ANALYSE DES MATRICES ALÉATOIRES, UNE INTRODUCTION

Jacques Faraut

Université Virtuelle de Tunis
2007

INTRODUCTION

Notons $H_n = Herm(n, \mathbb{F})$ l'espace des matrices hermitiennes $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$. Sur H_n on considère la loi de probabilité définie par

$$\mathbb{P}(dx) = \frac{1}{C_n} \exp\bigl(-\gamma \mathrm{tr}(x^2)\bigr) m_n(dx),$$

où γ est un paramètre positif, m_n est la mesure euclidienne sur H_n associée au produit scalaire défini par

$$(x|y) = \mathrm{tr}(xy),$$

et

$$C_n = \int_{H_n} \exp\bigl(-\gamma \mathrm{tr}(x^2)\bigr) m_n(dx) = \Bigl(\sqrt{\frac{\pi}{\gamma}}\Bigr)^N,$$

où

$$N = \dim_{\mathbb{R}} H_n = n + \frac{\beta}{2} n(n-1),\ \beta = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{F} = 1, 2, 4.$$

Cette probabilité est invariante par le groupe $U_n = U(n, \mathbb{F})$ qui agit sur l'espace H_n par les transformations

$$x \mapsto uxu^* \quad (u \in U_n).$$

Si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, U_n est le groupe orthogonal $O(n)$, si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, c'est le groupe unitaire $U(n)$, et si $\mathbb{F} = \mathbb{H}$, ce groupe est isomorphe au groupe symplectique $Sp(n)$, qui est un sous-groupe compact maximal du groupe symplectique complexe $Sp(n, \mathbb{C})$.

L'espace probabilisé $(H_n, \mathbb{P}_n)$ est appelé *ensemble orthogonal gaussien* si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, *ensemble unitaire gaussien* si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, et *ensemble symplectique gaussien* si $\mathbb{F} = \mathbb{H}$.

Le principal sujet de la théorie des matrices aléatoires est l'étude asymptotique de probabilités relatives aux valeurs propres des matrices aléatoires lorsque la dimension n tend vers l'infini.

a) *Comportement global : la distribution asymptotique des valeurs propres.*

Si $B \subset \mathbb{R}$ est un ensemble borélien, on note $\xi_B^{(n)}(x)$ le nombre de valeurs propres de la matrice x appartenant à l'ensemble B divisé par n,

$$\xi_B^{(n)}(x) = \frac{1}{n} \sharp\{\text{valeurs propres de } x \text{ dans } B\}.$$

C'est une variable aléatoire. Soit $\mu_n(B)$ son espérance,

$$\mu_n(B) = \mathbb{E}_n(\xi_B^{(n)}).$$

On vérifie que cette formule définit une mesure μ_n sur $\mathbb{R}$. Elle est appelée la distribution statistique des valeurs propres. Si χ_B est la fonction caractéristique de l'ensemble B,

$$\xi_B^{(n)}(x) = \frac{1}{n}\big(\chi_B(\lambda_1) + \cdots + \chi_B(\lambda_n)\big),$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de x. En utilisant le calcul symbolique cela peut s'ecrire

$$\xi_B^{(n)}(x) = \frac{1}{n}\mathrm{tr}\big(\chi_B(x)\big).$$

Par suite

$$\mu_n(B) = \int_{H_n} \frac{1}{n}\mathrm{tr}\big(\chi_B(x)\big)\mathbb{P}(dx).$$

Plus généralement, si φ est une fonction mesurable bornée sur H_n,

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\mu_n(dt) = \int_{H_n} \frac{1}{n}\mathrm{tr}\big(\varphi(x)\big)\mathbb{P}(dx).$$

La question est maintenant : que peut-on dire au sujet du comportement asymptotique de la distribution statistique des valeurs propres μ_n, quand n tend vers l'infini ?

La loi du demi-cercle σ_r de rayon r est la mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ définie par

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\sigma_n(dt) = \frac{2}{\pi r^2}\int_{-r}^{r} \varphi(t)\sqrt{r^2 - t^2}dt.$$

Le théorème de Wigner dit que, après changement d'échelle, la mesure μ_n converge vers la loi du demi-cercle σ_r de rayon

$$r = \sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}.$$

0.0.1 Théorème (Wigner). *Si φ est une fonction continue bornée sur $\mathbb{R}$, alors*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi\Big(\frac{t}{\sqrt{n}}\Big)\mu_n(dt) = \frac{2}{\pi r^2}\int_{-r}^{r} \varphi(u)\sqrt{r^2 - u^2}du.$$

Cela signifie que, pour une grande valeur de n, la densité des valeurs propres est approximativement

$$\frac{2}{\pi r^2}\sqrt{nr^2 - \lambda^2},$$

si $|\lambda| \leq r\sqrt{n}$, et 0 si $|\lambda| \geq r\sqrt{n}$.

Dans la démonstration originale de Wigner on considère les moments de la mesure μ_n :

$$m_k(\mu_n) = \int_{\mathbb{R}} t^k \mu_n(dt) = \int_{H_n} \frac{1}{n} \mathrm{tr}(x^k) \mathbb{P}_n(dx).$$

Par une méthode combinatoire on détermine le comportement asymptotique de $m_k(\mu_n)$ quand n tend vers l'infini pour k fixé :

$$m_{2k}(\mu_n) \sim \left(\frac{\beta}{4\gamma}\right)^k \frac{(2k)!}{k!(k+1)!} n^k.$$

(Les moments d'ordre impair sont nuls.) D'autre part les moments de la loi du demi-cercle σ_r sont donnés par

$$m_{2k}(\sigma_r) = \left(\frac{r^2}{4}\right)^k \frac{(2k)!}{k!(k+1)!}.$$

La démonstration de Pastur utilise la transformation de Cauchy. Rappelons que la transformée de Cauchy d'une mesure μ sur $\mathbb{R}$ est la fonction G_μ définie sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ par

$$G_\mu(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z-t} \mu(dt).$$

Si $\mu = \mu_n$, la distribution statistique des valeurs propres,

$$G_{\mu_n}(z) = \int_{H_n} \frac{1}{n} \mathrm{tr}\big((zI - x)^{-1}\big) \mathbb{P}_n(dx).$$

Le changement d'échelle conduit à considérer la suite des fonctions

$$G_n(z) = \sqrt{n} G_{\mu_n}(\sqrt{n} z).$$

La démonstration consiste à montrer que la suite des fonctions G_n converge,

$$\lim_{n\to\infty} G_n(z) = G(z),$$

et que G est une fonction holomorphe qui vérifie l'équation

$$G(z)^2 - \frac{4}{r^2} z G(z) + \frac{4}{r^2} = 0.$$

Puisque $\mathrm{Im}\, G_{\mu_n}(z) < 0$, et donc $\mathrm{Im}\, G(z) < 0$ si $\mathrm{Im}\, z > 0$, nécessairement

$$G(z) = \frac{2}{r^2}\big(z - \sqrt{z^2 - r^2}\big),$$

qui est précisément la transformée de Cauchy de la loi du demi-cercle σ_r.

La démonstration que nous présenterons dans ce cours utilise la transformation de Fourier :

$$\widehat{\mu_n}(\tau) = \int_{\mathbb{R}} e^{it\tau}\mu_n(dt) = \int_{H_n} \frac{1}{n}\mathrm{tr}\big(\exp(i\tau x)\big)\mathbb{P}_n(dx).$$

Nous verrons qu'elle s'exprime à l'aide des polynômes de Laguerre. La convergence vers la loi du demi-cercle s'en déduira en utilisant le théorème classique de Lévy-Cramér.

b) *Comportement local : les probabilités* $A_n(m, B)$.

Pour $\theta > 0$, et $0 \le m \le n$, on notera $A_n(m, B)$ la probabilité pour que la matrice $x \in H_n$ ait m valeurs propres dans l'intervalle $[-\theta, \theta]$. Si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, la théorie des polynômes orthogonaux et celle des déterminants de Fredholm nous permettra d'évaluer ces probabilités et d'étudier leur comportement quand n tend vers l'infini. On montre que, pour $m = 0$,

$$\lim_{n\to\infty} A_n\Big(0, \frac{\theta}{\sqrt{2n}}\Big) = \det_{[-\theta,\theta]}(I - \mathcal{K}),$$

où $\det_{[-\theta,\theta]}(I - \mathcal{K})$ est le déterminant de Fredholm du noyau

$$\mathcal{K}(\xi, \eta) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin(\xi - \eta)}{\xi - \eta}$$

restreint à l'intervalle $[-\theta, \theta]$.

c) Comportement asymptotique de la plus plus grande valeur propre.

Notons $\lambda_{\max}$ la plus grande valeur propre de la matrice aléatoire $x \in H_n$. C'est une variable aléatoire. Le théorème de Wigner suggère que

$$\lambda_{\max} \simeq r\sqrt{n}, \quad r = \sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}.$$

C'est bien le cas dans le sens suivant : pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_n\Big(\Big\{\Big|\frac{\lambda_{\max}}{r\sqrt{n}} - 1\Big| \ge \varepsilon\Big\}\Big) = 0.$$

De plus on montre que la loi de la variable aléatoire

$$2n^{\frac{2}{3}}\Big(\frac{\lambda_{\max}}{r\sqrt{n}} - 1\Big)$$

converge étroitement. La loi limite est appelée *loi de Tracy-Widom*. Si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ sa fonction de répartition s'exprime à l'aide d'un déterminant de Fredholm.

Dans ce cours nous présentons plusieurs démonstrations du théorème de Wigner, c'est-à-dire de la convergence de la distribution statistique des valeurs propres vers la loi du demi-cercle. Les outils d'analyse utilisés pour chacune de ces démonstrations sont exposés au fur et à mesure : polynômes orthogonaux, analyse de Fourier des mesures de probabilité sur la droite réelle, transformation de Cauchy des mesures de probabilité, potentiel logarithmique.

BIBLIOGRAPHIE

Livres

M.L. Mehta, Random matrices, Academic Press, 1991.

P. Deift, Orthogonal polynomials and random matrices : a Riemann-Hilbert approach, Courant Institute of Mathematical Sciences & A.M.S., 2000.

F. Hiai, D. Petz, The semicircle law, free random variables and entropy. A.M.S. 2000.

N.M. Katz, P. Sarnak, Random matrices, Frobenius eigenvalues and monodromy, A.M.S., 1999.

P.M. Bleher, A.R. Its (eds), Random matrix models and their applications, MSRI Publications, vol.4, Cambridge University Press, 2001.

F. Mezzadri, N.C. Snaith (eds), Recent perspectives in random matrix theory and number theory, London Mathematical Society, Lecture Note Series 322, Cambridge University Press, 2005.

Lecture Notes

Z.D. Bai, Methodologies in spectral analysis of large dimensional random matrices, a review. Statistica Sinica 9 (1999), 611-677.

G. Anderson, O. Zeitouni, Lecture notes on random matrices, preprint.

Articles

P. Deift, T. Kriecherbauer, T. T-R. McLaughlin, S. Venakides, X. Zhou, Uniform asymptotics for polynomials orthogonal with respect to varying exponential weights and applications to universality questions in random matrix theory, Comm. pure and applied math., 52 (1999), 1335-1425.

P. Deift, T. Kriecherbauer, K. T-R Mclaughlin, S. Venakides, X. Zhou, Strong asymptotics of orthogonal polynomials with respect to exponential weights, Comm. pure and applied math., 52 (1999), 1491-1552.

F.J. Dyson, Statistical theory of the energy levels of complex systems, J. Math. Physics, 3 (1962), I : 140-156, II : 157-165, III : 166-175.

U. Haagerup, S. Thorbjørnsen, Random matrices with complex Gaussian entries. Exp. Mat. 21 (2003), 293-337.

K. Johansson, On the fluctuations of eigenvalues of random Hermitian matrices, Duke Math. J., 91 (1998), 151-204.

P. Michel, Répartition des réros des fonctions L et matrices aléatoires, Séminaire Bourbaki, 53ème année (2000-2001), exposé No 887.

L. Pastur, Spectral and probabilistic aspects of matrix models, in *Algebraic and Geometric Methods in Mathematical Physics*, p. 207-242. Kluwer, 1996.

L. Pastur, On a simple approach to global regime of random matrix theory, in *Mathematical results in Statistical Mechanics*, p. 429-454. World Scientific, Singapore, 1999.

L. Pastur, Random matrices as paradigm, in *Mathematical Physics 2000*, p. 216-265. Imperial College Press, London, 2000.

P. Van Moerbeke, Random matrices and permutations, matrix integrals and integrable systems, Séminaire Bourbaki, 52ème année (1999-2000), exposé No 879.

C.A. Tracy, H. Widom, Level-spacing distributions and the Airy kernel. Comm. Math. Phys. 159 (1994), 151-174.

E.P. Wigner, Characteristic vectors of bordered matrices with infinite dimensions, Annals of Math., 62 (1955), 548-564.

E.P. Wigner, On the distribution of roots of certain matrices, Annals of Math., 67 (1958), 325-327.

Chapitre 1

POLYNÔMES ORTHOGONAUX

1.1 Exemples de polynômes orthogonaux

Soit μ une mesure positive sur $\mathbb{R}$. On suppose que le support de μ est infini (μ n'est pas une combinaison linéaire finie de masses de Dirac), et que, pour tout $k \geq 0$,

$$\int_{\mathbb{R}} |t|^k \mu(dt) < \infty \qquad (*).$$

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, le moment d'ordre k

$$m_k = \int_{\mathbb{R}} t^k \mu(dt),$$

est défini. Sur l'espace $\mathcal{P}$ des polynômes en une variable à coefficients réels on considère le produit scalaire

$$(p|q) = \int_{\mathbb{R}} p(t)q(t)\mu(dt),$$

qui fait de $\mathcal{P}$ un espace préhilbertien. Les monômes $\{1, t, \ldots, t^m, \ldots\}$ constituent un système libre. Le procédé d'orthogonalisation de Schmidt permet de construire une suite de polynômes orthogonaux $\{p_m\}$: p_m est de degré m, et

$$\int_{\mathbb{R}} p_m(t)p_n(t)\mu(dt) = 0 \text{ si } m \neq n.$$

Si $\{p_m\}$ est une suite de polynômes orthogonaux nous noterons

$$\begin{aligned} p_m(t) &= a_m t^m + \dots \\ d_m &= \int_{\mathbb{R}} p_m(t)^2 \mu(dt). \end{aligned}$$

Exemple

Polynômes d'Hermite : μ est une mesure gaussienne,

$$\mu(dt) = e^{-t^2} dt.$$

Le polynôme d'Hermite H_m est défini par

$$H_m(t) = (-1)^m e^{t^2} \left(\frac{d}{dt}\right)^m e^{-t^2}.$$

Notons que $a_m = 2^m$. □

Exercice 1 :

Montrer que les polynômes d'Hermite H_n sont orthogonaux par rapport à la mesure gaussienne μ, et que

$$d_m = 2^m m! \sqrt{\pi}.$$

On rappelle que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

□

Solution :

Par m intégrations par parties on montre que, pour tout polynôme p,

$$\int_{\mathbf{R}} H_m(t) p(t) e^{-t^2} dt = \int_{\mathbb{R}} p^{(m)}(t) e^{-t^2} dt.$$

□

Exercice 2 :

Polynômes de Tchebychev de première espèce

La *loi de l'arcsinus* est la mesure de probabilité μ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\mu(dt) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} f(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(\cos\theta) d\theta.$$

Le polynôme de Tchebychev de première espèce T_m est défini par

$$T_m(\cos\theta) = \cos m\theta.$$

Montrer que cette formule définit un polynôme T_m de degré m, et que les polynômes T_m sont orthogonaux par rapport à la mesure μ. Déterminer les nombres d_m. □

Solution :

On note d'abord que $T_0(X) = 1$, et que $T_1(X) = X$. De la relation

$$\cos(m+1)\theta = 2\cos\theta\cos(m-1)\theta - \cos(m-1)\theta$$

on déduit que

$$T_{m+1}(X) = 2XT_m(X) - T_{m-1}(X).$$

Par suite on montre par récurrence que T_m est un polynôme de degré m.

Déterminons les nombres d_m :

$$d_m = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\big(T_m(t)\big)^2\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos^2 m\theta\, d\theta.$$

Ainsi $d_0 = 1$, et, si $m \geq 1$, $d_m = \frac{1}{2}$.

On peut aussi noter que $a_m = 2^{m-1}$.

□

Exercice 3 :

Polynômes de Tchebychev de deuxième espèce

La *loi du demi-cercle* de rayon un est la mesure μ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\mu(dt) = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} f(t)\sqrt{1-t^2}dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\cos\theta)\sin^2\theta d\theta.$$

Le polynôme de Tchebychev U_m de deuxième espèce est défini par

$$U_m(\cos\theta) = \frac{\sin(m+1)\theta}{\sin\theta}.$$

Montrer que les polynômes T_m sont orthogonaux par rapport à la mesure μ, et déterminer les nombres d_m. □

Solution :

On procède comme pour l'exercice précédent : $U_0(X) = 1$, $U_1(X) = 2X$, et, de la relation

$$\sin(m+1)\theta = 2\cos\theta\sin m\theta - \sin(m-1)\theta,$$

on déduit la relation de récurrence

$$U_{m+1}(X) = 2XU_m(X) - U_{m-1}(X).$$

Notons que la relation de récurrence est la même que celle qui est vérifiée par les polynômes de Tchebychev de première espèce. La différence tient à ce que $U_1(X) = 2X$, alors que $T_1(X) = X$.

Déterminons les nombres d_m :

$$\begin{aligned} d_m &= \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\big(U_m(t)\big)^2\sqrt{1-t^2}dt \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\Big(\frac{\sin(m+1)\theta}{\sin\theta}\Big)^2\sin^2\theta d\theta \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2(m+1)\theta d\theta. \end{aligned}$$

Ainsi, pour $n \geq 0$, $d_m = 1$.

On notera que $a_m = 2^m$. □

1.2 Déterminant de Gram

Étant donnés n vecteurs $\xi_1, \dots, \xi_n$ d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, on considère la forme hermitienne suivante

$$F(z) = \sum_{j,k=1}^{n}(\xi_j|\xi_k)z_j\overline{z_k} = \|\sum_{j=1}^{n}z_j\xi_j\|^2 \quad (z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}).$$

Cette forme hermitienne F est semi-définie positive. Elle est définie positive si et seulement si les vecteurs $\xi_1, \dots, \xi_n$ sont linéairement indépendants. Son déterminant est appelé *déterminant de Gram* des vecteurs $\xi_1, \dots, \xi_n$:

$$\mathrm{Gram}(\xi_1, \dots, \xi_n) = \begin{vmatrix} (\xi_1|\xi_1) & (\xi_1|\xi_2) & \dots & (\xi_1|\xi_n) \\ (\xi_2|\xi_2) & (\xi_2|\xi_2) & \dots & (\xi_2|\xi_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\xi_n|\xi_1) & (\xi_n|\xi_2) & \dots & (\xi_n|\xi_n). \end{vmatrix}$$

Il est positif ou nul, et est positif si et seulement si les vecteurs $\xi_1, \dots, \xi_n$ sont linéairement indépendants.

