une fibration à fibres contractiles.

Démonstration. — Soit $(a, s : a \longrightarrow F')$ un objet de A/F', et considérons s comme élément de $F'(a)$. Comme les morphismes de transition $F_i \longrightarrow F_j$ sont des monomorphismes, $F'(a)$ s'identifie à la réunion croissante des $F_i(a)$. Comme I est bien ordonné, il existe un plus petit élément i_s de I tel que $s \in F_{i_s}(a)$. Alors on vérifie facilement que la fibre C_s de K au-dessus de l'objet $(a, s : a \longrightarrow F')$ s'identifie à la catégorie correspondant à l'ensemble ordonné formé des $i \in I$ tels que $i_s \leqslant i$. Cette catégorie ayant un objet initial, elle est contractile (1.5.17). Comme en vertu de la proposition 2.3.6, K est une fibration, cela achève la démonstration. □

Remarque 2.3.15. — En vertu de la proposition 1.5.19, le foncteur K ci-dessus est donc coasphérique (cf. 1.1.24), et en particulier une équivalence faible.

Corollaire 2.3.16. — *Soient I une catégorie correspondant à un ensemble bien ordonné, A une petite catégorie, $F, G : I \rightrightarrows \widehat{A}$ deux foncteurs, et $\varphi : F \longrightarrow G$ un morphisme de foncteurs. On suppose :*

(a) *pour tout i et j dans I, si $i \leqslant j$, les morphismes $F_i \longrightarrow F_j$ et $G_i \longrightarrow G_j$ sont des monomorphismes ;*

(b) *pour tout i dans I, le morphisme $\varphi_i : F_i \longrightarrow G_i$ est une équivalence faible.*

Alors $\varinjlim \varphi : \varinjlim F \longrightarrow \varinjlim G$ est une équivalence faible.

Démonstration. — En effet, on a un carré commutatif de $\mathcal{C}at$

$$\begin{array}{ccc}
\int i_A F & \longrightarrow & A/\varinjlim F \\
{\scriptstyle \int i_A \star \varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_A(\varinjlim \varphi)} \\
\int i_A G & \longrightarrow & A/\varinjlim G
\end{array}$$

dont les flèches horizontales sont, en vertu de la remarque précédente, des équivalences faibles. Comme $\int i_A \star \varphi$ est une équivalence faible (proposition 2.3.1), il en est de même de $i_A(\varinjlim \varphi)$, ce qui démontre le corollaire. □

Corollaire 2.3.17. — *Pour toute petite catégorie A, la partie de $\mathsf{Fl}(\widehat{A})$ formée des flèches qui sont à la fois des équivalences faibles et des monomorphismes est stable par composition transfinie. Autrement dit, pour tout ensemble bien ordonné I, et tout foncteur $F : I \longrightarrow \widehat{A}$ tel que les morphismes $F_i \longrightarrow F_j$, $i \leqslant j$, $i, j \in I$, soient des monomorphismes et des équivalences faibles, le morphisme canonique $F_0 \longrightarrow \varinjlim F$, où 0 désigne le plus petit élément de I, est une équivalence faible (et un monomorphisme).*

Démonstration. — Le corollaire est une conséquence immédiate du corollaire précédent, appliqué au morphisme du foncteur constant de valeur F_0 vers le foncteur F défini par les flèches $F_0 \longrightarrow F_i$, $i \in I$. □

Les corollaires 2.3.16 et 2.3.17 seront généralisés au paragraphe suivant.

2.4. Catégories filtrantes et asphéricité

2.4.1. — On rappelle qu'une catégorie *pseudo-filtrante* est une catégorie I satisfaisant aux deux conditions suivantes :

PS1 tout diagramme de I de la forme :

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & i_1 \\ i \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & i_2 \end{tikzcd}$$

peut être inséré dans un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & i_1 \arrow[dr] & \\ i \arrow[ur] \arrow[dr] & & i' \\ & i_2 \arrow[ur] & \end{tikzcd} \quad ;$$

PS2 pour toute double flèche $k_1, k_2 : i \rightrightarrows j$ de I, il existe une flèche $l : j \longrightarrow j'$ de I telle que $lk_1 = lk_2$.

Une catégorie I est dite *filtrante* si elle est pseudo-filtrante, non vide, et connexe. On vérifie facilement qu'en présence de PS2, cela signifie que I est non vide, et que pour tout couple d'objets i_1, i_2 de I, il existe un objet i de I, et des flèches $i_1 \longrightarrow i$ et $i_2 \longrightarrow i$ de I. Un ensemble ordonné est dit *filtrant* si la catégorie correspondante l'est. Si I est un ensemble ordonné non vide, il est filtrant si et seulement si pour tout couple d'éléments i_1, i_2 de I, il existe un élément i de I tel que $i_1 \leqslant i$ et $i_2 \leqslant i$. Tout ensemble totalement ordonné non vide est filtrant. Un ensemble ordonné fini est filtrant si et seulement si il admet un plus grand élément.

2.4.2. — On rappelle qu'un foncteur *cofinal* est un foncteur $u : I \longrightarrow J$ tel que pour tout objet j de J, la catégorie $j\backslash I$ soit connexe non vide. Si I et J sont des petites catégories, dire que le foncteur u est cofinal revient à dire qu'il est $\mathcal{W}_0$-coasphérique, où $\mathcal{W}_0$ est le localisateur fondamental des exemples 1.1.31 et 2.1.2. Si I est une catégorie satisfaisant à la condition PS1, et en particulier si elle est pseudo-filtrante ou filtrante, on vérifie facilement qu'un foncteur $u : I \longrightarrow J$ *pleinement fidèle* est cofinal si et seulement si pour tout objet j de J, la catégorie $j\backslash I$ est non vide. Si I et J sont des petites catégories cela signifie que u est $\mathcal{W}_{gr}$-coasphérique, où $\mathcal{W}_{gr}$ désigne le localisateur fondamental grossier non trivial des exemples 1.1.30 et 2.1.2.

Lemme 2.4.3. — *Soit $u : I \longrightarrow J$ un foncteur.*

(a) *Si la catégorie I est pseudo-filtrante, alors pour tout objet j de J, la catégorie $j\backslash I$ l'est aussi.*

(b) *Si la catégorie I est pseudo-filtrante, et si le foncteur u est cofinal, alors pour tout objet j de J, la catégorie $j\backslash I$ est filtrante.*

Démonstration. — Une vérification immédiate prouve l'assertion (a), et l'assertion (b) en résulte aussitôt. □

Lemme 2.4.4. — *Soit J un ensemble ordonné filtrant infini. Alors il existe un ensemble bien ordonné I, et une famille croissante $(J_i)_{i\in I}$ de sous-ensembles ordonnés filtrants de J telle que*

$$J = \bigcup_{i\in I} J_i \quad , \qquad \mathsf{card}(J_i) \ < \ \mathsf{card}(J) \quad , \qquad i \in I \quad .$$

Démonstration. — On procède en plusieurs étapes.

a) Il existe une application

$$\mathsf{Filt} : \mathcal{P}(J) \longrightarrow \mathcal{P}(J) \quad ,$$

où $\mathcal{P}(J)$ désigne l'ensemble des parties de J, telle que pour toute partie E de J, $\mathsf{Filt}(E)$ soit un sous-ensemble ordonné filtrant de J, contenant E, tel que

$$\mathsf{card}(\mathsf{Filt}(E)) = \begin{cases} \text{fini si } E \text{ est finie} \\ \mathsf{card}(E) \text{ sinon} \end{cases} .$$

En effet, si l'ensemble E est fini, on pose $\mathsf{Filt}(E) = E \cup \{j\}$, où j est un majorant de E dans J (qui existe puisque J est filtrant et E fini). Si E est infini, on définit par récurrence une suite croissante $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de J, par $E_0 = E$, E_{n+1} étant obtenue de E_n par adjonction, pour chaque couple j, j' d'éléments de E_n, d'un majorant de j et j' dans J. On pose

$$\mathsf{Filt}(E) = \bigcup_{n\geqslant 0} E_n \quad ,$$

et il est immédiat que $\mathsf{Filt}(E)$ est un sous-ensemble ordonné filtrant de J, et que $\mathsf{card}(\mathsf{Filt}(E)) = \mathsf{card}(E)$.

b) Il existe un ensemble bien ordonné I tel que $\mathsf{card}(I) = \mathsf{card}(J)$, et tel que pour tout i, $i \in I$,

$$\mathsf{card}\{i' \in I \mid i' < i\} \ < \mathsf{card}(J) \quad .$$

En effet, en vertu du théorème de Zermelo, il existe une relation de bon ordre $\leqslant$ sur l'ensemble sous-jacent à J. Si l'ensemble des éléments j de J tels que

$$\mathsf{card}\{j' \in J \mid j' < j\} = \mathsf{card}(J)$$

est vide, on peut prendre $I = J$ muni de ce bon ordre. Si cet ensemble est non vide, il admet un plus petit élément j_0. On peut alors prendre $I = \{j \in J \mid j < j_0\}$, muni du bon ordre induit, et remarquer que $\mathsf{card}(I) = \mathsf{card}(J)$.

c) On va définir, par récurrence transfinie, une famille croissante $(J_i)_{i\in I}$ de sous-ensembles ordonnés filtrants de J telle que $J = \bigcup\limits_{i\in I} J_i$, et

$$(*) \qquad \mathsf{card}(J_i) = \begin{cases} \text{fini si } \mathsf{card}\{i' \in I \mid i' < i\} \text{ est fini} \\ \mathsf{card}\{i' \in I \mid i' < i\} \text{ sinon} \end{cases} ,$$

ce qui prouvera le lemme. Pour cela, choisissons une bijection $j : I \longrightarrow J,\ i \mapsto j_i$. Soit i un élément de I, et supposons qu'on a défini $J_{i'}$ pour $i' < i$. On pose

$$J_i = \mathsf{Filt}\Big(\big(\bigcup_{i'<i} J_{i'}\big) \cup \{j_i\}\Big) \quad .$$

La condition $(*)$ se vérifie aussitôt par récurrence transfinie, ce qui achève la démonstration. □

Lemme 2.4.5. — *Soit I une petite catégorie filtrante. Alors il existe un ensemble ordonné filtrant J, et un foncteur cofinal $J \longrightarrow I$, l'ensemble ordonné J étant identifié à la catégorie correspondante* (Deligne, SGA4, I, Exposé 1, 8.1.6 [**2**]).

Démonstration. — On suppose d'abord que l'ensemble préordonné $\mathsf{Ob}(I)$ n'a pas de plus grand élément, autrement dit (puisque la catégorie I est filtrante) que pour tout objet i de I, il existe une flèche $i \longrightarrow i'$ de I telle qu'il n'y ait aucun morphisme de i' vers i.

Un *sous-graphe* de I est un couple $G = (S, F)$, où S est une partie de $\mathsf{Ob}(I)$ et F une partie de $\mathsf{Fl}(I)$ telles que la source et le but de toute flèche de I appartenant à F soient dans S. Un *sommet* de G est un objet de I appartenant à S, et une *arête* de G est une flèche de I appartenant à F. On ne suppose pas que le composé dans I des deux arêtes composables de G soit une arête de G, ni que l'identité dans I d'un sommet de G soit une arête de G. Si $G = (S, F)$ est un sous-graphe de I, on dit qu'un sommet e de G est un *sommet final* de G si

(a) pour tout sommet s de G, il existe une arête unique $f_s : s \longrightarrow e$ de G ;
(b) pour toute arête $f : s \longrightarrow t$ de G, on a $f_s = f_t f$;
(c) $f_e = 1_e$.

On remarque que si $G_1 = (S_1, F_1)$ et $G_2 = (S_2, F_2)$ sont deux sous-graphes de I, alors $G_1 \cup G_2 = (S_1 \cup S_2, F_1 \cup F_2)$ est un sous-graphe de I.

Soit J l'ensemble des sous-graphes *finis* G de I ayant un *unique* sommet final e_G, ordonné par inclusion

$$(S, F) \subset (S', F') \iff S \subset S' \text{ et } F \subset F' \quad .$$

Si $G = (S, F)$ est un sous-graphe fini de I, il existe $G' \in J$ tel que $G \subset G'$. En effet, comme la catégorie I est filtrante, et comme S est fini, il existe un objet e_0 de I et une famille $g_s : s \longrightarrow e_0$, $s \in S$, de morphismes de I. Comme F est fini, il existe un morphisme $g : e_0 \longrightarrow e_1$ de I tel que pour toute arête $f : s \longrightarrow t$ de G, on ait $gg_s = gg_t f$. Comme l'ensemble préordonné $\mathsf{Ob}(I)$ n'a pas de plus grand élément, il existe un morphisme $h : e_1 \longrightarrow e$ de I tel que $e \notin S$. Il suffit alors de prendre

$$G' = \big(S \cup \{e\},\, F \cup \{f_s \mid s \in S\} \cup \{1_e\}\big)\ , \quad \text{où} \quad f_s = hgg_s\ , \quad s \in S \quad .$$

On en déduit que l'ensemble ordonné J est filtrant : si G_1, $G_2 \in J$, en vertu de ce qui précède, il existe $G \in J$ tel que $G_1 \cup G_2 \subset G$.

On définit un foncteur $u : J \longrightarrow I$ par

$$G \longmapsto e_G \quad , \qquad (G \subset G') \;\longmapsto\; (e_G \longrightarrow e_{G'}) \quad ,$$

où e_G (resp. $e_{G'}$) désigne l'unique sommet final de G (resp. G'), et $e_G \longrightarrow e_{G'}$ l'unique (en vertu de (a)) arête de G' de e_G vers $e_{G'}$. Il résulte alors facilement des conditions (b) et (c) qu'on définit ainsi un foncteur. Ce foncteur est cofinal :

i) Si i est un objet de I, et si l'on pose $G = (\{i\}, \{1_i\})$, alors $G \in J$, et 1_i est un morphisme de i vers $u(G) = i$, ce qui prouve que la catégorie $i\backslash J$ est non vide.

ii) Si i est un objet de I, et $(G_1, g_1 : i \longrightarrow u(G_1))$, $(G_2, g_2 : i \longrightarrow u(G_2))$ deux objets de $i\backslash J$, en vertu de ce qui a été démontré précédemment, il existe $G \in J$ contenant le sous-graphe fini de I

$$\{i \longrightarrow u(G_1)\} \cup \{i \longrightarrow u(G_2)\} \cup G_1 \cup G_2 \quad ,$$

où $\{i \longrightarrow u(G_1)\}$ et $\{i \longrightarrow u(G_2)\}$ désignent par abus de notations les sous-graphes $(\{i, u(G_1)\}, \{g_1\})$ et $(\{i, u(G_2)\}, \{g_2\})$ de I. Les inclusions $G_1 \subset G$ et $G_2 \subset G$ définissent alors, par application du foncteur u, des morphismes $u(G_1) \longrightarrow u(G)$ et $u(G_2) \longrightarrow u(G)$ qui, en vertu de la condition (b), rendent commutatif le carré

$$\begin{tikzcd}
 & u(G_1) \arrow[dr] & \\
i \arrow[ur, "g_1"] \arrow[dr, "g_2"'] & & u(G) \\
 & u(G_2) \arrow[ur] &
\end{tikzcd} \quad ,$$

ce qui prouve la connexité de la catégorie $i\backslash J$.

Cas général. La catégorie $I \times \mathbb{N}$ (où $\mathbb{N}$ désigne la catégorie associée à l'ensemble ordonné des entiers naturels) est filtrante, et l'ensemble préordonné de ses objets n'a pas de plus grand élément. En vertu de ce qui précède, il existe donc un ensemble ordonné filtrant J, et un foncteur cofinal $J \longrightarrow I \times \mathbb{N}$. Pour conclure, il suffit de considérer le composé de ce foncteur avec la première projection $I \times \mathbb{N} \longrightarrow I$, qui est un foncteur cofinal, et de remarquer que le composé de deux foncteurs cofinaux est cofinal. $\square$

Lemme 2.4.6. — *Soient I une petite catégorie filtrante, et $F : I \longrightarrow \mathcal{C}at$ un foncteur. Alors les fibres du foncteur canonique* (2.2.3)

$$K_F : \textstyle\int F \longrightarrow \varinjlim F$$

sont des catégories filtrantes.

Démonstration. — Pour tout objet i de I, on note $\varepsilon_i : F(i) \longrightarrow \varinjlim F$ le foncteur canonique. On rappelle que pour tout objet (i, a) de $\int F$, $i \in \mathsf{Ob}(I)$, $a \in \mathsf{Ob}(F(i))$, on a $K_F(i, a) = \varepsilon_i(a)$, et pour toute flèche $(k, f) : (i, a) \longrightarrow (i', a')$ de $\int F$, où $k : i \longrightarrow i'$ est une flèche de I, et $f : F(k)(a) \longrightarrow a'$ une flèche de $F(i')$, on a $K_F(k, f) = \varepsilon_{i'}(f)$. Soit b un objet de la catégorie $\varinjlim F$.

a) La fibre $\big(\int F\big)_b$ est non vide : il existe un objet i de I, et un objet a de $F(i)$ tels que $b = \varepsilon_i(a)$, ce qui implique que (i, a) est un objet de $\big(\int F\big)_b$.

b) Soient (i_1, a_1) et (i_2, a_2) deux objets de $\big(\int F\big)_b$, de sorte que $\varepsilon_{i_1}(a_1) = b = \varepsilon_{i_2}(a_2)$. Comme $\mathsf{Ob}(\varinjlim F) = \varinjlim \mathsf{Ob}(F)$, et comme la catégorie I est filtrante, il existe un objet i de I, et des morphismes $k_1 : i_1 \longrightarrow i$, $k_2 : i_2 \longrightarrow i$ tels que $F(k_1)(a_1) = F(k_2)(a_2)$. Alors (i, a), où $a = F(k_1)(a_1) = F(k_2)(a_2)$ est un objet de $\big(\int F\big)_b$, et $(k_1, 1_a) : (i_1, a_1) \longrightarrow (i, a)$, $(k_2, 1_a) : (i_2, a_2) \longrightarrow (i, a)$ des morphismes de $\big(\int F\big)_b$.

c) Soit une double flèche de $\big(\int F\big)_b$

$$(i, a) \underset{(k_2, f_2)}{\overset{(k_1, f_1)}{\rightrightarrows}} (i', a') \quad ,$$

de sorte que $\varepsilon_i(a) = b = \varepsilon_{i'}(a')$ et $\varepsilon_{i'}(f_1) = 1_b = \varepsilon_{i'}(f_2)$. Comme la catégorie I est filtrante, il existe une flèche $k' : i' \longrightarrow i''$ de I telle que $k'k_1 = k'k_2$, et on a

$$\varepsilon_{i''}(F(k')(f_1)) = \varepsilon_{i'}(f_1) = 1_b = \varepsilon_{i'}(f_2) = \varepsilon_{i''}(F(k')(f_2)) \quad .$$

Comme $\mathsf{Fl}(\varinjlim F) = \varinjlim \mathsf{Fl}(F)$ (puisque I est une catégorie filtrante), il existe donc une flèche $k'' : i'' \longrightarrow i'''$ de I telle que

$$F(k'')F(k')(f_1) = F(k'')F(k')(f_2) \quad .$$

Posons $k = k''k'$. Alors

$$(i', a') \xrightarrow{(k, 1_{F(k)(a')})} (i''', F(k)(a'))$$

est une flèche de $\big(\int F\big)_b$, et

$$(k, 1_{F(k)(a')})(k_1, f_1) = (k, 1_{F(k)(a')})(k_2, f_2) \quad ,$$

ce qui achève la démonstration. □

Dans la suite, on se fixe, une fois pour toutes, un localisateur fondamental faible $\mathcal{W}$.

Lemme 2.4.7. — *Soient I un ensemble bien ordonné non vide, et $F : I \longrightarrow \mathcal{C}at$ un foncteur tel que pour tout couple i, j, $i < j$, d'éléments de I, le morphisme $F(i) \longrightarrow F(j)$ induise un isomorphisme de la catégorie $F(i)$ sur un crible de la catégorie $F(j)$. Si pour tout i, $i \in I$, la catégorie $F(i)$ est asphérique, il en est de même de la catégorie limite inductive $\varinjlim F$.*

Démonstration. — Considérons le diagramme de foncteurs canoniques

$$\begin{tikzcd} & \int F \arrow[dl, "\theta_F"'] \arrow[dr, "K_F"] & \\ I & & \varinjlim F \end{tikzcd} \quad .$$

Par hypothèse, θ_F est une cofibration à fibres asphériques, et par suite, en vertu de la proposition 1.1.16, θ_F est un foncteur asphérique, et en particulier une équivalence faible. D'autre part, on vérifie facilement que l'hypothèse faite sur le foncteur F implique que si l'on pose $A = \varinjlim F$, alors pour tout i, $i \in I$, la catégorie $F(i)$ s'identifie à un crible de la catégorie A. Grâce à la bijection naturelle entre les cribles de A et les sous-préfaisceaux de l'objet final de $\widehat{A}$, on vérifie aussitôt que la proposition 2.3.14 implique que K_F est une fibration à fibres contractiles, donc asphériques (1.5.19). On en déduit que K_F est un foncteur coasphérique, et en particulier une équivalence faible (1.1.24). Comme I est un ensemble bien ordonné non vide, la catégorie correspondante admet un objet initial, et elle est donc asphérique (1.1.13). Les morphismes θ_F et K_F étant des équivalences faibles, cela prouve que la catégorie $\varinjlim F$ est asphérique, et achève la démonstration. $\square$

Lemme 2.4.8. — *Soit J un ensemble ordonné filtrant. Alors J, considéré comme petite catégorie, est une catégorie asphérique.*

Démonstration. — On raisonne par récurrence transfinie sur le cardinal de J. Si J est fini, J étant filtrant, il admet un plus grand élément, et la catégorie associée à J admet un objet final et est donc asphérique. Supposons donc que J soit infini, et que l'assertion soit établie pour tout ensemble ordonné filtrant de cardinal strictement plus petit que celui de J. En vertu du lemme 2.4.4, il existe un ensemble bien ordonné I, et une famille croissante $(J_i)_{i\in I}$ de sous-ensembles ordonnés filtrants de J, telle que

$$J = \bigcup_{i\in I} J_i \quad , \qquad \mathsf{card}(J_i) < \mathsf{card}(J) \quad , \qquad i \in I \quad .$$

Par hypothèse de récurrence, pour tout i, $i \in I$, la catégorie J_i est asphérique. Soit J'_i le crible de J engendré par J_i

$$J'_i = \{j' \in J \mid \text{ il existe } j \in J_i \text{ tel que } j' \leqslant j\} \quad .$$

Le foncteur d'inclusion $J_i \hookrightarrow J'_i$ est coasphérique. En effet, pour tout objet j de J'_i, la catégorie $j\backslash J_i$ est un cocrible de J_i, qui est non vide, puisque J'_i est le crible engendré par J_i, et qui s'identifie donc à un sous-ensemble ordonné filtrant de J_i. L'hypothèse de récurrence implique donc que $j\backslash J_i$ est asphérique. On en déduit que J'_i est asphérique. Or, pour tout couple i, $i' \in I$, $i < i'$, J'_i est un crible de $J'_{i'}$, et $J = \varinjlim_{i\in I} J'_i$. L'assertion résulte donc du lemme 2.4.7. $\square$

Proposition 2.4.9. — *Toute petite catégorie filtrante est asphérique.*

Démonstration. — Soit I une petite catégorie filtrante. En vertu du lemme 2.4.5, il existe un ensemble ordonné filtrant J et un foncteur cofinal $u : J \longrightarrow I$. Pour tout objet i de I, la catégorie $i\backslash J$ est un ensemble ordonné filtrant. En effet, cette catégorie est filtrante d'après le lemme 2.4.3, (b), et il est évident qu'elle est un ensemble ordonné. Il résulte donc du lemme précédent que le foncteur u est coasphérique. Une nouvelle application de ce lemme implique alors que I est asphérique. $\square$

2.4.10. — On rappelle qu'un objet de *présentation finie* d'une catégorie M est un objet X de M tel que le foncteur

$$M \longrightarrow \mathcal{E}ns \quad , \qquad Y \longmapsto \mathsf{Hom}_M(X,Y)$$

commute aux limites inductives filtrantes. On vérifie facilement que si $M = \mathcal{C}at$ est la catégorie des petites catégories, alors toute catégorie finie est un objet de présentation finie de $\mathcal{C}at$ (la réciproque étant fausse).

Lemme 2.4.11. — *Il existe une catégorie test A, et un foncteur test $i : A \longrightarrow \mathcal{C}at$ tel que le foncteur*

$$i^* : \mathcal{C}at \longrightarrow \widehat{A}, \quad , \qquad C \longmapsto \big(a \mapsto \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}at}(i(a), C)\big)$$

commute aux limites inductives filtrantes.

Démonstration. — Il suffit de choisir une catégorie test A, et un foncteur test $i : A \longrightarrow \mathcal{C}at$ tel que pour tout objet a de A, $i(a)$ soit une catégorie de présentation finie, de sorte que le foncteur i^* commute aux limites inductives filtrantes. On peut prendre par exemple $A = \Delta$ et $i : \Delta \hookrightarrow \mathcal{C}at$ l'inclusion, i^* étant alors le foncteur nerf (1.8.25), ou prendre pour A une petite sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}at$ formée de catégories finies contractiles, stable par produits finis, et telle que Δ_1 soit un objet de A, et $i : A \hookrightarrow \mathcal{C}at$ l'inclusion (1.8.26). □

Proposition 2.4.12. — a) *Une petite limite inductive filtrante de petites catégories asphériques est asphérique.*

b) *Si le localisateur fondamental faible $\mathcal{W}$ est un localisateur fondamental, alors il est stable par petites limites inductives filtrantes, et en particulier, par composition transfinie.*

Démonstration. — En vertu du lemme précédent, on peut choisir une catégorie test A, et un foncteur test $i : A \longrightarrow \mathcal{C}at$ tel que le foncteur i^* commute aux limites inductives filtrantes. En vertu de la proposition 2.3.6, pour toute petite catégorie I, et tout foncteur $F : I \longrightarrow \mathcal{C}at$, le foncteur canonique

$$K_{i_A i^* F} : \textstyle\int i_A i^* F \longrightarrow \varinjlim i_A i^* F$$

est une fibration. Si en outre la catégorie I est filtrante, il résulte du lemme 2.4.6 que les fibres de ce foncteur sont des catégories filtrantes, et par suite qu'elles sont asphériques (proposition 2.4.9). On en déduit que le foncteur $K_{i_A i^* F}$ est alors coasphérique, et en particulier une équivalence faible (1.1.24).

a) Soient I une petite catégorie filtrante, et $F : I \longrightarrow \mathcal{C}at$ un foncteur à valeurs des catégories asphériques. Pour montrer que $\varinjlim F$ est une catégorie asphérique, il suffit de montrer que

$$i_A i^*(\varinjlim F) \simeq i_A(\varinjlim i^* F) \simeq \varinjlim i_A i^* F$$

l'est. Or, dans le diagramme de foncteurs canoniques

$$\begin{tikzcd} & \int i_A i^* F \arrow[dl, "\theta_{i_A i^* F}"'] \arrow[dr, "K_{i_A i^* F}"] & \\ I & & \varinjlim i_A i^* F \end{tikzcd} ,$$

on a vu que $K_{i_A i^* F}$ est une équivalence faible, et par hypothèse $\theta_{i_A i^* F}$ est une cofibration à fibres asphériques, donc aussi une équivalence faible (1.1.16). L'assertion résulte donc de la proposition 2.4.9.

b) Supposons que le localisateur fondamental faible $\mathcal{W}$ soit un localisateur fondamental, et soient I une petite catégorie filtrante, F, $G : I \longrightarrow \mathcal{C}at$ deux foncteurs, et $\alpha : F \longrightarrow G$ un morphisme de foncteurs qui soit une équivalence faible argument par argument. Pour montrer que

$$\varinjlim \alpha : \varinjlim F \longrightarrow \varinjlim G$$

est une équivalence faible, il suffit, en vertu de la proposition 1.8.6, (*a*), de montrer que

$$i_A i^*(\varinjlim \alpha) \simeq i_A \varinjlim (i^* \star \alpha) \simeq \varinjlim (i_A i^* \star \alpha)$$

l'est. Or, on a un carré commutatif dont les lignes sont des équivalences faibles

$$\begin{tikzcd} \int i_A i^* F \arrow[r, "K_{i_A i^* F}"] \arrow[d, "\int i_A i^* \star \alpha"'] & \varinjlim i_A i^* F \arrow[d, "\varinjlim i_A i^* \star \alpha"] \\ \int i_A i^* G \arrow[r, "K_{i_A i^* G}"'] & \varinjlim i_A i^* G \end{tikzcd} ,$$

et il résulte des propositions 1.8.6 et 2.3.1 qu'il en est de même de la flèche verticale de gauche, ce qui prouve l'assertion. □

Remarque 2.4.13. — On rappelle qu'un *rétracte* d'un objet X d'une catégorie M est un objet X' de M tel qu'il existe des morphismes $i : X' \longrightarrow X$ et $r : X \longrightarrow X'$ de M tels que $ri = 1_{X'}$. L'endomorphisme ir de X est alors un *projecteur* : $(ir)^2 = ir$. Si I désigne la catégorie ayant un seul objet, et un seul morphisme non identique p, tel que $p^2 = p$, et $F : I \longrightarrow M$ le foncteur qui envoie l'unique objet de I sur X et la flèche p sur l'endomorphisme ir de X, alors la catégorie I est filtrante, et on a un isomorphisme $\varinjlim F \simeq X'$. On dit qu'une classe d'objets d'une catégorie est *stable par rétractes* si tout rétracte d'un objet de cette classe appartient aussi à ladite classe. On dit qu'une classe de flèches est *stable par rétractes* si elle l'est comme classe d'objets de la catégorie des flèches. En vertu de ce qui précède, une classe d'objets ou de flèches qui est stable par limites inductives filtrantes l'est également par rétractes. Il résulte directement de l'axiome de saturation faible d'un localisateur fondamental faible que la classe des catégories asphériques est stable par rétractes. L'assertion (b) de la proposition précédente implique le corollaire suivant.

Corollaire 2.4.14. — *Si le localisateur fondamental faible $\mathcal{W}$ est un localisateur fondamental, alors il est stable par rétractes.*

Corollaire 2.4.15. — *Soit A une petite catégorie.*

(a) *Une petite limite inductive filtrante de préfaisceaux asphériques sur A est un préfaisceau asphérique.*
(b) *Si le localisateur fondamental faible $\mathcal{W}$ est un localisateur fondamental, alors la partie $\mathcal{W}_{\widehat{A}} = i_A^{-1}(\mathcal{W})$ de $\mathsf{Fl}(\widehat{A})$ formée des équivalences faibles est stable par petites limites inductives filtrantes, et en particulier par rétractes.*

Démonstration. — Le corollaire résulte de la proposition 2.4.12, du corollaire 2.4.14, et de la commutativité du foncteur i_A avec les limites inductives. □

Lemme 2.4.16. — *Soient I un ensemble ordonné filtrant admettant un plus petit élément i_0, $F, G : I \longrightarrow \mathcal{C}at$ deux foncteurs, de source l'ensemble ordonné I considéré comme une catégorie, $\alpha : F \longrightarrow G$ un morphisme de foncteurs, et x_{i_0} un objet de $G(i_0)$. On note x* (resp. *x_i*) *l'image de x_{i_0} dans $\varinjlim_I G$* (resp. *dans $G(i)$, pour $i \in I$*). *Alors on a un isomorphisme canonique $(\varinjlim_I F)/x \simeq \varinjlim_{i\in I}(F(i)/x_i)$.*

Démonstration. — Le lemme résulte de la description des limites inductives filtrantes dans $\mathcal{C}at$ et de la commutativité de ces limites avec les limites projectives finies. Les détails sont laissés au lecteur. □

Proposition 2.4.17. — a) *Une petite limite inductive filtrante de morphismes asphériques de $\mathcal{C}at$ est un foncteur asphérique.*

b) *Si le localisateur fondamental faible $\mathcal{W}$ est un localisateur fondamental, alors pour toute petite catégorie C, la classe des flèches de $\mathcal{C}at/C$ qui sont des équivalences faibles localement sur C est stable par petites limites inductives filtrantes.*

Démonstration. — Pour montrer l'assertion (a), considérons une petite catégorie filtrante I, deux foncteurs $F, G : I \longrightarrow \mathcal{C}at$, et un morphisme de foncteurs $\alpha : F \longrightarrow G$ tel que pour tout objet i de I, le morphisme $\alpha_i : F(i) \longrightarrow G(i)$ soit un foncteur asphérique. Il s'agit de montrer qu'alors le foncteur $\varinjlim_I \alpha : \varinjlim_I F \longrightarrow \varinjlim_I G$ est aussi asphérique. En vertu du lemme 2.4.5, on peut supposer que I est la catégorie associée à un ensemble ordonné, noté également I. Soit x un objet de $\varinjlim_I G$; on veut montrer que la catégorie $(\varinjlim_I F)/x$ est asphérique. Il existe i_0 dans I et un objet x_{i_0} de $G(i_0)$ tel que x soit l'image de x_{i_0} par le morphisme canonique. Quitte à remplacer I par le sous-ensemble ordonné de I formé des éléments de I qui sont supérieurs ou égaux à i_0, qui est cofinal dans I, on peut supposer que i_0 est le plus petit élément de I. En vertu du lemme précédent, on a alors un isomorphisme canonique $(\varinjlim_I F)/x \simeq \varinjlim_{i\in I}(F(i)/x_i)$, où pour tout $i \in I$, x_i désigne l'image de x_{i_0} dans $G(i)$.