Considérons le cas où $\mathcal{H} = L^2(X, \mathfrak{M}, \mu)$, et soient $f_1, \dots, f_n \in L^2(X, \mathfrak{M}, \mu)$

1.2.1 Proposition.

$$\int_{X^n} \begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) & \dots & f_1(x_n) \\ f_2(x_1) & f_2(x_2) & \dots & f_2(x_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_n(x_1) & f_n(x_2) & \dots & f_n(x_n) \end{vmatrix}^2 \mu(dx_1)\mu(dx_2)\dots\mu(dx_n)$$
$$= n!\mathrm{Gram}(f_1,\dots,f_n).$$

Démonstration.

Le premier membre est égal à

$$\int_{X^n} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) f_{\sigma(1)}(x_1)\dots f_{\sigma(n)}(x_n) \overline{\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\tau) f_{\tau(1)}(x_1)\dots f_{\tau(n)}(x_n)}$$
$$\mu(dx_1)\dots\mu(dx_n)$$
$$= \sum_{\sigma,\tau\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)(f_{\sigma(1)}|f_{\tau(1)})\dots(f_{\sigma(n)}|f_{\tau(n)}).$$

En posant $\tau = \tau'\circ\sigma$, cela peut s'écrire

$$= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\Big(\sum_{\tau'\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\tau')(f_{\sigma(1)}|f_{\tau'(\sigma(1))})\dots(f_{\sigma(n)}|f_{\tau'(\sigma(n))})\Big).$$

Quel que soit σ la somme en τ' est égal à $\mathrm{Gram}(f_1,\dots,f_n)$ (la valeur d'un déterminant ne change pas si on effectue la même permutation sur les lignes et les colonnes). On obtient donc

$$= n!\mathrm{Gram}(f_1,\dots,f_n).$$

$\square$

Exercice 4 :

Soient $f_1,\dots,f_n,g_1,\dots,g_n \in L^2(X,\mathfrak{M},\mu)$. Montrer que

$$\int_{X^n} \begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) & \dots & f_1(x_n) \\ f_2(x_1) & f_2(x_2) & \dots & f_2(x_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_n(x_1) & f_n(x) & \dots & f_n(x_n) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \overline{g_1(x_1)} & \overline{g_1(x_2)} & \dots & \overline{g_1(x_n)} \\ \overline{g_2(x_1)} & \overline{g_2(x_2)} & \dots & \overline{g_2(x_n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \overline{g_n(x_1)} & \overline{g_n(x_2)} & \dots & \overline{g_n(x_n)} \end{vmatrix}$$
$$\mu(dx_1)\mu(dx_2)\dots\mu(dx_n) = n! \begin{vmatrix} (f_1|g_1) & (f_1|g_2) & \dots & (f_1|g_n) \\ (f_2|g_1) & (f_2|g_2) & \dots & (f_2|g_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (f_n|g_1) & (f_n|g_2) & \dots & (f_n|g_n) \end{vmatrix}$$

$\square$

1.3 Formules de Heine

Nous allons appliquer les résultats de la section précédente au cas μ est une mesure positive sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition $(*)$: pour tout $k \geq 0$,

$$\int_{\mathbb{R}} |t|^k \mu(dt) < \infty.$$

Les fonctions f_i seront les monômes. Soit $M = (M_{ij})$ la matrice des moments,

$$M_{ij} = m_{i+j} = \int_{\mathbb{R}} t^{i+j} \mu(dt).$$

C'est la matrice de la forme quadratique $p \mapsto \|p\|^2$ dans la base des monômes :

$$\int_{\mathbb{R}} \Big| \sum_{k=0}^{n-1} a_k t^k \Big|^2 \mu(dt) = \sum_{i,j=0}^{n-1} M_{ij} a_i a_j.$$

Elle est symétrique et définie positive. On pose

$$D_n = \det(M_{ij})_{0 \leq i,j \leq n-1}.$$

1.3.1 Proposition.

$$D_n = \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (t_j - t_i)^2 \mu(dt_1) \dots \mu(dt_n).$$

Démonstration.

C'est une conséquence de la proposition 2.2.1. Posons en effet

$$f_j(x) = t^{j-1} \quad (j = 1, \dots, n).$$

L'évaluation suivante du déterminant de Vandermonde est classique

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ t_1 & t_2 & \dots & t_n \\ t_1^2 & t_2^2 & \dots & t_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_1^{n-1} & t_2^{n-1} & \dots & t_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < k \leq n} (t_k - t_j).$$

Ainsi, d'après la proposition 2.2.1,

$$n! D_n = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (t_j - t_i)^2 \mu(dt_1) \dots \mu(dt_n).$$

Considérons les polynômes orthogonaux p_m, relativement à la mesure μ, normalisés par la condition

$$p_m(t) = t^m + \dots,$$

c'est à dire que, pour tout m, $a_m = 1$.

1.3.2 Proposition.

$$D_n = d_0 d_1 \cdots d_{n-1}.$$

Démonstration.

Considérons les polynômes $p_{\mathbf{m}}$ de n variables définis, pour $\mathbf{m} = (m_0, m_1, \dots, m_{n-1}) \in \mathbb{N}^n$, $x = (x_1, x_2, \dots x_n)$, par

$$p_{\mathbf{m}}(x) = p_{m_0}(x_1) p_{m_1}(x_2) \dots p_{m_{n-1}}(x_n).$$

Ce sont des polynômes orthogonaux pour le produit scalaire

$$(p|q) = \int_{\mathbb{R}^n} p(x) q(x) \mu(dx_1) \dots \mu(x_n),$$

et

$$\|p_{\mathbf{m}}\|^2 = d_{m_0} d_{m_1} \dots d_{m_{n-1}}.$$

Développons dans cette base le déterminant de Vandermonde :

$$\begin{aligned}
\Delta(x) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} p_0(x_1) & p_0(x_2) & \dots & p_0(x_n) \\ p_1(x_1) & p_1(x_2) & \dots & p_1(x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n-1}(x_1) & p_{n-1}(x_2) & \dots & p_{n-1}(x_n) \end{vmatrix} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) p_{\sigma(0)}(x_1) \dots p_{\sigma(n-1)}(x_n).
\end{aligned}$$

La deuxième égalité vient du fait qu'on ne change pas la valeur d'un déterminant quand on ajoute à une ligne une combinaison linéaire des autres. Ainsi

$$\Delta(x) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) p_{\sigma \cdot \mathbf{m}}(x),$$

où

$$\sigma \cdot \mathbf{m} = (m_{\sigma(0)}, m_{\sigma(1)}, \dots, m_{\sigma(n-1)}).$$

Des propriétés d'orthogonalité des polynômes $p_{\mathbf{m}}$ il résulte que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Delta(x)^2 \mu(x_1) \dots \mu(dx_n) = n! d_0 \dots d_{n-1}.$$

□

Exercice 5 :

On pose

$$Z_n = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x_1^2+\cdots+x_n^2)} \Delta(x)^2 dx_1 \dots dx_n.$$

Montrer que

$$Z_n = \pi^{\frac{n}{2}} 2^{-\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{j=2}^{n} j!.$$

□

Solution :

Prenons

$$\mu(dt) = e^{-t^2} dt.$$

Les polynômes p_m sont alors proportionnels aux polynômes d'Hermite,

$$p_m(t) = 2^{-m} H_m(t),$$

et

$$d_m = \|p_m\|^2 = 2^{-m} m! \sqrt{\pi}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} Z_n &= n! D_n = n! \|p_0\|^2 \dots \|p_{n-1}\|^2 \\ &= n! \pi^{\frac{n}{2}} \prod_{j=0}^{n-1} 2^{-j} j! = \pi^{\frac{n}{2}} 2^{-\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{j=1}^{n} j!. \end{aligned}$$

□

Exercice 6 :

Soit μ une mesure positive sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $k \geq 0$,

$$\int_{\mathbb{R}} |t|^k \mu(dt) < \infty.$$

On note m_k le moment de μ d'ordre k de μ,

$$m_k = \int_{\mathbb{R}} t^k \mu(dt).$$

a) On considére la suite $\{p_n\}$ des polynômes définis par

$$p_n(t) = \begin{vmatrix} m_0 & m_1 & \dots & m_n \\ m_1 & m_2 & \dots & m_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n-1} & m_n & \dots & m_{2n-1} \\ 1 & t & \dots & t^n \end{vmatrix}.$$

Montrer que les polynômes p_n sont orthogonaux par rapport à la mesure μ, et que

$$a_n = D_n, \ d_n = D_n D_{n+1}.$$

Indication On montrera que l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} t^j p_n(t) \mu(dt)$$

est nulle si $j < n$, et est égale à D_{n+1} si $j = n$.

b)Montrer que

$$p_n(t) = \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=0}^{n-1} (t - x_i) \Delta(x)^2 \mu(dx_0) \dots \mu(dx_{n-1}).$$

Indication On montrera que

$$p_n(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \begin{vmatrix} x_0^0 & x_0^1 & \dots & x_0^n \\ x_1^1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n-1}^{n-1} & x_{n-1}^n & \dots & x_{n-1}^{2n-1} \\ 1 & t & \dots & t^n \end{vmatrix} \mu(dx_0) \dots \mu(dx_{n-1}).$$

□

Les formules énoncées dans cette section sont très classiques. On peut déjà les trouver dans le livre de Heine publié en 1878. [H], p.288.

1.4 Noyau de Christoffel-Darboux

Notons S_n la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{R}, \mu)$ sur l'espace des polynômes de degré $\leq n-1$. Si $\{p_n\}$ est une suite de polynômes orthogonaux, cette projection s'écrit, pour $f \in L^2(\mathbb{R}, \mu)$,

$$\begin{aligned} S_n f(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{d_k} (f|p_k)\, p_k(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} K_n(x,y) f(y) \mu(dy), \end{aligned}$$

où K_n est le noyau suivant, appelé *noyau de Christoffel-Darboux*,

$$K_n(x,y) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{d_k} p_k(x) p_k(y).$$

Pour établir une expression plus simple de ce noyau nous utiliserons la relation de récurrence suivante que vérifient les polynômes p_n. On utilisera les notations suivantes

$$\begin{aligned} p_n(x) &= a_n x^n + b_n x^{n-1} + \ldots \\ d_n &= \int_{\mathbb{R}} p_n(x)^2 \mu(dx). \end{aligned}$$

1.4.1 Proposition

$$x p_n(x) = \alpha_n p_{n+1}(x) + \beta_n p_n(x) + \gamma_n p_{n-1}(x),$$

où

$$\alpha_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}, \;\; \beta_n = \frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}, \;\; \gamma_n = \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{d_n}{d_{n-1}}.$$

Démonstration.

Le polynôme $x p_n(x)$ est une combinaison linéaire des polynômes $p_0, \ldots p_{n+1}$:

$$x p_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} c_{nk} p_k(x),$$

où

$$c_{nk} = \frac{1}{d_k} \int_{\mathbb{R}} x p_n(x) p_k(x) \mu(dx).$$

Notons que $c_{nk} = 0$ si $k > n+1$. De plus $d_k c_{nk} = d_n c_{kn}$, donc $c_{nk} = 0$ si $k < n-1$. Ainsi

$$xp_n(x) = \alpha_n p_{n+1}(x) + \beta_n p_n(x) + \gamma_n p_{n-1}(x),$$

avec

$$\alpha_n = c_{n,n+1}, \;\; \beta_n = c_{n,n}, \;\; \gamma_n = c_{n,n-1}.$$

En identifiant les coefficients de x^{n+1} et de x^n on obtient

$$\begin{aligned} a_n &= \alpha_n a_{n+1}, \\ b_n &= \alpha_n b_{n+1} + \beta_n a_n. \end{aligned}$$

De ces relations, et en tenant compte de ce que $d_{n-1}\gamma_n = d_n \alpha_{n-1}$, on déduit les expressions annoncées pour α_n, β_n, et γ_n. $\square$

Exemple.

Rappelons que les polynômes d'Hermite sont définis par

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2}.$$

On en déduit la formule suivante pour la fonction génératrice :

$$w(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x) = e^{2xt-t^2}.$$

En effet le développement de Taylor de la fonction f,

$$f(x) = e^{-x^2},$$

s'écrit

$$f(x-t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(-t)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x) e^{-x^2}.$$

La fonction génératrice $w(x,t)$ vérifie l'équation

$$\frac{\partial w}{\partial t} - (2x - 2t)w = 0.$$

Par suite

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} H_n(x) - 2x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n!} H_n(x) = 0.$$

En considérant le coefficient de $\frac{t^n}{n!}$ on obtient, pour $n \geq 1$,

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0.$$

$\square$

De la relation de récurrence de la proposition 2.4.1 on déduit l'expresion suivante pour le noyau de Christoffel-Darboux.

1.4.2 Proposition.

$$K_n(x,y) = \frac{\alpha_{n-1}}{d_{n-1}} \frac{p_n(x)p_{n-1}(y) - p_{n-1}(x)p_n(y)}{x-y},$$

et

$$K_n(x,x) = \frac{\alpha_{n-1}}{d_{n-1}} \big(p_n'(x)p_{n-1}(x) - p_n(x)p_{n-1}'(x)\big).$$

Démonstration.

D'après cette relation de récurrence

$$\begin{aligned}
\frac{1}{d_k}(x-y)p_k(x)p_k(y) &= \frac{\alpha_k}{d_k}p_{k+1}p_k(y) + \frac{\beta_k}{d_k}p_k(x)p_k(y) \\
&+ \frac{\gamma_k}{d_k}p_{k-1}(x)p_k(y) - \frac{\alpha_k}{d_k}p_k(x)p_{k+1}(y) \\
&- \frac{\beta_k}{d_k}p_k(x)p_k(y) - \frac{\gamma_k}{d_k}p_k(x)p_{k-1}(y).
\end{aligned}$$

Puisque

$$\frac{\gamma_k}{d_k} = \frac{\alpha_{k-1}}{d_{k-1}},$$

cette égalité s'écrit aussi

$$\begin{aligned}
\frac{1}{d_k}(x-y)p_kx)p_k(y) &= \frac{\alpha_k}{d_k}\big(p_{k+1}(x)p_k(y) - p_k(x)p_{k+1}(y)\big) \\
&- \frac{\alpha_{k-1}}{d_{k-1}}\big(p_k(x)p_{k-1}(y) - p_{k-1}(x)p_k(y)\big).
\end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned}
(x-y)K_n(x-y) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{d_k}(x-y)p_k(x)p_k(y) \\
&= \frac{\alpha_{n-1}}{d_{n-1}}\big(p_n(x)p_{n-1}(y) - p_{n-1}(x)p_n(y)\big) \\
&- \frac{\alpha_0}{d_0}\big(p_1(x)p_0(y) - p_0(x)p_1(y)\big) \\
&+ \frac{1}{d_0}(x-y)p_0(x)p_0(y).
\end{aligned}$$

La dernière ligne est nulle car

$$p_0(x) = a_0,\ p_1(x) - p_1(y) = a_1(x - y),\ \text{et } \alpha_0 = \frac{a_0}{a_1}.$$

On obtient $K_n(x,x)$ par passage à la limite. En effet

$$K_n(x,y) = \frac{\alpha_{n-1}}{d_{n-1}}\Big(\frac{p_n(x) - p_n(y)}{x - y}p_{n-1}(y) - p_n(y)\frac{p_{n-1}(x) - p_{n-1}(y)}{x - y}\Big),$$

et, quand y tend vers x,

$$K_n(x,x)\frac{\alpha_{n-1}}{d_{n-1}}\big(p_n'(x)p_{n-1}(x) - p_n(x)p_{n-1}'(x)\big).$$

1.5 Zéros des polynômes orthogonaux

Soit $\{p_n\}$ une suite de polynômes orthogonaux relativement à la mesure μ, et soit $[a,b]$ le plus petit intervalle fermé contenant le support de μ ($-\infty \leq a < b \leq \infty$).

1.5.1 Proposition. *Les zéros de p_n sont réels et simples, et appartiennent à $]a,b[$.*

Démonstration.
Soient $t_1, \dots, t_r$ les zéros de p_n qui sont d'ordre impair et qui appartiennent à $]a,b[$. Nous allons montrer que $r = n$. Nous pouvons écrire

$$p_n(t) = (t - t_1)\cdots(t - t_r)q(t).$$

Le polynôme q est de degré $n - r$ et ne change pas de signe sur $]a,b[$. Si $r < n$,

$$\int_{\mathbb{R}}(t - t_1)\cdots(t - t_r)p_n(t)\mu(dt) = 0,$$

ou

$$\int_{\mathbb{R}}(t - t_1)^2\cdots(t - t_r)^2 q(t)\mu(dt) = 0,$$

d'où la contradiction. □

Nous supposons maintenant que les polynômes p_n sont orthonormés : $d_n = 1$. Dans ce cas les coefficients de la relation de récurrence vérifient $\gamma_n = \alpha_{n-1}$:

$$tp_n(t) = \alpha_n p_{n+1}(t) + \beta_n p_n(t) + \alpha_{n-1}p_{n-1}(t).$$

A ces coefficients on associe la matrice suivante appelée matrice de Jacobi :

$$T = \begin{pmatrix} \beta_0 & \alpha_0 & & & & \\ \alpha_0 & \beta_1 & \alpha_1 & & & \\ & \alpha_1 & \beta_2 & \alpha_2 & & \\ & & \alpha_2 & \beta_3 & \alpha_3 & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

C'est une matrice tridiagonale symétrique. C'est la matrice de l'endomorphisme qui est la multiplication par t relativement à la base des p_n. Notons T_n la matrice extraite de T composée des n premières lignes et des n premières colonnes. D'après la relation de récurrence vérifiée par la suite des polynômes p_n (Proposition 2.4.1),

$$(T_n - \lambda I) \begin{pmatrix} p_0(\lambda) \\ p_1(\lambda) \\ \vdots \\ p_{n-2}(\lambda) \\ p_{n-1}(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\alpha_{n-1} p_n(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Ainsi les valeurs propres de T_n sont les zéros de p_n, et plus précisément

$$p_n(\lambda) = a_n \det(\lambda I - T_n).$$

On retrouve le fait que les valeurs propres sont réelles, puisque, T_n étant symétrique, ses valeurs propres sont réelles. De plus, si λ_0 est un zéro de p_n, le vecteur

$$\big(p_0(\lambda_0), p_1(\lambda_0), \ldots, p_{n-1}(\lambda_0)\big)$$

est un vecteur propre associé à la valeur propre λ_0.

1.5.2 Proposition. *Notons $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$ les zéros de p_n, et $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \ldots \leq \mu_{n-1}$ ceux de p_{n-1}. Alors*

$$\lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \mu_2 < \ldots < \mu_{n-1} < \lambda_n.$$

Compte tenu de ce qui vient d'être dit, cette proposition est une conséquence du lemme suivant.

1.5.3 Lemme. *Soit A une matrice symétrique $n \times n$, et soit B la matrice extraite des $n-1$ premières lignes et des $n-1$ premières colonnes. Soient $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de A, et $\mu_1 \leq \ldots \leq \mu_{n-1}$ celles de B. Alors*

$$\lambda_1 \leq \mu_1 \leq \lambda_2 \leq \mu_2 \leq \ldots \leq \mu_{n-1} \leq \lambda_n.$$

De plus, si les valeurs propres de A sont distinctes, les inégalités sont strictes.

Démonstration.

La matrice A est diagonalisable dans une base orthonormée $\{u_1, \dots, u_n\}$,

$$Au_j = \lambda_j u_j.$$

Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, et posons

$$f(\lambda) = \big((\lambda I - A)^{-1} e_n | e_n\big).$$

D'après les formules donnant les coefficients de l'inverse d'une matrice

$$f(\lambda) = \frac{\det(\lambda I - B)}{\det(\lambda I - A)}.$$

Ainsi f est une fraction rationnelle dont les pôles sont les valeurs propres de A, et les zéros sont celles de B. D'autre part

$$e_n = \sum_{j=1}^{n} (e_n | u_j) u_j,$$

et

$$(\lambda I - A)^{-1} e_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\lambda - \lambda_j} (e_n | u_j) u_j.$$

Par suite

$$f(\lambda) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\lambda - \lambda_j} (e_n | u_j)^2.$$

Il en résulte que les pôles de f sont tous simples, et que f est décroissante sur chacun des intervalles où elle est définie. Le résultat annoncé se voit bien graphiquement dans le cas où les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont distinctes.

Si λ est une valeur propre de A de multiplicité k, alors λ est une valeur propre de B de multiplicité $k - 1$. $\square$

1.6 Complément

Soit μ une mesure ayant des moments de tout ordre :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \int_{\mathbb{R}} |t|^m \mu(dt) < \infty.$$

Une question naturelle se pose : l'espace des polynômes est-il dense dans l'espace $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mu)$. Dans l'exercice suivant on donne une condition suffisante pour qu'il en soit ainsi.

Exercice 7 :

Dans cet exercice on considère une mesure positive μ sur $\mathbb{R}$ et on suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\alpha|t|}\mu(dt) < \infty.$$

On verra que, sous cette hypothèse, l'espace des polynômes est dense dans l'espace $L^2(\mathbb{R}, \mu)$. Pour le voir on doit montrer que si $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mu)$ est orthogonale à l'espace des polynômes,

$$\forall m \in \mathbb{N}, \ \int_{\mathbb{R}} f(t)t^m\mu(dt) = 0,$$

alors f est nulle μ-presque partout.

a) Soit $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mu)$. On pose

$$\varphi(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{itz} f(t)\mu(dt).$$

A l'aide de l'inégalité de Schwartz montrer que la fonction φ est holomorphe dans la bande $\{z = x + iy \mid -\frac{\alpha}{2} < y < \frac{\alpha}{2}\}$.

b) La fonction φ est développable en série entière au voisinage de 0 :

$$\varphi(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m.$$

Montrer que

$$a_m = \frac{i^m}{m!}\int_{\mathbb{R}} f(t)t^m\mu(dt) = 0.$$

c) On suppose que f est orthogonale à l'espace des polynômes. Montrer que la transformée de Fourier de la mesure $f\mu$ est nulle. Conclure.

$\square$

Mais on peut trouver une mesure μ ayant des moments de tout ordre pour laquelle l'espace des polynômes n'est pas dense dans $L^2(\mathbb{R}, \mu)$. Nous verrons dans l'exercice suivant un exemple d'une telle mesure du à Pólya et Szegö.

Exercice 8 :

On considère sur $\mathbb{R}$ la mesure positive μ définie par

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\mu(dt) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-\beta t^\alpha}dt,$$

où α est un paramètre réel, $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ et $\beta > 0$. Montrer que la mesure admet des moments de tous les ordres : pour tous les entiers $m \geq 0$,

$$\int_{\mathbb{R}} |t|^m \mu(dt) < \infty.$$

Le but de cet exercice est d'établir que l'espace des polynômes n'est pas dense dans $L^2(\mathbb{R}, \mu)$.

a) Pour $\alpha > 0$, $\nu > 0$, on pose

$$F(x) = \int_0^\infty e^{-(tx)^\alpha} t^{\nu-1} dt.$$

Montrer que la fonction F est définie pour $x > 0$, et que

$$F(x) = \frac{1}{\alpha} \Gamma\Big(\frac{\nu}{\alpha}\Big) x^{-\nu}.$$

b) Montrer que la fonction F de la variable complexe z définie par

$$F(z) = \int_0^\infty e^{(tz)^\alpha} t^{\nu-1} dt$$

est définie et holomorphe dans le secteur

$$\Big\{ z = re^{i\theta} \mid r > 0,\ |\theta| < \frac{\pi}{2\alpha} \Big\},$$

et que, pour $z = re^{i\theta}$,

$$F(z) = \frac{1}{\alpha} \Gamma\Big(\frac{\nu}{\alpha}\Big) r^{-\nu} (\cos \nu\theta - i \sin \nu\theta).$$

c) On suppose que $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ et $\beta = \cos \alpha\pi$. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(t) = \sin(t^\alpha \sin \alpha\pi).$$

Montrer que $f \in L^2(\mathbb{R}, \mu)$, et que, pour tous les entiers $m \geq 0$,

$$\int_0^\infty f(t) t^m \mu(dt) = 0.$$

d) Conclure.

$\square$

Références

P. Deift, Orthogonal polynomials and random matrices : a Riemann-Hilbert approach. Courant Institute of Mathematical Sciences & A.M.S, 2000.

G. Szegö, Orthogonal polynomials. Colloquium Publications No 23, A.M.S., 1975.

G.E. Andrews, R. Askey, R. Roy, Special functions. Cambridge University Press,1999.

E. Heine, Handbuch der Kugelfunktionen, vol.I, 1878. Physica-Verlag, Neudruck, 1961.

Chapitre 2

MESURES DE PROBABILITÉ SUR $\mathbb{R}$

Notons $\mathfrak{M}(\mathbb{R})$ l'ensemble des mesures positives bornées sur $\mathbb{R}$ et $\mathfrak{M}^1(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de celles qui sont de masse totale égale à un, c'est-à-dire l'ensemble des mesures de probabilité sur $\mathbb{R}$.

2.1 Moments

Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$, et supposons que, pour tout k,

$$\int_{\mathbb{R}} |t|^k \mu(dt) < \infty. \qquad (*)$$

Alors on peut définir les moments $m_k(\mu)$ de la mesure μ :

$$m_k(\mu) = \int_{\mathbb{R}} t^k \mu(dt).$$

En particulier $m_1(\mu)$ est la moyenne de μ, et

$$\int_{\mathbb{R}} \big(t - m_1(\mu)\big)^2 \mu(dt) = m_2(\mu) - m_1(\mu)^2$$

est la variance de μ.

Si le support de la mesure μ est infini, la matrice des moments $\big(m_{i+j}(\mu)\big)$ est définie positive. En effet, pour $c_0, \ldots, c_N \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{i,j=0}^{N} m_{i+j}(\mu) c_i \overline{c_j} = \int_{\mathbb{R}} \big| \sum_{i=0}^{N} c_i t^i \big|^2 \mu(dt) \geq 0,$$

et cette somme est strictement positive si les nombres c_i ne sont pas tous nuls. On établit la réciproque suivante : soit (m_k) une suite de nombres réels telle que la matrice (m_{i+j}) soit définie positive. Il existe une mesure positive bornée sur $\mathbb{R}$ telle que

$$m_k = \int_{\mathbb{R}} t^k \mu(dt).$$

En général la mesure μ n'est pas unique.

Exercice 9 :

Mesure gaussienne. Pour $\gamma > 0$, soit g_γ la mesure définie par

$$g_\gamma(dt) = \sqrt{\frac{\gamma}{\pi}} e^{-\gamma t^2}.$$

Déterminer les moments de la mesure g_γ.

□

Solution :

La mesure g_γ étant paire, les moments d'ordre impair sont nuls. Pour déterminer les moments d'ordre pair on effectue une intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} t^{2\ell} e^{-\gamma t^2} dt &= -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^{2\ell+1}}{2\ell+1} \frac{d}{dt}\left(e^{-\gamma t^2}\right) dt \\ &= \frac{2\gamma}{2\ell+1} \int_{-\infty}^{\infty} t^{2\ell+2} e^{-\gamma t^2} dt.\end{aligned}$$

Ainsi

$$m_{2\ell}(g_\gamma) = \frac{2\gamma}{2\ell+1} m_{2\ell+2}(g_\gamma),$$

ou

$$m_{2\ell}(g_\gamma) = \frac{2\ell-1}{2\gamma} m_{2\ell-2}(g_\gamma).$$

Finalement

$$m_{2\ell}(g_\gamma) = \frac{1}{(2\gamma)^\ell} 1 \cdot 3 \cdots (2\ell-1) = \frac{1}{(4\gamma)^\ell} \frac{(2\ell)!}{\ell!}.$$

□

Exercice 10 :

Loi de l'arcsinus.

Déterminer les moments de la mesure de probabilité μ définie par

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\mu(dt) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} f(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

$\square$

Solution :

Puisque la mesure μ est paire, ses moments d'ordre impair sont nuls. En effectuant une intégration par partie on obtient

$$\begin{aligned} m_{2\ell}(\mu) &= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} t^{2\ell}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} t^{2\ell-1}\Big(-\frac{d}{dt}\sqrt{1-t^2}\Big)dt \\ &= \frac{2\ell-1}{\pi}\int_{-1}^{1} t^{2\ell-2}\sqrt{1-t^2}dt \\ &= \frac{2\ell-1}{\pi}\int_{-1}^{1} t^{2\ell-2}\frac{1-t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt \\ &= (2\ell-1)\Big(m_{2\ell-2}(\mu) - m_{\ell}(\mu)\Big). \end{aligned}$$

et donc

$$m_{2\ell}(\mu) = \frac{2\ell-1}{2\ell}m_{2\ell-2}(\mu).$$

Finalement

$$m_{2\ell}(\mu) = \frac{1}{2^{\ell}\ell!}1\cdot 3\cdots(2\ell-1) = \frac{1}{2^{2\ell}}\frac{(2\ell)!}{(\ell!)^2}.$$

$\square$

Exercice 11 :

Les *nombres de Catalan* interviennent en combinatoire et les moments de la loi du demi-cercle s'expriment à l'aide de ces nombres comme on le verra dans l'exercice suivant. Ce sont les nombres de la suite définie par $c_0 = 1$ et

$$c_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k}.$$

Déterminer les nombres c_n.

Indication

Considérer la fonction génératrice

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

$\square$

Solution :

On suppose que le rayon de convergence de la série entière est positif. Le carré de F est développable en série entière :

$$F(x)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

avec

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k} = c_{n+1}.$$

Ainsi

$$F(x)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} x^n = \frac{1}{x}\big(F(x) - 1\big),$$

ou

$$xF(x)^2 - F(x) + 1 = 0.$$

Par suite

$$F(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Puisque F est continue en 0, c'est le signe - qui doit être retenu :

$$F(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}.$$

En utilisant la formule du binôme

$$(1+u)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} u^n,$$

on obtient

$$c_n = 2^n \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{(n+1)!} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}.$$

$\square$

Exercice 12 :

La *loi du demi-cercle* σ_r de rayon r est définie par

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\sigma_r(dt) = \frac{2}{\pi r^2}\int_{-r}^{r} f(t)\sqrt{r^2-t^2}dt.$$

Déterminer les moments de la mesure σ_r.

$\square$

Solution :

En effectuant une intégration par partie on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{-r}^{r} t^{2\ell}\sqrt{r^2-t^2}dt &= \int_{-r}^{r} t^{2\ell-1}(r^2-t^2)\frac{t}{\sqrt{r^2-t^2}}dt \\
&= -\int_{-r}^{r} t^{2\ell-1}(r^2-t^2)\frac{d}{dt}\big(\sqrt{r^2-t^2}\big)dt \\
&= \int_{-r}^{r} \frac{d}{dt}\big(t^{2\ell-1}(r^2-t^2)\big)\sqrt{r^2-t^2}dt \\
&= \int_{-r}^{r} \big((2\ell-1)t^{2\ell-2}(r^2-t^2)-2t^{2\ell}\big)\sqrt{r^2-t^2}dt.
\end{aligned}$$

On en déduit la relation de récurrence

$$\begin{aligned}
m_{2\ell} &= (2\ell-1)r^2 m_{2\ell-2} - (2\ell+1)m_{2\ell} \\
m_{2\ell} &= \frac{r^2}{2}\frac{2\ell-1}{\ell+1}m_{2\ell-2}.
\end{aligned}$$

Finalement les moments d'ordre pair s'expriment à l'aide des nombres de Catalan c_ℓ :

$$m_{2\ell} = \big(\frac{r}{2}\big)^{2\ell}c_\ell.$$

Exercice 13 :

Une partition d'un ensemble E est une famille de parties disjointes de E de réunion égale à E. Une partition $\{A_1,\dots,A_m\}$ de $\{1,2,\dots,n\}$ est dite non croisée si, étant donnés deux éléments $A_i = \{x_1,\dots,x_p\}$ et $A_j = \{y_1,\dots,y_q\}$ de la partition, alors $y_i < x_1 < y_j$ si et seulement si $y_i < x_k < y_j$ pour $k = 1,\dots,p$. Montrer que le nombre de partitions non croisées par paires de $\{1,2,\dots,2n\}$ est égal au nombre de Catalan c_n. (Pour une telle partition chaque élément de la partition est une paire.)

$\square$

Solution :

Notons a_n le nombre de partitions non croisées par paires de $\{1,2,\dots,2n\}$. Dans une telle partition le nombre 1 est associé à un nombre pair $2m$ $(1 \leq$

$m \leq n$). Le nombre de telles partitions contenant la paire $\{1, 2m\}$ est égal à $a_{n-1}a_{n-m}$. Par suite, en convenant de poser $a_0 = 1$,

$$a_n = a_{n-1}a_0 + a_{n-2}a_1 + \cdots + a_0 a_{n-1},$$

ce qui est précisément la relation de récurrence qui définit les nombres de Catalan.

$\square$

2.2 Fonction caractéristique

La transformée de Fourier

$$\varphi(\tau) = \int_{\mathbb{R}} e^{it\tau} \mu(dt)$$

d'une mesure de probabilité μ s'appelle la *fonction caractéristique* de μ.

Si la mesure μ vérifie la condition $(*)$: pour tout entier $k \geq 0$,

$$\int_{\mathbb{R}} |t|^k \mu(dt) < \infty,$$

alors la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et

$$\varphi^{(k)}(0) = i^k m_k(\mu).$$

S'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\alpha|t|} \mu(dt) < \infty$$

alors la fonction φ admet un prolongement holomorphe dans la bande $\{\tau \in \mathbb{C} \mid |\tau| < \alpha\}$. Son développement en série entière dans le disque $|\tau| < \alpha$ est donné par

$$\varphi(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} m_k(\mu) \frac{(i\tau)^k}{k!}.$$

Exercice 14 :

Pour $\alpha > 0$ on note μ_α la mesure définie par

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\mu_\alpha(dt) = \frac{1}{2\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} f(t)dt.$$

Déterminer la fonction caractéristique de la mesure μ_α.

$\square$

Solution :

$$\varphi(\tau) = \frac{1}{2\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{it\tau} dt = \frac{\sin \alpha\tau}{\alpha\tau}.$$

□

Exercice 15 :

Déterminer la fonction caractéristique de la mesure gaussienne g_γ.

□

Solution :

Pour montrer que

$$\varphi(\tau) = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\tau} e^{-\frac{1}{2}\gamma t^2} dt = e^{-\frac{\tau^2}{2\gamma}},$$

on peut écrire

$$\varphi(\tau) = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} e^{-\frac{\tau^2}{2\gamma}} F(\tau),$$

où

$$F(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\gamma\left(t - i\frac{\tau}{\gamma}\right)^2} dt.$$

Montrer que la fonction F est dérivable, et, à l'aide d'une intégration par parties, que $F'(\tau) = 0$.

□

Exercice 16 :

On suppose que la mesure de probabilité μ vérifie la condition $(*)$: pour tout entier $k \geq 0$,

$$\int_{\mathbb{R}} |t|^k \mu(dt) < \infty,$$

et que le rayon de convergence R de la série entière

$$\sum_{k=0}^{\infty} m_k(\mu) \frac{z^k}{k!}$$

est > 0. Montrer que φ admet un prolongement holomorphe dans la bande $\{\tau \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Im}\, \tau| < R\}$.

□

Solution :

Pour λ réel,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \mathrm{ch}\,(t\lambda)\mu(dt) &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{t^{2\ell}\lambda^{2\ell}}{(2\ell)!}\mu(dt) \\
&= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2\ell}}{(2\ell)!} \int_{\mathbb{R}} t^{2\ell}\mu(dt) \\
&= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2\ell}}{(2\ell)!} m_{2\ell}(\mu) < \infty,
\end{aligned}$$

et, par suite, pour $0 < \alpha < R$,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\alpha|t|}\mu(dt) < \infty.$$

□

La transformée de Fourier

$$\varphi(\tau) = \int_{\mathbb{R}} e^{it\tau}\mu(dt)$$

d'une mesure positive bornée est continue et de type positif, c'est-à-dire que, pour $\tau_1, \ldots, \tau_N \in \mathbb{R}$, $c_1, \ldots c_N \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{j,k=1}^{N} \varphi(t_j - t_k)c_j\overline{c_k} \geq 0.$$

En effet

$$\sum_{i,j=1}^{N} \varphi(t_i - t_k)c_j\overline{c_k} = \int_{\mathbb{R}} \Big| \sum_{j}^{N} c_j e^{it_j} \Big|^2 \mu(dt) \geq 0.$$

Réciproquement :

2.2.1 Théorème (Bochner). *Soit φ une fonction continue de type positif sur $\mathbb{R}$. Il existe une mesure positive bornée μ unique dont φ est la transformée de Fourier :*

$$\varphi(\tau) = \int_{\mathbb{R}} e^{it\tau}\mu(dt)$$

Exercice 17 :

Le but de cet exercice est de montrer qu'une fonction de type positif vérifie l'inégalité suivante

$$|\varphi(x) - \varphi(y)|^2 \leq 2\varphi(0)\big(\varphi(0) - Re\varphi(x-y)\big).$$

$\square$

Solution :

Supposer d'abord pour simplifier que $\varphi(0) = 1$. Par définition d'une fonction de type positif, pour $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}$, $c_1, \dots, c_N \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{i,j=1}^{N} \varphi(x_i - x_j) c_i \bar{c}_j \geq 0.$$

En prenant

$$N = 3,\ x_1 = 0,\ x_2 = x,\ x_3 = y,\ c_1 = t \in \mathbb{R},\ c_2 = -c_3 = \varphi(x) - \varphi(y),$$

montrer que le trinôme du secong degré

$$t^2 + 2Bt + C,$$

où

$$B = |\varphi(x) - \varphi(y)|^2,\ C = 2|\varphi(x) - \varphi(y)|^2\big(1 - Re\varphi(x-y)\big),$$

est positif ou nul sur $\mathbb{R}$. En déduire que

$$|\varphi(x) - \varphi(y)|^2 \leq 2\big(1 - \mathrm{Re}\,\varphi(x-y)\big).$$

$\square$

Exercice 18 :

Pour deux nombres réels $a, \lambda > 0$ on considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \operatorname{ch} \lambda\sqrt{a^2 - x^2} \text{ si } |x| \leq a, \\ &= \cos \lambda\sqrt{x^2 - a^2} \text{ si } |x| \geq a. \end{aligned}$$

On notera que pour tout x,

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2n}}{(2n)!}(a^2 - x^2)^n.$$

Montrer que la fonction φ est de type positif.