Comme par hypothèse, pour tout $i \in I$, la catégorie $F(i)/_{x_i}$ est asphérique, l'assertion résulte alors de la proposition 2.4.12, (a). Quand le localisateur fondamental faible $\mathcal{W}$ est un localisateur fondamental, l'assertion (b) se démontre de façon analogue, en utilisant la partie (b) de la proposition 2.4.12. □

Corollaire 2.4.18. — a) *Une petite limite inductive filtrante de morphismes coasphériques de* $\mathcal{C}at$ *est un foncteur coasphérique.*

b) *Si le localisateur fondamental faible* $\mathcal{W}$ *est un localisateur fondamental, alors pour toute petite catégorie* C*, la classe des flèches de* $\mathcal{C}at/_C$ *qui sont des équivalences faibles colocalement sur* C *est stable par petites limites inductives filtrantes.*

Démonstration. — Le corollaire s'obtient de la proposition précédente par passage aux catégories opposées (*cf.* 1.1.24 et 2.1.1). □

Corollaire 2.4.19. — *Une petite limite inductive filtrante de petites catégories totalement asphériques est totalement asphérique.*

Démonstration. — Soient I une petite catégorie filtrante, et $F : I \longrightarrow \mathcal{C}at$ un foncteur à valeurs des catégories totalement asphériques. En vertu de la proposition 1.7.1, pour tout objet i de I, le morphisme diagonal $\Delta_{F(i)} : F(i) \longrightarrow F(i) \times F(i)$ est asphérique. Or, on vérifie facilement que le foncteur diagonal $\Delta_{\varinjlim_I F} : \varinjlim_I F \longrightarrow \varinjlim_I F \times \varinjlim_I F$ s'identifie à la limite inductive des foncteurs $\Delta_{F(i)}$, et il résulte de la proposition 2.4.17, (a), qu'il est asphérique. Une nouvelle application de la proposition 1.7.1 implique alors que la catégorie $\varinjlim_I F$ est totalement asphérique. □

Corollaire 2.4.20. — *Soient* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une famille de petites catégories indexée par les entiers naturels, et pour tout* n*,* $n \in \mathbb{N}$*,* $u_n, v_n : A_n \longrightarrow A_{n+1}$ *deux morphismes de* $\mathcal{C}at$*. On note* U *et* V *les foncteurs* $U, V : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{C}at$*, de source la catégorie associée à l'ensemble ordonné des entiers naturels, définis par les systèmes de morphismes* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *respectivement. Si pour tout* n*,* $n \in \mathbb{N}$*, il existe un morphisme de foncteurs* $\alpha_n : u_n \longrightarrow v_n$*, alors il existe un diagramme dans* $\mathcal{C}at$

$$\varinjlim_{\mathbb{N}} U \xrightarrow{\ i\ } C \xleftarrow{\ j\ } \varinjlim_{\mathbb{N}} V \quad ,$$

avec i *morphisme asphérique et* j *morphisme coasphérique. En particulier,* i *et* j *sont des équivalences faibles, et les images de* $\varinjlim_{\mathbb{N}} U$ *et* $\varinjlim_{\mathbb{N}} V$ *dans* Hot *sont isomorphes.*

Démonstration. — Pour tout n, $n \in \mathbb{N}$, le morphisme de foncteurs $\alpha_n : u_n \longrightarrow v_n$ définit un foncteur $h_n : \Delta_1 \times A_n \longrightarrow A_{n+1}$ tel que

$$h_n(e_0 \times 1_{A_n}) = u_n \qquad \text{et} \qquad h_n(e_1 \times 1_{A_n}) = v_n \quad ,$$

où e_0 et e_1 désignent les foncteurs de la catégorie ponctuelle vers Δ_1, définis respectivement par les objets 0 et 1 de Δ_1. On en déduit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
A_n \arrow[r, "\prod\limits_{\mathbb{N}_n} e_0 \times 1_{A_n}"] \arrow[d, "u_n"'] & \Big(\prod\limits_{\mathbb{N}_n} \Delta_1\Big) \times A_n \arrow[d, "\prod\limits_{\mathbb{N}_{n+1}} 1_{\Delta_1} \times h_n"] & A_n \arrow[l, "\prod\limits_{\mathbb{N}_n} e_1 \times 1_{A_n}"'] \arrow[d, "v_n"] \\
A_{n+1} \arrow[r, "\prod\limits_{\mathbb{N}_{n+1}} e_0 \times 1_{A_{n+1}}"'] & \Big(\prod\limits_{\mathbb{N}_{n+1}} \Delta_1\Big) \times A_{n+1} & A_{n+1} \arrow[l, "\prod\limits_{\mathbb{N}_{n+1}} e_1 \times 1_{A_{n+1}}"]
\end{tikzcd} ,$$

où pour tout entier k, $\mathbb{N}_k$ désigne l'ensemble ordonné des entiers naturels supérieurs ou égaux à k, les produits étant ordonnés par l'ordre décroissant des indices. Comme 0 (resp. 1) est un objet initial (resp. final) de Δ_1, il résulte de la proposition 1.1.11 (resp. de 1.1.24) que les flèches horizontales de gauche (resp. de droite) sont des morphismes asphériques (resp. coasphériques). Par passage à la limite inductive, on obtient donc en vertu de la proposition 2.4.17, (a), et du corollaire 2.4.18, (a), un diagramme

$$\varinjlim_{\mathbb{N}} U \xrightarrow{\ i\ } C \xleftarrow{\ j\ } \varinjlim_{\mathbb{N}} V \quad ,$$

tel que i soit asphérique et j coasphérique. $\square$

Lemme 2.4.21. — *Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de petites catégories indexée par les entiers naturels, et pour tout n, $n \in \mathbb{N}$, $I_n : A_n \longrightarrow A_{n+1}$ un morphisme de $\mathcal{C}at$. Si pour tout n, $n \in \mathbb{N}$, il existe un décalage sur le foncteur I_n (cf.* 1.9.5*), alors la limite inductive $\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} A_n$ (du foncteur $I : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{C}at$, de source la catégorie associée à l'ensemble ordonné des entiers naturels, défini par le système de morphismes $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{C}at$) est une catégorie asphérique.*

Démonstration. — Soit

$$I_n \xrightarrow{\ \alpha_n\ } D_n \xleftarrow{\ \beta_n\ } K_n \quad , \qquad n \in \mathbb{N} \quad ,$$

un décalage sur le foncteur I_n, de sorte que $D_n, K_n : A_n \longrightarrow A_{n+1}$ soient deux foncteurs (K_n étant un foncteur constant défini par un objet de A_{n+1}) et α_n, β_n des morphismes de foncteurs. On note $D, K : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{C}at$ les foncteurs définis par les systèmes de morphismes $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ respectivement. En vertu du corollaire 2.4.20, il existe alors un diagramme dans $\mathcal{C}at$

$$\varinjlim_{\mathbb{N}} I \longrightarrow C \longleftarrow \varinjlim_{\mathbb{N}} D \longrightarrow C' \longleftarrow \varinjlim_{\mathbb{N}} K$$

dont toutes les flèches sont des équivalences faibles. Comme $\varinjlim_{\mathbb{N}} K$ est une catégorie ponctuelle, cela prouve le lemme. $\square$

Proposition 2.4.22. — *La catégorie associée à l'ensemble ordonné formé des parties finies non vides, ordonnées par la relation d'inclusion, d'un ensemble dénombrable est une catégorie test faible.*

Démonstration. — Soit A la catégorie associée à l'ensemble ordonné formé des parties finies non vides de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels. Pour montrer que A est une catégorie test faible, il suffit, en vertu de la proposition 1.4.9, de prouver que pour toute petite catégorie C admettant un objet final, la catégorie $B = A/i_A^*(C)$ est asphérique. La catégorie B est la catégorie associée à l'ensemble ordonné dont les éléments sont les couples (E, p), où E est un sous-ensemble fini non vide de $\mathbb{N}$ et $p : \mathcal{P}^*(E) \longrightarrow C$ un foncteur, de source la catégorie associée à l'ensemble ordonné des parties non vides de E et de but C, un tel couple (E, p) étant inférieur ou égal à un autre (E', p') si $E \subset E'$ et si pour toute partie non vide F de E, $p'(F) = p(F)$. Pour tout entier naturel n, on note B_n la sous-catégorie pleine de B formée des couples (E, p) tels que $\max(E) \leqslant n$, et $I_n : B_n \longrightarrow B_{n+1}$ le foncteur d'inclusion. On a $B = \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} B_n$. Pour montrer que la catégorie B est asphérique, il suffit donc d'après le lemme 2.4.21 de construire pour tout n, $n \in \mathbb{N}$, un décalage sur le foncteur I_n. On définit un foncteur $D_n : B_n \longrightarrow B_{n+1}$ en associant à un objet (E, p) de B_n l'objet $(E\cup\{n+1\}, p')$ de B_{n+1}, où $p' : \mathcal{P}^*(E\cup\{n+1\}) \longrightarrow C$ est l'unique foncteur dont la restriction au crible $\mathcal{P}^*(E)$ de $\mathcal{P}^*(E\cup\{n+1\})$ est égale à p et dont la restriction au cocrible complémentaire est le foncteur constant de valeur un objet final fixé e_C de C (*cf.* 1.9.10), et en observant que cette application induit une application croissante des ensembles ordonnés sous-jacents à B_n et B_{n+1}. D'autre part, l'inclusion $E \subset E\cup\{n+1\}$ définit un morphisme de foncteurs $\alpha_n : I_n \longrightarrow D_n$. Enfin, si l'on note b_n l'objet $(\{n+1\}, p_n)$ de B_{n+1}, où p_n désigne le foncteur $\mathcal{P}^*(\{n+1\}) \longrightarrow C$ associant à l'unique partie non vide du singleton $\{n+1\}$ l'objet final e_C de C, l'inclusion $\{n+1\} \subset E\cup\{n+1\}$ définit un morphisme de foncteur $\beta_n : b_n \longrightarrow D_n$, où b_n désigne aussi le foncteur constant de B_n vers B_{n+1} de valeur l'objet b_n. On a ainsi défini un décalage

$$I_n \xrightarrow{\alpha_n} D_n \xleftarrow{\beta_n} b_n$$

sur I_n, ce qui achève la démonstration. □

Remarque 2.4.23. — Si le localisateur fondamental faible $\mathcal{W}$ n'est pas grossier, alors la catégorie A de la proposition précédente n'est pas une catégorie test. En effet, si a est un objet de A constitué d'un singleton, la catégorie A/a est une catégorie ponctuelle, qui n'est pas une catégorie test pour un tel localisateur (*cf.* remarque 1.8.33).

Corollaire 2.4.24. — *La catégorie $\mathcal{O}rd$ des petits ensembles ordonnés, munie des équivalences faibles induites de celles de $\mathcal{C}at$, est un modélisateur, et l'inclusion canonique $\mathcal{O}rd \hookrightarrow \mathcal{C}at$ définit un morphisme de modélisateurs*

$$(\mathcal{O}rd, \mathcal{W} \cap \mathsf{Fl}(\mathcal{O}rd)) \longrightarrow (\mathcal{C}at, \mathcal{W}) \quad .$$

Démonstration. — Le corollaire résulte de la proposition précédente, en appliquant le corollaire 1.8.10 à la catégorie A associée à l'ensemble ordonné par inclusion des parties finies non vides d'un ensemble dénombrable, au foncteur asphérique $i = i_A$ (*cf.* exemple 1.8.3), et à $M = \mathcal{O}rd$. $\square$

CHAPITRE 3

THÉORIE HOMOTOPIQUE ÉLÉMENTAIRE DES CATÉGORIES

3.1. Colimites et extensions de Kan homotopiques

3.1.1. — Pour tout objet I de $\mathcal{C}at$, on note $\mathcal{C}at/I$ la catégorie des petites catégories au-dessus de I, dont les objets sont les couples formés d'un objet A de $\mathcal{C}at$ et d'un foncteur $A \longrightarrow I$, et dont les morphismes sont les triangles commutatifs

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr] \arrow[dr] & & A' \arrow[dl] \\ & I & \end{tikzcd} .$$

Pour toute flèche $w : J \longrightarrow I$ de $\mathcal{C}at$, on note

$$\mathcal{C}at/w : \mathcal{C}at/J \longrightarrow \mathcal{C}at/I$$

le foncteur défini par

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "v"'] & \longmapsto & A \arrow[d, "wv"'] \\ J & & I \end{tikzcd} .$$

Pour toute petite catégorie I, on définit des foncteurs (cf. 2.2.5)

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}at/I \xrightarrow{\Theta_I} \underline{\mathsf{Hom}}(I, \mathcal{C}at) & , & \underline{\mathsf{Hom}}(I, \mathcal{C}at) \xrightarrow{\Theta'_I} \mathcal{C}at/I \\ (A, A \longrightarrow I) \longmapsto (i \longmapsto A/i) & , & F \longmapsto (\textstyle\int F, \int F \longrightarrow I) \end{array} .$$

Proposition 3.1.2. — *Soit $w : J \longrightarrow I$ un foncteur entre petites catégories. Alors*

$$\mathcal{C}at/J \xrightarrow{\Theta_I \circ \mathcal{C}at/w} \underline{\mathsf{Hom}}(I, \mathcal{C}at) \quad , \quad \underline{\mathsf{Hom}}(I, \mathcal{C}at) \xrightarrow{\Theta'_J \circ \underline{\mathsf{Hom}}(w, 1_{\mathcal{C}at})} \mathcal{C}at/J$$

est un couple de foncteurs adjoints. En particulier, pour $J = I$ et $w = 1_I$, on obtient que (Θ_I, Θ'_I) est un couple de foncteurs adjoints.

Démonstration. — On va définir des morphismes d'adjonction

$$\varepsilon : \Theta_I \circ \mathcal{C}at/w \circ \Theta'_J \circ \underline{\mathsf{Hom}}(w, 1_{\mathcal{C}at}) \longrightarrow 1_{\underline{\mathsf{Hom}}(I,\mathcal{C}at)} \quad ,$$

$$\eta : 1_{\mathcal{C}at/J} \longrightarrow \Theta'_J \circ \underline{\mathsf{Hom}}(w, 1_{\mathcal{C}at}) \circ \Theta_I \circ \mathcal{C}at/w \quad ,$$

et on va laisser le soin au lecteur de vérifier les relations d'adjonction.

a) Définition de ε. Soit $F : I \longrightarrow \mathcal{C}at$ un foncteur. Définissons un morphisme fonctoriel ε_F, autrement dit, pour tout objet i de I, un foncteur

$$\varepsilon_{F,i} : \big(\textstyle\int Fw\big) \;/\; i \longrightarrow F(i) \quad ,$$

fonctoriel en i. Les objets de la catégorie $(\int Fw)/i$ sont les triplets $(j, a, p : w(j) \longrightarrow i)$, où j est un objet de J, a un objet de $Fw(j)$, et p une flèche de I. Un morphisme de $(\int Fw)/i$, de source $(j, a, p : w(j) \longrightarrow i)$ et de but $(j', a', p' : w(j') \longrightarrow i)$, est un couple (l, f), où $l : j \longrightarrow j'$ est une flèche de J, $f : Fw(l)(a) \longrightarrow a'$ une flèche de $Fw(j')$, telles que

$$\begin{tikzcd} w(j) \arrow[rr, "w(l)"] \arrow[dr, "p"'] & & w(j') \arrow[dl, "p'"] \\ & i & \end{tikzcd} \qquad\qquad p = p'w(l) \quad .$$

On définit le foncteur $\varepsilon_{F,i}$ par

$$\varepsilon_{F,i}(j, a, p : w(j) \longrightarrow i) = F(p)(a) \quad ,$$

$$\varepsilon_{F,i}(l, f) = F(p')(f) : F(p')Fw(l)(a) = F(p)(a) \longrightarrow F(p')(a') \quad .$$

On laisse le soin au lecteur de vérifier la compatibilité à la composition et aux identités, ainsi que la fonctorialité en i et en F.

b) Définition de η. Soit $(A, v : A \longrightarrow J)$ un objet de $\mathcal{C}at/J$. Définissons un foncteur, au-dessus de J,

$$\eta_{A,v} : A \longrightarrow \textstyle\int G \quad ,$$

où

$$G : J \longrightarrow \mathcal{C}at$$

désigne le foncteur

$$j \longmapsto A/w(j) \quad .$$

Les objets de $\int G$ sont les triplets $(j, a, p : wv(a) \longrightarrow w(j))$, où j est un objet de J, a un objet de A, et p une flèche de I. Un morphisme de $(j, a, p : wv(a) \longrightarrow w(j))$ vers $(j', a', p' : wv(a') \longrightarrow w(j'))$ est un couple (l, f), où $l : j \longrightarrow j'$ est une flèche de J, $f : a \longrightarrow a'$ une flèche de A, telles que le carré

$$\begin{tikzcd} wv(a) \arrow[r, "wv(f)"] \arrow[d, "p"'] & wv(a') \arrow[d, "p'"] \\ w(j) \arrow[r, "w(l)"'] & w(j') \end{tikzcd}$$

soit commutatif. Pour tout objet a de A, on définit

$$\eta_{A,v}(a) = \big(v(a), a, 1_{wv(a)} : wv(a) \longrightarrow wv(a)\big) \quad ,$$

et pour toute flèche $f : a \longrightarrow a'$ de A,

$$\eta_{A,v}(f) = \big(v(f), f\big) : \big(v(a), a, 1_{wv(a)}\big) \longrightarrow \big(v(a'), a', 1_{wv(a')}\big).$$

On vérifie facilement la compatibilité à la composition et aux identités, ainsi que la fonctorialité en (A, v). □

Dans la suite, on se fixe, une fois pour toutes, un localisateur fondamental faible $\mathcal{W}$.

3.1.3. — Soit I une petite catégorie. On note $\mathcal{W}_I$ la partie de $\mathsf{Fl}(\underline{\mathsf{Hom}}(I, \mathcal{C}at))$ formée des équivalences faibles argument par argument, autrement dit, des morphismes de foncteurs $\alpha : F \longrightarrow F'$

$$\begin{tikzcd} I \arrow[d, bend right=50, "F"'] \arrow[d, bend left=50, "F'"] \arrow[d, phantom, "\overset{\alpha}{\Rightarrow}"] \\ \mathcal{C}at \end{tikzcd}$$

tels que pour tout i, $i \in \mathsf{Ob}(I)$, α_i soit dans $\mathcal{W}$. On note $\mathcal{W}'_I$ la partie de $\mathsf{Fl}(\mathcal{C}at/I)$ formée des foncteurs qui sont des équivalences faibles localement sur I, autrement dit, des morphismes

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "v"'] & & A' \arrow[dl, "v'"] \\ & I & \end{tikzcd} \qquad v = v'u$$

de $\mathcal{C}at/I$ tels que pour tout i, $i \in \mathsf{Ob}(I)$, le foncteur $u/i : A/i \longrightarrow A'/i$, induit par u, soit une équivalence faible.

Théorème 3.1.4. — *Pour toute petite catégorie I, on a*

$$\mathcal{W}'_I = \Theta_I^{-1}(\mathcal{W}_I) \quad , \qquad \mathcal{W}_I = {\Theta'_I}^{-1}(\mathcal{W}'_I)$$

et les foncteurs

$$\overline{\Theta}_I : {\mathcal{W}'_I}^{-1}\mathcal{C}at/I \longrightarrow \mathcal{W}_I^{-1}\,\underline{\mathsf{Hom}}(I, \mathcal{C}at)$$

et

$$\overline{\Theta'_I} : \mathcal{W}_I^{-1}\,\underline{\mathsf{Hom}}(I, \mathcal{C}at) \longrightarrow {\mathcal{W}'_I}^{-1}\mathcal{C}at/I \quad ,$$

induits par Θ_I et Θ'_I respectivement, sont des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre.

Démonstration. — L'égalité $\mathcal{W}'_I = \Theta_I^{-1}(\mathcal{W}_I)$ est évidente. Comme (Θ_I, Θ'_I) est un couple de foncteurs adjoints (3.1.2), il suffit en vertu du lemme 1.4.8, de montrer que pour tout foncteur $F : I \longrightarrow \mathcal{C}at$, le morphisme d'adjonction

$$\varepsilon_F : \Theta_I\Theta'_I(F) \longrightarrow F$$

est une équivalence faible argument par argument. Or, on a vu au cours de la démonstration de la proposition 3.1.2 que pour tout objet i de I, le morphisme $\varepsilon_{F,i}$ est le foncteur

$$\big(\textstyle\int F\big) \ / \ i \longrightarrow F(i)$$

défini par

$$\varepsilon_{F,i}(i', a, p : i' \longrightarrow i) = F(p)(a) \quad ,$$

$$\varepsilon_{F,i}\big((i', a, p : i' \longrightarrow i) \xrightarrow{(k,f)} (i'', a', p' : i'' \longrightarrow i)\big) = F(p')(f) \quad .$$

On définit un foncteur

$$\alpha_{F,i} : F(i) \longrightarrow (\textstyle\int F)/i$$

par

$$\alpha_{F,i}(a) = (i, a, 1_i : i \longrightarrow i) \ , \quad a \in \mathsf{Ob}(F(i)) \ ,$$

$$\alpha_{F,i}(f) = (1_i, f) \ , \quad f \in \mathsf{Fl}(F(i)) \ .$$

On vérifie facilement que $(\varepsilon_{F,i}, \alpha_{F,i})$ forme un couple de foncteurs adjoints. On en déduit que $\varepsilon_{F,i}$ est asphérique (1.1.11), et en particulier une équivalence faible, ce qui achève la démonstration du théorème. □

Dans la suite, on suppose que le localisateur fondamental faible $\mathcal{W}$ est un localisateur fondamental.

Lemme 3.1.5. — *Soit $w : J \longrightarrow I$ un morphisme de $\mathcal{C}at$. Alors*

$$\underline{\mathsf{Hom}}(w, 1_{\mathcal{C}at})(\mathcal{W}_I) \subset \mathcal{W}_J \qquad \textit{et} \qquad (\mathcal{C}at/w)(\mathcal{W}'_J) \subset \mathcal{W}'_I \quad .$$

Démonstration. — La première inclusion est évidente. Pour montrer la deuxième, considérons un morphisme u

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "v"'] & & A' \arrow[dl, "v'"] \\ & J \arrow[d, "w"] & \\ & I & \end{tikzcd}$$

de $\mathcal{C}at/J$ qui est une équivalence faible localement sur J. Il s'agit de montrer qu'il est une équivalence faible localement sur I, autrement dit, que pour tout objet i de I, le foncteur $u/i : A/i \longrightarrow A'/i$ est une équivalence faible. On a un triangle commutatif

$$\begin{tikzcd} A/i \arrow[rr, "u/i"] \arrow[dr, "v/i"'] & & A'/i \arrow[dl, "v'/i"] \\ & J/i & \end{tikzcd} \qquad ,$$

et pour tout objet $(j, k : w(j) \longrightarrow i)$ de J/i, on a des isomorphismes canoniques

$$(A/i)/(j,k) \simeq A/j \quad , \qquad (A'/i)/(j,k) \simeq A'/j \quad ,$$

et $(u/i)/(j,k)$ s'identifie à u/j qui est par hypothèse une équivalence faible. Le foncteur u/i est donc une équivalence faible localement sur J/i, ce qui prouve qu'il est une équivalence faible. $\square$

3.1.6. — En vertu du lemme précédent, pour toute flèche $w : J \longrightarrow I$ de $\mathcal{C}at$, le foncteur

$$\underline{\mathsf{Hom}}(w, 1_{\mathcal{C}at}) : \underline{\mathsf{Hom}}(I, \mathcal{C}at) \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}(J, \mathcal{C}at)$$

induit un foncteur

$$w^* : \mathcal{W}_I^{-1}\, \underline{\mathsf{Hom}}(I, \mathcal{C}at) \longrightarrow \mathcal{W}_J^{-1}\, \underline{\mathsf{Hom}}(J, \mathcal{C}at) \quad ,$$

et le foncteur

$$\mathcal{C}at/w : \mathcal{C}at/J \longrightarrow \mathcal{C}at/I$$

un foncteur

$$\overline{\mathcal{C}at/w} : \mathcal{W}'_J{}^{-1}\mathcal{C}at/J \longrightarrow \mathcal{W}'_I{}^{-1}\mathcal{C}at/I \quad .$$

Pour toute petite catégorie I, on pose

$$\mathsf{Hot}(I) = \mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(I) = \mathcal{W}_I^{-1}\, \underline{\mathsf{Hom}}(I, \mathcal{C}at)$$

(de sorte que si $I = e$, $\mathsf{Hot}(e) = \mathcal{W}_e^{-1}\, \underline{\mathsf{Hom}}(e, \mathcal{C}at) \simeq \mathcal{W}^{-1}\mathcal{C}at = \mathsf{Hot}$ (cf. 1.4.2)). Pour tout morphisme $w : J \longrightarrow I$ de $\mathcal{C}at$, on a donc défini un foncteur

$$w^* : \mathsf{Hot}(I) \longrightarrow \mathsf{Hot}(J) \quad .$$

On définit un foncteur

$$w_! : \mathsf{Hot}(J) \longrightarrow \mathsf{Hot}(I)$$

en posant

$$w_! = \overline{\Theta}_I \circ \overline{\mathcal{C}at/w} \circ \overline{\Theta'_J} \quad .$$

Théorème 3.1.7. — *Pour tout morphisme $w : J \longrightarrow I$ de $\mathcal{C}at$, les foncteurs*

$$w_! : \mathsf{Hot}(J) \longrightarrow \mathsf{Hot}(I) \quad , \qquad w^* : \mathsf{Hot}(I) \longrightarrow \mathsf{Hot}(J)$$

forment un couple de foncteurs adjoints.

Démonstration. — Il résulte de la proposition 3.1.2, du théorème 3.1.4, et des lemmes 3.1.5 et 2.1.6 que le couple de foncteurs $(\overline{\Theta}_I \circ \overline{\mathcal{C}at/w}\,,\, \overline{\Theta'_J} \circ w^*)$

$$\mathcal{W}'_J{}^{-1}\mathcal{C}at/J \xrightarrow{\overline{\mathcal{C}at/w}} \mathcal{W}'_I{}^{-1}\mathcal{C}at/I \xrightarrow{\overline{\Theta}_I} \mathcal{W}_I^{-1}\, \underline{\mathsf{Hom}}(I, \mathcal{C}at) = \mathsf{Hot}(I)$$

$$\mathcal{W}_I^{-1}\, \underline{\mathsf{Hom}}(I, \mathcal{C}at) = \mathsf{Hot}(I) \xrightarrow{w^*} \mathsf{Hot}(J) = \mathcal{W}_J^{-1}\, \underline{\mathsf{Hom}}(J, \mathcal{C}at) \xrightarrow{\overline{\Theta'_J}} \mathcal{W}'_J{}^{-1}\mathcal{C}at/J$$

est un couple de foncteurs adjoints. Comme en vertu du théorème 3.1.4, $\overline{\Theta}_J$ et $\overline{\Theta'_J}$ sont des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre, $w^* \simeq \overline{\Theta}_J \circ (\overline{\Theta'_J} \circ w^*)$ est un adjoint à droite de $(\overline{\Theta}_I \circ \overline{\mathcal{C}at/w}) \circ \overline{\Theta'_J} = w_!$, ce qui prouve le théorème. □

Corollaire 3.1.8. — *Soit* $J \xrightarrow{w} J' \xrightarrow{w'} J''$ *dans* $\mathcal{C}at$*. Alors on a un isomorphisme de foncteurs* $(w'w)_! \simeq w'_! w_!$.

Démonstration. — Le corollaire résulte immédiatement du théorème 3.1.7 et de l'isomorphisme évident $(w'w)^* \simeq w^* w'^*$. □

Exemple 3.1.9. — Soit J une petite catégorie. On note

$$\gamma_J : \underline{\mathsf{Hom}}(J, \mathcal{C}at) \longrightarrow \mathcal{W}_J^{-1}\,\underline{\mathsf{Hom}}(J, \mathcal{C}at) = \mathsf{Hot}(J)$$

le foncteur de localisation (de sorte que si $J = e$,

$$\gamma_e : \mathcal{C}at \simeq \underline{\mathsf{Hom}}(e, \mathcal{C}at) \longrightarrow \mathcal{W}_e^{-1}\,\underline{\mathsf{Hom}}(e, \mathcal{C}at) \simeq \mathcal{W}^{-1}\mathcal{C}at = \mathsf{Hot}$$

s'identifie au foncteur de localisation canonique $\gamma : \mathcal{C}at \longrightarrow \mathsf{Hot}$ (cf. 1.4.2)). On note $p_J : J \longrightarrow e$ l'unique foncteur de J vers la catégorie ponctuelle. On vérifie immédiatement que pour tout foncteur $F : J \longrightarrow \mathcal{C}at$, on a

$$(p_J)_!\gamma_J(F) \simeq \gamma(\textstyle\int F) \quad .$$

En particulier, si A est une petite catégorie, et F le foncteur constant de valeur A

$$F : j \longmapsto A \quad , \qquad j \in \mathsf{Ob}(J) \quad ,$$

alors

$$(p_J)_!\gamma_J(F) \simeq \gamma(J \times A) \quad ,$$

autrement dit,

$$(p_J)_! p_J^* \gamma(A) \simeq \gamma(J \times A) \quad .$$

Ainsi, en vertu de la proposition 2.1.9, le foncteur

$$(p_J)_! p_J^* : \mathsf{Hot} \longrightarrow \mathsf{Hot}$$

s'identifie au foncteur $\gamma(J) \times\ ?$, produit par $\gamma(J)$ dans Hot.

On suppose, dans la suite, que le localisateur fondamental $\mathcal{W}$ *est fortement saturé.*(1)

Proposition 3.1.10. — *Soit* $w : J \longrightarrow I$ *un morphisme de* $\mathcal{C}at$.

(a) *Pour que* w *soit une équivalence faible, il faut et il suffit que le morphisme de foncteurs*

$$(p_J)_! p_J^* \simeq (p_I)_! w_! w^* p_I^* \longrightarrow (p_I)_! p_I^* \quad ,$$

défini par le morphisme d'adjonction, soit un isomorphisme.

(1) En fait, on démontre que, conformément à une conjecture de Grothendieck [**14**], *tout* localisateur fondamental est fortement saturé [**10**].

(b) *Pour que w soit asphérique, il faut et il suffit que le morphisme de foncteurs*

$$w_! p_J^* \simeq w_! w^* p_I^* \longrightarrow p_I^* \quad ,$$

défini par le morphisme d'adjonction, soit un isomorphisme.

Démonstration. — *a*) Pour toute petite catégorie A, le morphisme

$$\gamma(J \times A) \simeq (p_J)_!(p_J)^*\gamma(A) \longrightarrow (p_I)_!(p_I)^*\gamma(A) \simeq \gamma(I \times A)$$

n'est autre que $\gamma(w \times 1_A)$, qui est un isomorphisme si et seulement si $w \times 1_A$ est une équivalence faible (puisque $\mathcal{W}$ est fortement saturé). L'assertion (a) résulte donc de 2.1.3.

b) Pour toute petite catégorie A, $w_! p_J^* \gamma(A)$ (resp. $p_I^*\gamma(A)$) est l'image par γ_I du foncteur $i \mapsto (J \times A)/i \simeq J/i \times A$ (resp. du foncteur constant $i \mapsto A$), $i \in \mathsf{Ob}(I)$, et le morphisme $w_! p_J^*\gamma(A) \longrightarrow p_I^*\gamma(A)$ est l'image par γ_I du morphisme de foncteurs défini par la deuxième projection $J/i \times A \longrightarrow A$. L'assertion ($b$) résulte donc de 1.1.4. $\square$

Remarque 3.1.11. — Les assertions (a) et (b) de la proposition 3.1.10 admettent la généralisation commune suivante : *Soit*

$$\begin{tikzcd} J \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "w"'] & & J' \arrow[dl, "w'"] \\ & I & \end{tikzcd} \qquad w = w'u$$

un triangle commutatif de $\mathcal{C}at$. Pour que le morphisme u soit une équivalence faible localement sur I, il faut et il suffit que le morphisme de foncteurs

$$w_! p_J^* \simeq w'_! u_! u^* p_{J'}^* \longrightarrow w'_! p_{J'}^* \quad ,$$

défini par le morphisme d'adjonction, soit un isomorphisme.

En effet, pour toute petite catégorie A, le morphisme $w_! p_J^*\gamma(A) \longrightarrow w'_! p_{J'}^*\gamma(A)$ de $\mathsf{Hot}(I)$ s'identifie à l'image par γ_I du morphisme de foncteurs

$$i \longmapsto u/i \times 1_A : J/i \times A \longrightarrow J'/i \times A \quad , \qquad i \in \mathsf{Ob}(I) \quad ,$$

et l'assertion résulte de 2.1.3.

Exemple 3.1.12. — Si $\mathcal{W}$ est le localisateur fondamental $\mathcal{W}_0$ des exemples 1.1.31 et 2.1.2, on vérifie facilement que le foncteur π_0 induit une identification de la catégorie $\mathsf{Hot}(I) = \mathsf{Hot}_{\mathcal{W}_0}(I)$ à la catégorie $\underline{\mathsf{Hom}}(I, \mathcal{E}ns)$ des foncteurs de I vers la catégorie des ensembles. Pour toute flèche $u : I \longrightarrow J$ de $\mathcal{C}at$, le foncteur $u^* : \mathsf{Hot}(J) \longrightarrow \mathsf{Hot}(I)$ s'identifie au foncteur

$$\underline{\mathsf{Hom}}(J, \mathcal{E}ns) \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}(I, \mathcal{E}ns) \quad , \qquad F \longmapsto Fu \quad ,$$

et le foncteur $u_! : \mathsf{Hot}(I) \longrightarrow \mathsf{Hot}(J)$ à l'adjoint à gauche du précédent (l'extension de Kan à gauche classique). En particulier, pour toute petite catégorie I, et tout foncteur $F : I \longrightarrow \mathcal{E}ns$, l'image de F par $(p_I)_!$ s'identifie à la limite inductive $\varinjlim_I F$ de F.

Remarque 3.1.13. — Soit I une petite catégorie, et considérons les foncteurs

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}at/I \xrightarrow{\Xi_I} \underline{\mathsf{Hom}}(I^\circ, \mathcal{C}at) & , & \underline{\mathsf{Hom}}(I^\circ, \mathcal{C}at) \xrightarrow{\Xi'_I} \mathcal{C}at/I \\ (A,\, A \longrightarrow I) \longmapsto (i \longmapsto i\backslash A) & , & F \longmapsto (\nabla F,\, \nabla F \longrightarrow I) \end{array}$$

(voir 2.2.6). Il résulte aussitôt de la proposition 3.1.2, et de la commutativité du diagramme 2.2.6.1 que (Ξ_I, Ξ'_I) est un couple de foncteurs adjoints. On note $\mathcal{W}''_I$ la partie de $\mathsf{Fl}(\mathcal{C}at/I)$ formée des foncteurs qui sont des équivalences faibles colocalement sur I, autrement dit, des morphismes

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "v"'] & & A' \arrow[dl, "v'"] \\ & I & \end{tikzcd} \qquad\qquad v = v'u$$

de $\mathcal{C}at/I$ tels que pour tout i, $i \in \mathsf{Ob}(I)$, le foncteur $i\backslash u : i\backslash A \longrightarrow i\backslash A'$, induit par u, soit une équivalence faible. Il résulte alors du théorème 3.1.4, de la proposition 1.1.21, et de la commutativité du diagramme 2.2.6.1 qu'on a

$$\mathcal{W}''_I = \Xi_I^{-1}(\mathcal{W}_{I^\circ}) \quad , \qquad \mathcal{W}_{I^\circ} = {\Xi'_I}^{-1}(\mathcal{W}''_I) \quad ,$$

et que les foncteurs

$$\overline{\Xi}_I : {\mathcal{W}''_I}^{-1}\mathcal{C}at/I \longrightarrow \mathcal{W}_{I^\circ}^{-1}\,\underline{\mathsf{Hom}}(I^\circ, \mathcal{C}at) = \mathsf{Hot}(I^\circ)$$

et

$$\overline{\Xi'}_I : \mathsf{Hot}(I^\circ) = \mathcal{W}_{I^\circ}^{-1}\,\underline{\mathsf{Hom}}(I^\circ, \mathcal{C}at) \longrightarrow {\mathcal{W}''_I}^{-1}\mathcal{C}at/I \quad ,$$

induits par Ξ_I et Ξ'_I respectivement, sont des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre. De même, le lemme 3.1.5 implique que pour tout morphisme $w : J \longrightarrow I$ de $\mathcal{C}at$, on a l'inclusion $(\mathcal{C}at/w)(\mathcal{W}''_J) \subset \mathcal{W}''_I$, et par suite, que le foncteur $\mathcal{C}at/w$ induit un foncteur

$$\overline{\mathcal{C}at/w} : {\mathcal{W}''_J}^{-1}\mathcal{C}at/J \longrightarrow {\mathcal{W}''_I}^{-1}\mathcal{C}at/I \quad .$$

Enfin, il résulte facilement des considérations des numéros 1.1.17 à 1.1.20, et de la commutativité du diagramme 2.2.6.1 que pour tout morphisme $w : J \longrightarrow I$ de $\mathcal{C}at$, le foncteur composé $\overline{\Xi}_{I^\circ} \circ \overline{\mathcal{C}at/w}^\circ \circ \overline{\Xi'}_{J^\circ}$

$$\mathsf{Hot}(J) \xrightarrow{\overline{\Xi'}_{J^\circ}} {\mathcal{W}''_{J^\circ}}^{-1}\mathcal{C}at/J^\circ \xrightarrow{\overline{\mathcal{C}at/w^\circ}} {\mathcal{W}''_{I^\circ}}^{-1}\mathcal{C}at/I^\circ \xrightarrow{\overline{\Xi}_{I^\circ}} \mathsf{Hot}(I)$$

est canoniquement isomorphe au foncteur $w_!$.

3.2. Morphismes propres, lisses

Dans ce paragraphe, on se fixe, une fois pour toutes, un localisateur fondamental faible $\mathcal{W}$.

Définition 3.2.1. — On dit qu'un morphisme $u : A \longrightarrow B$ de $\mathcal{C}at$ est *$\mathcal{W}$-propre*, ou plus simplement *propre*, si pour tout objet b de B, le morphisme canonique

$$i_b : A_b \longrightarrow A/b \quad , \qquad a \mapsto (a, 1_b : u(a) \longrightarrow b) \ , \quad a \in \mathsf{Ob}(A_b) \ ,$$

est *coasphérique*. On dit que u est *$\mathcal{W}$-lisse*, ou plus simplement *lisse*, si le morphisme $u^\circ : A^\circ \longrightarrow B^\circ$ est propre, autrement dit, si pour tout objet b de B, le morphisme canonique

$$j_b : A_b \longrightarrow b\backslash A \quad , \qquad a \mapsto (a, 1_b : b \longrightarrow u(a)) \ , \quad a \in \mathsf{Ob}(A_b) \ ,$$

est *asphérique*.

Exemple 3.2.2. — Il résulte de 1.1.15 et 1.1.24 qu'une précofibration est un morphisme propre. Dualement, une préfibration est un morphisme lisse. En particulier, une *immersion ouverte* (morphisme de $\mathcal{C}at$ isomorphe à l'inclusion d'un crible) est un morphisme lisse, et une *immersion fermée* (morphisme isomorphe à l'inclusion d'un cocrible) est un morphisme propre.

Proposition 3.2.3. — *Soit $u : A \longrightarrow B$ un morphisme de $\mathcal{C}at$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *u est propre ;*

(b) *pour tout objet a de A, les fibres du morphisme*

$$a\backslash A \longrightarrow b\backslash B \quad , \qquad b = u(a) \quad ,$$

induit par u, sont asphériques ;

(c) *pour tout morphisme $B' = \Delta_1 \longrightarrow B$ de $\mathcal{C}at$, si l'on forme le carré cartésien*

$$\begin{tikzcd} A' = A \times_B B' \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d] \\ B' \arrow[r] & B \end{tikzcd} \quad ,$$

l'inclusion $A'_1 \hookrightarrow A'$, de la fibre de A' au-dessus de l'objet 1 de $B' = \Delta_1$, est un morphisme coasphérique ;

(d) *pour toute flèche $f_0 : b_0 \longrightarrow b_1$ de B, et tout objet a_0 de A_{b_0}, la catégorie $A(a_0, f_0)$ dont les objets sont les flèches $f : a_0 \longrightarrow a$ de source a_0 qui relèvent f_0 $(u(f) = f_0)$, et dont les morphismes sont les triangles commutatifs*

$$\begin{tikzcd} & a_0 \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "f'"] & \\ a \arrow[rr, "g"'] & & a' \end{tikzcd} \quad ,$$

avec g morphisme de A_{b_1} $(u(g) = 1_{b_1})$, est asphérique.

Démonstration. — L'équivalence de (a), (b) et (d) est un simple exercice de traduction laissé au lecteur. Montrons l'équivalence de (c) et (d). La donnée d'une flèche $f_0 : b_0 \longrightarrow b_1$ de B équivaut à celle d'un foncteur $\Delta_1 \longrightarrow B$ comme dans (c), et affirmer, avec les notations de (c), que $A'_1 \hookrightarrow A'$ est coasphérique, c'est affirmer que pour tout objet a' de A', la catégorie $a'\backslash A'_1$ est asphérique. Si $a' \in \mathsf{Ob}(A'_1)$, cela est vrai sans hypothèse sur u (puisque alors $a'\backslash A'_1$ admet un objet initial, et par suite est asphérique (1.1.13)). Il suffit donc de le vérifier pour a' dans $A' - A'_1 = A'_0 \simeq A_{b_0}$. Mais alors a' s'identifie à un objet a_0 de A_{b_0}, et on vérifie que $a'\backslash A'_1$ est isomorphe à la catégorie $A(a_0, f_0)$ de (d). Cela achève la démonstration. □

Corollaire 3.2.4. — *Les morphismes propres sont stables par changement de base, autrement dit, pour tout carré cartésien dans $\mathcal{C}at$*

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r] \arrow[d, "u'"'] & A \arrow[d, "u"] \\ B' \arrow[r] & B \end{tikzcd} ,$$

si u est propre, il en est de même de u'.

Démonstration. — Le corollaire résulte de la proposition 3.2.3, puisque la condition (c) est stable par changement de base. □

Remarque 3.2.5. — Il résulte de la condition (d) de la proposition 3.2.3 et de la proposition 1.1.29 que si le localisateur fondamental faible $\mathcal{W}$ n'est pas trivial, alors un morphisme propre $u : A \longrightarrow B$ est un morphisme *fermé*, autrement dit, l'image par u de tout fermé de $\mathsf{Ob}(A)$ (ensemble d'objets d'un cocrible de A) est un fermé de $\mathsf{Ob}(B)$. En particulier, on se gardera de croire qu'une équivalence de catégories soit toujours un morphisme propre. On vérifie facilement qu'elle est propre si et seulement si elle induit une surjection sur les objets (si $\mathcal{W}$ est non trivial).

Proposition 3.2.6. — *Soit $u : A \longrightarrow B$ un morphisme propre de $\mathcal{C}at$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *u est à fibres asphériques ;*
(b) *u est asphérique ;*
(c) *u est universellement asphérique, autrement dit, il est asphérique et le reste après tout changement de base ;*
(d) *u est universellement dans $\mathcal{W}$.*

Démonstration. — Le morphisme u étant propre, pour tout objet b de B, le morphisme canonique $A_b \longrightarrow A/b$ est coasphérique, et en particulier une équivalence faible, ce qui montre l'équivalence des conditions (a) et (b). Comme être propre à fibres asphériques est, en vertu du corollaire 3.2.4, une propriété stable par changement de base, ceci prouve aussi l'équivalence de (a) et (c). Les implications $(c) \Rightarrow (d)$ et $(d) \Rightarrow (a)$ étant évidentes, cela achève la démonstration. $\square$

Lemme 3.2.7. — *Soient $u : A \longrightarrow B$ un morphisme de $\mathcal{C}at$, a un objet de A, et $b = u(a)$. Si le morphisme u est propre, il en est de même du morphisme $a\backslash A \longrightarrow b\backslash B$, induit par u.*

Démonstration. — En vertu de la condition (b) de la proposition 3.2.3, il suffit de montrer que pour tout objet $(a', f : a \longrightarrow a')$ de $a\backslash A$, le morphisme $(a', f)\backslash(a\backslash A) \longrightarrow (b', g)\backslash(b\backslash B)$, où $(b', g) = (u(a'), u(f))$, est à fibres asphériques. Or ce morphisme s'identifie au morphisme $a'\backslash A \longrightarrow b'\backslash B$, induit par u, qui est à fibres asphériques, en vertu de la condition (b) de la proposition 3.2.3, puisque le morphisme u est propre. $\square$

Proposition 3.2.8. — *Soient $u : A \longrightarrow B$ un morphisme propre de $\mathcal{C}at$, a un objet de A, et $b = u(a)$. Alors le morphisme $a\backslash A \longrightarrow b\backslash B$, induit par u, est universellement dans $\mathcal{W}$.*

Démonstration. — Il résulte de la condition (b) de la proposition 3.2.3 que le morphisme $a\backslash A \longrightarrow b\backslash B$ est à fibres asphériques, et du lemme précédent qu'il est propre. L'assertion résulte donc de la proposition 3.2.6. $\square$

Proposition 3.2.9. — *Soit $u : A \longrightarrow B$ un morphisme de $\mathcal{C}at$. Si u est propre, alors u est colocalement coasphérique* (cf. 1.1.24).

Démonstration. — Cela résulte aussitôt de la proposition 3.2.8, puisqu'un morphisme de $\mathcal{C}at$ universellement dans $\mathcal{W}$ est en particulier coasphérique. $\square$

Proposition 3.2.10. — *Les morphismes propres sont stables par composition.*

Démonstration. — Soit $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$ dans $\mathcal{C}at$, avec u, v propres. Formons le diagramme

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r] \arrow[d] & a\backslash A \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d, "u"] \\
B' \arrow[r] \arrow[d] & b\backslash B \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d, "v"] \\
\{(c', f)\} \arrow[r, hook] & c\backslash C \arrow[r] & C
\end{tikzcd} ,$$

où a est un objet de A, $b = u(a)$, $c = v(b) = vu(a)$, $(c', f : c \longrightarrow c')$ un objet de $c\backslash C$, les deux carrés de gauche étant cartésiens. Comme v est propre, il résulte de la condition (b) de la proposition 3.2.3 que B' est asphérique. Comme u est propre, il résulte de la proposition 3.2.8 que le morphisme $a\backslash A \longrightarrow b\backslash B$ est universellement dans $\mathcal{W}$. On en déduit que le morphisme $A' \longrightarrow B'$ est une équivalence faible, et par suite que A' est asphérique. Cela prouve que vu est propre en vertu de la condition (b) de la proposition 3.2.3. □

Lemme 3.2.11. — *Soit*

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d, "u"] \\ B' \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

un carré cartésien de $\mathcal{C}at$. Alors pour tout objet a de A, $b = u(a)$, le carré induit

$$\begin{tikzcd} a\backslash A' \arrow[r] \arrow[d] & a\backslash A \arrow[d] \\ b\backslash B' \arrow[r] & b\backslash B \end{tikzcd}$$

est cartésien.

Démonstration. — Considérons le cube commutatif

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[rr] \arrow[dd] & & A \arrow[dd] & \\ & a\backslash A' \arrow[ul] \arrow[rr] \arrow[dd] & & a\backslash A \arrow[ul] \arrow[dd] \\ B' \arrow[rr] & & B & \\ & b\backslash B' \arrow[ul] \arrow[rr] & & b\backslash B \arrow[ul] \end{tikzcd} .$$

La face arrière est cartésienne par hypothèse, et les faces horizontales sont cartésiennes par définition de $a\backslash A'$ et $b\backslash B'$. On en déduit que la face avant est cartésienne, ce qui prouve le lemme. □

Proposition 3.2.12. — *Soient C une petite catégorie,*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "u"] \arrow[dr] & & B \arrow[dl] \\ & C & \end{tikzcd}$$

un morphisme de $\mathcal{C}at/C$, $C' \longrightarrow C$ un morphisme propre, et formons le diagramme de changement de base dont les trois carrés sont cartésiens

(3.2.12.1)
$$\begin{tikzcd} A' \arrow[rrr] \arrow[dr, "u'"] \arrow[dd] & & & A \arrow[dr, "u"] \arrow[dd] & \\ & B' \arrow[rrr] \arrow[dl] & & & B \arrow[dl] \\ C' \arrow[rrr] & & & C & \end{tikzcd} .$$

Si u est une équivalence faible colocalement sur C, alors u' est une équivalence faible colocalement sur C'.

Démonstration. — Soient c' un objet de C', c son image dans C, et considérons le diagramme induit par le diagramme 3.2.12.1

$$\begin{tikzcd}
c'\backslash A' \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd] & & c\backslash A \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
& c'\backslash B' \arrow[rr] \arrow[dl] & & c\backslash B \arrow[dl] \\
c'\backslash C' \arrow[rr] & & c\backslash C &
\end{tikzcd} .$$

En vertu du lemme 3.2.11, les deux carrés contenant $c'\backslash C' \longrightarrow c\backslash C$ sont cartésiens (le troisième carré l'est donc aussi). Comme $C' \longrightarrow C$ est propre, il résulte de la proposition 3.2.8 que $c'\backslash C' \longrightarrow c\backslash C$ est universellement dans $\mathcal{W}$, donc $c'\backslash A' \longrightarrow c\backslash A$ et $c'\backslash B' \longrightarrow c\backslash B$ sont des équivalences faibles. Si u est une équivalence faible colocalement sur C, $c\backslash A \longrightarrow c\backslash B$ est une équivalence faible, donc $c'\backslash A' \longrightarrow c'\backslash B'$ aussi, ce qui prouve que u' est une équivalence faible colocalement sur C'. □

Corollaire 3.2.13. — *L'image inverse d'un morphisme coasphérique par un morphisme propre est coasphérique.*

Démonstration. — Le corollaire est un cas particulier de la proposition 3.2.12. □

Corollaire 3.2.14. — *L'image inverse d'un morphisme colocalement coasphérique par un morphisme propre est colocalement coasphérique.*

Démonstration. — Soit

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, "w"] \arrow[d, "u'"'] & A \arrow[d, "u"] \\
B' \arrow[r, "v"'] & B
\end{tikzcd}$$

un carré cartésien de $\mathcal{C}at$, u étant un morphisme colocalement coasphérique et v un morphisme propre. On vérifie facilement que pour tout objet a' de A', le carré induit

$$\begin{tikzcd}
a'\backslash A' \arrow[r] \arrow[d] & a\backslash A \arrow[d] \\
b'\backslash B' \arrow[r] & b\backslash B
\end{tikzcd} \qquad \begin{aligned} a &= w(a') \\ b' &= u'(a') \\ b &= u(a) = v(b') \end{aligned}$$

est cartésien. L'assertion résulte donc du lemme 3.2.7 et du corollaire précédent. □

Théorème 3.2.15. — *Soit $u : A \longrightarrow B$ un morphisme de $\mathcal{C}at$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *u est propre ;*
(b) *pour tout diagramme de carrés cartésiens dans $\mathcal{C}at$*

$$\begin{tikzcd} A'' \arrow[r, "w"] \arrow[d] & A' \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d, "u"] \\ B'' \arrow[r, "v"'] & B' \arrow[r] & B \end{tikzcd} \quad ,$$

si v est coasphérique, il en est de même de w.

Démonstration. — L'implication $(a) \Rightarrow (b)$ résulte des corollaires 3.2.4 et 3.2.13. Montrons que (b) implique (a). Pour tout objet b de B, on a un diagramme de carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd} A_b \arrow[r] \arrow[d] & A/b \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d, "u"] \\ \{b\} \arrow[r] & B/b \arrow[r] & B \end{tikzcd} \quad ,$$

où l'image de $\{b\} \longrightarrow B/b$ est l'objet final de B/b. Le morphisme $\{b\} \longrightarrow B/b$ admet donc un adjoint à gauche, et par suite est coasphérique (1.1.24). L'hypothèse (b) implique alors que $A_b \longrightarrow A/B$ est coasphérique, ce qui prouve que u est propre. □

Proposition 3.2.16. — *Soient C une petite catégorie,*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "v"'] & & B \arrow[dl, "w"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

un morphisme de $\mathcal{C}at/C$, avec v et w propres. Si u induit des équivalences faibles dans les fibres au-dessus de C, alors u est une équivalence faible localement sur C, et en particulier, si le localisateur fondamental faible $\mathcal{W}$ est un localisateur fondamental, u est une équivalence faible.

Démonstration. — Pour tout objet c de C, on a un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} A_c \arrow[r, "u_c"] \arrow[d, "i_A"'] & B_c \arrow[d, "i_B"] \\ A/c \arrow[r, "u/c"'] & B/c \end{tikzcd} \quad ,$$

où i_A et i_B désignent les morphismes canoniques. Comme v et w sont propres, i_A et i_B sont coasphériques, et en particulier des équivalences faibles. Par hypothèse, u_c est une équivalence faible ; on en déduit donc que u/c est une équivalence faible, ce qui prouve la proposition. □

Remarque 3.2.17. — La proposition 3.2.16 généralise la partie (a) de la proposition 2.1.12.

Proposition 3.2.18. — *Une petite limite inductive filtrante de morphismes propres de $\mathcal{C}at$ est un foncteur propre.*

Démonstration. — Soient I une petite catégorie filtrante, $F, G : I \longrightarrow \mathcal{C}at$ deux foncteurs, et $\alpha : F \longrightarrow G$ un morphisme de foncteurs tel que pour tout objet i de I, le morphisme $\alpha_i : F(i) \longrightarrow G(i)$ soit un foncteur propre. Il s'agit de montrer qu'alors le morphisme $\varinjlim_I \alpha : \varinjlim_I F \longrightarrow \varinjlim_I G$ est aussi un foncteur propre. En vertu du lemme 2.4.5, on peut supposer que I est la catégorie associée à un ensemble ordonné, noté également I. Soit x un objet de $\varinjlim_I G$; on veut montrer que le foncteur canonique $(\varinjlim_I F)_x \longrightarrow (\varinjlim_I F)/x$ est coasphérique. Il existe i_0 dans I et un objet x_{i_0} de $G(i_0)$ tel que x soit l'image de x_{i_0} par le morphisme canonique. Quitte à remplacer I par le sous-ensemble ordonné de I formé des éléments de I qui sont supérieurs ou égaux à i_0, qui est cofinal dans I, on peut supposer que i_0 est le plus petit élément de I. Le lemme 2.4.16 et la commutativité des limites inductives filtrantes dans $\mathcal{C}at$ avec les produits fibrés impliquent facilement que le morphisme $(\varinjlim_I F)_x \longrightarrow (\varinjlim_I F)/x$ s'identifie à la limite inductive des morphismes canoniques $F(i)_{x_i} \longrightarrow F(i)/x_i$, où pour tout $i \in I$, x_i désigne l'image de x_{i_0} dans $G(i)$. Comme par hypothèse, pour tout $i \in I$, le morphisme $F(i)_{x_i} \longrightarrow F(i)/x_i$ est coasphérique, l'assertion résulte du corollaire 2.4.18, (a). □

Remarque 3.2.19. — Toutes les assertions concernant les morphismes propres admettent une version duale relative aux morphismes lisses. En particulier, les morphismes lisses sont stables par changement de base, composition, et limites inductives filtrantes. Un morphisme lisse à fibres asphériques est universellement dans $\mathcal{W}$. Pour qu'un morphisme u de $\mathcal{C}at$ soit lisse, il faut et il suffit que l'image inverse par u d'un morphisme asphérique soit asphérique, et que u conserve cette propriété après tout changement de base. On laisse le soin au lecteur de formuler les versions duales des autres assertions.

3.2.20. — Soient $w : J \longrightarrow I$ un morphisme de $\mathcal{C}at$, $F : I \longrightarrow \mathcal{C}at$ un foncteur, et posons $G = Fw : J \longrightarrow \mathcal{C}at$. Le morphisme w induit un foncteur

$$\widetilde{w} : \textstyle\int G = \int Fw \longrightarrow \int F \quad ,$$

défini par

$$\widetilde{w}(j,a) = (w(j),a) \quad , \qquad (j,a) \in \mathsf{Ob}(\textstyle\int G) \quad ,$$
$$\widetilde{w}(q,f) = (w(q),f) \quad , \qquad (q,f) : (j,a) \longrightarrow (j',a') \in \mathsf{Fl}(\textstyle\int G) \quad .$$

Le foncteur $\widetilde{w} : \int G \longrightarrow \int F$ peut être aussi défini par la propriété universelle de $\int G$. Notons

$$l_i : F(i) \longrightarrow \textstyle\int F \quad , \qquad i \in \mathsf{Ob}(I) \quad ,$$

$$\beta_k : l_i \longrightarrow l_{i'} F(k) \quad , \qquad k : i \longrightarrow i' \in \mathsf{Fl}(I) \quad ,$$

les foncteurs et morphismes de foncteurs canoniques correspondant au foncteur F (cf. 2.2.3), et définissons

$$l'_j = l_{w(j)} : G(j) = F(w(j)) \longrightarrow \textstyle\int F \quad , \qquad j \in \mathsf{Ob}(J) \quad ,$$

$$\beta'_q = \beta_{w(q)} : l'_j = l_{w(j)} \longrightarrow l_{w(j')} F(w(q)) = l'_{j'} G(q) \ , \quad q : j \longrightarrow j' \in \mathsf{Fl}(J) \ .$$

On vérifie aussitôt qu'on a la relation de cocycle

$$\beta'_{q'q} = (\beta'_{q'} \star G(q))\beta'_q \quad , \qquad \beta'_{1_j} = 1_{l'_j} \quad ,$$

pour $j \xrightarrow{q} j' \xrightarrow{q'} j''$ morphismes composables de J, et que $\widetilde{w} : \int G \longrightarrow \int F$ est le foncteur défini, grâce à la propriété universelle de $\int G$, par la famille des foncteurs l'_j, $j \in \mathsf{Ob}(J)$, et des morphismes de foncteurs β'_q, $q \in \mathsf{Fl}(J)$, (cf. 2.2.3).

Lemme 3.2.21. — *Soient $w : J \longrightarrow I$ un morphisme de $\mathcal{C}at$, $F : I \longrightarrow \mathcal{C}at$ un foncteur, et posons $G = Fw : J \longrightarrow \mathcal{C}at$. Alors on a un carré cartésien*

$$\begin{tikzcd} \int G \arrow[r, "\widetilde{w}"] \arrow[d, "\theta_G"'] & \int F \arrow[d, "\theta_F"] \\ J \arrow[r, "w"'] & I \end{tikzcd} \quad ,$$

où θ_G, θ_F désignent les cofibrations associées aux foncteurs G et F respectivement (cf. 2.2.1), *et $\widetilde{w}$ le foncteur induit par w* (cf. 3.2.20).

Démonstration. — Le lemme résulte d'une simple vérification, laissée au lecteur. □

Lemme 3.2.22. — *Soient $u : A \longrightarrow B$ un morphisme de $\mathcal{C}at$, et $F : A \longrightarrow \mathcal{C}at$ un foncteur. Pour tout b, $b \in \mathsf{Ob}(B)$, on a un isomorphisme canonique*

$$\big(\textstyle\int F\big)/b \simeq \textstyle\int F \,|\, A/b \quad ,$$

où $F \,|\, A/b$ désigne le composé de F avec le foncteur canonique $A/b \longrightarrow A$.

Démonstration. — En vertu du lemme 3.2.21, on a un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} \int F \,|\, A/b \arrow[r] \arrow[d] & \int F \arrow[d] \\ A/b \arrow[r] & A \end{tikzcd} \quad ,$$

et comme le carré

$$\begin{tikzcd} A/b \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d] \\ B/b \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

est aussi cartésien, il en est de même du carré composé

$$\begin{tikzcd} \int F \mid A/b \arrow[r] \arrow[d] & \int F \arrow[d] \\ B/b \arrow[r] & B \end{tikzcd} .$$

Le carré

$$\begin{tikzcd} (\int F)/b \arrow[r] \arrow[d] & \int F \arrow[d] \\ B/b \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

étant aussi cartésien, le lemme en résulte. □

Proposition 3.2.23. — *Soit $w : J \longrightarrow I$ un morphisme de $\mathcal{C}at$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *le morphisme w est coasphérique ;*

(b) *pour tout foncteur $F : I \longrightarrow \mathcal{C}at$, le morphisme*

$$\textstyle\int Fw \longrightarrow \int F \quad ,$$

induit par w, est coasphérique ;

(c) *pour tout foncteur $F : I \longrightarrow \mathcal{C}at$, le morphisme*

$$\textstyle\int Fw \longrightarrow \int F \quad ,$$

induit par w, est une équivalence faible.

Démonstration. — En vertu du lemme 3.2.21, on a un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} \int Fw \arrow[r] \arrow[d] & \int F \arrow[d, "\theta_F"] \\ J \arrow[r, "w"'] & I \end{tikzcd} ,$$

et θ_F est une cofibration, et en particulier un morphisme propre (3.2.2). L'implication $(a) \Rightarrow (b)$ résulte donc du corollaire 3.2.13. L'implication $(b) \Rightarrow (c)$ résulte de 1.1.24. Montrons l'implication $(c) \Rightarrow (a)$. Soit i un objet de I, et considérons le foncteur $F : I \longrightarrow \mathcal{C}at$ associant à un objet i' de I la catégorie discrète correspondant à l'ensemble $\mathsf{Hom}_I(i, i')$. Alors, en vertu de (c), $\int Fw \longrightarrow \int F$ est une équivalence faible, et on vérifie facilement que $\int F \simeq i\backslash I$, que $\int Fw \simeq i\backslash J$, et que la flèche $\int Fw \longrightarrow \int F$

s'identifie au morphisme $i\backslash w : i\backslash J \longrightarrow i\backslash I$, induit par w, ce qui prouve que w est coasphérique, et achève la démonstration. □

Le corollaire suivant complète la proposition 3.1.10.

Corollaire 3.2.24. — *Supposons que le localisateur fondamental faible $\mathcal{W}$ soit un localisateur fondamental, et qu'il soit fortement saturé.*[2] *Soit $w : J \longrightarrow I$ un morphisme de $\mathcal{C}at$. Pour que w soit coasphérique, il faut et il suffit que le morphisme de foncteurs*

$$(p_J)_! w^* \simeq (p_I)_! w_! w^* \longrightarrow (p_I)_! \quad ,$$

défini par le morphisme d'adjonction, soit un isomorphisme.

Démonstration. — Pour tout foncteur $F : I \longrightarrow \mathcal{C}at$, le morphisme

$$\gamma\big(\textstyle\int Fw\big) \simeq (p_J)_! w^* \gamma_I(F) \longrightarrow (p_I)_! \gamma_I(F) \simeq \gamma\big(\textstyle\int F\big)$$

de $\mathsf{Hot}(e) \simeq \mathsf{Hot}$ (cf. 3.1.9) s'identifie à $\gamma(\widetilde{w})$, où $\widetilde{w} : \int Fw \longrightarrow \int F$ désigne le morphisme induit par w. Le corollaire résulte donc de la proposition 3.2.23, et de la forte saturation de $\mathcal{W}$. □

Remarque 3.2.25. — La proposition 3.2.23 et le corollaire 3.2.24 admettent une version relative analogue à celle de la proposition 3.1.10 (remarque 3.1.11). Soit

$$\begin{tikzcd} J \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "w"'] & & J' \arrow[dl, "w'"] \\ & I & \end{tikzcd} \qquad w = w'u$$

un triangle commutatif dans $\mathcal{C}at$. Pour tout foncteur $F : I \longrightarrow \mathcal{C}at$, le triangle

$$\begin{tikzcd} \int Fw \arrow[rr, "\widetilde{u}"] \arrow[dr, "\widetilde{w}"'] & & \int Fw' \arrow[dl, "\widetilde{w}'"] \\ & \int F & \end{tikzcd} \quad ,$$

où $\widetilde{u}$, $\widetilde{w}$, $\widetilde{w}'$ désignent les foncteurs induits par u, w et w' respectivement, est commutatif. On en déduit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \int Fw \arrow[rrr, "\theta_{Fw}"] \arrow[dr, "\widetilde{u}"] \arrow[dd, "\widetilde{w}"'] & & & J \arrow[dr, "u"] \arrow[dd, "w"'] & \\ & \int Fw' \arrow[rrr, "\theta_{Fw'}"] \arrow[dl, "\widetilde{w}'"] & & & J' \arrow[dl, "w'"] \\ \int F \arrow[rrr, "\theta_F"'] & & & I & \end{tikzcd}$$

[2] Voir note 1, page 156.

dont les faces carrées sont cartésiennes, en vertu du lemme 3.2.21. Il résulte donc de la proposition 3.2.12 que si le morphisme u est une équivalence faible colocalement sur I, alors $\widetilde{u}$ est une équivalence faible colocalement sur $\int F$. Réciproquement, si pour tout foncteur $F : I \longrightarrow \mathcal{C}at$, le morphisme $\widetilde{u} : \int Fw \longrightarrow \int Fw'$ est une équivalence faible colocalement sur $\int F$, alors u est une équivalence faible colocalement sur I. En effet, soit i un objet de I, et considérons le foncteur $F : I \longrightarrow \mathcal{C}at$ associant à un objet i' de I la catégorie discrète correspondant à l'ensemble $\mathsf{Hom}_I(i,i')$. Alors le foncteur $\widetilde{u} : \int Fw \longrightarrow \int Fw'$ s'identifie au foncteur $i\backslash u : i\backslash J \longrightarrow i\backslash J'$, induit par u, et la catégorie $\int F$ à la catégorie $i\backslash I$. Il résulte donc de l'hypothèse que le morphisme $i\backslash u$ est une équivalence faible colocalement sur $i\backslash I$. En particulier, le morphisme

$$i\backslash u : i\backslash J \simeq (i,1_i)\backslash(i\backslash J) \longrightarrow (i,1_i)\backslash(i\backslash J') \simeq i\backslash J' \quad ,$$

où $(i,1_i)$ désigne l'objet initial de $i\backslash I$, est une équivalence faible, ce qui prouve que le morphisme u est une équivalence faible colocalement sur I. Si le localisateur fondamental faible $\mathcal{W}$ est un localisateur fondamental, le raisonnement précédent montre aussi que le morphisme u est une équivalence faible colocalement sur I si et seulement si pour tout foncteur $F : I \longrightarrow \mathcal{C}at$, le morphisme $\widetilde{u} : \int Fw \longrightarrow \int Fw'$ est une équivalence faible. Si de plus $\mathcal{W}$ est fortement saturé,[(3)] cette dernière condition équivaut à affirmer que le morphisme de foncteurs

$$(p_J)_! w^* \simeq (p_{J'})_! u_! u^* w'^* \longrightarrow (p_{J'})_! w'^* \quad ,$$

défini par le morphisme d'adjonction, est un isomorphisme (ce qui généralise le corollaire 3.2.24). En effet, on vérifie aussitôt que pour tout foncteur $F : I \longrightarrow \mathcal{C}at$, le morphisme

$$\gamma\big(\textstyle\int Fw\big) \simeq (p_J)_! w^* \gamma_I(F) \longrightarrow (p_{J'})_! w'^* \gamma_I(F) \simeq \gamma\big(\textstyle\int Fw\big)$$

de $\mathsf{Hot}(e) \simeq \mathsf{Hot}$ s'identifie au morphisme $\gamma(\widetilde{u})$.

Remarque 3.2.26. — Si $\mathcal{W}$ est le localisateur fondamental $\mathcal{W}_0$ des exemples 1.1.31 et 2.1.2, conformément aux considérations de l'exemple 3.1.12, on retrouve comme cas particulier du corollaire 3.2.24 le résultat classique suivant :

Pour qu'un foncteur entre petites catégories $w : J \longrightarrow I$ soit cofinal, autrement dit, $\mathcal{W}_0$-coasphérique (cf. 2.4.2), *il faut et il suffit que pour tout foncteur $F : I \longrightarrow \mathcal{E}ns$, de I vers la catégorie des ensembles, l'application canonique $\varinjlim_J Fw \longrightarrow \varinjlim_I F$, induite par w, soit bijective.*

La remarque 3.2.25 fournit le raffinement suivant, sans doute bien connu :

(3) Voir note 1, page 156.

Pour tout triangle commutatif de foncteurs entre petites catégories

$$\begin{tikzcd} J \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "w"'] & & J' \arrow[dl, "w'"] \\ & I & \end{tikzcd} \qquad w = w'u \quad ,$$

les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) *pour tout objet i de I, le foncteur $i\backslash J \longrightarrow i\backslash J'$, induit par u, définit une bijection $\pi_0(i\backslash J) \longrightarrow \pi_0(i\backslash J')$;*

(b) *pour tout foncteur $F : I \longrightarrow \mathcal{E}ns$, de I vers la catégorie des ensembles, l'application canonique $\varinjlim_J Fw \longrightarrow \varinjlim_{J'} Fw'$, induite par u, est bijective.*

3.2.27. — Soit $u : A \longrightarrow B$ un foncteur entre petites catégories. Dans la suite de ce paragraphe, on désigne aussi, par abus de notation, par $u_!$, u^* les foncteurs

$$\begin{aligned} \underline{\mathsf{Hom}}(A, \mathcal{C}at) &\xrightarrow{u_!} \underline{\mathsf{Hom}}(B, \mathcal{C}at) \quad , & \underline{\mathsf{Hom}}(B, \mathcal{C}at) &\xrightarrow{u^*} \underline{\mathsf{Hom}}(A, \mathcal{C}at) \quad , \\ F &\longmapsto (b \mapsto (\textstyle\int F)/b) & G &\longmapsto Gu \end{aligned}$$

$u_! = \Theta_B \circ \mathcal{C}at/u \circ \Theta'_A$ (cf. 3.1.1), $u^* = \underline{\mathsf{Hom}}(u, 1_{\mathcal{C}at})$, de sorte qu'on ait des carrés commutatifs

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathsf{Hom}}(A, \mathcal{C}at) \arrow[r, "u_!"] \arrow[d, "\gamma_A"'] & \underline{\mathsf{Hom}}(B, \mathcal{C}at) \arrow[d, "\gamma_B"] \\ \mathsf{Hot}(A) \arrow[r, "u_!"'] & \mathsf{Hot}(B) \end{tikzcd} \quad , \quad \begin{tikzcd} \underline{\mathsf{Hom}}(B, \mathcal{C}at) \arrow[r, "u^*"] \arrow[d, "\gamma_B"'] & \underline{\mathsf{Hom}}(A, \mathcal{C}at) \arrow[d, "\gamma_A"] \\ \mathsf{Hot}(B) \arrow[r, "u^*"'] & \mathsf{Hot}(A) \end{tikzcd}$$

(cf. 3.1.6, 3.1.9) (le premier uniquement dans le cas où le localisateur fondamental faible $\mathcal{W}$ est un localisateur fondamental).

3.2.28. — Soit

$$\mathcal{D} = \begin{tikzcd} A' \arrow[r, "w"] \arrow[d, "u'"'] & A \arrow[d, "u"] \\ B' \arrow[r, "v"'] & B \end{tikzcd}$$

un carré cartésien de $\mathcal{C}at$. Pour tout foncteur $F : A \longrightarrow \mathcal{C}at$, on déduit un carré cartésien composé

$$\begin{tikzcd} \int Fw \arrow[r, "\widetilde{w}"] \arrow[d, "\theta_{Fw}"'] & \int F \arrow[d, "\theta_F"] \\ A' \arrow[r, "w"] \arrow[d, "u'"'] & A \arrow[d, "u"] \\ B' \arrow[r, "v"'] & B \end{tikzcd}$$

(cf. 3.2.21). Pour tout objet b' de B', le foncteur $\widetilde{w}$ induit un foncteur

$$(\textstyle\int Fw)/b' \longrightarrow (\textstyle\int F)/v(b') \quad ,$$

et on remarque que

$$(\textstyle\int Fw)/b' = (u'_!w^*(F))(b') \qquad \text{et} \qquad (\textstyle\int F)/v(b') = (v^*u_!(F))(b') \quad .$$

On en déduit un morphisme

$$\kappa_{\mathcal{D}} : u'_!w^* \longrightarrow v^*u_!$$

de $\underline{\mathsf{Hom}}\big(\underline{\mathsf{Hom}}(A,\mathcal{C}at),\underline{\mathsf{Hom}}(B',\mathcal{C}at)\big)$, appelé *morphisme de changement de base associé au carré $\mathcal{D}$.*

Proposition 3.2.29. — *Soit*

$$\mathcal{D} = \quad \begin{tikzcd} A' \arrow[r, "w"] \arrow[d, "u'"'] & A \arrow[d, "u"] \\ B' \arrow[r, "v"'] & B \end{tikzcd}$$

un carré cartésien de $\mathcal{C}at$, avec u morphisme propre (resp. *v morphisme lisse*). *Alors le morphisme de changement de base $\kappa_{\mathcal{D}} : u'_!w^* \longrightarrow v^*u_!$ est coasphérique* (resp. *universellement dans $\mathcal{W}$*) *argument par argument, autrement dit, pour tout foncteur $F : A \longrightarrow \mathcal{C}at$, et tout objet b' de B',*

$$\kappa_{\mathcal{D},F}(b') : (u'_!w^*(F))(b') \longrightarrow (v^*u_!(F))(b')$$

est coasphérique (resp. *universellement dans $\mathcal{W}$*), *et en particulier, une équivalence faible.*

Démonstration. — **Cas u propre.** En vertu du corollaire 3.2.4, le morphisme u' est propre aussi, et pour tout objet b' de B', on a donc un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} A'_{b'} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & A_{v(b')} \arrow[d] \\ A'/b' \arrow[r] & A/v(b') \end{tikzcd}$$

dont les flèches verticales sont coasphériques, et la flèche horizontale du haut un isomorphisme, puisque le carré $\mathcal{D}$ est cartésien. Pour tout foncteur $F : A \longrightarrow \mathcal{C}at$, on en déduit un carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
\int Fw|A'_{b'} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \int F|A_{v(b')} \arrow[d] \\
\int Fw|A'/b' \arrow[r] & \int F|A/v(b') \\
\big(\int Fw\big)/b' \arrow[u, phantom, "\wr"] & \big(\int F\big)/v(b') \arrow[u, phantom, "\wr"] \\
(u'_! w^*(F))(b') \arrow[u, phantom, "\shortparallel"] & (v^* u_!(F))(b') \arrow[u, phantom, "\shortparallel"]
\end{tikzcd}$$

dont les flèches verticales sont des morphismes coasphériques (proposition 3.2.23), et la flèche horizontale du haut un isomorphisme. Il résulte alors de la proposition 1.1.8 (forme duale) que la flèche horizontale du bas est coasphérique, ce qui prouve l'assertion, en vertu du lemme 3.2.22.