$\square$

Solution :

On développe la fonction φ en série entière de x :

$$\varphi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!},$$

avec

$$\begin{aligned} a_m &= \sum_{\ell}^{\infty} a_{\ell,m} \lambda^{2\ell+2m} a^{2\ell}, \\ a_{\ell,m} &= \frac{(\ell+m)!(2m)!}{(2\ell+2m)!\ell!m!} \end{aligned}$$

On montre que, pour $\ell \geq 1$, $m \geq 0$,

$$a_{\ell,m}\lambda^{2\ell+2m} = \frac{\lambda}{2^{2\ell}\ell!(\ell-1)!} \int_{-\lambda}^{\lambda} t^{2m}(\lambda^2 - t^2)^{\ell-1} dt.$$

Par suite

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} a_{0,m}(-1)^m \frac{(\lambda t)^{2m}}{(2m)!} \\ &+ \int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{1}{\lambda} \Big(\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{a^{2\ell}(\lambda^2 - t^2)^{\ell-1}}{2^{2\ell}\ell!(\ell-1)!} \Big) \Big(\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(tx)^{2m}}{(2m)!} \Big) dt. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Ce qui s'écrit

$$\varphi(x) = \cos(\lambda x) + \int_{-\lambda}^{\lambda} \cos(tx) w(t) dt,$$

où

$$w(t) = \frac{1}{\lambda} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{4^{\ell}(\ell-1)!\ell!} a^{2\ell}(\lambda^2 - t^2)^{\ell-1}.$$

C'est-à-dire que φ est la transformée de Fourier de la mesure positive bornée μ définie par

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\mu(dt) = \frac{1}{2}\big(f(\lambda) + f(-\lambda)\big) + \frac{1}{2} \int_{-\lambda}^{\lambda} f(t) w(t) dt.$$

$\square$

2.3 Convergence étroite

On dit qu'une suite (μ_n) de mesures positives bornées *converge étroitement* vers une mesure positive bornée μ si, pour toute fonction continue bornée f,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(t)\mu_n(dt) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\mu(dt).$$

Exercice 19 :

Montrer que, pour qu'une suite de mesures positives bornées (μ_n) converge étroitement vers μ, il faut et suffit

- qu'elle converge *vaguement* vers μ, c'est-à-dire que pour toute fonction continue f de support compact

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(t)\mu_n(dt) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\mu(dt),$$

- et que la masse totale de μ_n converge vers celle de μ :

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(\mathbb{R}) = \mu(\mathbb{R}).$$

□

Solution :

Supposons que la suite (μ_n) converge vaguement vers μ et que

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(\mathbb{R}) = \mu(\mathbb{R}).$$

Soit f une fonction continue bornée sur $\mathbb{R}$. Nous devons montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(t)\mu_n(dt) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\mu(dt).$$

Pour $a > 0$ notons φ_a une fonction continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant

- $0 \leq \varphi_a(t) \leq 1$,
- $\varphi_a(t) = 1$ si $-a \leq t \leq a$,
- $\varphi_a(t) = 0$ si $|t| \geq a + 1$.

Soit $\varepsilon > 0$, et soit $a > 0$ tel que

$$\int_{\mathbb{R}} \big(1 - \varphi_a(t)\big)\mu(dt) \leq \varepsilon.$$

Puisque

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \big(1 - \varphi_a(t)\big)\mu_n(dt) = \int_{\mathbb{R}} \big(1 - \varphi_a(t)\big)\mu(dt),$$

il existe n_1 tel que, si $n \geq n_1$,

$$\int_{\mathbb{R}} \big(1-\varphi_a(t)\big)\mu_n(dt) \leq 2\varepsilon.$$

Puisque le produit $f\varphi_a$ est une fonction continue à support compact, il existe $n_0 \geq n_1$ tel que, si $n \geq n_0$,

$$\Big| \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi_a(t)\mu_n(dt) - \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi_a(t)\mu(dt)\Big| \leq \varepsilon.$$

Finalement

$$\begin{aligned}
\Big| \int_{\mathbb{R}} f(t)\mu_n(dt) - \int_{\mathbb{R}} f(t)\mu(dt)\Big| &\leq \Big| \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi_a(t)\mu_n(dt) - \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi_a(t)\mu(dt)\Big| \\
&+ \int_{\mathbb{R}} |f(t)\big(1-\varphi_a(t)\big)\mu_n(dt) \\
&+ \int_{\mathbb{R}} |f(t)\big(1-\varphi_a(t)\big)\mu(dt) \\
&\leq \varepsilon + 3\varepsilon\|f\|_\infty.
\end{aligned}$$

□

Cette notion de convergence correspond à la topologie étroite. Pour cette topologie un système fondamental de voisinages d'une mesure μ_0 est constitué des ensembles

$$\begin{aligned}
&V(\varepsilon; f_1, \dots, f_N) \\
&= \Big\{\mu \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}) \mid \Big| \int_{\mathbb{R}} f_i(t)\mu(dt) - \int_{\mathbb{R}} f_i(t)\mu_0(dt)\Big| \leq \varepsilon\Big\},
\end{aligned}$$

où $\varepsilon > 0$, et $f_1, \dots, f_N \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$. On montre que cette topologie est métrisable.

Exercice 20 :

Pour $\alpha > 0$ on note μ_α la mesure définie par

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\mu_\alpha(dt) = \frac{1}{2\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha} f(t)dt.$$

La mesure μ_α a-t-elle une limite quand α tend vers 0, vers l'infini ?

□

Exercice 21 :

Mêmes questions au sujet de la mesure gaussienne g_γ.

□

Soit μ_n une suite de mesures qui converge étroitement vers μ. Si la mesure limite μ ne charge pas les nombres a et b :

$$\mu(\{a\}) = 0,\ \ \mu(\{b\}) = 0,$$

alors

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n([a,b]) = \mu([a,b]).$$

En particulier, si la mesure limite μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue : $\mu(dt) = w(t)dt$, alors

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n([a,b]) = \int_a^b w(t)dt.$$

2.3.1 Théorème (Critère de Prokhorov). *Soit M un ensemble de mesures de $\mathfrak{M}^1(\mathbb{R})$. L'ensemble M est relativement compact (pour la topologie étroite) si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K \subset \mathbb{R}$ tel que*

$$\forall \mu \in M,\ \ \mu(K^c) \leq \varepsilon.$$

2.3.2 Corollary *Soit M un ensemble de mesures de $\mathfrak{M}^1(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe une fonction mesurable $h \geq 0$ vérifiant*

$$\lim_{t\to\pm\infty} h(t) = \infty,$$

et une constante C telles que

$$\forall \mu \in M,\ \int_{\mathbb{R}} h(t)\mu(dt) \leq C.$$

Alors l'ensemble M est relativement compact.

Démonstration.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $A > 0$ tel que, si $|t| \geq A$, alors $h(t) \geq \frac{1}{\varepsilon}$, et donc, pour $\mu \in M$,

$$\frac{1}{\varepsilon}\mu\big(\{t \in \mathbb{R} \mid |t| \geq A\}\big) \leq \int_{\mathbb{R}} h(t)\mu(dt) \leq C,$$

et

$$\mu\big([-A,A]^c\big) \leq C\varepsilon.$$

$\square$

2.4 Le théorème de Lévy-Cramér

Notons $\mathfrak{P}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de type positif sur $\mathbb{R}$, et $\mathfrak{P}^1(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de celles qui vérifient $\varphi(0) = 1$. D'après le théorème de Bochner la transformation de Fourier $\mathfrak{F}$ établit une bijection de $\mathfrak{M}(\mathbb{R})$ sur $\mathfrak{P}(\mathbb{R})$, et de $\mathfrak{M}^1(\mathbb{R})$ sur $\mathfrak{P}^1(\mathbb{R})$ Soit (μ_n) une suite de $\mathfrak{M}(\mathbb{R})$, et (φ_n) la suite des transformées de Fourier. Si la suite (μ_n) converge étroitement vers une mesure μ, alors la suite (φ_n) converge vers la transformée de Fourier φ de μ en tout point de $\mathbb{R}$, et même uniformément sur tout compact. (Exercice **?**). Réciproquement

2.4.1 Théorème (Lévy-Cramér). *Soit (μ_n) une suite de $\mathfrak{M}(\mathbb{R})$. On suppose que la suite (φ_n) des transformées de Fourier converge en tout point :*

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(\tau) = \varphi(\tau),$$

et que la fonction limite φ est continue en 0. Alors la suite (μ_n) converge étroitement vers une mesure $\mu \in \mathfrak{M}(\mathbb{R})$ dont la transformée de Fourier est égale à φ.

Démonstration.
Posons

$$C = \sup_n \mu_n(\mathbb{R}) = \sup_n \varphi_n(0).$$

Alors

$$|\varphi_n(\tau)| \leq C, \ |\varphi(0)| \leq C.$$

Considérons les formes linéaires définies sur l'espace $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ qui tendent vers 0 à l'infini, par

$$L_n(f) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\mu_n(dt).$$

Alors

$$|L_n(f)| \leq C\|f\|_\infty.$$

D'après le Lemme de Riemann-Lebesgue la transformée de Fourier $\hat{g}$ d'une fonction $g \in L^1(\mathbb{R})$ appartient à $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, et

$$L_n(\hat{g}) = \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(t)\mu_n(dt) = \int_{\mathbb{R}} g(\tau)\hat{\mu}_n(\tau)d\tau.$$

D'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n\to\infty} L_n(\hat{g}) = \int_{\mathbb{R}} g(\tau)\varphi(\tau)d\tau.$$

En effet

$$|g(\tau)\varphi_n(\tau)| \leq C|g(\tau)|,$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(\tau) = \varphi(\tau).$$

Puisque $\mathfrak{F}\big(L^1(\mathbb{R})\big)$ est dense dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, la suite $L_n(f)$ est convergente. La limite $L(f)$ définit une forme linéaire positive sur $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. Du théorème de Riesz on déduit qu'il existe une mesure positive bornée μ sur $\mathbb{R}$ telle que, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$,

$$L(f) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\mu(dt).$$

Nous avons vu que, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(t)\mu_n(dt) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\mu(dt).$$

Il nous reste à montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(\mathbb{R}) = \mu(\mathbb{R}).$$

Considérons l'approximation de Poisson :

$$p_k(\tau) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+k^2\tau^2},\ \widehat{p_k}(t) = e^{\frac{|t|}{k}}.$$

Nous obtenons

$$L(\widehat{p_k}) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{p_k}(t)\mu(dt) = \int_{\mathbb{R}} p_k(\tau)\varphi(\tau)d\tau,$$

et, d'après le théorème de convergence monotone,

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \widehat{p_k}(t)\mu(dt) = \int_{\mathbb{R}} \mu(dt).$$

En effet

$$\widehat{p_k}(t) \leq \widehat{p_{k+1}}(t),$$

et

$$\lim_{k\to\infty} \widehat{p_k}(t) = 1.$$

D'autre part, puisque φ est continue en 0,

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} p_k(\tau)\varphi(\tau)d\tau = \varphi(0).$$

Donc

$$\mu(\mathbb{R}) = \varphi(0) = \lim_{n\to\infty} \widehat{\mu_n}(0) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(\mathbb{R}).$$

Finalement, de la relation

$$\int_{\mathbb{R}} g(\tau)\varphi(\tau)d\tau = \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(t)\mu(dt),$$

il résulte que φ est la transformée de Fourier de μ.

□

Une première application importante du théorème de Lévy-Cramér est le théorème de la limite centrale, aussi appellé théorème de Gauss-Laplace. Il concerne le comportement asymptotique de la suite μ^{*n} des puissances de convolution d'une mesure de probabilité μ.

2.4.2 Théorème (Gauss-Laplace). *Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ telle que*

$$\int_{\mathbb{R}} t^2\mu(dt) < \infty.$$

On note

$$M = \int_{\mathbb{R}} t\mu(dt),\ \ D = \int_{\mathbb{R}} (t-M)^2\mu(dt) = \int_{\mathbb{R}} t^2\mu(dt) - M^2.$$

Alors, pour $-\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty$,

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n\Big(\Big\{t\in\mathbb{R}\Big|\alpha < \frac{t-nM}{\sqrt{nD}} < \beta\Big\}\Big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_\alpha^\beta e^{-\frac{x^2}{2}}dx.$$

Exercice 22 :

Démontrer le théorème de Gauss-Laplace.

□

Indication

Considérer la suite des mesures ν_n définies par

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\nu_n(dx) = \int_{\mathbb{R}} f\Big(\frac{t-nM}{\sqrt{nD}}\Big)\mu_n(dt).$$

La transformée de Fourier de la mesure ν_n est égale à

$$\widehat{\nu_n}(\tau) = \theta_n(\tau)^n,$$

où
$$\theta_n(\tau) = e^{-i\tau\frac{M}{\sqrt{nD}}}\varphi\Big(\frac{\tau}{\sqrt{nD}}\Big),$$
et φ est la transformée de Fourier de μ. La démonstration consiste à montrer que
$$\lim_{n\to\infty}\widehat{\nu_n}(\tau) = e^{-\frac{\tau^2}{2}},$$
qui est la transformée de Fourier de la mesure gaussienne
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

$\square$

Dans le cas particulier où
$$\mu = p\delta_1 + q\delta_0,$$
où $0 < p < 1, q = 1-p$, alors
$$\mu_n = \mu^{*n} = (p\delta_1 + q\delta_0)^{*n} = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}p^kq^{n-k}\delta_k,$$
et on obtient le théorème de Moivre-Laplace qui s'énonce, puisque $M = p$, $D = pq$,
$$\lim_{n\to\infty}\Big(\Big\{t\in\mathbb{R}\Big|\alpha < \frac{t-np}{\sqrt{npq}} < \beta\Big\}\Big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_\alpha^\beta e^{-\frac{x^2}{2}}dx.$$

Exercice 23 :

Convergence vers la loi de Poisson. On note μ_n la puissance de convolution suivante
$$\mu_n = \Big(\frac{\lambda}{n}\delta_1 + \big(1-\frac{\lambda}{n}\big)\delta_0\Big)^{*n},$$
où λ est un paramètre positif. Montrer que la mesure μ_n converge étroitement vers la loi de Poisson de paramètre λ :
$$\lim_{n\to\infty}\mu_n = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\delta_k.$$

$\square$

Solution :

La transformée de Fourier de la mesure μ_n est égale à

$$\widehat{\mu_n}(\tau) = \Big(1 + \frac{\lambda}{n}(e^{i\tau} - 1)\Big)^n,$$

dont la limite est égale à

$$e^{\lambda(e^{i\tau}-1)} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{ik\tau}$$

qui est la transformée de Fourier de la loi de Poisson

$$e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \delta_k.$$

□

Notons $\mathfrak{P}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de type positif sur $\mathbb{R}$ et $\mathfrak{P}^1(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de celles qui vérifient $\varphi(0) = 1$. D'après le théorème de Bochner la transformation de Fourier établit une bijection de $\mathfrak{M}(\mathbb{R})$ sur $\mathfrak{P}(\mathbb{R})$, et de $\mathfrak{M}^1(\mathbb{R})$ sur $\mathfrak{P}^1(\mathbb{R})$. Soit μ_n une suite de mesures de $\mathfrak{M}(\mathbb{R})$ et notons φ_n leurs transformées de Fourier. La suite (μ_n) converge étroitement vers une mesure μ si et seulement si la suite (φ_n) converge vers la transformée de Fourier φ de μ uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$. C'est une conséquence du théorème de Lévy-Cramér.

If faut en effet noter ce fait remarquable : soit φ une fonction de type positif sur $\mathbb{R}$. Si φ est continue en 0, alors elle est continue sur $\mathbb{R}$. (Voir l'exercice 9.)

Exercice 24 :

Soient $M \subset \mathfrak{M}^1(\mathbb{R})$, et $P = \mathfrak{F}(M) \subset \mathfrak{P}^1(\mathbb{R})$. Montrer que l'ensemble M est relativement compact si et seulement si P est équicontinu en 0, c'est-à-dire que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall \varphi \in P,\ \forall \tau \in \mathbb{R},\ |\tau| \leq \eta,\ |\varphi(\tau) - \varphi(0)| \leq \varepsilon.$$

□

Indication

Utiliser le théorème de Ascoli-Arzela.

□

Chapitre 3

FORMULES DE MEHTA

3.1 Formule d'intégration de Weyl

Rappelons la notation : $H_n = Herm(n, \mathbb{F})$ est l'espace des matrices hermitiennes $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$, et $U_n = U(n, \mathbb{F})$ est le groupe des matrices unitaires $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{F}$. D'après le théorème spectral toute matrice $x \in H_n$ peut être diagonalisée dans une base orthonormée, et ses valeurs propres sont réelles. On peut l'exprimer en disant que l'application

$$U_n \times D_n \to H_n, \quad (u, a) \mapsto uau^*,$$

est surjective (D_n désigne l'espace des matrices diagonales réelles).

3.1.1 Théorème (Formule d'intégration de Weyl). *Si f est une fonction intégrable sur H_n,*

$$\int_{H_n} f(x) m_n(dx) = C_n \int_{D_n} \int_{U_n} f(uau^*) \alpha_n(du) |\Delta(a)|^\beta da_1 \ldots da_n,$$

où $a = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)$,

$$\Delta(a) =: \prod_{j<k} (a_k - a_j)$$

est le polynôme de Vandermonde, α_n est la mesure de Haar normalisée du groupe compact U_n, C_n est une constante positive, et $\beta = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{F} = 1, 2$ ou 4.