Cas v lisse. Soit $F : A \longrightarrow \mathcal{C}at$ un foncteur, et considérons le carré cartésien

$$\begin{tikzcd}
\int Fw \arrow[r, "\widetilde{w}"] \arrow[d, "u'\theta_{Fw}"'] & \int F \arrow[d, "u\theta_F"] \\
B' \arrow[r, "v"'] & B
\end{tikzcd}$$

(cf. 3.2.28). En vertu du dual du lemme 3.2.11, pour tout objet b' de B', on en déduit un carré cartésien

$$\begin{tikzcd}
\big(\int Fw\big)/b' \arrow[r, "\kappa_{\mathcal{D},F}(b')"] \arrow[d] & \big(\int F\big)/v(b') \arrow[d] \\
B'/b' \arrow[r] & B/v(b')
\end{tikzcd} .$$

Comme v est lisse, il résulte de la proposition 3.2.8 (forme duale) que le morphisme $B/b' \longrightarrow B/v(b')$, induit par v, est universellement dans $\mathcal{W}$. Il en est donc de même de $\kappa_{\mathcal{D},F}(b')$, ce qui achève la démonstration. □

3.2.30. — Soit $u : A \longrightarrow B$ un morphisme de $\mathcal{C}at$. Par abus de notation, on désigne par $\int_B A/b$ la catégorie $\int F_u$, où F_u est le foncteur $F_u : B \longrightarrow \mathcal{C}at$ défini par $b \longmapsto A/b$. La catégorie $\int_B A/b$ est la catégorie dont les objets sont les triplets $(b, a, f : u(a) \longrightarrow b)$, $a \in \mathsf{Ob}(A)$, $b \in \mathsf{Ob}(B)$, $f \in \mathsf{Fl}(B)$, un morphisme de (b, a, f) vers (b', a', f') étant un couple $(h : b \longrightarrow b',\ g : a \longrightarrow a')$, $g \in \mathsf{Fl}(A)$, $h \in \mathsf{Fl}(B)$, tel que le carré

$$\begin{tikzcd} u(a) \arrow[r, "u(g)"] \arrow[d, "f"'] & u(a') \arrow[d, "f'"] \\ b \arrow[r, "h"'] & b' \end{tikzcd}$$

soit commutatif. On définit des foncteurs

$$\begin{aligned} i_u : A &\longrightarrow \textstyle\int_B A/b \\ a &\longmapsto (u(a), a, 1_{u(a)}) \end{aligned} \qquad , \qquad \begin{aligned} r_u : \textstyle\int_B A/b &\longrightarrow A \\ (b, a, f) &\longmapsto a \end{aligned} \quad ,$$

et un morphisme de foncteurs

$$\alpha = \alpha_u : i_u r_u \longrightarrow 1_{\int_B A/b} \quad , \qquad \alpha_{(b,a,f)} = (f, 1_a) : (u(a), a, 1_{u(a)}) \longrightarrow (b, a, f) \quad ,$$

et on vérifie aussitôt que $r_u i_u = 1_A$. On en déduit que i_u et r_u sont des équivalences faibles. On remarque qu'on a $u = \theta_{F_u} i_u$, où θ_{F_u} est le morphisme canonique

$$\theta_{F_u} : \textstyle\int_B A/b = \int F_u \longrightarrow B \quad .$$

Le morphisme u se décompose donc en une équivalence faible suivie d'une cofibration.

De plus, pour tout carré commutatif de $\mathcal{C}at$

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "w"] \arrow[d, "u'"'] & A \arrow[d, "u"] \\ B' \arrow[r, "v"'] & B \end{tikzcd} \quad ,$$

on a des carrés commutatifs

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "w"] \arrow[d, "i_{u'}"'] & A \arrow[d, "i_u"] \\ \int_{B'} A'/b' \arrow[r, "s"'] & \int_B A/b \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \int_{B'} A'/b' \arrow[r, "s"] \arrow[d, "r_{u'}"'] & \int_B A/b \arrow[d, "r_u"] \\ A' \arrow[r, "w"'] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \int_{B'} A'/b' \arrow[r, "s"] \arrow[d, "\theta_{F_{u'}}"'] & \int_B A/b \arrow[d, "\theta_{F_u}"] \\ B' \arrow[r, "v"'] & B \end{tikzcd} \quad ,$$

où $s : \int_{B'} A'/b' \longrightarrow \int_B A/b$ est le foncteur défini par $(b', a', f') \mapsto (v(b'), w(a'), v(f'))$, ainsi que l'égalité

$$s \star \alpha_{u'} = \alpha_u \star s \quad .$$

Dans la suite de cette section, jusqu'au paragraphe 3.2.35 *inclus, on suppose que le localisateur fondamental faible $\mathcal{W}$ est un localisateur fondamental.*

Théorème 3.2.31. — *Soit $u : A \longrightarrow B$ un morphisme de $\mathcal{C}at$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *u est propre ;*

(b) *pour tout diagramme de carrés cartésiens dans $\mathcal{C}at$*

$$\begin{tikzcd} A'' \arrow[r] \arrow[d] & A' \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d, "u"] \\ B'' \arrow[r] & B' \arrow[r] & B \end{tikzcd} \quad ,$$

le morphisme de changement de base associé au carré de gauche est une équivalence faible argument par argument.

Démonstration. — L'implication $(a) \Rightarrow (b)$ résulte du corollaire 3.2.4 et de la proposition 3.2.29. Montrons l'implication $(b) \Rightarrow (a)$. En vertu du théorème 3.2.15, il suffit de montrer que si

$$\mathcal{D} = \begin{tikzcd} A' \arrow[r, "w"] \arrow[d, "u'"'] & A \arrow[d, "u"] \\ B' \arrow[r, "v"'] & B \end{tikzcd}$$

est un carré cartésien dont le morphisme de changement de base $\kappa_{\mathcal{D}}$ est une équivalence faible argument par argument, et si v est coasphérique, alors w est coasphérique. Par hypothèse, pour tout foncteur $F : A \longrightarrow \mathcal{C}at$, et tout objet b' de B',

$$\kappa_{\mathcal{D},F}(b') : (u'_! w^*(F))(b') \longrightarrow (v^* u_!(F))(b')$$

est une équivalence faible, et il résulte de la proposition 2.3.1 que

$$\textstyle\int \kappa_{\mathcal{D},F} : \int u'_! w^*(F) \longrightarrow \int v^* u_!(F)$$

est une équivalence faible. D'autre part, comme v est coasphérique, il résulte de la proposition 3.2.23 que le morphisme

$$\widetilde{v} : \textstyle\int v^* u_!(F) = \int u_!(F) v \longrightarrow \int u_!(F) \quad ,$$

induit par v, est une équivalence faible, et par suite aussi le composé

$$\widetilde{v} \textstyle\int \kappa_{\mathcal{D},F} : \int u'_! w^*(F) \longrightarrow \int u_!(F) \quad .$$

Or, en reprenant l'abus de notation de 3.2.30,

$$\int u'_! w^*(F) = \int_{B'} \big(\textstyle\int Fw\big)/b' \quad , \qquad \int u_!(F) = \int_B \big(\textstyle\int F\big)/b \quad ,$$

et on a un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} \int Fw \arrow[r, "\widetilde{w}"] \arrow[d, "u'\theta_{Fw}"'] & \int F \arrow[d, "u\theta_F"] \\ B' \arrow[r, "v"'] & B \end{tikzcd}$$

(cf. 3.2.28), d'où un carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
\int Fw \arrow[r, "\widetilde{w}"] \arrow[d] & \int F \arrow[d] \\
\int_{B'} (\int Fw)/b' \arrow[r, "s"'] & \int_B (\int F)/b
\end{tikzcd}$$

dont les flèches verticales sont des équivalences faibles (cf. 3.2.30). On vérifie facilement que $s = \widetilde{v} \int \kappa_{\mathcal{D},F}$, ce qui implique que $\widetilde{w}$ est une équivalence faible, et prouve, en vertu de la proposition 3.2.23, que le foncteur w est coasphérique, ce qui achève la démonstration. □

Lemme 3.2.32. — *Soit*

$$\mathcal{D} = \begin{tikzcd}
A' \arrow[r, "w"] \arrow[d, "u'"'] & A \arrow[d, "u"] \\
B' \arrow[r, "v"'] & B
\end{tikzcd}$$

un carré cartésien de $\mathcal{C}at$. On suppose que A est la catégorie ponctuelle e, que B admet un objet initial $\varnothing_B$, et que le morphisme u est le foncteur $e \longrightarrow B$ défini par cet objet. Alors le morphisme de changement de base $\kappa_{\mathcal{D}} : u'_! w^* \longrightarrow v^* u_!$ est une équivalence faible argument par argument si et seulement si le foncteur u' est asphérique.

Démonstration. — Pour toute petite catégorie C, vue comme foncteur de e vers $\mathcal{C}at$, et tout objet b' de B', on a des isomorphismes

$$(u'_! w^*(C))(b') \simeq (A' \times C)/b' \simeq A'/b' \times C\ , \quad (v^* u_!(C))(b') \simeq \mathsf{Hom}_B(\varnothing, v(b')) \times C \simeq C\ ,$$

et le morphisme de changement de base

$$\kappa_{\mathcal{D},C}(b') : (u'_! w^*(C))(b') \longrightarrow (v^* u_!(C))(b')$$

s'identifie à la projection $A'/b' \times C \longrightarrow C$, ce qui prouve le lemme, en vertu des propositions 1.1.3 et 1.1.4. □

Théorème 3.2.33. — *Soit $u : A \longrightarrow B$ un morphisme de $\mathcal{C}at$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *u est lisse ;*

(b) *pour tout diagramme de carrés cartésiens dans $\mathcal{C}at$*

$$\begin{tikzcd} A'' \arrow[r] \arrow[d] & B'' \arrow[d] \\ A' \arrow[r] \arrow[d] & B' \arrow[d] \\ A \arrow[r, "u"'] & B \end{tikzcd} ,$$

le morphisme de changement de base associé au carré du haut est une équivalence faible argument par argument.

Démonstration. — L'implication $(a) \Rightarrow (b)$ résulte de la proposition 3.2.29 et de la stabilité des morphismes lisses par changement de base (cf. remarque 3.2.19). Pour montrer l'implication $(b) \Rightarrow (a)$, soit b un objet de B, et considérons le diagramme de carrés cartésiens de $\mathcal{C}at$

$$\begin{tikzcd} A_b \arrow[r] \arrow[d, "j_b"'] & e \arrow[d] \\ b\backslash A \arrow[r] \arrow[d] & b\backslash B \arrow[d] \\ A \arrow[r, "u"'] & B \end{tikzcd} ,$$

où $e \longrightarrow b\backslash B$ est le foncteur défini par l'objet $(b, 1_b)$ de $b\backslash B$. La condition (b) implique que le morphisme de changement de base associé au carré du haut est une équivalence faible argument par argument, et il résulte donc du lemme précédent que le foncteur j_b est asphérique, ce qui prouve l'assertion. □

Remarque 3.2.34. — Il résulte aussitôt du lemme 3.2.22 et de la remarque 3.2.25 que si

$$\mathcal{D} = \begin{tikzcd} A' \arrow[r, "w"] \arrow[d, "u'"'] & A \arrow[d, "u"] \\ B' \arrow[r, "v"'] & B \end{tikzcd}$$

désigne un carré cartésien de $\mathcal{C}at$, alors le morphisme de changement de base $\kappa_{\mathcal{D}}$ est une équivalence faible argument par argument si et seulement si pour tout objet b' de B', le foncteur $A'/b' \longrightarrow A/v(b')$, induit par w, est une équivalence faible colocalement sur A.

3.2.35. — En reprenant les notations de 3.1.6, soit

$$\mathcal{D} = \begin{tikzcd} A' \arrow[r, "w"] \arrow[d, "u'"'] & A \arrow[d, "u"] \\ B' \arrow[r, "v"'] & B \end{tikzcd}$$

un carré cartésien de $\mathcal{C}at$. On en déduit un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Hot}(A') & \mathsf{Hot}(A) \arrow[l, "w^*"'] \\ \mathsf{Hot}(B') \arrow[u, "u'^*"] & \mathsf{Hot}(B) \arrow[l, "v^*"] \arrow[u, "u^*"'] \end{tikzcd} \quad ,$$

les foncteurs u^* et u'^* admettant des adjoints à gauche

$$u_! : \mathsf{Hot}(A) \longrightarrow \mathsf{Hot}(B) \qquad \text{et} \qquad u'_! : \mathsf{Hot}(A') \longrightarrow \mathsf{Hot}(B')$$

respectivement (cf. 3.1.7). On appelle aussi *morphisme de changement de base associé au carré cartésien* $\mathcal{D}$ et on note $c_{\mathcal{D}} : u'_! w^* \longrightarrow v^* u_!$ le morphisme de $\underline{\mathsf{Hom}}(\mathsf{Hot}(A), \mathsf{Hot}(B'))$, composé des flèches

$$u'_! w^* \longrightarrow u'_! w^* u^* u_! = u'_! u'^* v^* u_! \longrightarrow v^* u_! \quad ,$$

définies par les morphismes d'adjonction $1_{\mathsf{Hot}(A)} \longrightarrow u^* u_!$ et $u'_! u'^* \longrightarrow 1_{\mathsf{Hot}(B')}$. On vérifie facilement que le morphisme $c_{\mathcal{D}}$ est induit, par localisation, par le morphisme $\kappa_{\mathcal{D}}$ (cf. 3.2.28), autrement dit, en gardant les notations de 3.1.9, pour tout foncteur $F : A \longrightarrow \mathcal{C}at$, on a

$$c_{\mathcal{D},\gamma_A(F)} = \gamma_{B'}(\kappa_{\mathcal{D},F}) \quad .$$

Ainsi, en vertu de la proposition 3.2.29, si u est propre ou v lisse, alors le morphisme $c_{\mathcal{D}}$ est un isomorphisme. Il résulte du théorème 3.2.31 (resp. 3.2.33) que cette propriété caractérise les morphismes propres (resp. lisses) si l'on demande qu'elle reste vraie après tout changement de base (pourvu que le localisateur fondamental $\mathcal{W}$ soit fortement saturé [(4)]).

Ce qui suit est largement et librement inspiré du chapitre VII *des* Dérivateurs *de Grothendieck* [**15**]. *On ne suppose plus que le localisateur fondamental faible $\mathcal{W}$ soit un localisateur fondamental.*

3.2.36. — On note $\mathbb{E}$ l'ensemble ordonné (ainsi que la catégorie correspondante) dont les éléments sont les entiers relatifs, et dont la relation d'ordre est définie par

$$p \preceq q \quad \Longleftrightarrow \quad (p = q) \ \text{ ou } \ (\exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } p = 2k \text{ et } q = 2k \pm 1) \quad ,$$

autrement dit

$$\mathbb{E} \ = \ \cdots \longleftarrow -4 \longrightarrow -3 \longleftarrow -2 \longrightarrow -1 \longleftarrow 0 \longrightarrow 1 \longleftarrow 2 \longrightarrow 3 \longleftarrow 4 \longrightarrow \ \cdots \quad .$$

(4) Voir note 1, page 156.

Pour tout couple p, q d'entiers relatifs tels que $p \leqslant q$, on note $\mathbb{E}_{p,q}$ le sous-ensemble ordonné de $\mathbb{E}$ formé des $k \in \mathbb{Z}$ tels que $p \leqslant k \leqslant q$, muni de la relation d'ordre induite par $\preceq$.

3.2.37. — Soit C une petite catégorie. Pour tout couple p, q d'entiers relatifs tels que $p \leqslant q$, on note $\mathsf{Ch}_{p,q}(C)$ l'ensemble des foncteurs de $\mathbb{E}$ vers C correspondant à des diagrammes dans C

$$\cdots \xleftarrow{f_{-4}} c_{-4} \xrightarrow{f_{-3}} c_{-3} \xleftarrow{f_{-2}} c_{-2} \xrightarrow{f_{-1}} c_{-1} \xleftarrow{f_0} c_0 \xrightarrow{f_1} c_1 \xleftarrow{f_2} c_2 \xrightarrow{f_3} c_3 \xleftarrow{f_4} c_4 \xrightarrow{f_5} \cdots$$

tels que

$$c_i = c_p \ , \quad f_i = 1_{c_p} \ , \quad i \leqslant p \ , \qquad \text{et} \qquad c_j = c_q \ , \quad f_j = 1_{c_q} \ , \quad j > q \ ,$$

et $\underline{\mathsf{Ch}}_{p,q}(C)$ la sous-catégorie (non pleine) de $\underline{\mathsf{Hom}}(\mathbb{E}, C)$ dont les objets sont les foncteurs appartenant à $\mathsf{Ch}_{p,q}(C)$, et les morphismes les transformations naturelles α entre tels foncteurs, satisfaisant aux conditions

$$\alpha_i = \alpha_p \ , \quad i \leqslant p \ , \qquad \text{et} \qquad \alpha_j = \alpha_q \ , \quad j \geqslant q \ .$$

La catégorie $\underline{\mathsf{Ch}}_{p,q}(C)$ s'identifie de façon évidente à la catégorie $\underline{\mathsf{Hom}}(\mathbb{E}_{p,q}, C)$ des foncteurs de $\mathbb{E}_{p,q}$ vers C. On définit des foncteurs $s^{p,q}_C, t^{p,q}_C : \underline{\mathsf{Ch}}_{p,q}(C) \longrightarrow C$ en posant

$$\begin{aligned} &s^{p,q}_C(c) = c_p \ , \quad t^{p,q}_C(c) = c_q \ , \quad c \in \mathsf{Ob}\,\underline{\mathsf{Ch}}_{p,q}(C) = \mathsf{Ch}_{p,q}(C) \ , \\ &s^{p,q}_C(\alpha) = \alpha_p \ , \quad t^{p,q}_C(\alpha) = \alpha_q \ , \quad \alpha \in \mathsf{Fl}\,\underline{\mathsf{Ch}}_{p,q}(C) \ , \end{aligned}$$

et un foncteur $i^{p,q}_C : C \longrightarrow \underline{\mathsf{Ch}}_{p,q}(C)$, associant à un objet c de C le foncteur constant de valeur c. On a

$$s^{p,q}_C \circ i^{p,q}_C = 1_C = t^{p,q}_C \circ i^{p,q}_C \quad .$$

Lemme 3.2.38. — *Soient C une petite catégorie, et p, q deux entiers relatifs impairs tels que $p < q$. Alors le foncteur*

$$(s^{p,q}_C, t^{p,q}_C) : \underline{\mathsf{Ch}}_{p,q}(C) \longrightarrow C \times C$$

est une cofibration.

Démonstration. — Comme p et q sont impairs et $p < q$, on a $p + 1 \leqslant q - 1$, et on peut considérer la catégorie $\underline{\mathsf{Ch}}_{p+1,q-1}(C)$ ainsi que le morphisme

$$(s^{p+1,q-1}_C, t^{p+1,q-1}_C) : \underline{\mathsf{Ch}}_{p+1,q-1}(C) \longrightarrow C \times C$$

de $\mathcal{C}at$, et définir un foncteur

$$F : C \times C \longrightarrow \mathcal{C}at \quad , \qquad (c, c') \longmapsto \underline{\mathsf{Ch}}_{p+1,q-1}(C)/(c, c') \quad .$$

Un objet de $\underline{\mathsf{Ch}}_{p+1,q-1}(C)/(c, c')$ est un triplet formé d'un diagramme dans C de la forme

$$c_{p+1} \longrightarrow c_{p+2} \longleftarrow \ \cdots \ \longrightarrow c_{q-2} \longleftarrow c_{q-1}$$

et de morphismes $c_{p+1} \longrightarrow c$ et $c_{q-1} \longrightarrow c'$ de C. La donnée d'un tel triplet équivaut à la donnée d'un objet de $\underline{\mathsf{Ch}}_{p,q}(C)$ de la forme

$$c_p = c \longleftarrow c_{p+1} \longrightarrow c_{p+2} \longleftarrow \;\cdots\; \longrightarrow c_{q-2} \longleftarrow c_{q-1} \longrightarrow c_q = c' \qquad .$$

Un morphisme de $\underline{\mathsf{Ch}}_{p+1,q-1}(C)/(c,c')$ correspond à un morphisme de $\underline{\mathsf{Ch}}_{p,q}(C)$ de la forme

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[d, "\alpha_p = 1_c"'] & c_{p+1} \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{p+1}"] & c_{p+2} \arrow[d, "\alpha_{p+2}"] & \cdots \arrow[l] \arrow[r] & c_{q-2} \arrow[d, "\alpha_{q-2}"] & c_{q-1} \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{q-1}"] & c' \arrow[d, "\alpha_q = 1_{c'}"] \\
c & c'_{p+1} \arrow[l] \arrow[r] & c'_{p+2} & \cdots \arrow[l] \arrow[r] & c'_{q-2} & c'_{q-1} \arrow[l] \arrow[r] & c'
\end{tikzcd} \quad .$$

Il est alors facile de vérifier que le foncteur

$$(s^{p,q}_C, t^{p,q}_C) : \underline{\mathsf{Ch}}_{p,q}(C) \longrightarrow C \times C$$

s'identifie à la cofibration canonique $\theta_F : \int F \longrightarrow C \times C$ associée au foncteur F, ce qui prouve le lemme. $\square$

Lemme 3.2.39. — *Soient C une petite catégorie, et p, q deux entiers relatifs tels que $p \leqslant q$. Alors les foncteurs*

$$s^{p,q}_C : \underline{\mathsf{Ch}}_{p,q}(C) \longrightarrow C \qquad \text{et} \qquad t^{p,q}_C : \underline{\mathsf{Ch}}_{p,q}(C) \longrightarrow C$$

ont des fibres contractiles.

Démonstration. — Montrons par exemple l'assertion relative à $s^{p,q}_C$. On raisonne par récurrence sur $n = q - p$. Si $p = q$, la catégorie $\underline{\mathsf{Ch}}_{p,q}(C)$ s'identifie à C, et le foncteur $s^{p,q}_C$ au foncteur identique 1_C, ce qui prouve l'assertion dans ce cas. Supposons que $q > p$, et soit c un objet de C. On a une inclusion évidente $i : \mathbb{E}_{p,q-1} \hookrightarrow \mathbb{E}_{p,q}$ admettant une rétraction r, définie par

$$r(k) = \begin{cases} k\ , & p \leqslant k < q\ , \\ q-1\ , & k = q\ , \end{cases}$$

et un morphisme de foncteurs α entre ir et $1_{\mathbb{E}_{p,q}}$ (de ir vers $1_{\mathbb{E}_{p,q}}$ si q est impair, ou dans l'autre sens si q est pair), induisant l'identité sur $\mathbb{E}_{p,q-1}$. Vu les identifications $\underline{\mathsf{Ch}}_{p,q} = \underline{\mathsf{Hom}}(\mathbb{E}_{p,q}, C)$ et $\underline{\mathsf{Ch}}_{p,q-1} = \underline{\mathsf{Hom}}(\mathbb{E}_{p,q-1}, C)$, on en déduit des foncteurs

$$i^* : \underline{\mathsf{Ch}}_{p,q} \longrightarrow \underline{\mathsf{Ch}}_{p,q-1} \qquad \text{et} \qquad r^* : \underline{\mathsf{Ch}}_{p,q-1} \longrightarrow \underline{\mathsf{Ch}}_{p,q}$$

tels que $i^* r^* = 1_{\underline{\mathsf{Ch}}_{p,q-1}}$, et un morphisme de foncteurs α^* entre $r^* i^*$ et $1_{\underline{\mathsf{Ch}}_{p,q}}$. On vérifie facilement que ces foncteurs et ce morphisme de foncteurs sont compatibles au passage aux fibres au-dessus de c, définissant ainsi une équivalence d'homotopie entre la fibre de $s^{p,q}_C$ au-dessus de c avec celle de $s^{p,q-1}_C$. Comme par hypothèse de récurrence cette dernière est contractile, cela prouve l'assertion. Pour montrer l'assertion relative à $t_C^{p,q}$, on raisonne de façon analogue, ou on la déduit de ce qui précède, en utilisant l'isomorphisme

$$S : \mathbb{E}_{-q,-p} \longrightarrow \mathbb{E}_{p,q} \quad , \qquad k \longmapsto -k \quad ,$$

qui induit un isomorphisme $S^* : \underline{\mathsf{Ch}}_{p,q} \longrightarrow \underline{\mathsf{Ch}}_{-q,-p}$ tel que $t_C^{p,q} = s_C^{-q,-p} S^*$. □

3.2.40. — Soient C une petite catégorie, et I la partie de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ formée des couples (p,q) tels que $p \leqslant q$, munie de la relation d'ordre $\leqslant$ définie par

$$(p,q) \leqslant (p',q') \quad \Longleftrightarrow \quad p' \leqslant p \ \text{ et } \ q \leqslant q' \quad , \qquad (p,q) \ , \ (p',q') \in I \quad .$$

On remarque que I est un ensemble ordonné filtrant, que pour tous (p,q), $(p',q') \in I$, si $(p,q) \leqslant (p',q')$, alors $\underline{\mathsf{Ch}}_{p,q}(C)$ est une sous-catégorie (non pleine, si $(p,q) < (p',q')$) de $\underline{\mathsf{Ch}}_{p',q'}(C)$, et qu'on a alors des triangles commutatifs

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathsf{Ch}}_{p,q}(C) \arrow[rr, hook] \arrow[dr, "(s_C^{p,q},\, t_C^{p,q})"'] & & \underline{\mathsf{Ch}}_{p',q'}(C) \arrow[dl, "(s_C^{p',q'},\, t_C^{p',q'})"] \\ & C \times C & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "i_C^{p,q}"'] \arrow[dr, "i_C^{p',q'}"] & \\ \underline{\mathsf{Ch}}_{p,q}(C) \arrow[rr, hook] & & \underline{\mathsf{Ch}}_{p',q'}(C) \end{tikzcd} \quad .$$

On note $\underline{\mathsf{Ch}}_{\infty}(C)$ la sous-catégorie (non pleine) de $\underline{\mathsf{Hom}}(\mathbb{E}, C)$, réunion filtrante des sous-catégories $\underline{\mathsf{Ch}}_{p,q}(C)$, pour $(p,q) \in I$, et $\mathsf{Ch}_{\infty}(C)$ l'ensemble des objets de $\underline{\mathsf{Ch}}_{\infty}(C)$, réunion des ensembles $\mathsf{Ch}_{p,q}(C)$, de sorte que

$$\mathsf{Ch}_{\infty}(C) = \varinjlim_{(p,q)\in I} \mathsf{Ch}_{p,q}(C) \qquad \text{et} \qquad \underline{\mathsf{Ch}}_{\infty}(C) = \varinjlim_{(p,q)\in I} \underline{\mathsf{Ch}}_{p,q}(C) \quad .$$

La commutativité des triangles ci-dessus montre aussitôt que les foncteurs

$$s_C^{p,q}, t_C^{p,q} : \underline{\mathsf{Ch}}_{p,q}(C) \longrightarrow C \qquad \text{et} \qquad i_C^{p,q} : C \longrightarrow \underline{\mathsf{Ch}}_{p,q}(C)$$

définissent par passage à la limite inductive des foncteurs

$$s_C^{\infty}, t_C^{\infty} : \underline{\mathsf{Ch}}_{\infty}(C) \longrightarrow C \qquad \text{et} \qquad i_C^{\infty} : C \longrightarrow \underline{\mathsf{Ch}}_{\infty}(C) \quad ,$$

de sorte que

$$s_C^{\infty} = \varinjlim_{(p,q)\in I} s_C^{p,q} \quad , \qquad t_C^{\infty} = \varinjlim_{(p,q)\in I} t_C^{p,q} \qquad \text{et} \qquad i_C^{\infty} = \varinjlim_{(p,q)\in I} i_C^{p,q} \quad .$$

De plus, on a donc $s_C^{\infty} \circ i_C^{\infty} = 1_C = t_C^{\infty} \circ i_C^{\infty}$.

3.2.41. — L'application $k \mapsto k+1$, $k \in \mathbb{Z}$, définit un isomorphisme $T : \mathbb{E}^{\circ} \xrightarrow{\sim} \mathbb{E}$ de la catégorie opposée à $\mathbb{E}$ avec $\mathbb{E}$. On en déduit, pour toute petite catégorie C, un isomorphisme de catégories

$$\underline{\mathsf{Hom}}(\mathbb{E}, C) \xrightarrow[\sim]{T^*} \underline{\mathsf{Hom}}(\mathbb{E}^{\circ}, C) \simeq \underline{\mathsf{Hom}}(\mathbb{E}, C^{\circ})^{\circ} \quad .$$

On vérifie facilement que cet isomorphisme induit un isomorphisme des sous-catégories $\underline{\mathsf{Ch}}_{\infty}(C) \xrightarrow{\sim} (\underline{\mathsf{Ch}}_{\infty}(C^{\circ}))^{\circ}$, rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathsf{Ch}}_{\infty}(C) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "(s_C^{\infty}, t_C^{\infty})"'] & (\underline{\mathsf{Ch}}_{\infty}(C^{\circ}))^{\circ} \arrow[d, "(s_{C^{\circ}}^{\infty}, t_{C^{\circ}}^{\infty})^{\circ}"] \\ C \times C \arrow[r, "="'] & (C^{\circ} \times C^{\circ})^{\circ} \end{tikzcd} .$$

Proposition 3.2.42. — *Pour toute petite catégorie C, le foncteur*

$$(s_C^{\infty}, t_C^{\infty}) : \underline{\mathsf{Ch}}_{\infty}(C) \longrightarrow C \times C$$

est propre et lisse.

Démonstration. — L'ensemble I' des couples (p, q) appartenant à l'ensemble ordonné I (3.2.40) avec p et q impairs est une partie cofinale de I. On en déduit un isomorphisme

$$(s_C^{\infty}, t_C^{\infty}) \simeq \varinjlim_{(p,q) \in I'} (s_C^{p,q}, t_C^{p,q}) \quad .$$

Le lemme 3.2.38, l'exemple 3.2.2, et la proposition 3.2.18 impliquent alors que le foncteur $(s_C^{\infty}, t_C^{\infty})$ est propre. La lissité découle de ce résultat appliqué à la catégorie opposée C°, et des considérations du paragraphe précédent. □

Corollaire 3.2.43. — *Pour toute petite catégorie C, les foncteurs*

$$s_C^{\infty} : \underline{\mathsf{Ch}}_{\infty}(C) \longrightarrow C \qquad \textit{et} \qquad t_C^{\infty} : \underline{\mathsf{Ch}}_{\infty}(C) \longrightarrow C$$

sont propres et lisses.

Démonstration. — Comme les deux projections

$$\begin{tikzcd} & C \times C \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ C & & C \end{tikzcd}$$

sont à la fois des fibrations et des cofibrations, le corollaire résulte de la proposition, et de la stabilité des morphismes propres et des morphismes lisses par composition (3.2.10 et 3.2.19). □

Proposition 3.2.44. — *Pour toute petite catégorie C, les foncteurs*

$$s_C^{\infty} : \underline{\mathsf{Ch}}_{\infty}(C) \longrightarrow C \qquad \textit{et} \qquad t_C^{\infty} : \underline{\mathsf{Ch}}_{\infty}(C) \longrightarrow C$$

ont des fibres asphériques.

Démonstration. — Comme on a

$$s_C^{\infty} = \varinjlim_{(p,q) \in I} s_C^{p,q} \qquad \text{et} \qquad t_C^{\infty} = \varinjlim_{(p,q) \in I} t_C^{p,q}$$

(*cf.* 3.2.40), la proposition résulte du lemme 3.2.39, de la commutativité des limites inductives filtrantes aux produits fibrés, et des propositions 1.5.19 et 2.4.12, (a). □

Théorème 3.2.45. — *Tout morphisme de $\mathcal{C}at$ se décompose en une équivalence faible, suivie d'un foncteur propre et lisse.*[5] *De plus, on peut choisir cette décomposition de sorte que ladite équivalence faible admette une rétraction qui soit un foncteur propre et lisse à fibres asphériques.*

Démonstration. — Soit $u : A \longrightarrow B$ un morphisme de $\mathcal{C}at$, et formons le carré cartésien

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "v"] \arrow[d, "q"'] & \underline{\mathsf{Ch}}_{\infty}(B) \arrow[d, "(s_B^{\infty}, t_B^{\infty})"] \\ A \times B \arrow[r, "u \times 1_B"'] & B \times B \end{tikzcd} \quad .$$

Le foncteur $(s_B^{\infty}, t_B^{\infty})$ étant propre et lisse (3.2.42), il en est de même de q (3.2.4 et 3.2.19). Comme on a l'égalité $(u \times 1_B)(1_A, u) = (s_B^{\infty}, t_B^{\infty}) i_B^{\infty} u$, il existe une unique flèche $j : A \longrightarrow C$ telle que

$$qj = (1_A, u) \qquad \text{et} \qquad vj = i_B^{\infty} u \quad .$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, dashed, "j"] \arrow[drr, "i_B^{\infty} u"] \arrow[ddr, "(1_A, u)"'] & & \\ & C \arrow[r, "v"] \arrow[d, "q"] & \underline{\mathsf{Ch}}_{\infty}(B) \arrow[d, "(s_B^{\infty}, t_B^{\infty})"] \\ & A \times B \arrow[r, "u \times 1_B"'] & B \times B \end{tikzcd}$$

On pose

$$r = \mathsf{pr}_1 \circ q \quad \text{et} \quad p = \mathsf{pr}_2 \circ q \quad , \qquad A \xleftarrow{\mathsf{pr}_1} A \times B \xrightarrow{\mathsf{pr}_2} B \quad ,$$

où pr_1 et pr_2 désignent les deux projections. La stabilité des morphismes propres et des morphismes lisses par composition (3.2.10 et 3.2.19) implique que p et r sont propres et lisses. D'autre part, on vérifie aussitôt que le carré

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "v"] \arrow[d, "r"'] & \underline{\mathsf{Ch}}_{\infty}(B) \arrow[d, "s_B^{\infty}"] \\ A \arrow[r, "u"'] & B \end{tikzcd}$$

[5] Cela résulte aussi d'un théorème dû à Denis-Charles Cisinski [**10**, théorème 5.3.14], utilisant des techniques moins élémentaires.

est cartésien, ce qui implique en vertu de la proposition 3.2.44 que r est à fibres asphériques, et il résulte de la proposition 3.2.6 qu'il est en particulier une équivalence faible. Enfin, on a les égalités

$$pj = \mathsf{pr}_2 \circ qj = \mathsf{pr}_2 \circ (1_A, u) = u \qquad \text{et} \qquad rj = \mathsf{pr}_1 \circ qj = \mathsf{pr}_1 \circ (1_A, u) = 1_A \quad ,$$

la deuxième égalité impliquant que j est une équivalence faible, ce qui achève la démonstration. □

Définition 3.2.46. — On dit qu'un morphisme $u : A \longrightarrow B$ de $\mathcal{C}at$ est $\mathcal{W}$-*localement constant*, ou plus simplement *localement constant*, si pour toute flèche $g : b_0 \longrightarrow b_1$ de B, le morphisme

$$A/b_0 \longrightarrow A/b_1 \quad , \qquad (a, f : u(a) \to b_0) \longmapsto (a, gf : u(a) \to b_1) \quad ,$$

induit par g, est une équivalence faible. On dit que u est $\mathcal{W}$-*colocalement constant*, ou plus simplement *colocalement constant*, si le morphisme $u^\circ : A^\circ \longrightarrow B^\circ$ est localement constant, autrement dit, si pour toute flèche $g : b_0 \longrightarrow b_1$ de B, le morphisme

$$b_1\backslash A \longrightarrow b_0\backslash A \quad , \qquad (a, f : b_1 \to u(a)) \longmapsto (a, fg : b_0 \longrightarrow u(a)) \quad ,$$

induit par g, est une équivalence faible.