Si la fonction f est invariante par U_n :

$$f(uxu^*) = f(x) \quad (u \in U_n),$$

alors $f(x)$ ne dépend que valeurs propres de x :

$$f(x) = F(_1, \ldots, \lambda_n),$$

où F est une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ qui est symétrique :

$$F(\lambda_{\sigma(1)}, \ldots, \lambda_{\sigma(n)}) = F(\lambda_1, \ldots, \lambda_n),$$

si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, le groupe symétrique. Dans ce cas la formule d'intégration de Weyl se simplifie :

$$\int_{H_n} f(x) m_n(dx) = C_n \int_{\mathbb{R}^n} F(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) d\lambda_1 \ldots d\lambda_n.$$

3.2 La densité de la distribution statistique des valeurs propres

Soit Q une fonction continue à valeurs réelles sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \int_{\mathbb{R}} |t|^m e^{-Q(t)} dt < \infty.$$

On considère la mesure de probabilité $\mathbb{P}_n$ définie sur l'espace $H_n = Herm(n, \mathbb{F})$ des matrices hermitiennes par

$$\mathbb{P}_n(dx) = \frac{1}{a_n} e^{-\mathrm{tr}\big(Q(x)\big)} m(dx).$$

Précisons la définition de $Q(x)$. Si Q est un polynôme

$$Q(t) = \sum_{k=0}^{m} a_k t^k,$$

alors, pour $x \in H_n$,

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k \in H_n.$$

Si

$$x = u \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix} u^* \qquad \big(a_j \in \mathbb{R}, u \in U(n)\big),$$

alors

$$Q(x) = u \begin{pmatrix} Q(a_1) & & \\ & \ddots & \\ & & Q(a_n) \end{pmatrix} u^*.$$

Cette relation permet de définir $Q(x)$ pour toute fonction Q à valeurs réelles définie sur $\mathbb{R}$. La mesure de probabilité $\mathbb{P}_n$ est invariante par $U(n)$ agissant sur H_n par

$$T_u(x) = uxu^*.$$

Par suite, en utilisant la formule d'intégration de Weyl, elle s'exprime à l'aide des valeurs propres de x comme suit

$$\mathbb{P}_n(d\lambda) = q_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) d\lambda_1 \dots d\lambda_n,$$

où

$$q(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \frac{1}{Z_n} e^{-\sum_{i=1}^n Q(\lambda_i)} |\Delta(\lambda)|^\beta.$$

et

$$Z_n = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum_{i=1}^n Q(\lambda_i)} |\Delta(\lambda)|^\beta d\lambda_1 \dots \lambda_n.$$

Si f est une fonction sur H_n qui est invarainte par U_n,

$$f(uxu^*) = f(x),$$

$f(x)$ ne dépend que des valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de x,

$$f(x) = F(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

où F est une fonction symétrique. En particulier, si

$$f(x) = \frac{1}{n} \mathrm{tr}\big(\varphi(x)\big),$$

où φ est une fonction mesurable bornée sur $\mathbb{R}$, alors

$$f(x) = \frac{1}{n}\big(\varphi(\lambda_1) + \cdots + \varphi(\lambda_n)\big),$$

et

$$\begin{aligned} \int_{H_n} f(x) \mathbb{P}_n(dx) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\lambda_i) q_n(\lambda) d\lambda_1 \dots \lambda_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\lambda_1) q_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) d\lambda_1 \dots \lambda_n \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) w_n(t) dt, \end{aligned}$$

où
$$w_n(t) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} q_n(t, \lambda_2, \dots, \lambda_n) d\lambda_2 \dots d\lambda_n.$$
En particulier, si $\varphi = \chi_B$, la fonction caractéristique d'un ensemble borélien de $\mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{n}\big(\chi_B(\lambda_1) + \cdots + \chi_B(\lambda_n)\big) \\ &= \frac{1}{n}\sharp\{\text{valeurs propres } x \text{ dans } B\} = \xi_B^{(n)}(x), \end{aligned}$$
et
$$\mu_n(B) = \mathbb{E}\big(\xi_B^{(n)}\big) = \int_B w_n(t)dt.$$
Cela signifie que la mesure μ_n est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, de densité w_n.

Si $Q(t) = \gamma t^2$,
$$Z_n = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\gamma(\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_n^2)} |\Delta(\lambda)|^\beta d\lambda_1 \dots d\lambda_n.$$
Cette intégrale est appelée *intégrale de Mehta*. Son évaluation est en effet due à Mehta :
$$Z_n = \gamma^{-\frac{N}{2}} \pi^{\frac{n}{2}} 2^{-\frac{n(n-1)}{4}} \prod_{j=2}^{n} \Gamma\Big(j\frac{\beta}{2} + 1\Big),$$
où
$$N = \dim_{\mathbb{R}} Herm(n, \mathbb{F}) = n + \beta\frac{n(n-1)}{2}.$$
Lorsque $\beta = 2$ on retrouve l'évaluation obtenue à l'aide des formules de Heine (Exercice 5 du chapitre 2).

L'intégrale de Selberg est définie par
$$I_n(a,b,c) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \prod_{j=1}^{n} \big(x_j^{a-1}(1-x_j)^{b-1}\big) |\Delta(x)|^{2c} dx_1 \dots dx_n.$$
Elle a été évaluée par Selberg
$$I_n(a,b,c) = \prod_{j=1}^{n} \frac{\Gamma\big(a + (j-1)c\big)\Gamma\big(b + (j-1)c\big)\Gamma(1 + jc)}{\Gamma\big(a + b + (n+j-2)c\big)\Gamma(1+c)}.$$

Exercice 25 :

Évaluer l'intégrale de Mehta à partir de l'évaluation de l'intégrale de Selberg.

Indication Prendre $a = b$, poser

$$x_j = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{a}}\lambda_j,$$

et faire tendre a vers l'infini.

$\square$

Exercice 26 :

On pose

$$\mathcal{Z}_n = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-n(\lambda_1^2+\cdots+\lambda_n^2)}|\Delta(\lambda)|^\beta d\lambda_1^2 \dots d\lambda_n.$$

a) On suppose que $\beta = 2$. Déterminer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \ln \mathcal{Z}_n.$$

On montrera que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \ln \mathcal{Z}_n = -\Big(\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{3}{4}\Big).$$

Indication :

$$\mathcal{Z}_n = \Big(\frac{1}{n}\Big)^{\frac{n^2}{2}} Z_n.$$

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\frac{1}{n^2}\sum_{j=2}^{n} \ln j! - \ln n\Big) = \int_0^1 (1-x)\ln x dx = \frac{3}{4}.$$

$\square$

3.3 Formules de Mehta

On suppose que $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ($\beta = 2$). Considérons la suite des polynômes orthogonaux $p_0, \dots, p_m, \dots$ relativement à la mesure

$$e^{-Q(t)}dt,$$

normalisés par la condition

$$p_m(t) = t^m + \cdots ,$$

et posons

$$\varphi_m(t) = \frac{1}{\sqrt{d_m}} e^{-\frac{1}{2}Q(t)} p_m(t).$$

Rappelons que

$$d_m = \int_{\mathbb{R}} p_m(t)^2 e^{-Q(t)} dt.$$

Les fonctions φ_m sont orthonormées dans $L^2(\mathbb{R})$. Posons

$$\begin{aligned} K_n(s,t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_k(s)\varphi_k(t) \\ &= e^{-\frac{1}{2}\left(Q(s)+Q(t)\right)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{d_k} p_k(s)p_k(t). \end{aligned}$$

Au facteur exponentiel près, c'est le noyau de Christoffel-Darboux de la suite des polynômes $\{p_m\}$. C'est aussi le noyau du projecteur orthogonal de $L^2(\mathbb{R})$ sur le sous-espace engendré par $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}$.

Nous utiliserons la notation suivante qui a été introduite par Fredholm : Si $K(s,t)$ est un noyau,

$$K\begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \ldots & s_m \\ t_1 & t_2 & \ldots & t_m \end{pmatrix} = \det\bigl(K(s_i,t_j)\bigr)_{1\le i,j\le m}.$$

3.3.1 Proposition (Première formule de Mehta).

$$q_n(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) = \frac{1}{n!} K_n \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & \lambda_n \\ \lambda_1 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Démonstration.

Comme nous l'avons vu le déterminant de Vandermonde peut s'écrire

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} p_0(\lambda_1) & p_0(\lambda_2) & \ldots & p_0(\lambda_n) \\ p_1(\lambda_1) & p_1(\lambda_2) & \ldots & p_1(\lambda_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n-1}(\lambda_1) & p_{n-1}(\lambda_2) & \ldots & p_{n-1}(\lambda_n) \end{vmatrix}$$

D'après les propositions 2.3.1 et 2.3.2

$$Z_n = n! d_0 \ldots d_{n-1}.$$

Ainsi

$$q_n(\lambda) = \frac{1}{n!}\Bigl(\det\bigl(\varphi_i(\lambda_j)\bigr)\Bigr)^2,$$

où $0 \leq i \leq n-1$, $1 \leq j \leq n$. Considérons la matrice $A = \big(\varphi_i(\lambda_j)\big)$, et $B = A^T A$. Alors

$$\begin{aligned} b_{ij} &= \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_k(\lambda_i)\varphi_k(\lambda_j) \\ &= K_n(\lambda_i, \lambda_j). \end{aligned}$$

Le résultat annoncé s'en déduit.

□

3.3.2 Théorème (Deuxième formule de Mehta). *La densité de la distribution statistique des valeurs propres est égale à*

$$w_n(t) = \frac{1}{n} K_n(t,t) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_k(t)^2.$$

Démonstration.

Pour $1 \leq m \leq n$ la *fonction de corrélation* R_m est définie sur $\mathbb{R}^m$ par

$$R_m(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \frac{n!}{(n-m)!} \int_{\mathbb{R}^{n-m}} q_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_n) d\lambda_{m+1} \ldots d\lambda_n.$$

En particulier, pour $m = n$,

$$R_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = n! q_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n),$$

et, pour $m = 1$,

$$R_1(\lambda_1) = n \int_{\mathbb{R}^{n-1}} q_n(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) d\lambda_2 \ldots d\lambda_n = n w_n(\lambda_1).$$

Nous allons montrer par récurrence descendante sur m que

$$R_m(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = K_n \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & \lambda_m \\ \lambda_1 & \ldots & \lambda_m \end{pmatrix}.$$

Pour $m = n$ c'est la première formule de Mehta, et pour $m = 1$ c'est la deuxième formule de Mehta. Ce sera une conséquence du lemme suivant.

3.3.3 Lemme. *Soit K le noyau de la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{R})$ sur un sous-espace de dimension n.*

$$\int_{\mathbb{R}} K \left(\begin{array}{ccc} t_1 & \ldots & t_m \\ t_1 & \ldots & t_m \end{array} \right) dt_m = (n-m+1) K \left(\begin{array}{ccc} t_1 & \ldots & t_{m-1} \\ t_1 & \ldots & t_{m-1} \end{array} \right).$$

Démonstration.

Notons P cette projection. Le noyau possède les propriétés suivantes

- $K(t,s) = \overline{K(s,t)}$, puisque $P^* = P$,
- $\int_{\mathbb{R}} K(s,u)K(u,t)du = K(s,t)$, puisque $P \circ P = P$,
- $\int_{\mathbb{R}} K(t,t)dt = n$, puisque $\mathrm{tr}(P) = n$.

Notons A_m la matrice hermitienne $m \times m$ de coefficients

$$a_{ij} = K(t_i, t_j) \quad (1 \leq i, j \leq m).$$

Nous pouvons écrire

$$A_m = \begin{pmatrix} A_{m-1} & \alpha \\ \alpha^* & \gamma \end{pmatrix},$$

où

$$\alpha = \big(K(t_i, t_m)\big)\ (1 \leq i \leq m-1), \gamma = K(t_m, t_m).$$

Le déterminant de A_m peut être évalué comme suit

$$\det A_m = \det A_{m-1} \cdot \gamma - \alpha^* \tilde{A}_{m-1} \alpha,$$

où $\tilde{A}_{m-1}$ est la matrice des cofacteurs $\tilde{a}_{ij}$ de A_{m-1}. En intégrant par rapport à t_m nous obtenons

$$\int_{\mathbb{R}} K \begin{pmatrix} t_1 & \dots & t_m \\ t_1 & \dots & t_m \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} t_1 & \dots & t_{m-1} \\ t_1 & \dots & t_{m-1} \end{pmatrix} \int_{\mathbb{R}} K(t_m, t_m) dt_m \tag{3.1}$$

$$- \sum_{i,j=1}^{m-1} \tilde{a}_{ij} \int_{\mathbb{R}} K(t_j, t_m) K(t_m, t_i) dt_m \tag{3.2}$$

$$= nK \begin{pmatrix} t_1 & \dots & t_{m-1} \\ t_1 & \dots & t_{m-1} \end{pmatrix} - \sum_{i,j=1}^{m-1} \tilde{a}_{ij} K(t_j, t_i) \tag{3.3}$$

Puisque

$$\sum_{j=1}^{m-1} \tilde{a}_{ij} a_{ji} = \det A_{m-1},$$

nous obtenons finalement

$$\int_{\mathbb{R}} K \begin{pmatrix} t_1 & \dots & t_m \\ t_1 & \dots & t_m \end{pmatrix} dt_m = (n - m + 1) K \begin{pmatrix} t_1 & \dots & t_{m-1} \\ t_1 & \dots & t_{m-1} \end{pmatrix}.$$

□

Chapitre 4

THÉORÈME DE WIGNER, MÉTHODE DE FOURIER

Nous allons d'abord établir des relations classiques que vérifient les polynômes de Hermite et de Laguerre qui seront utilisées dans la démonstration du théorème de Wigner que nous présentons dans ce chapitre.

4.1 Formule de Mehler

Rappelons que les polynômes d'Hermite H_n sont définis par

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2}.$$

4.1.1 Proposition. (Formule de Mehler.) *Posons, pour* $|r| < 1$,

$$W_r(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k k!} H_k(x) H_n(y) r^k.$$

Alors

$$W_r(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 - r^2}} e^{-\frac{r^2(x^2+y^2)-2rxy}{1-r^2}}.$$

En particulier, pour $y = x$,

$$W_r(x, x) = \frac{1}{\sqrt{1 - r^2}} e^{\frac{2r}{1+r} x^2}.$$

Démonstration.

On part de la formule classique qui donne la transformée de Fourier de la fonction de Gauss :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{2ixu} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} du = e^{-x^2}.$$

En dérivant n fois cette relation par rapport à x on obtient

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2} = \int_{\mathbb{R}} (2iu)^n e^{2ixu} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} du.$$

Ainsi

$$H_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \int_{\mathbb{R}} (-2iu)^n e^{-u^2+2iux} du.$$

Par suite

$$W_r(x,y) = \frac{1}{\pi} e^{(x^2+y^2)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_{\mathbb{R}^2} (2ruv)^n e^{(-u^2-v^2+2iux+2ivy)} dudv.$$

Puisque

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} |2ruv|^n e^{-(u^2+v^2)} dudv &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(u^2+v^2-2|ruv|)} dudv \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(1-|r|)(u^2+v^2)} dudv \\
&= \frac{\pi}{1-|r|} < \infty,
\end{aligned}$$

on peut intervertir la sommation et l'intégrale, et on obtient

$$\begin{aligned}
W_r(x,y) &= \frac{1}{\pi} e^{(x^2+y^2)} \int_{\mathbb{R}^2} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (2ruv)^n \Big) e^{(-u^2-v^2+2iux+2ivy)} dudv \\
&= \frac{1}{\pi} e^{(x^2+y^2)} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(u^2+v^2+2ruv)} e^{2iux+2ivy} dudv.
\end{aligned}$$

Pour le calcul de cette intégrale nous utilisons le lemme suivant

4.1.2 Lemme. *Soit A une matrice symétrique définie positive sur $\mathbb{R}^n$.*

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-(A\xi|\xi)} e^{2i(x|\xi)} m(d\xi) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det A}} e^{-(A^{-1}x|x)}.$$

Ici $n = 2$ et

$$A = \begin{pmatrix} 1 & r \\ r & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice A est définie positive si $|r| < 1$,

$$\begin{aligned} \det A &= 1 - r^2, \\ A^{-1} &= \frac{1}{1-r^2} \begin{pmatrix} 1 & -r \\ -r & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned} W_r(x,y) &= e^{-(x^2+y^2)} \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{x^2+y^2-2rxy}{1-r^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{r^2(x^2+y^2)-2rxy}{1-r^2}}. \end{aligned}$$

$\square$

4.2 Polynômes de Laguerre

Pour $\alpha > -1$ le polynôme de Laguerre L_n^α est défini par

$$L_n^\alpha(x) = \frac{1}{n!} e^x x^{-\alpha} \Big(\frac{d}{dx}\Big)^n (e^{-x} x^{n+\alpha}).$$

En utilisant la formule de Leibnitz nous obtenons

$$\Big(\frac{d}{dx}\Big)^n (e^{-x} x^{n+\alpha}) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k e^{-x} (n+\alpha)(n+\alpha-1)\ldots(k+\alpha+1) x^{k+\alpha}.$$

Par suite

$$L_n^\alpha(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} (n+\alpha)(n+\alpha-1)\ldots(k+\alpha+1) x^k,$$

ce qu'on peut aussi écrire

$$L_n^\alpha(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^n}{k!(n-k)!} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)} x^k.$$

Notons que le coefficient de x^n est égal à

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Les polynômes de Laguerre L_n^α sont orthogonaux pour le produit scalaire défini sur l'espace des polynômes par

$$(p|q) = \int_0^\infty p(x)q(x)e^{-x}x^\alpha dx.$$

On obtient en effet en effectuant n intégrations par parties

$$\begin{aligned}\int_0^\infty L_n^\alpha(x)p(x)e^{-x}x^\alpha dx &= \frac{1}{n!}\int_0^\infty \Big(\frac{d}{dx}\Big)^n (e^{-x}x^{n+\alpha})p(x)dx \\ &= \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^\infty p^{(n)}(x)e^{-x}x^{n+\alpha}dx.\end{aligned}$$

Ainsi L_n^α est orthogonal à tout polynôme de degré $\leq n-1$. Puisque

$$\Big(\frac{d}{dx}\Big)^n L_n^\alpha(x) = (-1)^n,$$

on en déduit que

$$d_n = \int_0^\infty \big(L_n^\alpha(x)\big)^2 e^{-x}x^\alpha dx = \frac{1}{n!}\int_0^\infty e^{-x}x^{n+\alpha}dx = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}.$$

Les polynômes $\frac{1}{\sqrt{d_n}}L_n^\alpha$ constituent une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}^+, e^{-x}x^\alpha dx)$

4.2.1 Proposition (Fonction génératrice des polynômes de Laguerre). *Pour* $|r| < 1$*,*

$$\sum_{n=0}^\infty r^n L_n^\alpha(x) = \frac{1}{(1-r)^{\alpha+1}}e^{-\frac{r}{1-r}x}.$$

Démonstration.