Proposition 3.2.47. — *Un morphisme propre et lisse de $\mathcal{C}at$ est à la fois localement et colocalement constant.*

Démonstration. — Soient $u : A \longrightarrow B$ un morphisme propre et lisse de $\mathcal{C}at$ et $g : b_0 \longrightarrow b_1$ une flèche de B. Montrons que le foncteur $A/b_0 \longrightarrow A/b_1$, induit par g, est une équivalence faible. Le morphisme g de B définit un foncteur $\Delta_1 \longrightarrow B$. Formons le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} A_g = A \times_B \Delta_1 & \longrightarrow & A \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \Delta_1 & \longrightarrow & B \end{array} \quad .$$

Le foncteur u étant propre, il résulte de la proposition 3.2.3, (c) que l'inclusion $i_1 : A_{b_1} \hookrightarrow A_g$ de la fibre A_{b_1} de A au-dessus de l'objet b_1 de B (qui s'identifie à la fibre de A_g au-dessus de l'objet 1 de Δ_1) est un morphisme coasphérique et en particulier une équivalence faible. Dualement, u étant aussi un foncteur lisse, l'inclusion $i_0 : A_{b_0} \hookrightarrow A_g$ est un foncteur asphérique et en particulier une équivalence faible. On note $v : A_g \longrightarrow A/b_1$ le foncteur défini sur les objets par

$$v(a) = \begin{cases} (a, g : u(a) \longrightarrow b_1) \quad , & \text{pour } a \text{ objet de } A_g \text{ au-dessus de } b_0 \quad , \\ (a, 1_{u(a)} : u(a) \longrightarrow b_1) \quad , & \text{pour } a \text{ objet de } A_g \text{ au-dessus de } b_1 \quad , \end{cases}$$

et sur les flèches par

$$f : a \longrightarrow a' \longmapsto f : v(a) \longrightarrow v(a') \quad .$$

On vérifie aussitôt que le diagramme

$$\begin{tikzcd} A_{b_0} \arrow[r, "i_0"] \arrow[d] & A_g \arrow[dr, "v"'] & A_{b_1} \arrow[l, "i_1"'] \arrow[d] \\ A/b_0 \arrow[rr] & & A/b_1 \end{tikzcd} ,$$

dont les flèches verticales sont les morphismes canoniques et la flèche horizontal du bas le foncteur induit par g, est commutatif. Or, comme le foncteur u est propre les flèches verticales de ce diagramme sont des morphismes coasphériques et en particulier des équivalences faibles. Les flèches i_0 et i_1 étant également des équivalences faibles, on déduit par une double application de la saturation faible que le foncteur $A/b_0 \longrightarrow A/b_1$, induit par g, est une équivalence faible, ce qui prouve que le morphisme u est localement constant. Comme le foncteur u est aussi lisse, le même argument appliqué à u° prouve que u est également colocalement constant, ce qui prouve la proposition. □

3.3. Variation du localisateur fondamental faible

Jusqu'à présent, on a en général fixé un localisateur fondamental faible et considéré les notions qui s'en déduise, sans chercher à étudier leur comportement quand on change de localisateur. Dans ce paragraphe, on se fixe deux localisateurs fondamentaux faibles $\mathcal{W}$ et $\mathcal{W}'$ tels que $\mathcal{W} \subset \mathcal{W}'$.

3.3.1. — Par hypothèse, toute $\mathcal{W}$-équivalence de $\mathcal{C}at$ est une $\mathcal{W}'$-équivalence. Il découle donc aussitôt des définition que toute petite catégorie $\mathcal{W}$-asphérique est $\mathcal{W}'$-asphérique, et tout morphisme $\mathcal{W}$-asphérique (resp. localement $\mathcal{W}$-asphérique) de $\mathcal{C}at$ est $\mathcal{W}'$-asphérique (resp. localement $\mathcal{W}'$-asphérique). Dualement, tout morphisme $\mathcal{W}$-coasphérique (resp. colocalement $\mathcal{W}$-coasphérique) de $\mathcal{C}at$ est $\mathcal{W}'$-coasphérique (resp. colocalement $\mathcal{W}'$-coasphérique). Si

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "v"'] & & B \arrow[dl, "w"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

est un triangle commutatif de $\mathcal{C}at$, et si le morphisme u est une $\mathcal{W}$-équivalence localement (resp. colocalement) sur C, alors u est aussi une $\mathcal{W}'$-équivalence localement (resp. colocalement) sur C. Enfin, un morphisme $\mathcal{W}$-propre (resp. $\mathcal{W}$-lisse) de $\mathcal{C}at$ est $\mathcal{W}'$-propre (resp. $\mathcal{W}'$-lisse).

3.3.2. — Soit A une petite catégorie. Une $\mathcal{W}$-équivalence de préfaisceaux sur A est alors une $\mathcal{W}'$-équivalence, et il résulte de ce qui précède qu'un préfaisceau $\mathcal{W}$-asphérique (resp. localement $\mathcal{W}$-asphérique) est $\mathcal{W}'$-asphérique (resp. localement $\mathcal{W}'$-asphérique), et qu'un morphisme $\mathcal{W}$-asphérique de préfaisceaux sur A est

$\mathcal{W}'$-asphérique. De même, une $\mathcal{W}$-équivalence locale de préfaisceaux sur A est une $\mathcal{W}'$-équivalence locale.

3.3.3. — Il est immédiat qu'une $\mathcal{W}$-catégorie pseudo-test est aussi une $\mathcal{W}'$-catégorie pseudo-test. D'autre part, le critère (*iii*) de la proposition 1.4.9 implique que toute $\mathcal{W}$-catégorie test faible est une $\mathcal{W}'$-catégorie test faible, et par suite aussi que toute $\mathcal{W}$-catégorie test locale (resp. $\mathcal{W}$-catégorie test) est une $\mathcal{W}'$-catégorie test locale (resp. $\mathcal{W}'$-catégorie test). Il résulte des considérations du paragraphe 3.3.2 qu'une catégorie totalement $\mathcal{W}$-asphérique est totalement $\mathcal{W}'$-asphérique. On en déduit que toute $\mathcal{W}$-catégorie test stricte est une $\mathcal{W}'$-catégorie test stricte, et que tout $\mathcal{W}$-contracteur est un $\mathcal{W}'$-contracteur.

3.3.4. — Soient A une petite catégorie, et $i : A \longrightarrow \mathcal{C}at$ un foncteur. Si i est $\mathcal{W}$-asphérique (*cf.* 1.8.1), alors il est aussi $\mathcal{W}'$-asphérique. En effet, on observe d'abord que pour tout objet a de A, la catégorie $i(a)$ étant $\mathcal{W}$-asphérique, elle est aussi $\mathcal{W}'$-asphérique. Soient A_0 une $\mathcal{W}'$-catégorie test faible (par exemple une des catégories test de l'exemple 1.6.10, ou la catégorie des simplexes Δ (*cf.* 1.6.14)), et B une petite sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}at$ contenant $i(A)$ et $i_{A_0}(A_0)$, et formée de catégories $\mathcal{W}$-asphériques, donc aussi $\mathcal{W}'$-asphériques. Les foncteurs i et i_{A_0} se factorisent par B, et on obtient ainsi un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "i"'] & B \arrow[d, hook, "j"] & A_0 \arrow[l, "u_0"'] \arrow[dl, "i_{A_0}"] \\ & \mathcal{C}at & \end{tikzcd} .$$

En vertu du lemme 1.8.4, (b), la $\mathcal{W}$-asphéricité du foncteur i implique celle du morphisme u de $\mathcal{C}at$, qui est par suite aussi $\mathcal{W}'$-asphérique (*cf.* 3.3.1). D'autre part, comme le foncteur i_{A_0} est $\mathcal{W}'$-asphérique (cf. 1.8.3), le lemme 1.8.4, (b), implique qu'il en est de même du foncteur j, et il résulte alors du lemme 1.8.4, (a), que le foncteur i est $\mathcal{W}'$-asphérique.

On en déduit (*cf.* 3.3.3) que si i est un $\mathcal{W}$-foncteur pseudo-test (*cf.* 1.8.14), alors il est aussi un $\mathcal{W}'$-foncteur pseudo-test, et de même si i est un $\mathcal{W}$-foncteur test faible (resp. test local, resp. test), il est aussi un $\mathcal{W}'$-foncteur test faible (resp. test local, resp. test).

CHAPITRE 4

LA THÉORIE DES STRUCTURES D'ASPHÉRICITÉ

4.1. Structures d'asphéricité

Dans ce paragraphe, on se fixe, une fois pour toutes, un localisateur fondamental faible $\mathcal{W}$.

Définition 4.1.1. — Une *structure de $\mathcal{W}$-asphéricité*, ou plus simplement *structure d'asphéricité*, est un couple (M, M_{as}), où M est une catégorie (localement petite) et M_{as} une classe d'objets de M, tel qu'il existe un objet A de $\mathcal{C}at$ et un foncteur $i : A \longrightarrow M$ satisfaisant aux deux conditions suivantes :

(i) pour tout objet a de A, on a $i(a) \in M_{\mathrm{as}}$;

(ii) si l'on note i^* le foncteur

$$i^* : M \longrightarrow \widehat{A}\,, \quad x \longmapsto (a \mapsto \mathsf{Hom}(i(a), x))\,,$$

alors on a $M_{\mathrm{as}} = (i^*)^{-1}(\widehat{A}_{\mathrm{as}})$, où $\widehat{A}_{\mathrm{as}}$ désigne la partie de $\mathsf{Ob}\,\widehat{A}$ formée des objets asphériques de $\widehat{A}$.

On dira aussi parfois que M_{as} est une *structure de $\mathcal{W}$-asphéricité sur M* ou plus simplement une *structure d'asphéricité sur M*. Les éléments de M_{as} seront appelés *objets M_{as}-$\mathcal{W}$-asphériques*, ou *objets M_{as}-asphériques*, ou *objets $\mathcal{W}$-asphériques*, ou encore plus simplement *objets asphériques* de M. Étant donné une structure d'asphéricité (M, M_{as}), on dira qu'un foncteur $i : A \longrightarrow M$, de source une petite catégorie A et de but M, est un *foncteur M_{as}-$\mathcal{W}$-asphérique*, ou *foncteur M_{as}-asphérique*, ou *foncteur $\mathcal{W}$-asphérique*, ou encore plus simplement *foncteur asphérique*, si il satisfait aux conditions (i) et (ii) ci-dessus.

Remarque 4.1.2. — Ainsi, si M est une catégorie (localement petite), pour définir une structure d'asphéricité M_{as} sur M, il suffit de se donner une petite catégorie A et un foncteur $i : A \longrightarrow M$ tel que pour tout objet a de A, le préfaisceau $i^*i(a)$ soit asphérique, et poser $M_{\mathrm{as}} = i^{*-1}(\widehat{A}_{\mathrm{as}})$. En particulier, *toute* petite sous-catégorie pleine A de M définit une structure d'asphéricité sur M en posant $M_{\mathrm{as}} = i^{*-1}(\widehat{A}_{\mathrm{as}})$, où

$i : A \longrightarrow M$ désigne le foncteur d'inclusion, puisque le foncteur i étant alors pleinement fidèle, pour tout objet a de A, on a un isomorphisme $i^*i(a) \simeq a$, et par suite, le préfaisceau $i^*i(a)$ est représentable, donc asphérique. Il résultera du lemme 4.1.4 que *toute* structure d'asphéricité sur M peut être obtenue ainsi.

Exemple 4.1.3. — Si $\mathcal{C}at_{\mathrm{as}}$ désigne la classe des objets asphériques de $\mathcal{C}at$, le couple $(\mathcal{C}at, \mathcal{C}at_{\mathrm{as}})$ est une structure d'asphéricité. En effet, si A est une catégorie test faible et $i : A \longrightarrow \mathcal{C}at$ le foncteur $i_A : a \mapsto A/a$, d'une part, pour tout objet a de A, la catégorie $i(a) = A/a$ est dans $\mathcal{C}at_{\mathrm{as}}$, puisqu'elle admet un objet final, et d'autre part, une petite catégorie C est asphérique si et seulement si $i^*(C)$ est un préfaisceau asphérique (cf. exemple 1.8.3). De plus, si A est une petite catégorie et $i : A \longrightarrow \mathcal{C}at$ un foncteur, alors i est un foncteur $\mathcal{C}at_{\mathrm{as}}$-asphérique au sens de la définition 4.1.1 si et seulement si il est un foncteur asphérique au sens de la définition 1.8.1.

Lemme 4.1.4. — *Soient (M, M_{as}) une structure d'asphéricité, $u : A \longrightarrow B$ un morphisme de $\mathcal{C}at$, $j : B \longrightarrow M$ un foncteur, et posons $i = ju : A \longrightarrow M$. On suppose que pour tout objet b de B, l'objet $j(b)$ de M est asphérique.*

a) *Si u est un morphisme asphérique de $\mathcal{C}at$, le foncteur $j : B \longrightarrow M$ est asphérique si et seulement si le foncteur $i : A \longrightarrow M$ l'est.*

b) *Si le foncteur j est pleinement fidèle et i asphérique, alors u est un morphisme asphérique de $\mathcal{C}at$ et j un foncteur asphérique.*

Démonstration. — On vérifie immédiatement qu'on a un triangle commutatif

(4.1.4.1)
$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "j^*"'] \arrow[dr, "i^*"] & \\ \widehat{B} \arrow[rr, "u^*"'] & & \widehat{A} \end{tikzcd}$$

(où "l'étoile en haut" de i et j a un sens légèrement différent de celle de u).

a) Si u est asphérique, il résulte de la proposition 1.3.11 qu'un préfaisceau F de $\widehat{B}$ est asphérique si et seulement si le préfaisceau u^*F de $\widehat{A}$ l'est. L'équivalence de l'asphéricité des foncteurs i et j résulte alors immédiatement de la commutativité du triangle 4.1.4.1.

b) Supposons le foncteur j pleinement fidèle et le foncteur i asphérique. Pour tout objet b de B, la pleine fidélité de j implique que $j^*j(b)$ est isomorphe à b, d'où $u^*(b) \simeq u^*j^*j(b) = i^*j(b)$. Comme $j(b)$ est un objet asphérique de M et i un foncteur asphérique, $u^*(b) \simeq i^*j(b)$ est un préfaisceau asphérique, ce qui prouve que le morphisme u est asphérique (1.3.11). Il résulte alors de (a) que j est un foncteur asphérique, ce qui achève la démonstration. □

Remarque 4.1.5. — Il résulte aussitôt du lemme précédent que pour toute structure d'asphéricité (M, M_{as}), il existe une petite sous-catégorie pleine B de M formée d'objets asphériques telle que le foncteur d'inclusion $j : B \longrightarrow M$ soit asphérique. En effet, par définition d'une structure d'asphéricité, il existe une petite catégorie A et un foncteur asphérique $i : A \longrightarrow M$. Il suffit alors, en vertu de la partie (b) du lemme, de prendre pour B la sous-catégorie pleine de M formée des objets $i(a)$, pour a objet de A.

Exemple 4.1.6. — Soient B une petite catégorie et $\widehat{B}_{\mathrm{as}}$ la classe des objets asphériques de $\widehat{B}$. Alors $(\widehat{B}, \widehat{B}_{\mathrm{as}})$ est une structure d'asphéricité. En effet, si $j : B \longrightarrow \widehat{B}$ désigne le plongement de Yoneda, on a $j^* \simeq 1_{\widehat{B}}$, et par suite, un objet x de $\widehat{B}$ est dans $\widehat{B}_{\mathrm{as}}$ si et seulement si $j^*(x)$ est un préfaisceau asphérique. Comme j est pleinement fidèle, il résulte aussitôt du lemme précédent que si $u : A \longrightarrow B$ est un morphisme de $\mathcal{C}at$, alors u est asphérique si et seulement si le foncteur composé $i = ju : A \longrightarrow \widehat{B}$ est $\widehat{B}_{\mathrm{as}}$-asphérique.

Lemme 4.1.7. — *Soient (M, M_{as}) une structure d'asphéricité, C une petite sous-catégorie pleine de M formée d'objets asphériques, $k : C \longrightarrow M$ le foncteur d'inclusion, A et B deux petites catégories, et $i : A \longrightarrow M$ et $j : B \longrightarrow M$ deux foncteurs se factorisant par C, de sorte qu'on a un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "u"] \arrow[drr, bend left, "i"] & & \\
& C \arrow[r, "k"] & M \\
B \arrow[ur, "v"] \arrow[urr, bend right, "j"'] & &
\end{tikzcd}.$$

Si j est un foncteur asphérique, alors k est un foncteur asphérique, v est un morphisme asphérique de $\mathcal{C}at$, et pour que le foncteur i soit asphérique, il faut et il suffit que u soit un morphisme asphérique de $\mathcal{C}at$.

Démonstration. — Comme le foncteur j est asphérique et le foncteur k pleinement fidèle, il résulte de la partie (b) du lemme 4.1.4 que v est un morphisme asphérique de $\mathcal{C}at$ et que le foncteur k est asphérique. Si u est un morphisme asphérique de $\mathcal{C}at$, la partie (a) du lemme implique alors que i est un foncteur asphérique. Réciproquement, si i est un foncteur asphérique, alors u est un morphisme asphérique en vertu de la partie (b) du lemme. $\square$

Proposition 4.1.8. — *Soient (M, M_{as}) une structure d'asphéricité, A une petite catégorie, et $i : A \longrightarrow M$ un foncteur tel que pour tout objet a de A, l'objet $i(a)$ de M soit asphérique. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *le foncteur i est asphérique, autrement dit, un objet x de M est asphérique si et seulement si le préfaisceau $i^*(x)$ de $\widehat{A}$ est asphérique ;*
(b) *pour tout objet asphérique x de M, le préfaisceau $i^*(x)$ de $\widehat{A}$ est asphérique ;*

(c) *il existe une petite catégorie B et un foncteur asphérique $j : B \longrightarrow M$ tel que pour tout objet x de M de la forme $x = i(a)$, pour a objet de A, ou $x = j(b)$, pour b objet de B, le préfaisceau $i^*(x)$ de $\widehat{A}$ soit asphérique.*

De plus, si le foncteur i est pleinement fidèle, ces conditions sont encore équivalentes à la condition :

(c′) *il existe une petite catégorie B et un foncteur asphérique $j : B \longrightarrow M$ tel que pour tout objet b de B, le préfaisceau $i^*j(b)$ de $\widehat{A}$ soit asphérique.*

Démonstration. — L'implication $(a) \Rightarrow (b)$ est évidente. Pour montrer l'implication $(b) \Rightarrow (c)$, on remarque que par définition d'une structure d'asphéricité, il existe une petite catégorie B et un foncteur asphérique $j : B \longrightarrow M$. Comme les foncteurs i et j se factorisent par la sous-catégorie pleine de M formée des objets asphériques, la condition (b) implique que pour tout objet x de M de la forme $x = i(a)$, pour a objet de A, ou $x = j(b)$, pour b objet de B, le préfaisceau $i^*(x)$ de $\widehat{A}$ est asphérique, ce qui prouve la condition (c). Supposons maintenant que la condition (c) soit satisfaite, et notons C la sous-catégorie pleine de M formée des objets de la forme $i(a)$, pour a objet de A, ou $j(b)$, pour b objet de B, et $k : C \longrightarrow M$ le foncteur d'inclusion. Par hypothèse, C est formée d'objets asphériques de M, et par construction, les foncteurs i et j se factorisent par C. En vertu du lemme précédent, pour montrer que i est un foncteur asphérique, il suffit de montrer que le morphisme $u : A \longrightarrow C$ de $\mathcal{C}at$, induit par i, est asphérique. Or, la condition (c) implique que pour tout objet c de C, le préfaisceau $u^*(c) \simeq u^*k^*k(c) = i^*k(c)$ de $\widehat{A}$ est asphérique, ce qui implique, en vertu de la proposition 1.3.11, que u est asphérique, et prouve l'implication $(c) \Rightarrow (a)$. Enfin, si le foncteur i est pleinement fidèle, l'équivalence des conditions (c) et (c') résulte du fait que, sous cette hypothèse, pour tout objet a de A, on a un isomorphisme $i^*i(a) \simeq a$, ce qui implique que le préfaisceau $i^*i(a)$ sur A est représentable, donc asphérique. □

Corollaire 4.1.9. — *Soient (M, M_{as}) une structure d'asphéricité, A une petite catégorie, $k : A \longrightarrow M$ un foncteur, et B une petite sous-catégorie pleine de M génératrice par épimorphismes stricts, formée d'objets asphériques de M, telle que le foncteur d'inclusion $l : B \longrightarrow M$ soit asphérique, Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *le foncteur $k : A \longrightarrow M$ est un foncteur asphérique pour la structure d'asphéricité M_{as} sur M ;*

(b) *le foncteur $i = l^*k : A \longrightarrow \widehat{B}$ est un foncteur asphérique pour la structure d'asphéricité sur $\widehat{B}$ de l'exemple* 4.1.6.

Démonstration. — On remarque d'abord que comme le foncteur l est asphérique, pour tout objet a de A, l'objet $k(a)$ de M est asphérique si et seulement si le préfaisceau $l^*k(a) = i(a)$ de $\widehat{B}$ est asphérique. En vue de la preuve de l'équivalence des conditions (a) et (b), on peut donc supposer que le foncteur k se factorise par la sous-catégorie pleine de M formée des objets asphériques et que le foncteur i se factorise par la sous-catégorie pleine de $\widehat{B}$ formée des préfaisceaux asphériques (ces deux conditions étant équivalentes et impliquées par l'asphéricité de k ou de i). D'autre part, comme B est une sous-catégorie pleine génératrice par épimorphismes stricts de M, le foncteur l^* est pleinement fidèle. On en déduit que pour tout objet x de M et tout objet a de A, on a des bijections fonctorielles

$$\begin{aligned} i^*(l^*x)(a) &= \mathsf{Hom}_{\widehat{B}}(i(a), l^*x) = \mathsf{Hom}_{\widehat{B}}(l^*k(a), l^*x) \\ &\simeq \mathsf{Hom}_M(k(a), x) = k^*(x)(a)\,, \end{aligned}$$

d'où un isomorphisme $i^*(l^*x) \simeq k^*(x)$ de préfaisceaux sur A. En particulier, pour tout objet a de A, on a

$$k^*k(a) \simeq i^*(l^*k(a)) = i^*i(a)\,, \tag{1}$$

et comme le foncteur l est pleinement fidèle, pour tout objet b de B, on a

$$k^*l(b) \simeq i^*(l^*l(b)) \simeq i^*(b)\,. \tag{2}$$

Or en vertu de la proposition précédente, appliquée à la structure d'asphéricité (M, M_{as}) et au foncteur asphérique l, pour que le foncteur k soit asphérique il faut et il suffit que pour tout objet a de A et tout objet b de B, les préfaisceaux $k^*k(a)$ et $k^*l(b)$ de $\widehat{A}$ soient asphériques. La même proposition appliquée à la structure d'asphéricité sur $\widehat{B}$ de l'exemple 4.1.6 et au foncteur asphérique $j : B \longrightarrow \widehat{B}$, défini par le plongement de Yoneda, implique que le foncteur i est asphérique si et seulement si pour tout objet a de A et tout objet b de B, les préfaisceaux $i^*i(a)$ et $i^*j(b) = i^*(b)$ sont asphériques. Le corollaire résulte donc des isomorphismes (1) et (2). □

Corollaire 4.1.10. — *Soit A une petite catégorie. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *A est une catégorie test faible ;*
(b) *le foncteur $Ni_A : A \longrightarrow \widehat{\Delta}$, où $i_A : \widehat{A} \longrightarrow \mathcal{C}at$ désigne le foncteur $a \mapsto A/a$ et $N : \mathcal{C}at \longrightarrow \widehat{\Delta}$ le foncteur nerf* (cf. exemple 1.8.25)*, est un foncteur asphérique pour la structure d'asphéricité sur $\widehat{\Delta}$ de l'exemple* 4.1.6.

Démonstration. — Comme A est une catégorie test faible si et seulement si le foncteur $i_A : A \longrightarrow \mathcal{C}at$ est asphérique (cf. exemples 1.8.3 et 4.1.3), l'assertion est un cas particulier du corollaire précédent, appliqué à la structure d'asphéricité sur $\mathcal{C}at$ de l'exemple 4.1.3, au foncteur i_A, et à la sous-catégorie pleine Δ de $\mathcal{C}at$. □

Lemme 4.1.11. — *Soient I une catégorie non vide, et J une sous-catégorie pleine de I, satisfaisant aux conditions suivantes :*

(a) *pour tout couple i_1, i_2 d'objets de I, il existe un objet j de J et des morphismes $i_1 \longrightarrow j$ et $i_2 \longrightarrow j$ de I ;*
(b) *pour tout objet i de I et tout objet j de J, il existe au plus un morphisme $i \longrightarrow j$ de I.*

Alors la catégorie I est filtrante et le foncteur d'inclusion $J \longrightarrow I$ est cofinal.

Démonstration. — Soit $k_1, k_2 : i_1 \rightrightarrows i_2$ une double flèche de I. En vertu de la condition (a), il existe un objet j de J et un morphisme $k : i_2 \longrightarrow j$ de I, et la condition (b) implique que $kk_1 = kk_2$, ce qui prouve la condition (PS2) de 2.4.1. Comme la catégorie I est par hypothèse non vide, la condition (a) implique alors qu'elle est filtrante (cf. 2.4.1). Comme le foncteur d'inclusion $J \longrightarrow I$ est pleinement fidèle, pour montrer qu'il est cofinal, il suffit donc de montrer que pour tout objet i de I, la catégorie ${}_i\backslash J$ est non vide (cf. 2.4.2), ce qui résulte de la condition (a). □

4.1.12. — Soit (M, M_{as}) une structure d'asphéricité. On note $\mathcal{C}at_{/M}$ la catégorie dont les objets sont les couples (A, i), où A est une petite catégorie et i un foncteur de A vers M, un morphisme de (A, i) vers un autre objet (B, j) de $\mathcal{C}at_{/M}$ étant un morphisme $u : A \longrightarrow B$ de $\mathcal{C}at$ tel que $ju = i$. On note $\mathcal{A}sph(M, M_{\mathrm{as}})$ la sous-catégorie de $\mathcal{C}at_{/M}$ dont les objets sont les objets (A, i) de $\mathcal{C}at_{/M}$ tels que $i : A \longrightarrow M$ soit un foncteur asphérique, un morphisme de (A, i) vers un autre objet (B, j) de $\mathcal{A}sph(M, M_{\mathrm{as}})$ étant un morphisme $u : (A, i) \longrightarrow (B, j)$ de $\mathcal{C}at_{/M}$ tel que u soit un morphisme asphérique de $\mathcal{C}at$. Enfin, on note $\mathcal{A}sph'(M, M_{\mathrm{as}})$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{A}sph(M, M_{\mathrm{as}})$ formée des objets (A, i) de $\mathcal{A}sph(M, M_{\mathrm{as}})$ tels que i soit une inclusion pleine.

Proposition 4.1.13. — *Soit (M, M_{as}) une structure d'asphéricité. La catégorie $\mathcal{A}sph(M, M_{\mathrm{as}})$ est filtrante, et le foncteur d'inclusion*

$$\mathcal{A}sph'(M, M_{\mathrm{as}}) \longrightarrow \mathcal{A}sph(M, M_{\mathrm{as}})$$

de la sous-catégorie pleine $\mathcal{A}sph'(M, M_{\mathrm{as}})$ dans $\mathcal{A}sph(M, M_{\mathrm{as}})$ est cofinal. De plus, $\mathcal{A}sph'(M, M_{\mathrm{as}})$ est une sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}at_{/M}$.

Démonstration. — Le fait que la catégorie $\mathcal{A}sph'(M, M_{\mathrm{as}})$ est une sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}at_{/M}$ résulte aussitôt du lemme 4.1.4, (b). Pour montrer les autres assertions, on appliquera le lemme 4.1.11 à $I = \mathcal{A}sph(M, M_{\mathrm{as}})$ et $J = \mathcal{A}sph'(M, M_{\mathrm{as}})$. Vérifions les conditions (a) et (b) de ce lemme. Soient

$$(A, i : A \longrightarrow M) \qquad \text{et} \qquad (B, j : B \longrightarrow M)$$

deux objets de $\mathcal{A}sph(M, M_{\mathrm{as}})$, C la sous-catégorie pleine de M formée des objets x de M de la forme $x = i(a)$, pour a objet de A, ou $x = j(b)$, pour b objet de B, $k : C \longrightarrow M$ le foncteur d'inclusion, et $u : A \longrightarrow C$ et $v : B \longrightarrow C$ les morphismes de $\mathcal{C}at$ induits par les foncteurs i et j respectivement. Le lemme 4.1.7 implique que (C, k) est un objet de $\mathcal{A}sph'(M, M_{\mathrm{as}})$, et que

$$u : (A, i) \longrightarrow (C, k) \qquad \text{et} \qquad v : (B, j) \longrightarrow (C, k)$$

sont des morphismes de $\mathcal{A}sph(M, M_{\mathrm{as}})$, ce qui prouve la condition (a). Pour montrer la condition (b), on remarque que si $u, v : (A, i) \rightrightarrows (B, j)$ est une double flèche de $\mathcal{A}sph(M, M_{\mathrm{as}})$ de but dans $\mathcal{A}sph'(M, M_{\mathrm{as}})$, les égalités $i = ju$ et $i = jv$ impliquent, vue que j est une inclusion, que $u = v$, ce qui achève la démonstration. □

Corollaire 4.1.14. — *Soient M une catégorie* (localement petite), *A, B deux objets de $\mathcal{C}at$, et $i : A \longrightarrow M$ et $j : B \longrightarrow M$ deux foncteurs. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *il existe une structure d'asphéricité M_{as} sur M telle que i et j soient des foncteurs M_{as}-asphériques ;*
(b) *pour tout objet a de A et tout objet b de B, $i^*i(a)$ et $i^*j(b)$ sont des préfaisceaux asphériques de $\widehat{A}$, et $j^*i(a)$ et $j^*j(b)$ des préfaisceaux asphériques de $\widehat{B}$;*
(c) *il existe une petite sous-catégorie pleine C de M, et des morphismes asphériques $u : A \longrightarrow C$ et $v : B \longrightarrow C$ de $\mathcal{C}at$, tels que $i = ku$ et $v = kj$, où $k : C \longrightarrow M$ désigne le foncteur d'inclusion.*

Démonstration. — L'implication $(a) \Rightarrow (b)$ est évidente. Réciproquement, si la condition (b) est satisfaite, et si on définit M_{as} comme étant la classe des objets x de M tels que $j^*(x)$ soit un préfaisceau asphérique de $\widehat{B}$, alors, puisque pour tout objet b de B, $j^*j(b)$ est un préfaisceau asphérique de $\widehat{B}$, M_{as} est une structure d'asphéricité sur M (cf. remarque 4.1.2) et $j : B \longrightarrow M$ un foncteur M_{as}-asphérique. Comme pour tout objet a de A, le préfaisceau $j^*i(a)$ de $\widehat{B}$ est asphérique, $i(a)$ est dans M_{as}, et il résulte alors de la condition (c) de la proposition 4.1.8 que le foncteur i est aussi M_{as}-asphérique, ce qui prouve la condition (a).

Pour montrer l'implication $(a) \Rightarrow (c)$, on remarque que si la condition (a) est satisfaite, alors (A, i) et (B, j) sont des objets de $\mathcal{A}sph(M, M_{\mathrm{as}})$. En vertu de la proposition précédente, il existe un objet (C, k) de $\mathcal{A}sph'(M, M_{\mathrm{as}})$ et des morphismes $u : (A, i) \longrightarrow (C, k)$ et $v : (B, j) \longrightarrow (C, k)$ de $\mathcal{A}sph(M, M_{\mathrm{as}})$. En particulier, C est une petite sous-catégorie pleine de M, $k : C \longrightarrow M$ le foncteur d'inclusion, et $u : A \longrightarrow C$ et $v : B \longrightarrow C$ des morphismes asphériques de $\mathcal{C}at$, tels que $i = ku$ et $j = kv$, ce qui prouve la condition (c). Réciproquement, si la condition (c) est satisfaite, et si on définit M_{as} comme étant la classe des objets x de M tels que $k^*(x)$ soit un préfaisceau asphérique de $\widehat{C}$, alors M_{as} est une structure d'asphéricité sur M (cf. remarque 4.1.2) et $k : C \longrightarrow M$ un foncteur M_{as}-asphérique, ce qui implique, en vertu du lemme 4.1.4, que $i = ku$ et $j = kv$ sont des foncteur M_{as}-asphériques. □

Proposition 4.1.15. — *Soit (M, M_{as}) une structure d'asphéricité. Il existe une unique classe W de flèches de M telle que pour toute petite catégorie A et tout foncteur asphérique $i : A \longrightarrow M$, on ait*

$$W = (i^*)^{-1}(\mathcal{W}_{\widehat{A}}) = \{f \in \mathsf{Fl}(M) \,|\, i^*(f) \in \mathcal{W}_{\widehat{A}}\} = \{f \in \mathsf{Fl}(M) \,|\, i_A i^*(f) \in \mathcal{W}\}\,.$$

Démonstration. — L'unicité est évidente, vue que par définition d'une structure d'asphéricité, il existe une petite catégorie A et un foncteur asphérique $i : A \longrightarrow M$. Pour montrer l'existence, il suffit de montrer que si A et B sont deux petites catégories, et $i : A \longrightarrow M$ et $j : B \longrightarrow M$ des foncteurs asphériques, on a

$(i^*)^{-1}(\mathcal{W}_{\widehat{A}}) = (j^*)^{-1}(\mathcal{W}_{\widehat{B}})$. Comme en vertu de la proposition 4.1.13 la catégorie $\mathcal{A}sph(M, M_{\mathrm{as}})$ est filtrante, il suffit de montrer l'assertion quand il existe un morphisme asphérique $u : A \longrightarrow B$ tel que $i = ju$. Or, dans ce cas, en vertu de la proposition 1.3.11, pour toute flèche f de M, le morphisme $i^*(f) = u^*j^*(f)$ de $\widehat{A}$ est une équivalence faible si et seulement si le morphisme $j^*(f)$ de $\widehat{B}$ est une équivalence faible, ce qui achève la démonstration. □

4.1.16. — La classe de flèches W associée par la proposition précédente à une structure d'asphéricité (M, M_{as}) sera notée $\mathcal{W}_{(M,M_{\mathrm{as}})}$, et ses éléments seront appelés les M_{as}-$\mathcal{W}$-*équivalences* ou M_{as}-*équivalences* ou $\mathcal{W}$-*équivalences* de M, ou plus simplement, quand aucune ambiguïté n'en résulte, les *équivalences faibles* de M. On remarque que par définition, et par saturation faible du localisateur fondamental faible $\mathcal{W}$, la classe $\mathcal{W}_{(M,M_{\mathrm{as}})}$ est faiblement saturée, et toute flèche entre objets asphériques de M est une équivalence faible. On note

$$\mathsf{Hot}_M = \mathsf{Hot}_{(M,M_{\mathrm{as}})} = \mathsf{Hot}_{(M,M_{\mathrm{as}}),\mathcal{W}} = \mathcal{W}^{-1}_{(M,M_{\mathrm{as}})}M$$

la catégorie localisée de M par les équivalences faibles. Ainsi, pour toute petite catégorie A, et tout foncteur asphérique $i : A \longrightarrow M$, le foncteur $i^* : M \longrightarrow \widehat{A}$ induit un foncteur $\overline{\imath}^* : \mathsf{Hot}_M = \mathcal{W}^{-1}_{(M,M_{\mathrm{as}})}M \longrightarrow \mathcal{W}^{-1}_{\widehat{A}}\widehat{A} = \mathsf{Hot}_A$ (cf. 1.4.4).

Si (M, M_{as}) est la structure d'asphéricité $(\mathcal{C}at, \mathcal{C}at_{\mathrm{as}})$ de l'exemple 4.1.3, alors on a $\mathcal{W}_{(\mathcal{C}at,\mathcal{C}at_{\mathrm{as}})} = \mathcal{W}$. En effet, si A est une catégorie test faible, alors le foncteur $i_A : A \longrightarrow \mathcal{C}at$, $a \mapsto A/a$, est $\mathcal{C}at_{\mathrm{as}}$-asphérique (cf. 4.1.3), et par suite,

$$\mathcal{W}_{(\mathcal{C}at,\mathcal{C}at_{\mathrm{as}})} = (i_A^*)^{-1}(\mathcal{W}_{\widehat{A}}) = \mathcal{W}\,,$$

la deuxième égalité venant de la définition d'une catégorie test faible. En particulier, on a $\mathsf{Hot}_{(\mathcal{C}at,\mathcal{C}at_{\mathrm{as}}),\mathcal{W}} = \mathsf{Hot}_{\mathcal{W}} = \mathsf{Hot}$ (cf. 1.4.2).