Cette formule n'est autre que le développement d'une exponentielle dans la base des polynômes de Laguerre L_n^α. Le développement de $f(x) = e^{-ax}$ ($\mathrm{Re}\, a > 0$) s'écrit

$$f(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{c_n}{d_n}L_n^\alpha(x),$$

avec

$$c_n = \int_0^\infty f(x)L_n^\alpha(x)e^{-x}x^\alpha dx,$$

La convergence ayant lieu en moyenne quadratique relativement à la mesure $e^{-x}x^\alpha$. On montre que la convergence a lieu pour tout x. Déterminons les coefficients c_n en effectuant n intégrations par parties comme ci-dessus :

$$\begin{aligned}
c_n &= \int_0^\infty e^{-ax} L_n^\alpha(x) e^{-x} x^\alpha dx \\
&= \frac{1}{n!} \int_0^\infty e^{-ax} \Big(\frac{d}{dx}\Big)^n (e^{-x} x^{n+\alpha}) dx \\
&= \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^\infty \Big(\frac{d}{dx}\Big)^n (e^{-ax}) e^{-x} x^{n+\alpha} dx \\
&= \frac{a^n}{n!} \int_0^\infty e^{-(a+1)x} x^{n+\alpha} dx \\
&= \frac{a^n}{n!} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{(a+1)^{n+\alpha+1}}.
\end{aligned}$$

Par suite

$$e^{-ax} = \frac{1}{(a+1)^{\alpha+1}} \sum_{n=0}^\infty \Big(\frac{a}{a+1}\Big)^n L_n^\alpha(x).$$

Posons

$$r = \frac{a}{a+1},$$

alors $|r| < 1$, et on obtient

$$\sum_{n=0}^\infty r^n L_n^\alpha(x) = \frac{1}{(1-r)^{\alpha+1}} e^{-\frac{r}{1-r}x}.$$

□

Exercice 27 :

Pour $\mathrm{Re}\,\nu > -\frac{1}{2}(\alpha+1)$ la fonction $f(x) = x^\nu$ est de carré intégrable par rapport à la mesure $e^{-x}x^\alpha$. Montrer que

$$x^\nu = \Gamma(\nu+\alpha+1) \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{\nu(\nu-1)\ldots(\nu-n+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} L_n^\alpha(x).$$

□

Solution :

Le développement s'écrit

$$f(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{c_n}{d_n} L_n^\alpha(x),$$

avec
$$c_n = \int_0^\infty f(x) L_n^\alpha(x) e^{-x} x^\alpha dx.$$
En effectuant n intégrations par parties on obtient
$$\begin{aligned} c_n &= \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^\infty \nu(\nu-1)\dots(\nu-n+1) x^{\nu-n} e^{-x} x^{n+\alpha} dx \\ &= (-1)^n \frac{\nu(\nu-1)\dots(\nu-n+1)}{n!} \int_0^\infty e^{-x} x^{\nu+\alpha} dx \\ &= (-1)^n \frac{\nu(\nu-1)\dots(\nu-n+1)}{n!} \Gamma(\nu+\alpha+1). \end{aligned}$$
$\square$

4.3 Transformée de Fourier de la distribution statistique des valeurs propres

Nous supposons que $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ($\beta = 2$), et que $Q(t) = \gamma t^2$, c'est à dire que $\mathbb{P}_n$ est une probabilité gaussienne. Rappelons que la densité w_n de la mesure μ_n, la distribution statistique des valeurs propres, est donnée par (Théorème 4.3.2, deuxième formule de Mehta)
$$w_n(t) = \frac{1}{n} K_n(t,t) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_k(t)^2.$$
Nous allons déterminer sa transformée de Fourier. Nous allons d'abord déterminer la transformée de Fourier de
$$W_r(t) = \sum_{k=0}^\infty r^k \varphi_k(t)^2 \quad (|r| < 1).$$
Pour cela nous allons utiliser la formule de Mehler (Proposition 4.1.1) :
$$\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{2^k k!} H_k(x)^2 r^k = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} e^{2x^2 \frac{r}{1+r}}.$$
De cette formule nous déduisons que
$$W_r(t) = \sqrt{\frac{\gamma}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} e^{-\gamma \frac{1-r}{1+r} t^2}.$$

C'est une fonction gaussienne. Rappelons que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{it\tau} e^{-\alpha t^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\tau^2}{4\alpha}} \quad (\alpha > 0).$$

Dans le cas présent

$$\alpha = \gamma \frac{1-r}{1+r},$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} \widehat{W_r}(\tau) &= \int_{\mathbb{R}} e^{it\tau} W_r(t) dt \\ &= \frac{1}{1-r} e^{-\frac{1+r}{1-r}\frac{\tau^2}{4\gamma}} \\ &= e^{-\frac{\tau^2}{4\gamma}} \frac{1}{1-r} e^{-\frac{r}{1-r}\frac{\tau^2}{2\gamma}} \end{aligned}$$

En utilisant la formule donnant la fonction génératrice des polynômes de Laguerre (Proposition 4.2.1),

$$\sum_{k=0}^{\infty} L_k^{\alpha}(x) r^r = \frac{1}{(1-r)^{\alpha+1}} e^{-\frac{r}{1-r}x},$$

nous obtenons

$$\widehat{W_r}(\tau) = e^{-\frac{r^2}{4\gamma}} \sum_{k=0}^{\infty} r^k L_k^0\Big(\frac{\tau^2}{2\gamma}\Big).$$

Puisque W_r a été défini par la série

$$W_r(t) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k \varphi_k(t)^2,$$

nous en déduisons que

4.3.1 Proposition

$$\int_{\mathbb{R}} e^{it\tau} \varphi_k(t)^2 dt = e^{-\frac{\tau^2}{4\gamma}} L_k^0\Big(\frac{\tau^2}{2\gamma}\Big).$$

Nous allons maintenant déterminer la transformée de Fourier de

$$K_n(t,t) = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_k(t)^2.$$

Considérons le produit des deux séries de Taylor suivantes :

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{k=0}^{\infty} r^k\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(t)^2 r^k\Big) &= \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} \varphi_k(t)^2\Big) r^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} K_{n+1}(t,t) r^n,\end{aligned}$$

ou

$$\frac{1}{1-r} W_r(t) = \sum_{n=0}^{\infty} K_{n+1}(t,t) r^n.$$

D'autre part

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-r}\widehat{W_r}(\tau) &= e^{-\frac{\tau^2}{4\gamma}} \frac{1}{(1-r)^2} e^{-\frac{r}{1-r}\frac{\tau^2}{2\gamma}} \\ &= e^{-\frac{\tau^2}{4\gamma}} \sum_{n=0}^{\infty} r^n L_n^1\Big(\frac{\tau^2}{2\gamma}\Big).\end{aligned}$$

En identifiant les coefficients de r^n dans les deux membres on obtient :

4.3.2 Théorème. *La transformée de Fourier de la mesure μ_n, la distribution statistique des valeurs propres, est donnée par*

$$\widehat{\mu_n}(\tau) = \widehat{w_n}(\tau) = \frac{1}{n} e^{-\frac{\tau^2}{4\gamma}} L_{n-1}^1\Big(\frac{\tau^2}{4\gamma}\Big).$$

4.4 Convergence vers la loi du demi-cercle

Posons

$$F_\nu(\tau) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \int_{-1}^{1} e^{-it\tau}(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dt.$$

À un facteur simple près, c'est une fonction de Bessel :

$$J_\nu(\tau) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\Big(\frac{\tau}{2}\Big)^{\nu} F_\nu(\tau).$$

Le développement en série entière de F_ν s'écrit

$$F_\nu(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(k+\nu+1)} \frac{1}{k!}\Big(\frac{\tau}{2}\Big)^{2k}.$$

La transformée de Fourier de la loi du demi-cercle σ_a de rayon a est égale à

$$\frac{2}{\pi a^2}\int_{-a}^{a} e^{-it\tau}\sqrt{a^2-t^2}\,dt = F_1(a\tau).$$

4.4.1 Théorème (Wigner). *Après changement d'échelle la mesure μ_n converge étroitement quand n vers l'infini vers la loi du demi-cercle σ_a de rayon*

$$a = \sqrt{\frac{2}{\gamma}}.$$

Plus précisément, pour toute fonction continue bornée φ sur $\mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi\Big(\frac{t}{\sqrt{n}}\Big)\mu_n(dt) = \frac{2}{\pi a^2}\int_{-a}^{a} \varphi(u)\sqrt{a^2-u^2}du.$$

Démonstration.

D'après le théorème de Lévy-Cramér, il suffit de montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{\mu_n}\Big(\frac{\tau}{\sqrt{n}}\Big) = F_1(a\tau).$$

En utilisant le développement des polynômes de Laguerre nous obtenons

$$\begin{aligned}
\widehat{\mu_n}\Big(\frac{\tau}{\sqrt{n}}\Big) &= \frac{1}{n}e^{-\frac{\tau^2}{4\gamma n}} L^1_{n-1}\Big(\frac{\tau^2}{2\gamma n}\Big) \\
&= e^{-\frac{\tau^2}{4\gamma n}} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k c_k(n) \frac{1}{k!(k+1)!}\Big(\sqrt{\frac{2}{\gamma}}\frac{\tau}{2}\Big)^{2k},
\end{aligned}$$

avec

$$c_k(n) = \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-k)}{n^k}.$$

On remarque que $k \le n-1$, et que

$$\lim_{n\to\infty} c_k(n) = 1, \quad 0 \le c_k(n) \le 1.$$

La convergence de la série majorante

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(k+1)!} R^{2k}$$

permet le passage à la limite quand n tend vers l'infini :

$$\begin{aligned}
\widehat{\mu_n}\Big(\frac{\tau}{\sqrt{n}}\Big) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!(k+1)!}\Big(\sqrt{\frac{2}{\gamma}}\frac{\tau}{2}\Big)^{2k} \\
&= F_1\Big(\sqrt{\frac{2}{\gamma}}\tau\Big).
\end{aligned}$$

□

4.5 Les moments de la mesure μ_n

Du théorème 4.3.2 on déduit les moments de la mesure μ_n. En effet si la transformée de Fourier $\hat{\mu}$ d'une mesure de probabilité μ sur $\mathbb{R}$ est développable en série entière au voisinage de 0,

$$\hat{\mu}(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \tau^k,$$

alors le moment d'ordre k de μ est égal à

$$m_k(\mu) = i^k k! a_k.$$

Puisque

$$\begin{aligned} \widehat{\mu_n}(\tau) &= \frac{1}{n} e^{-\frac{\tau^2}{4\gamma}} L^1_{n-1}\Big(\frac{\tau^2}{2\gamma}\Big) \\ &= \frac{1}{n} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \Big(\frac{\tau^2}{4\gamma}\Big)^k\Big) \Big(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k+1} \Big(\frac{\tau^2}{2\gamma}\Big)^k\Big), \end{aligned} \tag{4.1}$$

nous obtenons

$$m_{2k}(\mu_n) = \frac{1}{n} \frac{1}{(2\gamma)^k} \frac{(2k)!}{2^k k!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \binom{n}{j+1} 2^j.$$

Nous vérifions bien que

$$m_{2k}(\mu_n) \sim \frac{1}{(2\gamma)^k} \frac{(2k)!}{k!(k+1)!} n^k \quad (n \to \infty).$$

Les nombres

$$c(k,n) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \binom{n}{j+1} 2^j$$

possèdent une fonction génératrice remarquable :

4.5.1 Proposition.

$$1 + 2\sum_{k=0}^{\infty} c(k,n) x^{k+1} = \Big(\frac{1+x}{1-x}\Big)^n.$$

Démonstration.

Nous allons l'établir en utilisant des propriétés des polynômes de Laguerre. Considérons la fonction

$$F(z) = \int_0^\infty \widehat{\mu_n}(\tau) e^{-z\tau^2} \tau d\tau.$$

Etant donnée la forme de la fonction $\widehat{\mu_n}$ (Théorème 4.3.2), la fonction F est une fraction rationnelle. Son développement de Laurent à l'infini s'écrit

$$F(z) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k m_{2k}(\mu_n) \frac{k!}{(2k)!} \frac{1}{z^{k+1}}.$$

C'est en effet une conséquence du lemme suivant.

4.5.2 Lemme *Soit q une fonction exponentielle-polynôme dont le développement de Taylor sécrit*

$$q(u) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k u^k.$$

Sa transformée de Laplace

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-zu} q(u) du$$

est une fraction rationnelle dont le développement de Laurent à l'infini s'écrit

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{k!}{z^{k+1}}.$$

Démonstration.

Cela se vérifie facilement si

$$q(u) = e^{au} u^n,$$

auquel cas

$$f(z) = \frac{n!}{(z-a)^{n+1}},$$

et le résultat annoncé s'en déduit par linéarité. □

Remarque Ce résultat s'obtient formellement par une intégration terme à terme, mais celle-ci n'est pas justifiée.

Calculons maintenant la dérivée de la fonction F :

$$F'(z) = -\int_0^\infty \widehat{\mu_n}(\tau)e^{-z\tau^2}\tau^3 d\tau.$$

D'après le théorème 5.3.2

$$F'(z) = -\frac{1}{n}\int_0^\infty e^{-\frac{\tau^2}{4\gamma}} L_{n-1}^1\Big(\frac{\tau^2}{2\gamma}\Big)e^{-z\tau^2}\tau^3 d\tau.$$

Posons $\tau^2 = 2\gamma u$, et alors $\tau d\tau = \gamma du$. Ainsi

$$F'(z) = -2\gamma^2 \frac{1}{n}\int_0^\infty e^{-(2\gamma z+\frac{1}{2})u} L_{n-1}^1(u)udu.$$

Nous avons vu dans la section 2 que

$$\int_0^\infty e^{-au}L_n^\alpha(u)e^{-u}u^\alpha du = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}\frac{a^n}{(a+1)^{n+\alpha+1}}.$$

Par suite

$$F'(z) = -2\gamma^2\frac{(2\gamma z-\frac{1}{2})^{n-1}}{(2\gamma z+\frac{1}{2})^{n+1}},$$

et donc

$$F(z) = -\frac{\gamma}{n}\Big(\frac{2\gamma z-\frac{1}{2}}{2\gamma z+\frac{1}{2}}\Big)^n + C.$$

De ce que $\lim_{z\to\infty} F(z) = 0$, on déduit que $C = \frac{\gamma}{n}$, et

$$F(z) = \frac{\gamma}{n}\bigg(1-\Big(\frac{2\gamma z-\frac{1}{2}}{2\gamma z+\frac{1}{2}}\Big)^n\bigg).$$

Nous avons finalement obtenu l'identité

$$\Big(\frac{2\gamma z-\frac{1}{2}}{2\gamma z+\frac{1}{2}}\Big)^n = 1-\frac{n}{2\gamma}\sum_{k=0}^\infty(-1)^k m_{2k}(\mu_n)\frac{k!}{(2k)!}\frac{1}{z^{k+1}}.$$

Tenant compte de ce que

$$m_{2k}(\mu_n) = \frac{1}{n}\frac{1}{(2\gamma)^k}\frac{(2k)!}{2^k k!}c(k,n),$$

et prenant

$$x = -\frac{1}{4\gamma z},$$

cette identité s'écrit

$$\Big(\frac{1+x}{1-x}\Big)^n = 1+2\sum_{k=0}^\infty c(k,n)x^{k+1}.$$

□

Chapitre 5

TRANSFORMATION DE CAUCHY

5.1 Définition

La transformée de Cauchy d'une mesure de probabilité μ sur $\mathbb{R}$ est la fonction holomorphe G_μ définie sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ par

$$G_\mu(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z-t} \mu(dt).$$

Elle possède les propriétés suivantes (on note $z = x + iy$) :

$$\begin{aligned}
&\overline{G_\mu(z)} = G_\mu(\bar{z}), \\
&\operatorname{Im} G_\mu(z) \leq 0 \text{ si } y > 0, \\
&\lim_{y \to \pm\infty} zG_\mu(z) = 1, \\
&|G_\mu(z)| \leq \frac{1}{|y|}.
\end{aligned}$$

La fonction G_μ est en fait définie et holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \operatorname{supp}(\mu)$.

5.1.1 Proposition *Si le support de la mesure μ est compact sa transformée de Cauchy G_μ est holomorphe à l'infini. Plus précisément, si* $\operatorname{supp}(\mu) \subset$ $[-R, R]$*, alors le développement de Laurent à l'infini de G_μ converge pour $|z| > R$:*

$$G_\mu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} m_n \frac{1}{z^{n+1}},$$

où m_n est le moment d'ordre n de μ :

$$m_n = \int_{\mathbb{R}} t^n \mu(dt).$$

□

Démonstration.

En effet, pour $|z| > R$,

$$G_\mu(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{t}{z}} \mu(dt) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z} \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \big(\frac{t}{z}\big)^n \Big) \mu(dt).$$

Puisque, pour $t \in \mathrm{supp}(\mu)$,

$$\Big| \Big(\frac{t}{z}\Big)^n \Big| \leq \Big(\frac{R}{|z|}\Big)^n,$$

la série peut être intégrée terme à terme :

$$G_\mu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} \int_{\mathbb{R}} t^n \mu(dt).$$

□

5.1.2 Théorème (Formule d'inversion) *Soient μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$, et G_μ sa transformée de Cauchy :*

$$G_\mu(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z - t} \mu(dt) \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}).$$

Si f est une fonction continue bornée sur $\mathbb{R}$, alors

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\mu(dt) = - \lim_{\varepsilon \to 0, \varepsilon > 0} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(t) \mathrm{Im}\, G_\mu(t + i\varepsilon) dt.$$

Démonstration.

Soit p_ε l'approximation de Poisson

$$p_\varepsilon(t) = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{t^2 + \varepsilon^2} \qquad (\varepsilon > 0),$$

et posons

$$f_\varepsilon(t) = \int_{\mathbb{R}} p_\varepsilon(t - s) f(s) ds.$$

Pour tout t,
$$\lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(t) = f(t).$$
(La limite est uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}$.) En utilisant le théorème de Fubini on obtient, pour $\varepsilon > 0$,
$$-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} f(t)\mathrm{Im}\, G_\mu(t+i\varepsilon)dt = \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(t)\mu(dt).$$
Par suite, en utilisant le théorème de convergence dominée, on obtient
$$-\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} f(t)\mathrm{Im}\, G_\mu(t+i\varepsilon)dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)\mu(dt).$$
□

Si la mesure μ ne charge pas les points a et b : $\mu(\{a\}) = 0$, $\mu(\{b\}) = 0$, on peut montrer que
$$\mu([a,b]) = -\lim_{\varepsilon\to 0,\varepsilon>0}\frac{1}{\pi}\int_a^b \mathrm{Im}\, G_\mu(x+i\varepsilon)dt.$$

Exercice 28 :

On considère la mesure de probabilité μ sur $\mathbb{R}$ définie par
$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\mu(dt) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt.$$
(a et b sont deux nombres réels, $a < b$.) Montrer que la transformée de Cauchy G_μ de μ est égale à
$$G_\mu(z) = \frac{1}{b-a}\log\frac{z-a}{z-b}.$$
(On précisera la détermination du logarithme.)

□

Exercice 29 :

Montrer que la transformée de Cauchy G_a de la loi de Cauchy μ_a ($a > 0$), définie par
$$\mu_a(dt) = \frac{1}{\pi}\frac{a}{t^2+a^2},$$
est égale à
$$G_a(z) = \frac{1}{z+ia} \text{ si } y > 0,\ G(z) = \frac{1}{z-ia} \text{ si } y < 0.$$

$\square$

Exercice 30 :

Soit μ la mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ définie par

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\mu(dt) = \frac{1}{\pi}\int_a^b f(t)\frac{dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}}$$

(a et b sont deux nombres réels, $a < b$). Montrer que la transformée de Cauchy G_μ de μ est donnée par

$$G_\mu(z) = \frac{1}{\sqrt{(z-a)(z-b)}}.$$

(On précisera la détermination de la racine carrée.)