Si B est une petite catégorie et (M, M_{as}) la structure d'asphéricité $(\widehat{B}, \widehat{B}_{\mathrm{as}})$ de l'exemple 4.1.6, alors on a $\mathcal{W}_{(\widehat{B},\widehat{B}_{\mathrm{as}})} = \mathcal{W}_{\widehat{B}}$. En effet, le plongement de Yoneda $j : B \longrightarrow \widehat{B}$ est alors un foncteur $\widehat{B}_{\mathrm{as}}$-asphérique (cf. 4.1.6), et comme le foncteur j^* est isomorphe au foncteur identique de $\widehat{B}$, on a $\mathcal{W}_{(\widehat{B},\widehat{B}_{\mathrm{as}})} = (j^*)^{-1}(\mathcal{W}_{\widehat{B}}) = \mathcal{W}_{\widehat{B}}$. En particulier, on a $\mathsf{Hot}_{(\widehat{B},\widehat{B}_{\mathrm{as}}),\mathcal{W}} = \mathsf{Hot}_{\mathcal{W},B} = \mathsf{Hot}_B$ (cf. 1.4.4).

4.1.17. — Soit (M, M_{as}) une structure d'asphéricité. On va définir un foncteur, de la catégorie $\mathcal{A}sph(M, M_{\mathrm{as}})$ vers la catégorie des foncteurs de M vers $\mathcal{C}at$ qui respectent et reflètent les équivalences faibles et les morphismes de foncteurs qui sont des équivalences faibles argument par argument, comme suit. À un objet (A, i) de $\mathcal{A}sph(M, M_{\mathrm{as}})$, autrement dit un couple formé d'une petite catégorie A et d'un foncteur asphérique $i : A \longrightarrow M$, on associe le foncteur composé $k_{(A,i)} = i_A i^*$

$$M \xrightarrow{i^*} \widehat{A} \xrightarrow{i_A} \mathcal{C}at\,.$$

Par définition des équivalences faibles d'une structure d'asphéricité et d'une catégorie de préfaisceaux, on a

$$k^{-1}_{(A,i)}(\mathcal{W}) = (i^*)^{-1} i_A^{-1}(\mathcal{W}) = (i^*)^{-1}(\mathcal{W}_{\widehat{A}}) = \mathcal{W}_{(M,M_{\mathrm{as}})} \ ,$$

et par suite, le foncteur $k_{(A,i)}$ respecte et reflète les équivalences faibles. À un morphisme $u : (A,i) \longrightarrow (B,j)$ de $\mathcal{A}sph(M, M_{\mathrm{as}})$, autrement dit un morphisme asphérique $u : A \longrightarrow B$ de $\mathcal{C}at$ tel que $i = ju$, on associe le morphisme de foncteurs $k_u = \lambda_u \star j^*$

$$\begin{tikzcd}
 & \widehat{A} \arrow[dr, "i_A"] & \\
M \arrow[ur, "i^*"] \arrow[dr, "j^*"'] \arrow[r, phantom, "="] & \arrow[r, phantom, "\Downarrow\lambda_u"] & \mathcal{C}at \\
 & \widehat{B} \arrow[uu, "u^*"] \arrow[ur, "i_B"'] &
\end{tikzcd} \ ,$$

où $\lambda_u : i_A u^* \longrightarrow i_B$ désigne le morphisme de foncteurs défini au paragraphe 1.3.10. Comme le morphisme u de $\mathcal{C}at$ est asphérique, il résulte de la proposition 1.3.11 que le morphisme de foncteurs λ_u est une équivalence faible argument par argument, et par suite, il en est de même de k_u.

Si $u : (A,i) \longrightarrow (B,j)$ et $v : (B,j) \longrightarrow (C,k)$ sont deux morphismes composables de $\mathcal{A}sph(M, M_{\mathrm{as}})$, on a (cf. 1.3.10)

$$\begin{aligned} k_{vu} &= \lambda_{vu} \star k^* = (\lambda_v(\lambda_u \star v^*)) \star k^* = (\lambda_v \star k^*)(\lambda_u \star v^* k^*) \\ &= (\lambda_v \star k^*)(\lambda_u \star (kv)^*) = (\lambda_v \star k^*)(\lambda_u \star j^*) = k_v k_u \ , \end{aligned}$$

et pour tout objet (A,i) de $\mathcal{A}sph(M, M_{\mathrm{as}})$, on a

$$k_{1_{(A,i)}} = \lambda_{1_A} \star i^* = 1_{i_A} \star i^* = 1_{i_A i^*} = 1_{k_{(A,i)}} \ ,$$

ce qui prouve qu'on a bien défini un foncteur.

Comme en vertu de la proposition 4.1.13 la catégorie $\mathcal{A}sph(M, M_{\mathrm{as}})$ est filtrante, et en particulier 1-connexe, les foncteurs $\overline{k}_{(A,i)} : \mathsf{Hot}_M \longrightarrow \mathsf{Hot}$, induits par localisation des foncteurs $k_{(A,i)}$, pour A petite catégorie et $i : A \longrightarrow M$ foncteur asphérique, sont canoniquement isomorphes, définissant ainsi un foncteur canonique $\overline{k}_{(M,M_{\mathrm{as}})} : \mathsf{Hot}_M \longrightarrow \mathsf{Hot}$. Ainsi, pour toute petite catégorie A, et tout foncteur asphérique $i : A \longrightarrow M$, le foncteur $\overline{k}_{(M,M_{\mathrm{as}})}$ est canoniquement isomorphe au composé

$$\mathsf{Hot}_M \xrightarrow{\ \overline{\imath}^*\ } \mathsf{Hot}_A \xrightarrow{\ \overline{\imath}_A\ } \mathsf{Hot}$$

des foncteurs induits par i^* et i_A (cf. 1.4.4 et 4.1.16).

Définition 4.1.18. — Soit (M, M_{as}) une structure d'asphéricité. On dit qu'elle est *$\mathcal{W}$-modélisante*, ou plus simplement *modélisante*, si le foncteur canonique $\overline{k}_{(M,M_{\mathrm{as}})} : \mathsf{Hot}_M \longrightarrow \mathsf{Hot}$ est une équivalence de catégories.

Exemple 4.1.19. — La structure d'asphéricité $(\mathcal{C}at, \mathcal{C}at_{\mathrm{as}})$ de l'exemple 4.1.3 est modélisante. En effet, si A est une catégorie test faible, alors le foncteur $i_A : A \longrightarrow \mathcal{C}at$, $a \mapsto A/a$, est $\mathcal{C}at_{\mathrm{as}}$-asphérique (cf. 4.1.3), et par suite, le foncteur canonique $\bar{k}_{(\mathcal{C}at,\mathcal{C}at_{\mathrm{as}})}$ s'identifie au foncteur $\bar{\imath}_A \bar{\imath}_A^* : \mathsf{Hot} \longrightarrow \mathsf{Hot}$, qui est, par définition d'une catégorie test faible (cf. 1.4.7), isomorphe au foncteur identique 1_{Hot}.

Exemple 4.1.20. — Si B est une petite catégorie et (M, M_{as}) la structure d'asphéricité $(\widehat{B}, \widehat{B}_{\mathrm{as}})$ de l'exemple 4.1.6, et si $j : B \longrightarrow \widehat{B}$ désigne le plongement de Yoneda, qui est un foncteur asphérique pour cette structure d'asphéricité, on a $k_{(B,j)} \simeq i_B$ (puisque $j^* \simeq 1_{\widehat{B}}$), et par suite, le foncteur canonique $\bar{k}_{(\widehat{B},\widehat{B}_{\mathrm{as}})} : \mathsf{Hot}_{\widehat{B}} \longrightarrow \mathsf{Hot}$ s'identifie au foncteur $\bar{\imath}_B : \mathsf{Hot}_{\widehat{B}} = \mathsf{Hot}_B \longrightarrow \mathsf{Hot}$ (cf. 4.1.16). En particulier, si le localisateur fondamental faible $\mathcal{W}$ est fortement saturé, ou si B est supposée asphérique, la structure d'asphéricité $(\widehat{B}, \widehat{B}_{\mathrm{as}})$ est modélisante si et seulement si B est une catégorie pseudo-test (cf. 1.4.4 et 1.4.5).

Proposition 4.1.21. — *Soit (M, M_{as}) une structure d'asphéricité. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *la structure d'asphéricité (M, M_{as}) est modélisante ;*

(b) *il existe une petite catégorie A et un foncteur asphérique $i : A \longrightarrow M$ tels que le foncteur $k_{(A,i)} = i_A i^* : M \longrightarrow \mathcal{C}at$ induise une équivalence de catégories entre les catégories localisées ;*

(b′) *$(M, \mathcal{W}_{(M,M_{\mathrm{as}})})$ est un modélisateur, et il existe une petite catégorie A et un foncteur asphérique $i : A \longrightarrow M$ tels que le foncteur $k_{(A,i)} = i_A i^*$ soit un morphisme de modélisateurs $(M, \mathcal{W}_{(M,M_{\mathrm{as}})}) \longrightarrow (\mathcal{C}at, \mathcal{W})$* (cf. 1.4.3) ;

(c) *pour toute petite catégorie A et tout foncteur asphérique $i : A \longrightarrow M$, le foncteur $k_{(A,i)} = i_A i^* : M \longrightarrow \mathcal{C}at$ induit une équivalence de catégories entre les catégories localisées ;*

(c′) *$(M, \mathcal{W}_{(M,M_{\mathrm{as}})})$ est un modélisateur, et pour toute petite catégorie A et tout foncteur asphérique $i : A \longrightarrow M$, le foncteur $k_{(A,i)} = i_A i^*$ est un morphisme de modélisateurs $(M, \mathcal{W}_{(M,M_{\mathrm{as}})}) \longrightarrow (\mathcal{C}at, \mathcal{W})$* (cf. 1.4.3).

Démonstration. — La proposition est conséquence immédiate des considérations du paragraphe 4.1.17. □

Définition 4.1.22. — On dit qu'une structure d'asphéricité (M, M_{as}) est *$\mathcal{W}$-asphérique*, ou plus simplement *asphérique*, s'il existe une petite catégorie A asphérique et un foncteur asphérique $i : A \longrightarrow M$.

Proposition 4.1.23. — *Soit (M, M_{as}) une structure d'asphéricité. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *la structure d'asphéricité (M, M_{as}) est asphérique, autrement dit, il existe un objet asphérique A de $\mathcal{C}at$ et un foncteur asphérique $i : A \longrightarrow M$;*

(b) *pour toute petite catégorie A, et tout foncteur $i : A \longrightarrow M$, si i est un foncteur asphérique, alors A est un objet asphérique de $\mathcal{C}at$.*

De plus, si la catégorie M admet un objet final e_M, ces conditions sont aussi équivalentes aux conditions suivantes :

(c) *e_M est un objet asphérique de M, autrement dit $e_M \in M_{\mathrm{as}}$;*

(c′) *il existe une petite sous-catégorie pleine B de M formée d'objets asphériques telle que e_M soit un objet de B, et telle que le foncteur d'inclusion $j : B \longrightarrow M$ soit asphérique.*

Démonstration. — L'implication $(b) \Rightarrow (a)$ est évidente par définition d'une structure d'asphéricité. Réciproquement, supposons qu'il existe une petite catégorie asphérique A et un foncteur asphérique $i : A \longrightarrow M$, et soit B une petite catégorie et $j : B \longrightarrow M$ un foncteur asphérique. Comme en vertu de la proposition 4.1.13 la catégorie $\mathcal{A}sph(M, M_{\mathrm{as}})$ est filtrante, il existe un objet (C, k) de $\mathcal{A}sph(M, M_{\mathrm{as}})$ et des morphismes $u : (A, i) \longrightarrow (C, k)$ et $v : (B, j) \longrightarrow (C, k)$ de $\mathcal{A}sph(M, M_{\mathrm{as}})$. On dispose donc de morphismes asphériques $u : A \longrightarrow C$ et $v : B \longrightarrow C$ de $\mathcal{C}at$, qui sont en particulier des équivalences faibles. Comme A est asphérique, il en est donc de même de C et de B, ce qui prouve l'assertion.

Supposons maintenant que M admette un objet final e_M, et soient A une petite catégorie et $i : A \longrightarrow M$ un foncteur asphérique. Pour que l'objet e_M de M soit asphérique, il faut et il suffit que le préfaisceau $i^*(e_M)$ de $\widehat{A}$ soit asphérique, autrement dit, puisque $i^*(e_M)$ est un objet final de $\widehat{A}$, que $A \simeq A/i^*(e_M)$ soit un objet asphérique de $\mathcal{C}at$, ce qui prouve l'équivalence de la condition (c) aux conditions (a) et (b). Pour montrer l'implication $(c) \Rightarrow (c')$, soient B la sous-catégorie pleine de M formée des objets x de M de la forme $x = i(a)$, pour a objet de A, ou $x = e_M$, et $j : B \longrightarrow M$ le foncteur d'inclusion. Si la condition (c) est satisfaite, B est une petite sous-catégorie pleine de M formée d'objets asphériques, et comme le foncteur asphérique i se factorise par B, il résulte du lemme 4.1.4, (b), que j est un foncteur asphérique, ce qui prouve la condition (c'). Enfin, l'implication $(c') \Rightarrow (c)$ est évidente, ce qui achève la démonstration. □

Exemple 4.1.24. — Si B est une petite catégorie, la structure d'asphéricité $(\widehat{B}, \widehat{B}_{\mathrm{as}})$ de l'exemple 4.1.6 est asphérique si et seulement si B est un objet asphérique de $\mathcal{C}at$. En effet, cela résulte aussitôt de la condition (c) de la proposition précédente

Proposition 4.1.25. — *Soient (M, M_{as}) une structure d'asphéricité asphérique, A une petite catégorie asphérique, et $i : A \longrightarrow M$ un foncteur tel que pour tout objet a de A, l'objet $i(a)$ de M soit asphérique. Si la catégorie M admet un objet final, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *le foncteur i est asphérique ;*

(b) *pour qu'un morphisme f de M soit une équivalence faible, il faut et il suffit que $i^*(f)$ soit une équivalence faible de préfaisceaux sur A ;*
(c) *si f est une équivalence faible de M, alors $i^*(f)$ est une équivalence faible de préfaisceaux sur A.*

Démonstration. — Les implications $(a) \Rightarrow (b)$ et $(b) \Rightarrow (c)$ sont évidentes. Supposons donc la condition (c) satisfaite, et montrons que le foncteur i est asphérique. En vertu de la proposition 4.1.8, il suffit de montrer que si x est un objet asphérique de M, alors $i^*(x)$ est un préfaisceau asphérique de $\widehat{A}$. Or, en vertu de la proposition précédente, l'objet final e_M de M est aussi un objet asphérique de M, et par suite, l'unique morphisme $x \longrightarrow e_M$ est une équivalence faible de M (cf. 4.1.16). La condition (c) implique alors que le morphisme $i^*(x) \longrightarrow i^*(e_M)$ est une équivalence faible de préfaisceaux sur A. Comme $i^*(e_M)$ est un objet final de $\widehat{A}$, et A est par hypothèse un objet asphérique de $\mathcal{C}at$, le préfaisceau $i^*(e_M)$ est asphérique, donc aussi $i^*(x)$, ce qui achève la démonstration. □

Proposition 4.1.26. — *Soit (M, M_{as}) une structure d'asphéricité modélisante. Si la catégorie M admet un objet final et si le localisateur fondamental faible $\mathcal{W}$ est fortement saturé, alors la structure d'asphéricité (M, M_{as}) est asphérique.*

Démonstration. — Comme la structure d'asphéricité (M, M_{as}) est modélisante, il existe une petite catégorie A et un foncteur asphérique $i : A \longrightarrow M$ tels que le foncteur composé $i_A i^*$ induise une équivalence de catégories $\overline{\imath}_A \overline{\imath}^* : \mathsf{Hot}_M \longrightarrow \mathsf{Hot}$

$$\mathsf{Hot}_M = \mathcal{W}^{-1}_{(M,M_{\mathrm{as}})} M \xrightarrow{\overline{\imath}^*} \mathsf{Hot}_A = \mathcal{W}^{-1}_{\widehat{A}} \widehat{A} \xrightarrow{\overline{\imath}_A} \mathsf{Hot} = \mathcal{W}^{-1} \mathcal{C}at \ .$$

Soit e_M un objet final de M. Alors l'image de e_M dans Hot_M est un objet final de Hot_M (cf. lemme 1.4.6), et par suite, $\overline{\imath}_A \overline{\imath}^*(e_M)$ est un objet final de Hot. Comme le localisateur fondamental faible $\mathcal{W}$ est fortement saturé, on en déduit que la catégorie $i_A i^*(e_M)$ est asphérique. Le préfaisceau $i^*(e_M)$ de $\widehat{A}$ est donc asphérique, et par suite, l'objet final e_M de M est asphérique, ce qui en vertu de la proposition 4.1.23, implique que la structure d'asphéricité (M, M_{as}) est asphérique. □

Définition 4.1.27. — On dit qu'une structure d'asphéricité (M, M_{as}) est *totalement $\mathcal{W}$-asphérique*, ou plus simplement *totalement asphérique*, s'il existe une petite catégorie A totalement asphérique et un foncteur asphérique $i : A \longrightarrow M$.

Remarque 4.1.28. — Puisque par définition toute petite catégorie totalement asphérique est asphérique, une structure d'asphéricité totalement asphérique est asphérique.

Proposition 4.1.29. — *Soit (M, M_{as}) une structure d'asphéricité. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *la structure d'asphéricité* (M, M_{as}) *est totalement asphérique, autrement dit, il existe une petite catégorie totalement asphérique* A *et un foncteur asphérique* $i : A \longrightarrow M$ *;*

(b) *pour toute petite catégorie* B*, et tout foncteur asphérique* $j : B \longrightarrow M$ *pleinement fidèle,* B *est totalement asphérique.*

De plus, si la catégorie M *admet des produits finis, ces conditions sont aussi équivalentes aux conditions suivantes :*

(c) *un produit fini d'objets asphériques de* M *est encore asphérique, autrement dit,* M_{as} *est stable par produits finis dans* M *;*

(c′) *il existe une petite sous-catégorie pleine* B *de* M *formée d'objets asphériques, stable par produits finis dans* M*, et telle que le foncteur d'inclusion* $j : B \longrightarrow M$ *soit asphérique.*

Démonstration. — L'implication $(b) \Rightarrow (a)$ résulte du fait qu'il existe une petite sous-catégorie pleine B de M telle que le foncteur d'inclusion $j : B \longrightarrow M$ soit asphérique (cf. remarque 4.1.5). Pour montrer la réciproque, supposons qu'il existe une petite catégorie A totalement asphérique et un foncteur asphérique $i : A \longrightarrow M$, et soient B une petite catégorie et $j : B \longrightarrow M$ un foncteur asphérique pleinement fidèle. Il s'agit de montrer que la catégorie B est totalement asphérique. En vertu de la proposition 4.1.23, la catégorie B est asphérique, et en vertu de la proposition 4.1.13, il existe un objet (C, k) de $\mathcal{A}sph'(M, M_{\mathrm{as}})$ et des morphismes $u : (A, i) \longrightarrow (C, k)$ et $v : (B, j) \longrightarrow (C, k)$ de $\mathcal{A}sph(M, M_{\mathrm{as}})$. En particulier, on a des morphismes asphériques $u : A \longrightarrow C$ et $v : B \longrightarrow C$ de $\mathcal{C}at$, le morphisme v satisfaisant à l'égalité $kv = j$. Comme les foncteurs j et k sont pleinement fidèles il en est de même de v qui est donc un morphisme localement asphérique de $\mathcal{C}at$ (cf. 1.2.14, (b)). Comme la catégorie A est totalement asphérique et le morphisme u asphérique, il résulte de la proposition 1.7.5, (b), que la catégorie C est totalement asphérique. Comme le morphisme v de $\mathcal{C}at$ est localement asphérique et pleinement fidèle, et B un objet asphérique de $\mathcal{C}at$, il résulte alors de la partie (c) de cette même proposition que B est totalement asphérique, ce qui prouve l'assertion.

Supposons maintenant que la catégorie M admette des produits finis, et montrons qu'alors les conditions (c) et (c') de la proposition sont équivalentes aux conditions précédentes. Si la structure d'asphéricité (M, M_{as}) est totalement asphérique, il existe une petite catégorie A totalement asphérique et un foncteur asphérique $i : A \longrightarrow M$. Soient x, y deux objets asphériques de M. Les préfaisceaux $i^*(x)$ et $i^*(y)$ sur A sont alors asphériques, et comme la catégorie A est totalement asphérique, il résulte de la proposition 1.7.1 que le préfaisceau $i^*(x \times y) \simeq i^*(x) \times i^*(y)$ est asphérique, et par suite, que l'objet $x \times y$ de M est asphérique. Comme en vertu de la proposition 4.1.23 et de la remarque 4.1.28, l'objet final de M est asphérique, ceci prouve la condition (c). Montrons l'implication $(c) \Rightarrow (c')$. Soient A une petite catégorie, $i : A \longrightarrow M$ un foncteur asphérique, B la sous-catégorie pleine de M formée des produits finis d'objets de la forme $i(a)$, pour a objet de A, et $j : B \longrightarrow M$ le foncteur d'inclusion. Alors B est une petite sous-catégorie pleine de M stable par produits finis, et la condition (c) implique qu'elle est formée d'objets asphériques. Comme le foncteur asphérique i se factorise par B, le lemme 4.1.4, (b), implique que le foncteur j est asphérique, ce qui prouve la condition (c'). Enfin, l'implication $(c') \Rightarrow (a)$ résulte du fait qu'une petite catégorie admettant des produits finis est totalement asphérique (cf. 1.7.4). $\square$

Exemples 4.1.30. — 1) La structure d'asphéricité $(\mathcal{C}at, \mathcal{C}at_{\mathrm{as}})$ de l'exemple 4.1.3 est totalement asphérique. En effet, un produit fini d'objets asphériques de $\mathcal{C}at$ est asphérique (cf. corollaire 1.1.5), et l'assertion résulte de la condition (c) de la proposition précédente.

2) Si B est une petite catégorie, la structure d'asphéricité $(\widehat{B}, \widehat{B}_{\mathrm{as}})$ de l'exemple 4.1.6 est totalement asphérique si et seulement la catégorie B est totalement asphérique. En effet, cela résulte aussitôt de la condition (c) de la proposition précédente et de la condition (a'') de la proposition 1.7.1.

Proposition 4.1.31. — *Soit (M, M_{as}) une structure d'asphéricité asphérique. Si M admet des produits finis, et si le localisateur fondamental faible $\mathcal{W}$ est un localisateur fondamental, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *(M, M_{as}) est totalement asphérique ;*
(b) *$\mathcal{W}_{(M, M_{\mathrm{as}})}$ est stable par produits binaires.*

De plus, si ces conditions équivalentes sont satisfaites, la catégorie localisée $\mathsf{Hot}_M = \mathcal{W}^{-1}_{(M, M_{\mathrm{as}})} M$ admet des produits finis, et le foncteur de localisation $M \longrightarrow \mathsf{Hot}_M$, ainsi que le foncteur canonique $\bar{k}_{(M, M_{\mathrm{as}})} : \mathsf{Hot}_M \longrightarrow \mathsf{Hot}$ (cf. 4.1.17), y commutent.

Démonstration. — Si la structure d'asphéricité (M, M_{as}) est totalement asphérique, il existe une petite catégorie A totalement asphérique et un foncteur asphérique $i : A \longrightarrow M$. Comme le localisateur fondamental faible $\mathcal{W}$ est un localisateur fondamental, en vertu de la proposition 2.1.11, la classe $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$ des équivalences faibles de $\widehat{A}$ est stable par produits binaires. Comme le foncteur $i^* : M \longrightarrow \widehat{A}$ commute auxdits produits, la classe $\mathcal{W}_{(M, M_{\mathrm{as}})} = (i^*)^{-1}(\mathcal{W}_{\widehat{A}})$ des équivalences faibles de M est aussi stable par produits binaires, ce qui prouve l'implication $(a) \Rightarrow (b)$. Réciproquement, supposons que $\mathcal{W}_{(M, M_{\mathrm{as}})}$ soit stable par produits binaires, et soit x et y deux objets asphériques de M. Comme la catégorie M admet des produits finis, elle admet en particulier un objet final e_M, et comme la structure d'asphéricité (M, M_{as}) est asphérique, il résulte de la proposition 4.1.23, (c), que cet objet est asphérique. On en déduit que les morphismes $x \longrightarrow e_M$ et $y \longrightarrow e_M$ sont des équivalences faibles de M donc $x \times y \longrightarrow e_M \times e_M \simeq e_M$ aussi, et par suite que l'objet $x \times y$ de M est asphérique. La proposition 4.1.29, (c), implique alors que la structure d'asphéricité (M, M_{as}) est totalement asphérique, et prouve l'équivalence des conditions (a) et (b).

Si ces conditions sont satisfaites, la proposition 2.1.8 et le lemme 1.4.6 impliquent que Hot_M admet des produits finis et que le foncteur de localisation $M \longrightarrow \mathsf{Hot}_M$ y commute. La dernière assertion résulte alors de l'exactitude à gauche du foncteur i^*, et de la proposition 2.1.11. $\square$

Définition 4.1.32. — Soient (M, M_{as}) une structure d'asphéricité, A une petite catégorie, et $i : A \longrightarrow M$ un foncteur. On dit que i est un foncteur *localement* M_{as}*-*$\mathcal{W}$*-asphérique*, ou *localement* M_{as}*-asphérique*, ou *localement* $\mathcal{W}$*-asphérique*, ou plus simplement *localement asphérique*, si pour tout objet a de A, le foncteur $i_a : A/a \longrightarrow M$, induit par i, est asphérique.

Remarque 4.1.33. — Si (M, M_{as}) est une structure d'asphéricité, A une petite catégorie, et $i : A \longrightarrow M$ un foncteur localement asphérique, alors pour tout objet a de A, l'objet $i(a)$ de M est asphérique.

Remarque 4.1.34. — Si B est une petite catégorie, (M, M_{as}) la structure d'asphéricité $(\widehat{B}, \widehat{B}_{\mathrm{as}})$ de l'exemple 4.1.6, $u : A \longrightarrow B$ un morphisme de $\mathcal{C}at$, et $i = ju$ le composé de u avec le plongement de Yoneda $j : B \longrightarrow \widehat{B}$, il faut se garder de croire que u est un morphisme localement asphérique de $\mathcal{C}at$ si et seulement si le foncteur $i : A \longrightarrow \widehat{B}$ est localement asphérique. En effet, dire que le foncteur i est localement asphérique, revient à dire que pour tout objet a de A, le morphisme $A/a \longrightarrow B$, induit par u, est asphérique (cf. exemple 4.1.6), tandis que dire que u est un morphisme localement asphérique de $\mathcal{C}at$, revient à dire que pour tout objet a de A, le morphisme $A/a \longrightarrow B/u(a)$, induit par u, est asphérique, ce qui n'est pas équivalent. Si B est totalement asphérique, on a simplement une implication : u morphisme localement asphérique de $\mathcal{C}at$ implique i foncteur localement asphérique (en vertu de la condition (a') de la proposition 1.7.1 et de la stabilité des morphismes asphériques par composition (cf. 1.1.8), puisque le morphisme $A/a \longrightarrow B$ est égal au composé $A/a \longrightarrow B/u(a) \longrightarrow B$).

Proposition 4.1.35. — *Soient (M, M_{as}) une structure d'asphéricité, A une petite catégorie, et $i : A \longrightarrow M$ un foncteur tel que pour tout objet a de A, l'objet $i(a)$ de M soit asphérique. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *le foncteur i est localement asphérique ;*
(b) *pour tout objet asphérique x de M, le préfaisceau $i^*(x)$ de $\widehat{A}$ est localement asphérique ;*
(c) *il existe une petite catégorie B et un foncteur asphérique $j : B \longrightarrow M$ tel que pour tout objet x de M de la forme $x = i(a)$, pour a objet de A, ou $x = j(b)$, pour b objet de B, le préfaisceau $i^*(x)$ de $\widehat{A}$ soit localement asphérique ;*

et ces conditions impliquent la condition suivante :

(d) *pour toute équivalence faible f de M, le morphisme $i^*(f)$ est une équivalence faible locale de préfaisceaux sur A.*

De plus, si la catégorie M admet un objet final, et si la structure d'asphéricité (M, M_{as}) *est asphérique, les conditions* (a) - (d) *sont toutes équivalentes.*

Démonstration. — L'équivalence des conditions (a) - (c) résulte de la proposition 4.1.8, appliquée aux foncteurs i_a, pour a objet de A (cf. 4.1.32 et 1.3.6). Que ces conditions équivalentes impliquent la condition (d), est immédiat en vertu de la définition des équivalences faibles d'une structure d'asphéricité (cf. 4.1.16) et de la définition des équivalences faibles locales d'une catégorie de préfaisceaux (cf. 1.3.6). Enfin, la dernière assertion résulte de la proposition 4.1.25, appliquée aux foncteurs i_a, pour a objet de A, et du fait que les catégories A/a sont asphériques. □

Remarque 4.1.36. — En gardant les notations de la proposition précédente, il résulte de la condition (b) de cette proposition et de la condition (b) de la proposition 4.1.8 que si le foncteur i est localement asphérique, et si la catégorie A est asphérique, alors le foncteur i est asphérique (cf. 1.3.6).

Corollaire 4.1.37. — *Soient* (M, M_{as}) *une structure d'asphéricité, A une petite catégorie totalement asphérique, et $i : A \longrightarrow M$ un foncteur tel que pour tout objet a de A, l'objet $i(a)$ de M soit asphérique. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *le foncteur i est asphérique ;*
(b) *le foncteur i est localement asphérique.*

De plus, si ces conditions équivalentes sont satisfaites, la structure d'asphéricité (M, M_{as}) *est totalement asphérique.*

Démonstration. — Le corollaire résulte aussitôt des propositions 1.7.1, 4.1.8 et 4.1.35, la dernière assertion étant immédiate en vertu de la définition d'une structure d'asphéricité totalement asphérique (cf. 4.1.27). □

Corollaire 4.1.38. — *Soient* (M, M_{as}) *une structure d'asphéricité, A une petite catégorie non vide, et $i : A \longrightarrow M$ un foncteur pleinement fidèle tel que pour tout objet a de A, l'objet $i(a)$ de M soit asphérique. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *la structure d'asphéricité* (M, M_{as}) *est totalement asphérique et le foncteur i est asphérique ;*
(b) *le foncteur i est localement asphérique.*

De plus, si ces conditions équivalentes sont satisfaites, la catégorie A est totalement asphérique.

Démonstration. — La condition (a) implique, en vertu de la proposition 4.1.29, que la catégorie A est totalement asphérique, ce qui prouve la dernière assertion et implique la condition (b), en vertu du corollaire précédent. Il reste à prouver l'implication $(b) \Rightarrow (a)$. Supposons donc que le foncteur i soit localement asphérique, autrement dit que pour tout objet a de A, le foncteur composé

$$A/a \longrightarrow A \xrightarrow{\ i\ } M$$

soit asphérique. Comme le foncteur i est pleinement fidèle et la catégorie A non vide, cela implique, en vertu du lemme 4.1.4, (b), et de la proposition 1.7.1, (a'), que le foncteur i est asphérique et la catégorie A totalement asphérique. En particulier, la structure d'asphéricité (M, M_{as}) est alors totalement asphérique (cf. 4.1.27), ce qui achève la démonstration. □

Corollaire 4.1.39. — *Soient (M, M_{as}) une structure d'asphéricité, $u : A \longrightarrow B$ un morphisme de $\mathcal{C}at$, $j : B \longrightarrow M$ un foncteur, et posons $i = ju : A \longrightarrow M$. On suppose que pour tout objet b de B, l'objet $j(b)$ de M est asphérique.*

(a) *Si u est un morphisme localement asphérique de $\mathcal{C}at$ et j un foncteur localement asphérique, alors i est aussi un foncteur localement asphérique.*
(b) *Si u est un morphisme asphérique, ou si u est un morphisme localement asphérique et induit une surjection sur les objets, et si i est un foncteur localement asphérique, alors j est aussi un foncteur localement asphérique.*

Démonstration. — L'assertion (a) résulte de la proposition 4.1.35, (b), et du corollaire 1.3.13, (a), et l'assertion (b) résulte de la proposition 4.1.35, (b), et du corollaire 1.3.14, (a). □

Définition 4.1.40. — Soient (M, M_{as}) une structure d'asphéricité, A une petite catégorie, et $i : A \longrightarrow M$ un foncteur. On dit que i est un M_{as}-$\mathcal{W}$-*foncteur pseudo-test*, ou un M_{as}-*foncteur pseudo-test*, ou un $\mathcal{W}$-*foncteur pseudo-test*, ou plus simplement un *foncteur pseudo-test*, si les conditions suivantes sont satisfaites :

(a) A est une catégorie pseudo-test ;
(b) la structure d'asphéricité (M, M_{as}) est modélisante ;
(c) le foncteur i est asphérique.

On dit que i est un M_{as}-$\mathcal{W}$-*foncteur test faible*, ou un M_{as}-*foncteur test faible*, ou un $\mathcal{W}$-*foncteur test faible*, ou plus simplement un *foncteur test faible*, si la condition (a) ci-dessus est remplacée par la condition

(a′) A est une catégorie test faible.

On dit que i est un M_{as}-$\mathcal{W}$-*foncteur test local*, ou un M_{as}-*foncteur test local*, ou un $\mathcal{W}$-*foncteur test local*, ou plus simplement un *foncteur test local*, si pour tout objet a de A, le foncteur $i_a : A/a \longrightarrow M$, induit par i, est un foncteur test faible, autrement dit si les conditions suivantes sont satisfaites :

(a) A est une catégorie test locale ;
(b) la structure d'asphéricité (M, M_{as}) est modélisante ;
(c) le foncteur i est localement asphérique.

Enfin, on dit que i est un M_{as}-$\mathcal{W}$-*foncteur test*, ou un M_{as}-*foncteur test*, ou un $\mathcal{W}$-*foncteur test*, ou plus simplement un *foncteur test*, si il est à la fois un foncteur test faible et un foncteur test local, autrement dit si les conditions suivantes sont satisfaites :

(a) A est une catégorie test ;
(b) la structure d'asphéricité (M, M_{as}) est modélisante ;
(c) le foncteur i est à la fois asphérique et localement asphérique.

Exemple 4.1.41. — Si (M, M_{as}) est la structure d'asphéricité $(\mathcal{C}at, \mathcal{C}at_{\mathrm{as}})$ de l'exemple 4.1.3, A une petite catégorie, et $i : A \longrightarrow \mathcal{C}at$ un foncteur, alors i est un foncteur pseudo-test (resp. test faible, resp. test local, resp. test) au sens de la définition 1.8.14 si et seulement si il l'est au sens de la définition ci-dessus.

Lemme 4.1.42. — *Soient* (M, M_{as}) *une structure d'asphéricité, A une petite catégorie, et $i : A \longrightarrow M$ un foncteur pseudo-test. Alors $i^* : (M, \mathcal{W}_{(M,M_{\mathrm{as}})}) \longrightarrow (\widehat{A}, \mathcal{W}_{\widehat{A}})$ est un morphisme de modélisateurs, autrement dit, on a $\mathcal{W}_{(M,M_{\mathrm{as}})} = (i^*)^{-1}(\mathcal{W}_{\widehat{A}})$ et le foncteur $\overline{i^*} : \mathsf{Hot}_M \longrightarrow \mathsf{Hot}_A$, induit par i^*, est une équivalence de catégories.*

Démonstration. — Par définition des équivalences faibles d'une structure d'asphéricité (cf. 4.1.16), on a $\mathcal{W}_{(M,M_{\mathrm{as}})} = (i^*)^{-1}(\mathcal{W}_{\widehat{A}})$. Comme i est un foncteur pseudo-test, la structure d'asphéricité (M, M_{as}) est modélisante (cf. 4.1.18), et par suite, le foncteur canonique $\bar{k}_{(M,M_{\mathrm{as}})} : \mathsf{Hot}_M \longrightarrow \mathsf{Hot}$ est une équivalence de catégories. Or, puisque le foncteur i est asphérique, le foncteur $\bar{k}_{(M,M_{\mathrm{as}})}$ est, par définition (cf. 4.1.17), isomorphe au composé des foncteurs

$$\mathsf{Hot}_M \xrightarrow{\overline{i^*}} \mathsf{Hot}_A \xrightarrow{\overline{\imath}_A} \mathsf{Hot}\ ,$$

induits par les foncteurs $i^* : M \longrightarrow \widehat{A}$ et $i_A : \widehat{A} \longrightarrow \mathcal{C}at$. Comme A est une catégorie pseudo-test, le foncteur $\overline{\imath}_A$ est une équivalence de catégories (cf. 1.4.4), et par suite, il en est de même pour $\overline{i^*}$, ce qui prouve le lemme. □

Proposition 4.1.43. — *Soient* (M, M_{as}) *une structure d'asphéricité modélisante, A une catégorie pseudo-test, et $i : A \longrightarrow M$ un foncteur tel que pour tout objet a de A, l'objet $i(a)$ de M soit asphérique. Si la catégorie M admet un objet final, et si la structure d'asphéricité (M, M_{as}) est asphérique* (cette hypothèse étant conséquence des autres si le localisateur fondamental faible $\mathcal{W}$ est fortement saturé (cf. proposition 4.1.26))*, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *i est un foncteur pseudo-test, autrement dit, i est asphérique ;*
(b) *i^* est un morphisme de modélisateurs ;*
(c) *on a $i^*(\mathcal{W}_{(M,M_{\mathrm{as}})}) \subset \mathcal{W}_{\widehat{A}}$ et le foncteur $\overline{i^*} : \mathsf{Hot}_M \longrightarrow \mathsf{Hot}_A$, induit par i^*, est une équivalence de catégories ;*
(d) *on a $i^*(\mathcal{W}_{(M,M_{\mathrm{as}})}) \subset \mathcal{W}_{\widehat{A}}$.*

Démonstration. — L'implication $(a) \Rightarrow (b)$ résulte du lemme précédent, les implications $(b) \Rightarrow (c)$ et $(c) \Rightarrow (d)$ sont évidentes et l'implication $(d) \Rightarrow (a)$ résulte de la proposition 4.1.25. $\square$

Proposition 4.1.44. — *Soient (M, M_{as}) une structure d'asphéricité totalement asphérique, A, B deux petites catégories, $i : A \longrightarrow M$ et $j : B \longrightarrow M$ deux foncteurs se factorisant par la sous-catégorie pleine de M formée des objets asphériques. On suppose que la catégorie M admet des produits binaires, et que pour tout objet a de A et tout couple d'objets b, b' de B, les Hom internes $\underline{\mathsf{Hom}}_M(j(b), i(a))$ et $\underline{\mathsf{Hom}}_M(j(b), j(b'))$ existent dans M et sont asphériques. On note $i \boxtimes j$ le foncteur*

$$i \boxtimes j : A \times B \longrightarrow M\,, \qquad (a, b) \longmapsto i(a) \times j(b)\,.$$

(a) *Si i est un foncteur asphérique et B une catégorie asphérique, alors le foncteur $i \boxtimes j$ est asphérique.*
(b) *Si i est un foncteur localement asphérique, il en est de même de $i \boxtimes j$.*
(c) *Si i est un foncteur test faible et B une catégorie asphérique, alors $i \boxtimes j$ est un foncteur test faible.*
(d) *Si i est un foncteur test local, il en est de même de $i \boxtimes j$.*
(e) *Si i est un foncteur test et B une catégorie asphérique, alors $i \boxtimes j$ est un foncteur test.*

Démonstration. — Comme la structure d'asphéricité (M, M_{as}) est totalement asphérique, pour tout objet (a, b) de $A \times B$, l'objet $i(a) \times j(b)$ de M est asphérique (cf. 4.1.29, (c)). Pour montrer l'assertion (a), il suffit donc en vertu de la proposition 4.1.8, (c), de montrer que pour tout objet x de M de la forme $x = i(a)$ pour a objet de A, ou $x = (i \boxtimes j)(a', b')$, pour (a', b') objet de $A \times B$, le préfaisceau $(i \boxtimes j)^*(x)$ sur $A \times B$ soit asphérique. Or, on remarque que pour tout objet x de M tel que le Hom interne $\underline{\mathsf{Hom}}_M(j(b), x)$ existe pour tout objet b de B, on a pour tout objet (a, b) de $A \times B$, des bijections fonctorielles

$$\begin{aligned}(i \boxtimes j)^*(x)(a, b) &= \mathsf{Hom}_M(i(a) \times j(b), x)\\ &\simeq \mathsf{Hom}_M(i(a), \underline{\mathsf{Hom}}_M(j(b), x)) = i^*\big(\underline{\mathsf{Hom}}_M(j(b), x)\big)(a)\,.\end{aligned}$$

Comme la catégorie B est supposée asphérique, il résulte de la proposition 1.3.18 que pour montrer que le préfaisceau $(i \boxtimes j)^*(x)$ sur $A \times B$ est asphérique, il suffit de montrer que pour tout objet b de B, la préfaisceau $i^*\big(\underline{\mathsf{Hom}}_M(j(b), x)\big)$ de $\widehat{A}$ est asphérique, autrement dit, comme le foncteur i est supposé asphérique, que $\underline{\mathsf{Hom}}_M(j(b), x)$ est un objet asphérique de M. Si $x = i(a)$, pour a objet de A, $\underline{\mathsf{Hom}}_M(j(b), x)$ existe et est asphérique par hypothèse. Si $x = (i \boxtimes j)(a', b') = i(a') \times j(b')$, pour (a', b') objet de $A \times B$, on remarque que puisque $\underline{\mathsf{Hom}}_M(j(b), i(a'))$ et $\underline{\mathsf{Hom}}_M(j(b), j(b'))$ existent dans M et sont asphériques, $\underline{\mathsf{Hom}}_M(j(b), x)$ existe aussi et est isomorphe à $\underline{\mathsf{Hom}}_M(j(b), i(a') \times \underline{\mathsf{Hom}}_M(j(b), j(b')$, qui est un objet asphérique de M, par total asphéricité de M (cf. 4.1.29, (c)). Ceci achève la preuve de l'assertion (a).

Pour montrer l'assertion (b), on remarque que comme, pour tout objet (a, b) de $A \times B$, le foncteur $(i \boxtimes j)_{(a,b)} : A \times B/(a, b) \longrightarrow M$, induit par $i \boxtimes j$, s'identifie au foncteur $i_a \boxtimes j_b$, où $i_a : A/a \longrightarrow$ et $j_b : B/b \longrightarrow M$ désignent les foncteurs induits respectivement par i et j, l'assertion résulte de (a) appliqué aux foncteurs i_a et j_b, qui satisfont aux conditions requises, puisque i étant un foncteur localement asphérique, i_a est un foncteur asphérique, et la catégorie B/b, admettant un objet final, est asphérique.

Montrons l'assertion (c). Comme un foncteur test faible est en particulier un foncteur asphérique, il résulte des hypothèses de cette assertion et de (a) que le foncteur $i \boxtimes j$ est asphérique. Il reste donc à montrer que $A \times B$ est une catégorie test faible, ce qui résulte de la proposition 1.4.11, ou de l'assertion (a) appliquée à $M = \mathcal{C}at$, munie de la structure d'asphéricité de l'exemple 4.1.3, et aux foncteurs $i_A : A \longrightarrow \mathcal{C}at$ et $i_B : B \longrightarrow \mathcal{C}at$ (cf. 1.8.3), en remarquant que le foncteur $i_{A\times B} : A \times B \longrightarrow \mathcal{C}at$ s'identifie au foncteur $i_A \boxtimes i_B$, et que les Hom internes dont l'asphéricité est requise sont des catégories admettant un objet final.

L'assertion (d) résulte aussitôt de l'assertion (b) et du corollaire 1.6.11, ou directement de l'assertion (c), en raisonnant comme dans la preuve de l'assertion (b). Enfin, l'assertion (e) résulte des assertions (c) et (d). $\square$

Corollaire 4.1.45. — *Soient C une petite catégorie admettant des produits binaires, A, B deux petites catégories, et $i : A \longrightarrow C$ et $j : B \longrightarrow C$ deux foncteurs. On suppose que pour tout objet a de A et tout couple d'objets b, b' de B, les préfaisceaux*

$$\underline{\mathsf{Hom}}_{\widehat{C}}(j(b), i(a)) , \qquad c \longmapsto \mathsf{Hom}_{\widehat{C}}(j(b) \times c, i(a)) ,$$
$$\underline{\mathsf{Hom}}_{\widehat{C}}(j(b), j(b')) , \qquad c \longmapsto \mathsf{Hom}_{\widehat{C}}(j(b) \times c, j(b')) ,$$

de $\widehat{C}$ sont asphériques. On note $i \boxtimes j$ le foncteur

$$i \boxtimes j : A \times B \longrightarrow C , \qquad (a, b) \longmapsto i(a) \times j(b) .$$

Si i est un morphisme asphérique de $\mathcal{C}at$ et B une catégorie asphérique, alors le morphisme $i \boxtimes j$ est asphérique.

Démonstration. — Si la catégorie C est vide, il n'y a rien à prouver ; on peut donc supposer qu'elle est totalement asphérique (cf. 1.7.4). Le corollaire résulte alors directement de la proposition 4.1.44, (a), appliquée à la structure d'asphéricité $(\widehat{C}, \widehat{C}_{\text{as}})$ de l'exemple 4.1.6, qui est alors totalement asphérique (cf. 4.1.30, (2)). $\square$

4.2. Structures homotopiques et structures de contractibilité

4.2.1. — Soient M une catégorie admettant des produits finis, et $\mathcal{I}$ une classe de segments de M. On dit que $\mathcal{I}$ est *saturée* si $\mathcal{I} = \widetilde{\mathcal{I}}$ (cf. 1.5.4), autrement dit, si tout segment $(I, \partial_0, \partial_1)$ de M tel que ∂_0 soit $\mathcal{I}$-homotope à ∂_1 appartient à $\mathcal{I}$.

4.2.2. — Une *structure de segments homotopiques* est un couple $h = (M, \mathcal{I})$, formé d'une catégorie M admettant des produits finis, et d'une classe saturée $\mathcal{I}$ de segments de M. Un segment appartenant à $\mathcal{I}$ sera appelé *segment h-homotopique*, ou plus simplement, *segment homotopique*, et on dira parfois que $\mathcal{I}$ est une *structure de segments homotopiques* sur M. On rappelle qu'on associe à la classe de segments $\mathcal{I}$ une relation d'équivalence de $\mathcal{I}$-homotopie sur la classe des flèches de M (cf. 1.5.2), qu'on notera $\sim_h$, et qu'on appellera relation de *h-homotopie*, ou relation d'*homotopie*, quand aucune ambiguïté n'en résulte. Cette relation relie des flèches ayant même source et même but, et est compatible à la composition et au produit de deux flèches (cf. 1.5.3). Puisque la classe $\mathcal{I}$ est saturée, $\mathcal{I}$ est formée des segments $(I, \partial_0, \partial_1)$ de M tels que $\partial_0 \sim_h \partial_1$. Ainsi, la classe $\mathcal{I}$ et la relation $\sim_h$ se déterminent mutuellement. Les $\mathcal{I}$-homotopismes et les objets $\mathcal{I}$-contractiles de M (cf. 1.5.3) seront appelés respectivement *h-homotopismes* et objets *h-contractiles*, ou plus simplement *homotopismes* et objets *contractiles*, quand il n'y a aucune ambiguïté sur le choix de la structure de segments homotopiques. On dira qu'un segment $(I, \partial_0, \partial_1)$ est *h-contractile*, ou *contractile* si I est un objet h-contractile de M. Si $\mathcal{I}_0$ est une partie de $\mathcal{I}$, on dit que $\mathcal{I}_0$ *engendre* la structure de segments homotopiques $h = (M, \mathcal{I})$ si $\mathcal{I} = \widetilde{\mathcal{I}}_0$. Les notions de h-homotopie, de h-homotopisme, et d'objet h-contractile coïncident alors avec celles de $\mathcal{I}_0$-homotopie, $\mathcal{I}_0$-homotopisme, et d'objet $\mathcal{I}_0$-contractile (cf. 1.5.4). Toute classe $\mathcal{I}_0$ de segment de M engendre une structure de segments homotopiques $(M, \mathcal{I})$, en posant $\mathcal{I} = \widetilde{\mathcal{I}}_0$.

Exemple 4.2.3. — On dit qu'un objet x d'une catégorie M est *connexe* si dès que x est isomorphe à une somme de deux objets de M, au moins l'un de ces deux objets est un objet initial de M, et qu'il est 0-*connexe* si, de plus, il n'est pas un objet initial de M. Si M est une catégorie admettant des produits finis, la *structure canonique de segments homotopiques sur* M est la structure homotopique $h_M = (M, \mathcal{I})$, où $\mathcal{I} = \widetilde{\mathcal{I}}_0$, et $\mathcal{I}_0$ désigne la classe des segments $(I, \partial_0, \partial_1)$ de M tels que I soit un objet 0-connexe de M.

Exemple 4.2.4. — Soient M une catégorie admettant des limites projectives finies, e_M un objet final de M, et W une classe faiblement saturée de flèches de M (cf. 1.1.1). On définit une structure de segment homotopiques $h_W = (M, \mathcal{I})$, en posant $\mathcal{I} = \widetilde{\mathcal{I}}_0$, où $\mathcal{I}_0$ désigne la classe de segments $(I, \partial_0, \partial_1)$ de M tels que le morphisme $I \longrightarrow e_M$ soit universellement dans W, autrement dit, tels que pour tout objet x de M la deuxième projection $I \times x \longrightarrow x$ soit dans W. On dira que h_W est la *structure de segments homotopiques sur M définie par la classe de flèches* W. Pour tout objet h_W-contractile de M, il résulte du lemme d'homotopie 1.5.6, que le morphisme $x \longrightarrow e_M$ est universellement dans W. Un cas particulier important est celui où $M = \widehat{A}$ et $W = \mathcal{W}_{\widehat{A}}$, dans quel cas la structure homotopique $h_{\mathcal{W}_{\widehat{A}}}$ est engendrée par la classe des segments $(I, \partial_0, \partial_1)$ de $\widehat{A}$ tels que I soit un préfaisceau localement asphérique de $\widehat{A}$ (cf. 1.3.6).

En vertu de ce qui précède, tout préfaisceau $h_{\mathcal{W}_{\widehat{A}}}$-contractile de $\widehat{A}$ est localement asphérique.

4.2.5. — Soient $h = (M, \mathcal{I})$ et $h' = (M', \mathcal{I}')$ deux structures de segments homotopiques. Un *morphisme de structures de segments homotopiques* de $(M, \mathcal{I})$ vers $(M', \mathcal{I}')$ est un foncteur $F : M \longrightarrow M'$ commutant aux produits finis et tel que $F(\mathcal{I}) \subset \mathcal{I}'$, autrement dit, tel que pour tout segment h-homotopique $\mathbb{I}$, le segment $F(\mathbb{I})$ de M' (cf. 1.5.5) soit un segment h'-homotopique.

Proposition 4.2.6. — *Soient $h = (M, \mathcal{I})$ et $h' = (M', \mathcal{I}')$ deux structures de segments homotopiques, $\mathcal{I}_0$ une classe de segments qui engendre la structure de segments homotopiques $\mathcal{I}$ sur M, et $F : M \longrightarrow M'$ un foncteur commutant aux produits finis. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *F est un morphisme de structures de segments homotopiques de $(M, \mathcal{I})$ vers $(M', \mathcal{I}')$;*

(a$'$) *pour tout segment $\mathbb{I}$ appartenant à $\mathcal{I}_0$, le segment $F(\mathbb{I})$ de M' est un segment h'-homotopique ;*

(b) *pour tout couple de flèches f, g de M, si $f \sim_h g$, alors $F(f) \sim_{h'} F(g)$.*

De plus, si ces conditions équivalentes sont satisfaites, si f est un h-homotopisme, alors $F(f)$ est un h'-homotopisme, et si x est un objet h-contractile de M, alors $F(x)$ est un objet h'-contractile de M'.

La proposition est évidente et sa démonstration laissée au lecteur.

Exemple 4.2.7. — Soient M une catégorie admettant des produits finis, et $\mathcal{I}_{gr}$ la classe de *tous* les segments de M. Alors le couple $h_{gr} = (M, \mathcal{I}_{gr})$ est une structure de segments homotopiques, appelée la *structure de segments homotopiques grossière* sur M. Pour toute structure de segments homotopiques $\mathcal{I}$ sur M, le foncteur identique 1_M est un morphisme de structures de segments homotopiques de $(M, \mathcal{I})$ vers $(M, \mathcal{I}_{gr})$.

Exemple 4.2.8. — Soient M une catégorie admettant des produits finis, et $\mathcal{I}_{ds}$ la classe de tous les segments $(I, \partial_0, \partial_1)$ de M tels que $\partial_0 = \partial_1$. Alors le couple $h_{ds} = (M, \mathcal{I}_{ds})$ est une structure de segments homotopiques, appelée la *structure de segments homotopiques discrète* ou *triviale* sur M. Pour toute structure de segments homotopiques $\mathcal{I}$ sur M, le foncteur identique 1_M est un morphisme de structures de segments homotopiques de $(M, \mathcal{I}_{ds})$ vers $(M, \mathcal{I})$. Deux flèches de M sont h_{ds}-homotopes si et seulement si elles sont égales, les h_{ds}-homotopismes sont les isomorphismes de M, et pour qu'un objet de M soit h_{ds}-contractile, il faut et il suffit qu'il soit un objet final de M. La classe vide de segments de M engendre cette structure de segments homotopiques.

4.2.9. — Une *structure de contractibilité* est un couple (M, M_{c}), formé d'une catégorie M (localement petite) admettant des produits finis, et d'une classe M_{c} d'objets de M, tel qu'il existe un *ensemble* M_0 d'objets de M *contenu* dans M_c tel que M_c soit la classe des objets contractiles de la structure de segments homotopiques $\mathcal{I}$ sur M engendrée par l'ensemble $\mathcal{I}_0$ des segments $(I, \partial_0, \partial_1)$ de M, pour I dans M_0. On dira alors que M_c est une *structure de contractibilité sur* M, que l'ensemble M_0 *engendre* la structure de contractibilité (M, M_c), ou la structure de contractibilité M_c sur M, et que $(M, \mathcal{I})$ est la *structure de segments homotopiques définie par la structure de contractibilité* (M, M_c). On dira même parfois qu'une structure de segments homotopiques $h = (M, \mathcal{I})$ *est* une structure de contractibilité pour dire que le couple (M, M_c), où M_c désigne la classe des objets h-contractiles de M, est une structure de contractibilité, autrement dit que $(M, \mathcal{I})$ est la structure de segments homotopiques définie par une structure de contractibilité. De façon informelle, on peut dire qu'on obtient ainsi une inclusion des structures de contractibilité dans les structures de segments homotopiques.

Quand il n'y a aucune ambiguïté sur le choix de la structure de contractibilité M_c sur M, on parlera parfois de relation d'*homotopie*, d'*homotopismes*, ou d'objets *contractiles*, au lieu de relation de h-homotopie, de h-homotopismes ou d'objets h-contractiles, pour $h = (M, \mathcal{I})$ la structure de segments homotopiques définie par la structure de contractibilité (M, M_c). En particulier, avec cette terminologie, M_c est la classe des objets contractiles de M.

Si M_0 est un ensemble d'objets de M, on dit que M_0 *engendre une structure de contractibilité sur* M, s'il existe une classe M_c d'objets de M (forcément unique) telle que (M, M_c) soit une structure de contractibilité engendrée par M_0. En particulier, par définition, on a alors $M_0 \subset M_c$.

Proposition 4.2.10. — *Soient M une catégorie* (localement petite) *admettant des produits finis, e_M un objet final de M, M_0 un* ensemble *d'objets de M, $\mathcal{I}_0$ l'ensemble des segments $(I, \partial_0, \partial_1)$ de M tels que I appartienne à M_0, et $h = (M, \mathcal{I})$ la structure de segments homotopiques sur M engendrée par $\mathcal{I}_0$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *M_0 engendre une structure de contractibilité sur M ;*
(b) *tout objet de M appartenant à M_0 est h-contractile ;*
(b′) *tout objet de M appartenant à M_0 est $\mathcal{I}_0$-contractile ;*
(b″) *pour tout objet x de M appartenant à M_0, il existe $n \geqslant 0$, une suite $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ d'objets de M appartenant à M_0, et pour tout i, $0 \leqslant i \leqslant n$, des morphismes $s_0^i, s_1^i : e_M \rightrightarrows x_i$ et $h_i : x_i \times x \longrightarrow x$ tels que :*
   (i) *$h_0(s_0^0 \times 1_x) = 1_x$ et $h_n(s_1^n \times 1_x)$ se factorise par e_M ;*
   (ii) *pour tout i, $0 < i \leqslant n$, on a $h_{i-1}(s_1^{i-1} \times 1_x) = h_i(s_0^i \times 1_x)$.*

La proposition est tautologique et sa démonstration laissée au lecteur.

Exemple 4.2.11. — Soit A une petite catégorie non vide. Pour que l'ensemble des objets de A engendre une structure de contractibilité sur $\widehat{A}$, il faut et il suffit que la catégorie A soit un précontracteur (cf. 1.7.17).

Exemple 4.2.12. — Soient M une catégorie (localement petite) admettant des produits finis, et $\mathbb{L}$ un segment multiplicatif de M (cf. 1.5.9). Alors l'ensemble $M_0 = \{\mathbb{L}\}$ engendre une structure de contractibilité sur M.

Exemple 4.2.13. — Si $\mathcal{C}at_c$ désigne la classe des petites catégories contractiles, $(\mathcal{C}at, \mathcal{C}at_c)$ est une structure de contractibilité. Elle est engendrée par l'ensemble $\{\mathbf{\Delta}_1\}$, où $\mathbf{\Delta}_1$ désigne le segment multiplicatif du paragraphe 1.5.18. La structure de segments homotopiques définie par cette structure de contractibilité est la structure usuelle décrite dans l'exemple 1.5.15.

Exemple 4.2.14. — Soient M une catégorie (localement petite) admettant des produits finis, et M_{c} la classe des objets finaux de M. Alors (M, M_{c}) est une structure de contractibilité appelée la *structure de contractibilité triviale* sur M. Elle est engendrée, au choix, par l'ensemble vide d'objets de M, ou par le singleton $\{e_M\}$, où e_M désigne un objet final de M.

Proposition 4.2.15. — *Soient (M, M_{c}) une structure de contractibilité, M_0 un ensemble d'objets qui l'engendre, et $h = (M, \mathcal{I})$ la structure de segments homotopiques définie par cette structure de contractibilité. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (a) *la structure de contractibilité (M, M_{c}) est triviale, autrement dit, tout objet de M appartenant à M_{c} est un objet final de M ;*
- (a′) *tout objet de M appartenant à M_0 est un objet final de M ;*
- (b) *la structure de segments homotopiques $h = (M, \mathcal{I})$ est triviale* (cf. 4.2.8)*, autrement dit, pour tout segment h-homotopique $(I, \partial_0, \partial_1)$, on a $\partial_0 = \partial_1$;*
- (b′) *pour tout segment $(I, \partial_0, \partial_1)$ de M, avec I appartenant à M_{c}, on a $\partial_0 = \partial_1$;*
- (b″) *pour tout segment $(I, \partial_0, \partial_1)$ de M, avec I appartenant à M_0, on a $\partial_0 = \partial_1$;*
- (c) *si deux morphismes de M sont h-homotopes ils sont égaux ;*
- (d) *tout h-homotopisme de M est un isomorphisme ;*
- (e) *tout objet h-contractile de M est un objet final de M.*

La proposition est tautologique et sa démonstration laissée au lecteur.

Proposition 4.2.16. — *Soient (M, M_{c}) une structure de contractibilité, M_0 un ensemble d'objets qui l'engendre, $h = (M, \mathcal{I})$ la structure de segments homotopiques définie par cette structure de contractibilité, $\mathcal{I}_0$ une classe de segment de M qui engendre la structure de segments homotopiques $(M, \mathcal{I})$, $h' = (M', \mathcal{I}')$ une structure de segments homotopiques, et $F : M \longrightarrow M'$ un foncteur commutant aux produits finis. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *F est un morphisme de structures de segments homotopiques de $(M, \mathcal{I})$ vers $(M', \mathcal{I}')$;*
(a$'$) *pour tout segment $\mathbb{I}$ appartenant à $\mathcal{I}_0$, le segment $F(\mathbb{I})$ de M' est un segment h'-homotopique ;*
(a$''$) *pour tout segment $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ de M, avec I dans M_0, le segment $F(\mathbb{I})$ de M' est un segment h'-homotopique ;*
(b) *pour tout couple de flèches f, g de M, si $f \sim_h g$, alors $F(f) \sim_{h'} F(g)$.*
(c) *pour tout objet h-contractile x de M, autrement dit x appartenant à M_c, l'objet $F(x)$ de M' est h'-contractile ;*
(c$'$) *pour tout objet x de M appartenant à M_0, l'objet $F(x)$ de M' est h'-contractile ;*
(d) *pour tout h-homotopisme f de M, $F(f)$ est un h'-homotopisme de M'.*

La proposition est tautologique et sa démonstration laissée au lecteur.

4.3. Structure d'asphéricité définie par une structure de contractibilité

Dans ce paragraphe, on se fixe, une fois pour toutes, un localisateur fondamental faible $\mathcal{W}$.

Définition 4.3.1. — Soit N une catégorie (localement petite). On dit que N est un $\mathcal{W}$-*asphérateur*, ou plus simplement un *asphérateur*, si le couple (N, N_{as}), où N_{as} désigne la classe de tous les objets de N, est une structure d'asphéricité. On dit qu'un asphérateur N est $\mathcal{W}$-*asphérique*, ou plus simplement *asphérique* (resp. *totalement* $\mathcal{W}$-*asphérique*, ou plus simplement *totalement asphérique*), si la structure d'asphéricité (N, N_{as}) l'est.

Proposition 4.3.2. — *Soit N une catégorie* (localement petite). *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *N est un asphérateur ;*
(b) *il existe une petite catégorie A et un foncteur $i : A \longrightarrow N$ tel que pour tout objet x de N, le préfaisceau $i^*(x)$ de $\widehat{A}$ soit asphérique ;*
(c) *il existe une petite sous-catégorie pleine B de N telle que si $j : B \longrightarrow N$ désigne le foncteur d'inclusion, pour tout objet x de N, le préfaisceau $j^*(x)$ de $\widehat{B}$ soit asphérique.*

Démonstration. — L'équivalence des conditions (a) et (b) est une traduction de la définition d'une structure d'asphéricité, et l'implication $(c) \Rightarrow (b)$ est évidente. Enfin, l'implication $(b) \Rightarrow (c)$ résulte du lemme 4.1.4, (b), en prenant pour B la sous-catégorie pleine de N formée des objets $i(a)$, pour a objet de A. $\square$

Exemple 4.3.3. — Toute petite catégorie est un asphérateur. En effet, si A est une petite catégorie, le foncteur $j = 1_A : A \longrightarrow A$ satisfait au critère (c) de la proposition ci-dessus, puisque j^* s'identifie alors au plongement de Yoneda et tout préfaisceau représentable est asphérique.

Exemple 4.3.4. — Soient (M, M_{as}) une structure d'asphéricité et N la sous-catégorie pleine de M formée des objets asphériques de M, autrement dit, des objets appartenant à la classe M_{as}. Alors, il résulte aussitôt de la condition (b) de la proposition précédente que N est un asphérateur.

Exemple 4.3.5. — Toute catégorie (localement petite) admettant un objet initial est un asphérateur. En effet, si N est une catégorie admettant un objet initial $\varnothing$, et si $A = e$ est la catégorie ponctuelle et $i : A \longrightarrow N$ le foncteur défini par l'objet initial $\varnothing$ de N, alors pour tout objet x de N, la catégorie $A/i^*(x)$ s'identifie à la catégorie ponctuelle, et par suite, le préfaisceau $i^*(x)$ est asphérique. La proposition 4.3.2, (b), implique alors que la catégorie N est un asphérateur.

Exemple 4.3.6. — Si le localisateur fondamental faible $\mathcal{W}$ n'est pas le localisateur fondamental trivial $\mathcal{W} = \mathsf{Fl}(\mathcal{C}at)$, et si E est une catégorie discrète dont la classe des objets n'est pas un ensemble, alors E n'est *pas* un asphérateur. En effet, pour toute petite catégorie A et tout foncteur $i : A \longrightarrow E$, il existe alors un objet x de E qui n'est pas l'image d'un objet de A, ce qui implique que la catégorie $A/i^*(x)$ est vide. Il résulte alors de la proposition 1.1.29 que cette catégorie n'est pas asphérique, autrement dit, que le préfaisceau $i^*(x)$ n'est pas asphérique. En vertu de la proposition 4.3.2, (b), la catégorie E n'est donc pas un asphérateur. Un raisonnement analogue montre que même la catégorie E^* obtenue de E en adjoignant formellement un objet final n'est pas un asphérateur.

4.3.7. — Soient (M, M_{as}) une structure d'asphéricité et N une sous-catégorie pleine de M. On dit que N *engendre la structure d'asphéricité* (M, M_{as}), ou que N *engendre la structure d'asphéricité* M_{as} *sur* M, si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(i) tout objet de N est un objet asphérique de M ;

(ii) il existe une petite catégorie A et un foncteur asphérique $i : A \longrightarrow M$ se factorisant par N ;

En vertu du lemme 4.1.4, (b), si N est *petite*, cela signifie simplement que le foncteur d'inclusion $N \longrightarrow M$ est asphérique.

Lemme 4.3.8. — *Soient (M, M_{as}) une structure d'asphéricité et N une sous-catégorie pleine de M qui l'engendre. Si A est une petite catégorie, et $i : A \longrightarrow M$ un foncteur tel que pour tout objet a de A, l'objet $i(a)$ de M soit asphérique, alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *le foncteur i est asphérique ;*

(b) *pour tout objet x de M de la forme $x = i(a)$, pour a objet de A, ou qui est un objet de N, le préfaisceau $i^*(x)$ de $\widehat{A}$ est asphérique.*

De plus, si le foncteur i est pleinement fidèle, ces conditions sont encore équivalentes à la condition :

(b′) *pour tout objet x de M appartenant à la sous-catégorie N, le préfaisceau $i^*(x)$ de $\widehat{A}$ est asphérique.*

Démonstration. — Comme la sous-catégorie pleine N de M engendre la structure d'asphéricité (M, M_{as}), en vertu de la partie (i) de la définition, elle est formée d'objets asphériques de M, et l'implication $(a) \Rightarrow (b)$ est évidente. D'autre part, en vertu de la partie (ii) de la définition, il existe une petite catégorie B et un foncteur asphérique $j : B \longrightarrow M$ se factorisant par N. La condition (b) implique alors que pour tout objet x de M de la forme $x = i(a)$, pour a objet de A, ou $x = j(b)$, pour b objet de B, le préfaisceau $i^*(x)$ de $\widehat{A}$ est asphérique. Il résulte donc de la proposition 4.1.8, (c), que le foncteur i est asphérique, ce qui prouve l'implication $(b) \Rightarrow (a)$. De même, la dernière assertion résulte de la proposition 4.1.8, (c'), ce qui achève la démonstration. □

Proposition 4.3.9. — *Soient M une catégorie* (localement petite) *et N une sous-catégorie pleine de M. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *Il existe une structure d'asphéricité M_{as} sur M telle que N l'engendre ;*
(b) *N est un asphérateur ;*

De plus, si ces conditions sont satisfaites la structure d'asphéricité M_{as} sur M de la condition (a) *est unique, et pour toute petite catégorie A et tout foncteur $i : A \longrightarrow M$ se factorisant par N, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a′) *le foncteur $i : A \longrightarrow M$ est M_{as}-asphérique ;*
(b′) *le foncteur $A \longrightarrow N$, induit par i, est N_{as}-asphérique, où N_{as} désigne la classe des objets de N.*

Démonstration. — Notons $k : N \longrightarrow M$ le foncteur d'inclusion. S'il existe une structure d'asphéricité M_{as} sur M telle que N l'engendre, alors, par définition, il existe une petite catégorie A et un foncteur M_{as}-asphérique $i : A \longrightarrow M$ se factorisant par N tel que pour tout objet x de N, le préfaisceau $i^*(x)$ de $\widehat{A}$ soit asphérique. On en déduit que si $i' : A \longrightarrow N$ désigne le foncteur induit par i, de sorte que $i = ki'$, pour tout objet x de N le préfaisceau $i'^*(x) \simeq i'^*k^*k(x) = i^*(x)$ de $\widehat{A}$ est asphérique, ce qui implique que N est un asphérateur. Réciproquement, si N est un asphérateur et $i' : A \longrightarrow N$ un foncteur N_{as}-asphérique, où N_{as} désigne la classe de tous les objets de N, et si on pose $i = ki'$ et on note M_{as} la classe des objet x de M tels que $i^*(x)$ soit un préfaisceau asphérique de $\widehat{A}$, alors on vérifie aussitôt que (M, M_{as}) est une structure d'asphéricité engendrée par N, ce qui prouve l'équivalence des conditions (a) et (b).

Si ces conditions équivalentes sont satisfaites, l'équivalence des conditions (a') et (b') résulte du lemme précédent, et cela implique l'unicité de la structure d'asphéricité M_{as} engendrée par N. □

Remarque 4.3.10. — En vertu de la proposition précédente, pour M une catégorie (localement petite) et un N une sous-catégorie pleine de M qui est un asphérateur, on pourra parler de *la* structure d'asphéricité M_{as} sur M engendrée par N.

Proposition 4.3.11. — *Soient M une catégorie* (localement petite)*, N une sous-catégorie pleine de M qui est un asphérateur, et M_{as} la structure d'asphéricité sur M engendrée par N. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *la structure d'asphéricité (M, M_{as}) est asphérique* (resp. *totalement asphérique*) ;
(b) *l'asphérateur N est asphérique* (resp. *totalement asphérique*).

Démonstration. — Soient N_{as} la classe de tous les objets de N, et A une petite sous-catégorie pleine de N telle que le foncteur d'inclusion $A \longrightarrow N$ soit N_{as}-asphérique. En vertu de la proposition 4.3.9, l'inclusion $A \longrightarrow M$ est alors un foncteur M_{as}-asphérique, et en vertu de la proposition 4.1.23 (resp. 4.1.29), la structure d'asphéricité (M, M_{as}) est asphérique (resp. totalement asphérique) si et seulement si la catégorie A est asphérique (resp. totalement asphérique). Par une nouvelle application de cette même proposition, cette dernière condition équivaut à l'asphéricité (resp. la totale asphéricité) de la structure d'asphéricité (N, N_{as}), ce qui prouve la proposition. □

Proposition 4.3.12. — *Soit (M, M_{c}) une structure de contractibilité. Alors la sous-catégorie pleine N de M formée des objets appartenant à M_{c} est un asphérateur, et la structure d'asphéricité M_{as} sur M engendrée par N est totalement asphérique. De plus, pour toute petite sous-catégorie pleine A de M, totalement asphérique, formée d'objets contractiles de M, dont l'ensemble des objets engendre la structure de contractibilité, le foncteur d'inclusion $i : A \longrightarrow M$ est M_{as}-asphérique* (*et donc aussi localement M_{as}-asphérique*).

Démonstration. — On observe d'abord que comme la classe M_{c} est stable par produits finis dans M (cf. 1.5.3), il existe une petite sous-catégorie pleine A de M, formée d'objets contractiles, stable par produits finis, et en particulier totalement asphérique (cf. 1.7.4), dont l'ensemble des objets engendre la structure de contractibilité. En effet, il suffit de choisir un ensemble M_0 qui engendre la structure de contractibilité (M, M_{c}), et prendre pour A la sous-catégorie pleine de M formée de produits finis d'objets de M appartenant à M_0.