$\square$

En particulier, pour $a = -1$, $b = 1$,

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\mu(dt) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^1 f(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},$$

et μ est la loi de l'arcsinus. Sa transformée de Cauchy est

$$G_\mu(z) = \frac{1}{\sqrt{z^2-1}}.$$

En utilisant le développement

$$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2\ell-1)}{2^\ell \ell!}u^{2\ell} \quad (|u|<1),$$

on obtient, pour $|z| > 1$,

$$G_\mu(z) = \frac{1}{z}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{z^2}}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1\cdot 2\cdots(2\ell-1)}{2^\ell \ell!}\frac{1}{z^{2\ell+1}}.$$

On retrouve ainsi les moments de la loi de l'arcsinus :

$$m_{2\ell} = \frac{1\cdot 3\cdots(2\ell-1)}{2^\ell \ell!}, \quad m_{2\ell+1} = 0.$$

Solution :

Pour $z \in \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$ posons

$$q(z) = \sqrt{\rho} e^{i\frac{\theta}{2}},$$

si $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$, $-\pi < \theta < \pi$. La fonction q est holomorphe. La fonction R définie pour $z \in \mathbb{C} \setminus]-\infty, b]$ par

$$R(z) = q(z-a)q(z-b)$$

est holomorphe, et, pour $x < a$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0, \varepsilon > 0} R(x + i\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0, \varepsilon > 0} R(x - i\varepsilon).$$

Par suite R se prolonge en une fonction holomorphe pour $z \in \mathbb{C} \setminus [a, b]$. Pour $|u| < 1$, la fonction $\sqrt{1-u} = q(1-u)$ est bien définie. La fonction Q définie pour $|z| < M = \sup(|a|, |b|)$ par

$$Q(z) = z\sqrt{1 - \frac{a}{z}}\sqrt{1 - \frac{b}{z}}$$

est holomorphe, et, pour $x > M$,

$$Q(x) = R(x).$$

Donc, pour $|z| > M$,

$$R(z) = z\sqrt{1 - \frac{a}{z}}\sqrt{1 - \frac{b}{z}}.$$

Notons $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ la sphère de Riemann. Pour $z \notin [a, b]$ fixé, la fonction f :

$$f(w) = \frac{1}{z-w} \frac{1}{\sqrt{(w-a)(w-b)}}$$

est méromorphe sur $\overline{\mathbb{C}} \setminus [a, b]$. Elle admet un pôle simple en $w = z$ de résidu

$$-\frac{1}{\sqrt{(z-a)(z-b)}},$$

et est holomorphe à l'infini.

Soit γ_ε le bord du compact

$$K_\varepsilon = \{w \in \mathbb{C} \mid d(w, [a, b]) \leq \varepsilon\} \quad (\varepsilon > 0).$$

On considèrera γ_ε comme le bord orienté d'un ensemble compact de la sphère de Riemann $\overline{\mathbb{C}}$, complémentaire de l'intérieur de K_ε. Considérons l'intégrale curviligne

$$I(z) = \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{1}{z-w} \frac{dw}{\sqrt{(w-a)(w-b)}}.$$

D'après le théorème des résidus

$$I(z) = -2i\pi \frac{1}{\sqrt{(z-a)(z-b)}}.$$

En faisant tendre ε vers 0 on obtient

$$I(z) = 2iG_\mu(z).$$

En effet

$$\lim_{\varepsilon\to 0, \varepsilon>0} \sqrt{(t \pm i\varepsilon - a)(t \pm i\varepsilon - b)} = \pm i\sqrt{(t-a)(b-t)},$$

et, si h est une fonction holomorphe dans un voisinage U de $[a, b]$, et si $K_\varepsilon \subset U$, on montre à l'aide du théorème de convergence dominée que

$$\int_{\gamma_\varepsilon} h(w) \frac{dw}{\sqrt{(w-a)(w-b)}} = -2i \int_a^b h(t) \frac{dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}}.$$

□

Exercice 31 :

Pour $a > 0$, considérons la loi du demi-cercle μ de rayon a définie par : pour toute fonction mesurable bornée φ,

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\mu(dt) = \frac{2}{\pi a^2} \int_{-a}^{a} \varphi(t)\sqrt{a^2 - t^2}dt.$$

Montrer que la transformée de Cauchy de μ

$$G_\mu(z) = \frac{2}{\pi a^2} \int_{-a}^{a} \frac{1}{z-t}\sqrt{a^2 - t^2}dt,$$

est égale à

$$G_\mu(z) = \frac{2}{a^2}\Big(z - \sqrt{z^2 - a^2}\Big).$$

□

Solution :

Considérons la fonction holomorphe f définie dans $\mathbb{C} \setminus [-a, a]$ par

$$f(z) = \sqrt{z^2 - a^2}.$$

Son développement de Laurent à l'infini s'écrit

$$f(z) = z\sqrt{1 - \frac{a^2}{z^2}} = z - \frac{a}{2z} + \cdots$$

Pour z fixé, la fonction F :

$$F(w) = \frac{1}{z-w}\sqrt{w^2 - a^2}$$

est méromorphe dans $\overline{\mathbb{C}} \setminus [-a, a]$. Elle admet un pôle simple en $w = z$, de résidu $-\sqrt{z^2 - a^2}$, et en $w = \infty$, de résidu z.

Comme pour l'exercice précédent on note γ_ε le bord du compact

$$K_\varepsilon = \{w \in \mathbb{C} \mid d(w, [-a, a]) \leq \varepsilon\} \qquad (\varepsilon > 0),$$

et on considère γ_ε comme le bord orienté d'un compact de la sphère de Riemann $\overline{\mathbb{C}}$. Considérons l'intégrale curviligne

$$I(z) = \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{1}{z-w}\sqrt{w^2 - a^2}dw.$$

D'après le théorème des résidus

$$I(z) = 2i\pi(z - \sqrt{z^2 - a^2}).$$

Et, quand ε tend vers 0, on obtient

$$I(z) = 2i\int_{-a}^{a} \frac{1}{z-t}\sqrt{a^2 - t^2}dt.$$

□

En utilisant le développement

$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} + \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-3)}{k!}\Big(\frac{u}{2}\Big)^k,$$

on obtient

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{2}{a^2}\big(z - \sqrt{z^2 - 2}\big) = \frac{2z}{a^2}\Big(1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{z^2}}\Big) \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2\ell-1)}{(\ell+1)!}\Big(\frac{a^2}{2}\Big)^\ell\frac{1}{z^{2\ell+1}}. \end{aligned}$$

On retrouve ainsi l'évaluation des moments de la loi du demi-cercle :

$$m_{2\ell}(\mu) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2\ell - 1)}{(\ell + 1)!} \Big(\frac{a^2}{2}\Big)^{\ell},$$

et $m_{2\ell+1} = 0$.

5.2 Caractérisation des transformées de Cauchy, fonctions de Pick

On note $\mathfrak{M}^1(\mathbb{R})$ l'ensemble des mesures de probabilité sur $\mathbb{R}$. Nous le munissons de la topologie de la convergence étroite. Notons aussi $\mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions G holomorphes sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ possèdant les propriétés suivantes

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & \overline{G(z)} = G(\bar{z}), \\ \text{(ii)} & \operatorname{Im} G(z) \leq 0 \text{ si } y > 0, \\ \text{(iii)} & \lim\limits_{y \to \infty} iyG(iy) = 1. \end{array}$$

5.2.1 Théorème *La transformation de Cauchy G est une bijection de $\mathfrak{M}^1(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$.*

Nous aurons besoin de préliminaires pour démontrer ce théorème.

a) *Théorème de Riesz-Herglotz.*

5.2.2 Théorème *Soit F une fonction holomorphe dans le disque unité $\{|w| < 1\}$. On suppose que*

$$\operatorname{Re} F(w) \geq 0.$$

Alors il existe une mesure positive σ sur le cercle unité $\mathbb{U} \simeq \mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et une constante réelle β telles que

$$F(w) = i\beta + \int_{\mathbb{T}} \frac{e^{i\theta} + w}{e^{i\theta} - w} \sigma(d\theta).$$

Notons que $\beta = \operatorname{Im} F(0)$.

Démonstration. Pour $0 < r < 1$ on définit la forme linéaire L_r sur l'espace $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ des fonctions continues sur $\mathbb{T}$ par

$$L_r(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \varphi(\theta) \operatorname{Re} F(re^{i\theta}) d\theta.$$

On va montrer que, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, $L_r(\varphi)$ a une limite quand r tend vers 1. Considérons le développement de Taylor de f :

$$F(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n,$$

alors

$$\operatorname{Re} F(re^{i\theta}) = \operatorname{Re} a_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n e^{in\theta} + \bar{a}_n e^{-in\theta}).$$

Si φ est un polynôme trigonométrique,

$$\varphi(\theta) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\theta},$$

alors

$$L_r(\varphi) = \operatorname{Re} a_0 c_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=-N}^{N} r^n (a_n c_{-n} + \bar{a}_n c_n),$$

et

$$\lim_{r \to 1} L_r(\varphi) = \operatorname{Re} a_0 c_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=-N}^{N} (a_n c_{-n} + a_{-n} c_n).$$

D'autre part, puisque $\operatorname{Re} F(re^{i\theta}) \geq 0$,

$$|L_r(\varphi)| \leq \|\varphi\|_\infty \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \operatorname{Re} F(re^{i\theta}) d\theta = \operatorname{Re} a_0 \ \|\varphi\|_\infty.$$

En utilisant le théorème de Weierstrass on déduit que, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, $L_r(\varphi)$ a une limite quand r tend vers 1. On note

$$L(\varphi) = \lim_{r \to 1} L_r(\varphi).$$

La forme linéaire L est positive, dans le sens que, si $\varphi \geq 0$, alors $L(\varphi) \geq 0$. D'après le théorème de Riesz, il existe une mesure positive σ sur $\mathbb{T}$ telle que

$$L(\varphi) = \int_{\mathbb{T}} \varphi(\theta) \sigma(d\theta).$$

Notons que

$$\operatorname{Re} a_0 = \int_{\mathbb{T}} \sigma(d\theta),$$

et que, pour $n \geq 1$,

$$a_n = 2 \int_{\mathbb{T}} e^{-in\theta} \sigma(d\theta).$$

Pour $|w| < 1$,
$$1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} w^n e^{-in\theta} = \frac{e^{i\theta}+w}{e^{i\theta}-w},$$
la convergence étant uniforme en θ. Par suite
$$\begin{aligned} F(w) &= i\beta + \operatorname{Re} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n w^n \\ &= i\beta + \int_{\mathbb{T}} \Big(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} w^n e^{-in\theta}\Big)\sigma(d\theta) \\ &= i\beta + \int_{\mathbb{T}} \frac{e^{i\theta}+w}{e^{i\theta}-w}\sigma(d\theta). \end{aligned}$$

b) *Théorème de Nevanlinna.*

On appelle *fonction de Pick* une fonction holomorphe f définie sur le demi-plan $\operatorname{Im} z > 0$ vérifiant $\operatorname{Im} f(z) \geq 0$.

5.2.3 Théorème *Soit f une fonction de Pick. Il existe une mesure positive bornée ν sur $\mathbb{R}$, et des constantes $a \geq 0$, $b \in \mathbb{R}$ telles que*
$$f(z) = az + b + \int_{\mathbb{R}} \frac{1+tz}{t-z}\nu(dt).$$

Démonstration. Ce théorème se déduit du théorème 5.2.2 par la transformation de Cayley :
$$z = i\frac{1+w}{1-w}, \ \ w = \frac{z-i}{z+i},$$
qui est un isomorphisme holomorphe du disque unité sur le demi-plan supérieur. On pose
$$F(w) = -if\Big(i\frac{1+w}{1-w}\Big).$$
La fonction F est holomorphe dans le disque unité, et $\operatorname{Re} F(w) \geq 0$. Il existe donc une mesure $\sigma \geq 0$ sur $\mathbb{T}$ et une constante réelle β telles que
$$F(w) = i\beta + \int_{\mathbb{T}} \frac{e^{i\theta}+w}{e^{i\theta}-w}\sigma(d\theta).$$

Notons ν l'image par l'application
$$\mathbb{T} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad \theta \mapsto t = i\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = -i\mathrm{cotg}\,\frac{\theta}{2},$$

de la restriction à $\mathbb{T} \setminus \{0\}$ de la mesure σ. Nous obtenons, en posant $a = \sigma(\{0\})$, $b = -\beta$,

$$F(w) = -ib + a\frac{1+w}{1-w} + \int_{\mathbb{T}\setminus\{0\}} \frac{e^{i\theta}+w}{e^{i\theta}-w}\sigma(d\theta),$$

et

$$\begin{aligned} f(z) &= b + az + \int_{\mathbb{T}\setminus\{0\}} \frac{z\operatorname{cotg}\frac{\theta}{2} - 1}{\operatorname{cotg}\frac{\theta}{2} + z}\sigma(d\theta) \\ &= b + az + \int_{\mathbb{R}} \frac{1+tz}{t-z}\nu(dt). \end{aligned}$$

5.2.4 Corollaire *Soit f une fonction holomorphe dans le demi-plan $y > 0$. On suppose que* $\operatorname{Im} f(z) \geq 0$*, et que*

$$\limsup_{y\to\infty} y|f(iy)| < \infty.$$

Alors il existe une mesure positive bornée μ sur $\mathbb{R}$ telle que

$$f(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu(dt)}{t-z}.$$

De plus

$$\lim_{y\to\infty} iyf(iy) = -\mu(\mathbb{R}).$$

Démonstration. D'après le théorème 5.2.3

$$f(z) = az + b + \int_{\mathbb{R}} \frac{1+tz}{t-z}\nu(dt),$$

où ν est une mesure bornée, $a \geq 0$, $b \in \mathbb{R}$. On en déduit que

$$y \operatorname{Im} f(iy) = ay^2 + \int_{\mathbb{R}} \frac{y^2}{t^2+y^2}(1+t^2)\nu(dt).$$

Il existe $\alpha > 0$ et $M > 0$ tels que, si $y \geq \alpha$, alors

$$y \operatorname{Im} f(iy) \leq M.$$

Il en résulte que $a = 0$, et, en utilisant le théorème de convergence monotone, quand $y \to \infty$, que

$$\int_{\mathbb{R}} (1+t^2)\nu(dt) \leq M.$$

D'autre part
$$y\,\mathrm{Re}\, f(iy) = y\Big(b - \int_{\mathbb{R}} \frac{y^2-1}{t^2+y^2} t\nu(dt)\Big).$$
En utilisant le théorème de convergence dominée on en déduit que
$$b = \int_{\mathbb{R}} t\nu(dt).$$
Finalement, en posant $\mu(dt) = (1+t^2)\nu(dt)$, on obtient
$$\begin{aligned} f(z) &= \int_{\mathbb{R}} t\nu(dt) + \int_{\mathbb{R}} \frac{1+tz}{t-z}\nu(dt) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t-z}\mu(dt). \end{aligned}$$
□

Le théorème 5.2.1 s'en déduit.

La démonstration de Pastur du théorème de Wigner que nous verrons au chapitre 8 utilise le théorème suivant.

5.2.5 Théorème *Soit μ_n une suite de mesures de probabilité sur $\mathbb{R}$. On note G_n la transformée de Cauchy de μ_n :*
$$G_n(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu_n(dt)}{z-t}.$$
On suppose que, pour tout z, $\mathrm{Im}\, z > 0$,
$$\lim_{n\to\infty} G_n(z) = G(z),$$
et que la fonction G vérifie
$$\forall z, \mathrm{Im}\, z > 0,\ \lim_{y\to\infty} iyG(iy) = 1.$$
Alors la suite μ_n converge étroitement vers une mesure de probabilité μ dont G est la transformée de Cauchy.

Démonstration.
Soit $\alpha > 0$. Pour tout n, et pour $\mathrm{Im}\, z \geq \alpha$,
$$|G_n(z)| \leq \frac{1}{\alpha}.$$

On en déduit que la fonction G est holomorphe. De plus $\operatorname{Im} G(z) \leq 0$ si $\operatorname{Im} z > 0$. D'après le corollaire 5.2.4, la fonction G est la transformée de Cauchy d'une mesure de probabilité μ :

$$G(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu_n(dt)}{z-t}.$$

Ainsi, pour $\operatorname{Im} z > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu_n(dt)}{z-t} = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu(dt)}{z-t}.$$

Par linéarité il en résulte que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\mu_n(dt) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\mu(dt),$$

pour toute fonction φ de la forme

$$\varphi(t) = a + \sum_{i=1}^{N} b_i \frac{1}{t-z_i}.$$

Or l'espace des fonctions de cette forme est dense dans l'espace $\mathcal{C}(\bar{\mathbb{R}})$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ ayant une limite à l'infini. Notons en effet $\mathcal{R}$ l'algèbre des fractions rationnelles

$$\varphi(t) = \frac{p(t)}{q(t)},$$

où p et q sont deux polynômes, $\deg p \leq \deg q$, et n'ayant pas de pôle réel. Du théorème de Weierstrass on déduit que $\mathcal{R}$ est dense dans $\mathcal{C}(\bar{\mathbb{R}})$, et une fraction rationnelle de $\mathcal{R}$ peut être approchée uniformément par des fractions rationnelles n'ayant que des pôles simples, non réels. Par suite, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}(\bar{\mathbb{R}})$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\mu_n(dt) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\mu(dt).$$

Ceci implique que la suite μ_n converge étroitement vers μ.

$\square$

Chapitre 6

POTENTIEL LOGARITHMIQUE, ÉNERGIE, MESURE D'ÉQUILIBRE

6.1 Introduction

Considérons l'intégrale

$$\mathcal{Z}_n = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-n\big(Q(\lambda_1+\cdots+Q(\lambda_n)\big)} |\Delta(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)|^\beta d\lambda_1 \ldots d\lambda_n,$$

où Δ est le polynôme de Vandermonde :

$$\Delta(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \prod_{i<j} (\lambda_j - \lambda_i).$$

Cette intégrale apparaît comme facteur de normalisation dans la définition de la mesure de probabilité $\mathbb{P}_n$ sur $Herm(n, \mathbb{F})$ ($\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$) exprimée en termes des valeurs propres en utilisant la formule de Weyl ; $\beta = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{F} = 1, 2$ ou 4. La fonction Q est continue ≥ 0, et tend vers l'infini quand $\lambda \to \infty$. Plus précisément on supposera que

$$\lim_{\lambda \to \pm\infty} \Big(Q(\lambda) - \frac{\beta}{2} \log(\lambda^2 + 1)\Big) = \infty.$$

On s'intéresse au comportement asymptotique de $\mathcal{Z}_n$. Nous verrons au chapitre suivant que

$$E = -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \log \mathcal{Z}_n$$

existe.