Soit donc A une petite sous-catégorie pleine de M, formée d'objets contractiles, totalement asphérique, dont l'ensemble des objets engendre la structure de contractibilité, et $i : A \longrightarrow M$ le foncteur d'inclusion. Comme le foncteur i^* commute aux produits finis, pour tout objet x de M appartenant à M_{c}, le préfaisceaux $i^*(x)$ de $\widehat{A}$ est contractile pour la structure de segments homotopiques sur $\widehat{A}$ engendrée par les segments $(I, \partial_0, \partial_1)$ avec I préfaisceau représentable. Comme la catégorie A est totalement asphérique, les préfaisceaux représentables sont localement asphériques (cf. 1.7.1, (c)), et il résulte alors du lemme 1.5.6 que le préfaisceau $i^*(x)$ est localement asphérique, donc asphérique, puisque la catégorie A est asphérique (cf. 1.3.6). On en déduit, en vertu de la proposition 4.3.2, que la sous-catégorie pleine N de M formée des objets appartenant à M_{c} est un asphérateur, et en vertu de la proposition 4.3.9, que si M_{as} désigne la structure d'asphéricité sur M engendrée par N, le foncteur i est M_{as}-asphérique, ce qui implique en particulier que la structure d'asphéricité (M, M_{as}) est totalement asphérique, et achève la démonstration. $\square$

4.3.13. — Si (M, M_{c}) est une structure de contractibilité, on dira que la structure d'asphéricité (M, M_{as}) de la proposition précédente est la *structure d'asphéricité engendrée par la structure de contractibilité* (M, M_{c}). On remarque qu'on a $M_{\mathrm{c}} \subset M_{\mathrm{as}}$.

Exemple 4.3.14. — Soient M une catégorie (localement petite) admettant des produits finis, e_M un objet final de M, M_{c} la structure de contractibilité triviale sur M de l'exemple 4.2.14, et (M, M_{as}) la structure d'asphéricité engendrée par la structure de contractibilité (M, M_{c}). Si le localisateur fondamental faible $\mathcal{W}$ n'est pas grossier (cf. 1.1.30), alors M_{as} est la classe des objets x de M admettant exactement une section globale, autrement dit, tels que l'ensemble $\mathsf{Hom}_M(e_M, x)$ soit un singleton. En effet, l'ensemble $\{e_M\}$ engendre la structure de contractibilité (M, M_{c}), et puisque e_M est un objet final de M, la sous-catégorie pleine A de M ayant comme seul objet e_M est isomorphe à l'objet final e de $\mathcal{C}at$, et est en particulier une catégorie totalement asphérique. Il résulte donc de la proposition 4.3.12 que le foncteur d'inclusion $i : e \simeq A \longrightarrow M$ est M_{as}-asphérique. On en déduit que M_{as} est la classe des objets x de M tels que la catégorie $i_A i^*(x)$ soit asphérique. Or, cette dernière est isomorphe à la catégorie discrète d'ensemble d'objets $\mathsf{Hom}_M(e_M, x)$. L'assertion résulte donc du lemme 1.8.29. Le même raisonnement, montre que si $\mathcal{W}$ est le localisateur fondamental grossier non trivial $\mathcal{W}_{gr}$ (cf. 1.1.30), alors M_{as} est la classe des objets x de M, tels que x admet une section globale, autrement dit, tels que l'ensemble $\mathsf{Hom}_M(e_M, x)$ soit non vide. Enfin, si $\mathcal{W}$ est le localisateur fondamental trivial (cf. 1.1.28), alors M_{as} est la classe de tous les objets de M.

Lemme 4.3.15. — *Soient* (M, M_{c}) *une structure de contractibilité non triviale* (cf. 4.2.14)*, A une petite catégorie, et $i : A \longrightarrow M$ un foncteur tel que pour tout objet a de A, l'objet $i(a)$ de M soit dans M_{c}. Alors il existe un segment $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ de M, avec I dans M_{c} tel que le segment $i^*(\mathbb{I})$ de $\widehat{A}$ soit séparant.*

Démonstration. — Comme (M, M_{c}) n'est pas la structure d'asphéricité triviale sur M, en vertu de la proposition 4.2.15, il existe un segment $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1 : e_M \rightrightarrows I)$ de M, avec I dans M_{c} et tel que $\partial_0 \neq \partial_1$. On va montrer que le segment $i^*(\mathbb{I})$ de $\widehat{A}$ est séparant. Il s'agit de vérifier que pour tout objet a de A, les deux composés

$$a \longrightarrow i^*(e_M) \simeq e_{\widehat{A}} \underset{i^*(\partial_1)}{\overset{i^*(\partial_0)}{\rightrightarrows}} i^*(I)$$

ne sont par égaux, autrement dit, par définition de i^*, que les deux composés

$$i(a) \longrightarrow e_M \underset{\partial_1}{\overset{\partial_0}{\rightrightarrows}} I$$

sont différents. Comme $i(a)$ est dans M_c, il admet une section globale $s : e_M \longrightarrow i(a)$, de sorte que si ces deux composés étaient égaux, en précomposant avec le morphisme s, on obtiendrait que $\partial_0 = \partial_1$, ce qui est absurde. □

Théorème 4.3.16. — *Soient (M, M_{c}) une structure de contractibilité, M_0 un ensemble d'objets qui l'engendre, M_{as} la structure d'asphéricité sur M engendrée par la structure de contractibilité (M, M_{c}), A une petite catégorie, et $i : A \longrightarrow M$ un foncteur tel que pour tout objet a de A, l'objet $i(a)$ de M soit dans M_{c}. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *le foncteur i est localement M_{as}-asphérique ;*

(a′) *pour tout objet x de M appartenant à M_0, le préfaisceau $i^*(x)$ de $\widehat{A}$ est localement asphérique ;*

(b) *le foncteur $i^* : M \longrightarrow \widehat{A}$ est un morphisme de la structure de segments homotopiques sur M définie par la structure de contractibilité (M, M_{c}) vers la structure de segments homotopiques $h_{\mathcal{W}_{\widehat{A}}}$ sur $\widehat{A}$ définie par la classe de flèches $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$ de $\widehat{A}$* (cf. 4.2.4).

Si ces conditions équivalentes sont satisfaites, alors :

(i) *pour que le foncteur i soit M_{as}-asphérique, il faut et il suffit que la catégorie A soit asphérique ;*

et si de plus (M, M_{c}) n'est pas la structure de contractibilité triviale (cf. 4.2.14), *alors :*

(ii) *A est une catégorie test locale ;*

(iii) *pour que i soit un foncteur test local, il faut et il suffit que la structure d'asphéricité (M, M_{as}) soit modélisante ;*

(iv) *pour que A soit une catégorie test* (resp. *test stricte*)*, il faut et il suffit qu'elle soit asphérique* (resp. *totalement asphérique*) ;

(v) *pour que i soit un foncteur test, il faut et il suffit que la catégorie A soit asphérique et que la structure d'asphéricité (M, M_{as}) soit modélisante ;*

Démonstration. — L'implication $(a) \Rightarrow (a')$ résulte de la proposition 4.1.35 et des inclusions $M_0 \subset M_{\mathrm{c}} \subset M_{\mathrm{as}}$. Comme le foncteur i^* commute aux produits finis, l'implication $(a') \Rightarrow (b)$ est conséquence de la proposition 4.2.16, (a''). Montrons l'implication $(b) \Rightarrow (a)$. Soient B la sous-catégorie pleine de M formée des produits finis d'objets de M appartenant à M_0, et $j : B \longrightarrow M$ le foncteur d'inclusion. Comme la classe M_c est stable par produits finis (cf. 1.5.3), B est formée d'objets contractiles de M et l'ensemble de ses objets engendre la structure de contractibilité M_{c} sur M. La catégorie B étant totalement asphérique (cf. 1.7.4), il résulte donc de la proposition 4.3.12 que le foncteur j est M_{as}-asphérique. Soit x un objet de M de la forme $x = i(a)$, pour a objet de A, ou $x = j(b)$, pour b objet de B. Par hypothèse, x appartient alors à M_{c}, et la condition (b) implique donc, en vertu de la proposition 4.2.16, (c), que $i^*(x)$ est un objet $h_{\mathcal{W}_{\widehat{A}}}$-contractile de $\widehat{A}$, donc localement asphérique (cf. 4.2.4). La proposition 4.1.35, (c), implique alors que le foncteur i est localement M_{as}-asphérique, ce qui achève la preuve de l'équivalence des conditions (a), (a') et (b).

Supposons donc ces conditions satisfaites. Si la catégorie A est asphérique, comme le foncteur i est localement M_{as}-asphérique, il est aussi M_{as}-asphérique (cf. 4.1.36). Réciproquement, si le foncteur i est M_{as}-asphérique, comme la structure d'asphéricité (M, M_{as}) est totalement asphérique (cf. 4.3.12), et en particulier asphérique, il résulte de la proposition 4.1.23, (b), que la catégorie A est asphérique, ce qui prouve l'assertion (i). L'assertion (ii) résulte aussitôt du lemme 4.3.15 et du théorème 1.6.6, (c). Les autres assertions sont conséquences immédiates des assertions (i) et (ii) et de la remarque 1.6.4, (a). $\square$

Lemme 4.3.17. — *Soient C une petite catégorie admettant des produits finis, A, B deux petites catégories, et $i : A \longrightarrow C$ et $j : B \longrightarrow C$ deux foncteurs. On suppose qu'il existe un ensemble $\mathcal{I}_0$ de segments de C tel que pour tout objet b de B, l'objet $j(b)$ de C soit $\mathcal{I}_0$-contractile. On note $i \boxtimes j$ le foncteur*

$$i \boxtimes j : A \times B \longrightarrow C\,, \qquad (a, b) \longmapsto i(a) \times j(b)\,.$$

Si i est un morphisme asphérique de $\mathcal{C}at$ et B une catégorie asphérique, alors le morphisme $i \boxtimes j$ est asphérique.

Démonstration. — Notons e un objet final de C. Par hypothèse, pour tout objet b de B, l'unique morphisme $p : j(b) \longrightarrow e$ de C admet une section $s : e \longrightarrow j(b)$ telle que sp soit $\mathcal{I}_0$-homotope à $1_{j(b)}$. Pour tout objet c de C, les morphismes s et p induisent des morphisme de préfaisceaux sur C

$$s_c : \underline{\mathsf{Hom}}(j(b), c) \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}(e, c) \simeq c\,, \qquad p_c : c \simeq \underline{\mathsf{Hom}}(e, c) \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}(j(b), c)$$

tels que $s_c p_c = 1_c$ et $p_c s_c$ soit $\mathcal{I}_0$-homotope à $1_{\underline{\mathsf{Hom}}(j(b),c)}$. Comme la catégorie C est totalement asphérique (cf. 1.7.4), pour tout segment $(I, \partial_0, \partial_1)$ appartenant à $\mathcal{I}_0$, le préfaisceau représentable I de $\widehat{C}$ est localement asphérique (cf. 1.7.1), et il résulte du lemme d'homotopie 1.5.6, (b), que $p_c s_c$ est une équivalence faible de $\widehat{C}$. Par saturation faible, s_c et p_c sont donc des équivalences faibles, et en particulier, le préfaisceau $\underline{\mathsf{Hom}}(j(b), c)$ est asphérique. Le lemme résulte alors du corollaire 4.1.45. $\square$

Proposition 4.3.18. — *Soient (M, M_{c}) une structure de contractibilité, M_{as} la structure d'asphéricité sur M engendrée par la structure de contractibilité (M, M_{c}), A, B deux petites catégories, $i : A \longrightarrow M$ un foncteur tel que pour tout objet a de A, l'objet $i(a)$ de M soit M_{as}-asphérique, et $j : B \longrightarrow M$ un foncteur tel que pour tout objet b de B, l'objet $j(b)$ de M soit dans M_{c}, On note $i \boxtimes j$ le foncteur*

$$i \boxtimes j : A \times B \longrightarrow M\,, \qquad (a, b) \longmapsto i(a) \times j(b)\,.$$

(a) *Si i est un foncteur M_{as}-asphérique et B une catégorie asphérique, alors le foncteur $i \boxtimes j$ est M_{as}-asphérique.*
(b) *Si i est un foncteur localement M_{as}-asphérique, il en est de même de $i \boxtimes j$.*
(c) *Si i est un M_{as}-foncteur test faible et B une catégorie asphérique, alors $i \boxtimes j$ est un M_{as}-foncteur test faible.*
(d) *Si i est un M_{as}-foncteur test local, il en est de même de $i \boxtimes j$.*
(e) *Si i est un M_{as}-foncteur test et B une catégorie asphérique, alors $i \boxtimes j$ est un M_{as}-foncteur test.*

Démonstration. — Soit M_0 un ensemble d'objets de M appartenant à M_{c} qui engendre la structure de contractibilité (M, M_{c}), et $\mathcal{I}_0$ l'ensemble des segments $(I, \partial_0, \partial_1)$ de M tels que I appartienne à M_0. Pour montrer (a), supposons que le foncteur i soit M_{as}-asphérique et que la catégorie B soit asphérique. Soit C une petite sous-catégorie pleine de M, formée d'objets M_{as}-asphériques, stable par produits finis, telle que les foncteurs i et j se factorisent par C et dont l'ensemble des objet contient l'ensemble M_0. On note $i' : A \longrightarrow C$ et $j' : B \longrightarrow C$ les foncteurs induits par i et j respectivement, et $k : C \longrightarrow M$ le foncteur d'inclusion. En vertu du lemme 4.1.4, (b), comme le foncteur i est M_{as}-asphérique, il en est de même du foncteur k, et i' est un morphisme asphérique de $\mathcal{C}at$. Par hypothèse, pour tout objet b de B l'objet $j(b)$ de M est $\mathcal{I}_0$-contractile, et par suite, $j'(b)$ est un objet $\mathcal{I}_0$-contractile de C. Le lemme précédent implique alors que le morphisme $i' \boxtimes j' : A \times B \longrightarrow C$ de $\mathcal{C}at$ est asphérique, et il résulte alors du lemme 4.1.4, (a), que le foncteur $i \boxtimes j = k(i' \boxtimes j')$ est asphérique, ce qui prouve l'assertion (a).

L'assertion (b) résulte de l'assertion (a) exactement comme dans la proposition 4.1.44. Les autres assertions résultent des assertions (a) et (b), de la proposition 1.4.11, et du corollaire 1.6.11, comme dans la proposition 4.1.44. □

4.4. Variation du localisateur fondamental faible

Dans ce paragraphe, on se fixe, une fois pour toutes, deux localisateurs fondamentaux faibles $\mathcal{W}$ et $\mathcal{W}'$ tels que $\mathcal{W} \subset \mathcal{W}'$.

Lemme 4.4.1. — *Tout $\mathcal{W}$-asphérateur est aussi un $\mathcal{W}'$-asphérateur.*

Démonstration. — Soit N un $\mathcal{W}$-asphérateur. En vertu de la proposition 4.3.2, (b), il existe une petite catégorie A et un foncteur $i : A \longrightarrow N$ tel que pour tout objet x de N, le préfaisceau $i^*(x)$ de $\widehat{A}$ soit $\mathcal{W}$-asphérique, et *a fortiori* $\mathcal{W}'$-asphérique. Une nouvelle application de cette proposition implique alors que N est un $\mathcal{W}'$-asphérateur. □

Proposition 4.4.2. — *Soit (M, M_{as}) une structure de $\mathcal{W}$-asphéricité. Il existe une unique structure de $\mathcal{W}'$-asphéricité M'_{as} sur M telle que pour toute petite catégorie A, tout foncteur M_{as}-$\mathcal{W}$-asphérique $i : A \longrightarrow M$ soit aussi M'_{as}-$\mathcal{W}'$-asphérique. De plus, on a alors une inclusion $M_{\mathrm{as}} \subset M'_{\mathrm{as}}$.*

Démonstration. — L'unicité est évidente par définition d'une structure d'asphéricité. Soit N la sous-catégorie pleine de M formée des objets de M appartenant à M_{as}. La catégorie N est un $\mathcal{W}$-asphérateur (cf. 4.3.4), donc en vertu du lemme précédent elle est aussi un $\mathcal{W}'$-asphérateur, et il résulte de la proposition 4.3.9 qu'elle engendre une structure de $\mathcal{W}'$-asphéricité M'_{as} sur M. Si $i : A \longrightarrow M$ est un foncteur M_{as}-$\mathcal{W}$-asphérique, il se factorise par la sous-catégorie pleine N de M, et pour tout objet x de N, le préfaisceau $i^*(x)$ de $\widehat{A}$ est $\mathcal{W}$-asphérique, et à plus forte raison $\mathcal{W}'$-asphérique. Il résulte donc du lemme 4.3.8, que le foncteur i est M'_{as}-$\mathcal{W}'$-asphérique. □

4.4.3. — Si (M, M_{as}) est une structure de $\mathcal{W}$-asphéricité, on dira que la structure de $\mathcal{W}'$-asphéricité M'_{as} de la proposition précédente est la structure de $\mathcal{W}'$-asphéricité sur M *engendrée* par la structure de $\mathcal{W}$-asphéricité (M, M_{as}).

Proposition 4.4.4. — *Soit* (M, M_{as}) *une structure de* $\mathcal{W}$*-asphéricité et* M'_{as} *la structure de* $\mathcal{W}'$*-asphéricité sur* M *engendré par* (M, M_{as})*. Si* (M, M_{as}) *est* $\mathcal{W}$*-asphérique* (resp. *totalement* $\mathcal{W}$*-asphérique,* resp. $\mathcal{W}$*-modélisante*), *alors* (M, M'_{as}) *est* $\mathcal{W}'$*-asphérique* (resp. *totalement* $\mathcal{W}'$*-asphérique,* resp. $\mathcal{W}'$*-modélisante*).

Démonstration. — Les assertions relatives à l'asphéricité et la total asphéricité résultent aussitôt de 3.3.1, 3.3.3 et de la proposition précédente, qui implique également facilement la dernière assertion. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Adámek & J. Rosický – *Locally Presentable and Accessible Categories*, London Mathematical Society Lecture Note Series, Vol. 189, Cambridge University Press, 1994.

[2] M. Artin, A. Grothendieck & J.-L. Verdier – *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas* (SGA4), Lecture Notes in Mathematics, Vol. 269, 270, 305, Springer-Verlag, 1972-1973.

[3] M. Artin & B. Mazur – *Étale Homotopy*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 100, Springer-Verlag, 1969.

[4] T. Beke – « Sheafifiable homotopy model categories », *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **129** (2000), p. 447–475.

[5] C. Berger – « A cellular nerve for higher categories », *Adv. Math.* **169** (2002), p. 118–175.

[6] ______, « Iterated wreath product of the simplex category and iterated loop spaces », Prépublication, à paraître dans Adv. Math., 2006.

[7] C. Casacuberta & B. Chorny – « The orthogonal subcategory problem in homotopy theory », *Contemp. Math.* **399** (2006), p. 41–53.

[8] C. Casacuberta, D. Scevenels & J. H. Smith – « Implications of large-cardinal principles in homotopical localization », *Adv. Math.* **197** (2005), p. 120–139.

[9] D.-C. Cisinski – « Images directes cohomologiques dans les catégories de modèles », *Annales Mathématiques Blaise Pascal* **10** (2003), p. 195–244.

[10] D.-C. Cisinski – *Les préfaisceaux comme modèles des types d'homotopie*, Astérisque, Vol. 308, 2006.

[11] D.-C. Cisinski – « Décalages et produits en couronnes », Courrier électronique du 3 avril 2007.

[12] D.-C. Cisinski & G. Maltsiniotis – « La catégorie $\mathbf{\Theta}$ de Joyal est une catégorie test », *J. Pure Appl. Algebra* **215** (2011), p. 962–982.

[13] P. Gabriel & M. Zisman – *Calculus of fractions and homotopy theory*, Ergebnisse der Mathematik, Band 35, Springer-Verlag, 1967.

[14] A. Grothendieck – « *Pursuing stacks* », Manuscrit, 1983, à paraître dans *Documents Mathématiques*.

[15] ———, « *Les dérivateurs* », Manuscrit, 1990, www.math.jussieu.fr/~maltsin/groth/Derivateurs.html.

[16] A. Heller – « Homotopy theories », *Memoirs of the Amer. Math. Soc.* **71** (1988), no. 383.

[17] L. Illusie – *Complexe cotangent et déformations I, II*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 239 et 283, Springer-Verlag, 1971-1972.

[18] A. Joyal – « Disks, duality and Θ-categories », Prépublication, 1997.

[19] D. M. Latch – « The uniqueness of homology for the category of small categories », *J. Pure Appl. Alg.* **9** (1977), p. 221–237.

[20] G. Maltsiniotis – « *Introduction à la théorie des dérivateurs* (d'après Grothendieck) », Prépublication, 2001, www.math.jussieu.fr/~maltsin/.

[21] ———, *La théorie de l'homotopie de Grothendieck*, Astérisque, Vol. 301, 2005.

[22] ———, « Structures d'asphéricité, foncteurs lisses, et fibrations », *Annales Mathématiques Blaise Pascal* **12** (2005), p. 1–39.

[23] I. Moerdijk – *Classifying spaces and classifying topoi*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1616, Springer-Verlag, 1995.

[24] D. Quillen – *Homotopical algebra*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 43, Springer-Verlag, 1967.

[25] ———, « Higher algebraic k-theory : I », *Algebraic K-theory I*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 341, p. 85-147, Springer-Verlag, 1973.

[26] J. Rosický & W. Tholen – « Left-determined model categories and universal homotopy theories », *Trans. Amer. Math. Soc.* **355** (2003), p. 3611–3623.

[27] R. W. Thomason – « Homotopy colimits in the category of small categories », *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **85** (1979), p. 91–109.

[28] ———, « *Cat* as a closed model category », *Cahiers de topologie et géométrie différentielle* **XXI-3** (1980), p. 305–324.

INDEX DES NOTATIONS

$\mathcal{C}at$ 1.1.2
e 1.1.2
$\mathcal{W}$ 1.1.2
A/b 1.1.2
u/b 1.1.2
A_b 1.1.14
A° 1.1.14
u° 1.1.14
$S(A)$ 1.1.17
s_A, t_A 1.1.17
I 1.1.17
$S(u)$ 1.1.20
$b\backslash A$ 1.1.24
$b\backslash u$ 1.1.24
$\mathit{\Delta}_1$ 1.1.25
$\mathcal{W}_{gr}$ 1.1.30
π_0 .... 1.1.31
$\mathcal{W}_0$ 1.1.31
$\mathcal{W}_\infty$ 1.1.33
$\mathcal{W}_n$ 1.1.34
$\widehat{A}$ 1.3.1
i_A, i_A^* 1.3.1
ε, η 1.3.1
$\mathcal{W}_{\widehat{A}}$ 1.3.3
$e_{\widehat{A}}$ 1.3.6
u^* 1.3.10

$\lambda_u, \lambda, \lambda_F$ 1.3.10
$\boxtimes$ 1.3.16
$W^{-1}M$ 1.4.1
$\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}$, Hot 1.4.2
$\gamma_{\mathcal{W}}$, γ 1.4.2
$\mathsf{Hot}_{\mathcal{W},A}$, Hot_A, γ_A 1.4.4
$\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ 1.5.1
$M_{\mathcal{I}}$, $Q_{\mathcal{I}}$ 1.5.3
$\widetilde{\mathcal{I}}$ 1.5.4
$F(\mathbb{I})$ 1.5.5
$\boldsymbol{\Delta}_1 = (\mathit{\Delta}_1, e_0, e_1)$ 1.5.15
L_A 1.6.5
$\mathbb{L}_A$ 1.6.6
Δ 1.6.12
$\mathit{\Delta}_n$ 1.6.12
$\mathcal{I}_A$ 1.7.17
i^* 1.8.1
$i_!$ 1.8.23
Δ' 1.8.30
$\widetilde{\Delta}$ 1.8.32
$\Delta_{\leqslant n}$ 1.8.34
$C^\star$ 1.9.16
Γ 1.9.18
$\mathit{\Gamma}_m$ 1.9.18
$F \int A$, $B \int A$ 1.9.20
$[b; (a_1, \ldots, a_m)]$, $[g; \mathbf{f}]$ 1.9.20
$H \int G$ 1.9.21
I_a 1.9.21
$\mathsf{C}(B, b)$, $\mathsf{C}(B, b, F)$, $\mathsf{C}(H)$ 1.9.22
Θ, Θ', Θ_n, Θ'_n 1.9.23
λ_C, m_C 1.9.36
$\underline{\mathsf{Hom}}_W(M, N)$, $\mathsf{Hom}_W(M, N)$ 2.1.5
$S(u)$, s_u, t_u, $S(v, w)$ 2.1.13
$\int F$, θ_F 2.2.1
$\int_I F$, $\int_{i \in \mathsf{Ob}(I)} F(i)$ 2.2.1
H_A, H_u 2.2.2
l_i, β_k 2.2.3
K_F 2.2.3

$\int \alpha$ 2.2.5
$\int_I$ 2.2.5
∇_I, ∇F, ζ_F, $\nabla\alpha$ 2.2.6
$(i_A F)_s$ 2.3.7
$\mathcal{C}at/I$, $\mathcal{C}at/w$ 3.1.1
Θ_I, Θ'_I 3.1.1
$\mathcal{W}_I$, $\mathcal{W}'_I$ 3.1.3
$\mathsf{Hot}(I)$, $\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(I)$ 3.1.6
w^*, $w_!$ 3.1.6
γ_J 3.1.9
p_J 3.1.9
$\mathcal{E}ns$ 3.1.12
$\widetilde{w}$ 3.2.20
u^*, $u_!$ 3.2.27
$\kappa_{\mathcal{D}}$ 3.2.28
$\int_B A/b$ 3.2.30
F_u, i_u, r_u, α_u 3.2.30
$c_{\mathcal{D}}$ 3.2.35
$\mathbb{E}$, $\mathbb{E}_{p,q}$, $\preceq$ 3.2.36
$\mathsf{Ch}_{p,q}(C)$, $\underline{\mathsf{Ch}}_{p,q}(C)$, $s_C^{p,q}$, $t_C^{p,q}$, $i_C^{p,q}$ 3.2.37
$\mathsf{Ch}_\infty(C)$, $\underline{\mathsf{Ch}}_\infty(C)$, s_C^∞, t_C^∞, i_C^∞ 3.2.40

INDEX TERMINOLOGIQUE

asphérique (catégorie) 1.1.2
asphérique (foncteur d'une petite catégorie vers $\mathcal{C}at$) 1.8.1
asphérique (morphisme de $\mathcal{C}at$) 1.1.2
asphérique (morphisme de préfaisceaux) 1.3.3
asphérique (préfaisceau) 1.3.5
cartésien (morphisme) 1.1.14
catégorie cellulaire 1.9.23
catégorie contractile 1.5.15
catégorie de Segal 1.9.18
catégorie des ensembles simpliciaux 1.6.12
catégorie des fractions relativement à une classe de flèches 1.4.1
catégorie des simplexes 1.6.12
catégorie directe finie 1.9.36
catégorie filtrante 2.4.1
catégorie homotopique relative à un localisateur fondamental faible 1.4.2
catégorie pseudo-filtrante 2.4.1
catégorie pseudo-test 1.4.4
catégorie test 1.6.2
catégorie test faible 1.4.7
catégorie test locale 1.6.2
catégorie test stricte 1.7.7
catégorie totalement $\mathcal{W}$-asphérique 1.7.2
catégorie $\mathcal{W}$-asphérique 1.1.2
centre d'un décalage 1.9.1
centre d'un décalage généralisé 1.9.5
classe de flèches faiblement saturée 1.1.1
classe de flèches fortement saturée 1.4.1
classe de flèches stable par composition transfinie 2.3.17
classe de flèches stable par rétractes 2.4.13
classe d'objets stable par rétractes 2.4.13
coasphérique 1.1.24
cocartésien (morphisme) 1.1.14
cocrible 1.1.25

cofibration (au sens des catégories cofibrées) . . . 1.1.14
cofinal (foncteur) . . . 2.4.2
colocalement coasphérique . . . 1.1.24
colocalement $\mathcal{W}$-coasphérique . . . 1.1.24
contracteur . . . 1.7.17
contractile (catégorie) . . . 1.5.15
crible . . . 1.1.25
Γ-décalage . . . 1.9.24
Γ-décalage strict . . . 1.9.24
décalage . . . 1.9.1
décalage cartésien . . . 1.9.3
décalage centré sur un objet . . . 1.9.1
décalage généralisé . . . 1.9.5
décalage généralisé cartésien . . . 1.9.5
décalage généralisé centré sur un objet . . . 1.9.5
décalage généralisé scindable . . . 1.9.5
décalage généralisé scindé . . . 1.9.5
décalage généralisé séparant . . . 1.9.5
décalage centré sur un objet . . . 1.9.1
décalage scindable . . . 1.9.1
décalage scindé . . . 1.9.1
décalage séparant . . . 1.9.3
décalage sur une catégorie . . . 1.9.1
décalage sur une catégorie adapté à un foncteur vers Γ . . . 1.9.24
décalage sur une catégorie strictement adapté à un foncteur vers Γ . . . 1.9.24
décalage sur un foncteur . . . 1.9.5
ensemble ordonné filtrant . . . 2.4.1
ensemble simplicial . . . 1.6.12
ensemble simplicial fini . . . 1.9.36
équivalence faible (dans $\mathcal{C}at$) colocalement sur une petite catégorie . . . 2.1.1
équivalence faible (dans $\mathcal{C}at$) localement sur une petite catégorie . . . 2.1.1
équivalence faible (dans $\mathcal{C}at$, relativement à un localisateur fondamental faible) . . . 1.1.2
équivalence faible (de préfaisceaux) localement sur une petite catégorie . . . 2.1.1
équivalence faible (de préfaisceaux, relativement à un localisateur fondamental faible) 1.3.3
équivalence faible argument par argument . . . 2.3.1
équivalence faible locale (de préfaisceaux) . . . 1.3.6
fibration (au sens des catégories fibrées) . . . 1.1.14
fibre (d'un foncteur) . . . 1.1.14
filtrante (catégorie) . . . 2.4.1
filtrant (ensemble ordonné) . . . 2.4.1
foncteur cartésien . . . 2.1.13
foncteur cocartésien . . . 2.1.13
foncteur cofinal . . . 2.4.2
foncteur colocalement $\mathcal{W}$-coasphérique . . . 1.1.24
foncteur de coïntégration . . . 2.2.6
foncteur de localisation . . . 1.4.1
foncteur de localisation canonique . . . 1.4.2
foncteur d'intégration . . . 2.2.5
foncteur localement $\mathcal{W}$-asphérique . . . 1.2.13

foncteur nerf 1.8.25
foncteur pseudo-test 1.8.14
foncteur test 1.8.14
foncteur test faible 1.8.14
foncteur test local 1.8.14
foncteur $\mathcal{W}$-asphérique 1.1.2
foncteur $\mathcal{W}$-coasphérique 1.1.24
foncteur $\mathcal{W}$-lisse 3.2.1
foncteur $\mathcal{W}$-propre 3.2.1
foncteurs homotopes 1.5.15
homotopisme (dans $\mathcal{C}at$) 1.5.15
$\mathbb{I}$-contractile ($\mathbb{I}$ segment) 1.5.3
$\mathcal{I}$-contractile ($\mathcal{I}$ classe de segments) 1.5.3
$\mathbb{I}$-équivalence d'homotopie ($\mathbb{I}$ segment) 1.5.3
$\mathcal{I}$-équivalence d'homotopie ($\mathcal{I}$ classe de segments) 1.5.3
$\mathbb{I}$-homotope de façon élémentaire ($\mathbb{I}$ segment) 1.5.2
$\mathbb{I}$-homotope ($\mathbb{I}$ segment) 1.5.2
$\mathcal{I}$-homotope ($\mathcal{I}$ classe de segments) 1.5.2
$\mathbb{I}$-homotopie ($\mathbb{I}$ segment) 1.5.2
$\mathcal{I}$-homotopie ($\mathcal{I}$ classe de segments) 1.5.2
$\mathbb{I}$-homotopisme ($\mathbb{I}$ segment) 1.5.3
$\mathcal{I}$-homotopisme ($\mathcal{I}$ classe de segments) 1.5.3
immersion fermée 3.2.2
immersion ouverte 3.2.2
lisse (morphisme de $\mathcal{C}at$) 3.2.1
localement asphérique (morphisme de $\mathcal{C}at$) 1.2.13
localement asphérique (préfaisceau) 1.3.6
localement $\mathcal{W}$-asphérique (morphisme de $\mathcal{C}at$) 1.2.13
localement $\mathcal{W}$-asphérique (préfaisceau) 1.3.6
localisateur fondamental 2.1.1
localisateur fondamental faible 1.1.2
localisateur fondamental faible fortement saturé 1.4.1
localisateur fondamental faible géométrique 1.1.32
localisateur fondamental grossier 1.1.30
localisateur fondamental trivial 1.1.28
localisation d'une catégorie par une classe de flèches 1.4.1
modélisateur 1.4.3
modélisateur fondamental 1.4.3
morphisme de changement de base associé à un carré cartésien . . . . . 3.2.28 et 3.2.35
morphisme de décalages 1.9.2
morphisme de décalages scindés 1.9.2
morphisme de décalages généralisés 1.9.5
morphisme de décalages généralisés scindés 1.9.5
morphisme de modélisateurs 1.4.3
morphisme de préfaisceaux $\mathcal{W}$-asphérique 1.3.3
morphisme de segments 1.5.1
morphisme fermé 3.2.5
morphisme quarrable 1.1.1
n-équivalence 1.1.34

nerf ... 1.8.25
objet de Lawvere ... 1.5.12
objet de présentation finie ... 2.4.10
objet nul ... 1.9.18
objet rigide ... 1.9.21
précofibration ... 1.1.14
précontracteur ... 1.7.17
préfaisceau localement $\mathcal{W}$-asphérique ... 1.3.6
préfaisceau $\mathcal{W}$-asphérique ... 1.3.5
préfibration ... 1.1.14
produit en couronnes ... 1.9.20
produit en couronnes infini ... 1.9.22
propre (morphisme de $\mathcal{C}at$) ... 3.2.1
pseudo-filtrante (catégorie) ... 2.4.1
pseudo-test (catégorie) ... 1.4.4
pseudo-test (foncteur) ... 1.8.14
quarrable ... 1.1.1
rétracte ... 2.4.13
scindage d'un décalage ... 1.9.1
scindage d'un décalage généralisé ... 1.9.5
segment ... 1.5.1
segment de Lawvere ... 1.5.12
segment multiplicatif ... 1.5.9
segment séparant ... 1.5.1
totalement asphérique (catégorie) ... 1.7.2
totalement $\mathcal{W}$-asphérique (catégorie) ... 1.7.2
universellement dans une classe de flèches ... 1.1.1
$\mathcal{W}$-asphérique (catégorie) ... 1.1.2
$\mathcal{W}$-asphérique (foncteur d'une petite catégorie vers $\mathcal{C}at$) ... 1.8.1
$\mathcal{W}$-asphérique (morphisme de $\mathcal{C}at$) ... 1.1.2
$\mathcal{W}$-asphérique (morphisme de préfaisceaux) ... 1.3.3
$\mathcal{W}$-asphérique (préfaisceau) ... 1.3.5
$\mathcal{W}$-catégorie pseudo-test ... 1.4.4
$\mathcal{W}$-catégorie test ... 1.6.2
$\mathcal{W}$-catégorie test faible ... 1.4.7
$\mathcal{W}$-catégorie test locale ... 1.6.2
$\mathcal{W}$-catégorie test stricte ... 1.7.7
$\mathcal{W}$-coasphérique ... 1.1.24
$\mathcal{W}$-contracteur ... 1.7.17
$\mathcal{W}$-équivalence (dans $\mathcal{C}at$) ... 1.1.2
$\mathcal{W}$-équivalence (dans $\mathcal{C}at$) colocalement sur une petite catégorie ... 2.1.1
$\mathcal{W}$-équivalence (dans $\mathcal{C}at$) localement sur une petite catégorie ... 2.1.1
$\mathcal{W}$-équivalence de préfaisceaux ... 1.3.3
$\mathcal{W}$-équivalence de préfaisceaux localement sur une petite catégorie ... 2.1.1
$\mathcal{W}$-équivalence locale de préfaisceaux ... 1.3.6
$\mathcal{W}$-foncteur pseudo-test ... 1.8.14
$\mathcal{W}$-foncteur test ... 1.8.14
$\mathcal{W}$-foncteur test faible ... 1.8.14
$\mathcal{W}$-foncteur test local ... 1.8.14

$\mathcal{W}$-lisse (morphisme de $\mathcal{C}at$) 3.2.1
$\mathcal{W}$-modélisateur 1.4.3
$\mathcal{W}$-propre (morphisme de $\mathcal{C}at$) 3.2.1