Considérons le cas le plus simple, le cas d'une probabilité gaussienne sur $Herm(n, \mathbb{C})$: $Q(\lambda) = \lambda^2$, $\beta = 2$. Dans ce cas on peut calculer $\mathcal{Z}_n$ explicitement (Exercice 5 du chapitre 2). En tenant compte du facteur d'échelle n dans l'exponentielle, on obtient

$$\mathcal{Z}_n = n! d_0 \dots d_{n-1} n^{-\frac{n^2}{2}},$$

où

$$d_k = 2^{-k} k! \sqrt{\pi}.$$

Cela peut s'écrire

$$\log \mathcal{Z}_n = \frac{n-1}{2} \log \pi - \frac{n(n-1)}{2} \log 2 + \sum_{k=2}^{n} (n-k+1) \log k - \frac{n^2}{2} \log n.$$

Par suite

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \log \mathcal{Z}_n &= -\frac{1}{2} \log 2 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} \Big(1 - \frac{k-1}{n}\Big) \log \frac{k}{n} \\ &= -\frac{1}{2} \log 2 + \int_0^1 (1-x) \log x dx \\ &= -\frac{1}{2} \log 2 - \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Ainsi dans ce cas

$$E = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \log 2.$$

Exercice 32 :

Si $Q(\lambda) = \gamma t^2$ ($\gamma > 0$), et $\beta > 0$ quelconque,

$$\mathcal{Z}_n = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-n\gamma(\lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2)} |\Delta(\lambda)|^\beta d\lambda_1 \dots d\lambda_n.$$

Cette intégrale est appelée *intégrale de Mehta*. Nous l'avons évaluée dans la section 2 du chapitre 3 :

$$\mathcal{Z}_n = (\gamma n)^{-\frac{N}{2}} \pi^{\frac{n}{2}} 2^{-\frac{n(n-1)}{4}} \prod_{j=2}^{n} \Gamma\Big(j\frac{\beta}{2} + 1\Big),$$

où

$$N = n + \beta\frac{n(n-1)}{2}.$$

Déterminer la limite

$$E = -\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\log\mathcal{Z}_n.$$

$\square$

Indication On pourra utiliser la *formule de Stirling*

$$\log\Gamma(x+1) = x\log x - x + \frac{1}{2}\log x + \frac{1}{2}\log(2\pi) + o(1).$$

On montrera que

$$E = \frac{\beta}{4}\log 4\frac{\gamma}{\beta} + \frac{3}{8}\beta.$$

$\square$

Pour traiter le cas général on utilise une méthode analogue à la méthode de Laplace. Une intégrale de Laplace est une intégrale dépendant d'un paramètre de la forme suivante

$$I(\tau) = \int_X e^{-\tau\varphi(x)}a(x)dx.$$

Pour les grandes valeurs de τ ce sont les voisinages des points où la fonction φ atteint son minumum qui contribuent le plus à cette intégrale.

L'intégrale qui définit $\mathcal{Z}_n$ peut s'écrire comme suit

$$\mathcal{Z}_n = \int_{\mathbb{R}^n}\exp -n^2\Big(\frac{\beta}{2}\frac{1}{n^2}\sum_{i\neq j}\log\frac{1}{|\lambda_i-\lambda_j|} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Q(\lambda_i)\Big)d\lambda_i\dots d\lambda_n.$$

À un point $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n$ on associe la mesure de probabilité

$$\mu_\lambda = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\delta_{\lambda_i}.$$

Ceci conduit à introduire, pour une mesure de probabilité μ sur $\mathbb{R}$, la quantité

$$I(\mu) = \frac{\beta}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\log\frac{1}{|s-t|}\mu(ds)\mu(dt) + \int_{\mathbb{R}} Q(t)\mu(dt),$$

qu'on appelle *énergie* de la mesure μ. Heuristiquement l'exposant dans l'intégrale que nous venons d'écrire pour $\mathcal{Z}_n$ serait $-n^2I(\mu_\lambda)$. Nous verrons en fait que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\log\mathcal{Z}_n = -E,$$

où E est le minimum de l'énergie :

$$E = \inf_{\mu \in \mathfrak{M}^1(\mathbb{R})} I(\mu).$$

6.2 Energie, mesure d'équilibre

Soit Q une fonction continue ≥ 0 sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{x \to \pm\infty} \big(Q(x) - \log(x^2 + 1)\big) = +\infty.$$

C'est en particulier le cas si Q est un polynôme de degré pair, ≥ 0 sur $\mathbb{R}$. Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$. L'*énergie* $I(\mu)$ de μ est définie par

$$I(\mu) = \int_{\mathbb{R}^2} \log \frac{1}{|x-y|} \mu(dx)\mu(dy) + \int_{\mathbb{R}} Q(x)\mu(dx).$$

Nous alons montrer que l'énergie $I(\mu)$ est bien définie, et que $-\infty < I(\mu) \leq \infty$. Posons

$$H(x) = Q(x) - \log(x^2 + 1).$$

La fonction H est continue et $\lim_{x \to \pm\infty} H(x) = \infty$. Elle est donc bornée inférieurement. Soit m sa borne inférieure

$$m = \min_{x \in \mathbb{R}} H(x).$$

Posons

$$K(x, y) = \log \frac{1}{|x-y|} + \frac{1}{2}Q(x) + \frac{1}{2}Q(y).$$

De l'inégalité

$$|x - y| \leq \sqrt{x^2 + 1}\sqrt{y^2 + 1},$$

il résulte que

$$K(x, y) \geq \frac{1}{2}H(x) + \frac{1}{2}H(y) \geq m.$$

Puisque l'énergie $I(\mu)$ s'écrit

$$I(\mu) = \int_{\mathbb{R}^2} K(x, y)\mu(dx)\mu(dy),$$

elle est bien définie et

$$m \leq I(\mu) \leq \infty.$$

Le *potentiel logarithmique* d'une mesure μ est la fonction U^μ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$U^\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} \log \frac{1}{|x-y|} \mu(dy).$$

Ainsi

$$I(\mu) = \int_{\mathbb{R}} U^\mu(x)\mu(dx) + \int_{\mathbb{R}} Q(x)\mu(dx).$$

6.2.1 Proposition *Si $\mu(dx) = f(x)dx$, où f est une fonction continue à support compact, alors $I(f) = I(\mu) < \infty$.*

Démonstration. Puisque la fonction $\log|x|$ est localement intégrable, la fonction F définie par

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{\mathbb{R}} \log \frac{1}{|x-y|} f(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x-y) \log \frac{1}{|y|} dy, \end{aligned}$$

est continue sur $\mathbb{R}$.

$\square$

6.2.2 Proposition *Si μ_n est une suite de mesures de probabilité qui converge étroitement vers μ, alors*

$$I(\mu) \leq \liminf_{n\to\infty} I(\mu_n).$$

Démonstration. Pour $\ell > 0$, on note K^ℓ le noyau tronqué au niveau ℓ :

$$K^\ell(x,y) = \inf\big(K(x,y), \ell\big).$$

Le noyau K^ℓ est continu et borné. Puisque $K^\ell \leq K$, pour tout n,

$$\int_{\mathbb{R}^2} K^\ell(x,y)\mu_n(dx)\mu_n(dy) \leq I(\mu_n).$$

La suite des mesures $\mu_n \otimes \mu_n$ converge étroitement vers $\mu \otimes \mu$, donc

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} K^\ell(x,y)\mu_n(dx)\mu_n(dy) = \int_{\mathbb{R}^2} K^\ell(x,y)\mu(dx)\mu(dy).$$

En prenant les limites inférieures des deux membres extrêmes de l'inégalité on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^2} K^\ell(x,y)\mu(dx)\mu(dy) \leq \liminf_{n\to\infty} I(\mu_n).$$

Faisons tendre ℓ vers l'infini. Du théorème de convergence monotone il résulte que

$$I(\mu) = \int_{\mathbb{R}^2} K(x,y)\mu(dx)\mu(dy) \leq \liminf_{n\to\infty} I(\mu_n).$$

$\square$

Cette proposition exprime que l'application

$$\mathfrak{M}^1(\mathbb{R}) \to]-\infty, \infty], \quad \mu \mapsto I(\mu),$$

est semi-continue inférieurement.

6.2.3 Proposition *Soit μ une mesure de Radon réelle sur $\mathbb{R}$ de support compact et d'intégrale nulle. Alors*

$$\int_{\mathbb{R}^2} \log \frac{1}{|x-y|}\mu(dx)\mu(dy) = \int_0^\infty \frac{|\hat{\mu}(t)|^2}{t} dt,$$

où $\hat{\mu}$ est la transformée de Fourier de la mesure μ,

$$\hat{\mu}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\mu(dx).$$

Démonstration. (a) Posons, pour $\varepsilon > 0$,

$$F_\varepsilon(x) = \int_0^\infty e^{-\varepsilon t}\frac{1-\cos tx}{t} dt.$$

On peut dériver cette intégrale sous le signe somme :

$$F_\varepsilon'(x) = \int_0^\infty e^{-\varepsilon t} \sin tx \, dt = \frac{x}{\varepsilon^2 + x^2}.$$

Donc

$$F_\varepsilon(x) = \frac{1}{2}\log(\varepsilon^2 + x^2) + C,$$

et, puisque

$$F_\varepsilon(0) = 0, \; C = -\frac{1}{2}\log \varepsilon^2 = -\log \varepsilon,$$

et finalement

$$F_\varepsilon(x) = \log \sqrt{\varepsilon^2 + x^2} - \log \varepsilon.$$

(b) Si μ est une mesure de Radon réelle de support compact et d'intégrale nulle, alors

$$\hat{\mu}(0) = 0, \; \hat{\mu}(-t) = \overline{\hat{\mu}(t)},$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^2} \log\Big(\big((x-y)^2+\varepsilon^2\big)^{\frac{1}{2}}\Big)\mu(dx)\mu(dy) = -\int_0^\infty e^{-\varepsilon t}\frac{|\hat{\mu}(t)|^2}{t}dt.$$

En décomposant la mesure μ en différence de deux mesures positives,

$$\mu = \mu^+ - \mu^-,$$

cette relation s'écrit

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^2} \log\Big(\big((-y)^2+\varepsilon^2\big)^{-\frac{1}{2}}\Big)\big(\mu^+(dx)\mu^+(dy+\mu^-(dx)\mu^-(dy)\big) \\ = \ & \int_{\mathbb{R}^2} \log\Big(\big((-y)^2+\varepsilon^2\big)^{-\frac{1}{2}}\Big)\big(\mu^+(dx)\mu^-(dy)+\mu^-(dx)\mu^+(dy)\big) \\ + \ & \int_0^\infty e^{-\varepsilon t}\frac{|\hat{\mu}(t)|^2}{t}dt. \end{aligned}$$

Faisons tendre ε vers 0 ; on peut appliquer à chacune des intégrales le théorème de convergence monotone. On remarque pour cela que

$$\log\Big(\big((-y)^2+\varepsilon^2\big)^{-\frac{1}{2}}\Big) \uparrow \log\frac{1}{|x-y|},$$

en restant borné inférieurement sur le support de μ uniformément en ε par

$$A = \log\frac{1}{R}, \text{ avec } R = \sup_{x,y\in supp(\mu)} \sqrt{(x-y)^2+1}.$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^2} \log\frac{1}{|x-y|}\big(\mu^+(dx)\mu^+(dy)+\mu^-(dx)\mu^-(dy)\big) \\ = \ & \int_{\mathbb{R}^2} \log\frac{1}{|x-y|}\big(\mu^+(dx)\mu^-(dy)+\mu^-(dx)\mu^+(dy)\big) \\ + \ & \int_0^\infty \frac{|\hat{\mu}(t)|^2}{t}dt. \end{aligned}$$

□

Remarque

Cette proposition exprime que le noyau

$$\log\frac{1}{|x-y|}$$

est *conditionnellement de type positif.*

On pose

$$E = \inf\{I(\mu) \mid \mu \in \mathfrak{M}^1(\mathbb{R})\}.$$

Notons que $m \leq E < \infty$ (où, rappelons-le, $m = \inf H(x)$).

6.2.4 Théorème *Il existe une mesure de probabilité unique μ telle que*

$$I(\mu) = E.$$

Cette mesure est à support compact.

Cette mesure μ, que nous noterons μ_e, s'appelle *mesure d'équilibre.*

Démonstration.

(a) *Existence*

Soit $C > E$. Montrons que l'ensemble

$$M_C = \{\mu \in \mathfrak{M}^1(\mathbb{R}) \mid I(\mu) \leq C\}$$

est compact. Puisque l'application $\mu \mapsto I(\mu)$ est semi-continue inférieurement, l'ensemble M_C est fermé. D'autre part

$$K(x,y) \geq \frac{1}{2}H(x) + \frac{1}{2}H(y),$$

donc

$$\int_{\mathbb{R}} H(x)\mu(dx) \leq I(C),$$

et, si $\mu \in M_C$,

$$\int_{\mathbb{R}} H(x)\mu(dx) \leq C.$$

Ceci montre que M_C est compact (Corollaire 2.3.2). La fonction semi-continue inférieurement

$$\mu \mapsto I(\mu)$$

y atteint donc sa borne inférieure : il existe une mesure $\mu \in \mathfrak{M}^1(\mathbb{R})$ telle que

$$I(\mu) = E.$$

(b) Soit μ une mesure de probabilité telle que $I(\mu) = E$. Nous allons montrer que le support de μ est compact. Soit A un ensemble borélien, et soit χ sa fonction caractéristique. Posons

$$\mu_t = \frac{1 + t\chi}{1 + t\mu(A)}\mu.$$

Pour $-1 < t < 1$ c'est une mesure de probabilité. Son énergie est égale à

$$I(\mu_t) = \int_{\mathbb{R}^2} K(x,y) \frac{\big(1+t\chi(x)\big)\big(1+t\chi(y)\big)}{\big(1+t\mu(A)\big)^2} \mu(dx)\mu(dy).$$

Puisque $\mu_0 = \mu$, le minimum de $I(\mu_t)$ est atteint en $t = 0$, donc

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} I(\mu_t) = 0.$$

Calculons cette dérivée :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} I(\mu_t) \quad &= \int_{\mathbb{R}^2} K(x,y)\big(\chi(x)+\chi(y)\big)\mu(dx)\mu(dy) \\ &-2\mu(A) \int_{\mathbb{R}^2} K(x,y)\mu(dx)\mu(dy). \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité

$$K(x,y) \geq \frac{1}{2}H(x) + \frac{1}{2}H(y),$$

on en déduit que

$$2\mu(A)I(\mu) \geq \int_A H(x)\mu(dx) + \mu(A)\int_{\mathbb{R}} H(x)\mu(dx),$$

ou

$$\int_A \Big(H(y) + \int_{\mathbb{R}} H(x)\mu(dx) - 2I(\mu)\Big)\mu(dy) \leq 0.$$

Puisque la fonction H tend vers l'infini à l'infini, il existe $\alpha > 0$ tel que, si $|y| > \alpha$,

$$H(y) + \int_{\mathbb{R}} H(x)\mu(dx) - 2I(\mu) > 0.$$

Prenons $A = \mathbb{R} \setminus [-\alpha, \alpha]$, alors $\mu(A) = 0$, c'est à dire que le support de μ est contenu dans $[-\alpha, \alpha]$.

(c) *Unicité.*

La fonction

$$\mu \mapsto I(\mu)$$

définie sur l'ensemble $\mathfrak{M}_c^1(\mathbb{R})$ des mesures de probabilité sur $\mathbb{R}$ de support compact est strictement convexe. En effet soient $\mu_0, \mu_1 \in \mathfrak{M}_c(\mathbb{R})$ ($\mu_0 \neq \mu_1$). Pour $0 \leq t \leq 1$ posons

$$\mu_t = (1-t)\mu_0 + t\mu_1.$$

Alors

$$I(\mu_t) = at^2 + bt + c,$$

avec

$$\begin{aligned}
a &= \int_{\mathbb{R}^2} \log \frac{1}{|x-y|} \nu(dx)\nu(dy) \quad (\nu = \mu_0 - \mu_1), \\
b &= \int_{\mathbb{R}} \big(U^\mu(x) + Q(x)\big)\nu(dx), \\
c &= I(\mu_0).
\end{aligned}$$

D'après la proposition 6.2.3 le nombre a est > 0, donc la fonction $t \mapsto I(\mu_t)$ est strictement convexe : pour $0 < t < 1$,

$$I(\mu_t) < (1-t)I(\mu_0) + tI(\mu_1).$$

L'unicité s'en déduit. $\square$

6.3 Caractérisation de la mesure d'équilibre

Rappelons que le potentiel logarithmique d'une mesure μ est la fonction U^μ définie par

$$U^\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} \log \frac{1}{|x-y|} \mu(dy).$$

6.3.1 Théorème *La mesure d'équilibre $\mu = \mu_e$ est caractérisée par la propriété suivante : il existe une constante C telle que*

(i) *Pour toute mesure de probabilité ν de support compact et d'énergie finie*

$$\int_{\mathbb{R}} \big(2U^\mu(x) + Q(x)\big)\nu(dx) \geq C,$$

(ii) *Presque partout relativement à μ,*

$$2U^\mu(x) + Q(x) = C.$$

Démonstration. (a) Soit ν une mesure de probabilité de support compact et d'énergie finie. Pour $0 \leq t \leq 1$, posons

$$\mu_t = (1-t)\mu + t\nu = \mu + t(\nu - \mu).$$

Alors

$$I(\mu_t) = at^2 + bt + c$$

atteint son minimum en $t = 0$, donc

$$b = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} I(\mu_t) \geq 0.$$

Ceci se traduit par

$$\int_{\mathbb{R}} \big(2U^\mu(x) + Q(x)\big)\nu(dx) \geq C,$$

avec

$$C = \int_{\mathbb{R}} \big(2U^\mu(x) + Q(x)\big)\mu(dx).$$

(b) Posons

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2U^\mu(x) + Q(x) < C\}.$$

Nous allons montrer que, pour toute mesure de probabilité ν de support compact et d'énergie finie, $\nu(B) = 0$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $\nu(B) > 0$. Posons

$$B_n = \{x \in \mathbb{R} \mid 2U^\mu(x) + Q(x) < C - \frac{1}{n}\}.$$

Notons que

$$\lim_{n\to\infty} \nu(B_n) = \nu(B),$$

donc $\nu(B_n) > 0$ pour n assez grand. Posons

$$\nu_n = \frac{\chi_{B_n}}{\nu(B_n)}\nu.$$

D'après (a)

$$\int_{\mathbb{R}} \big(2U^\mu(x) + Q(x)\big)\nu_n(dx) \geq C,$$

mais ceci est impossible puisque, sur B_n,

$$2U^\mu(x) + Q(x) \leq C - \frac{1}{n}.$$

Donc $\nu(B) = 0$. En particulier pour $\nu = \mu$, $\mu(B) = 0$. Par suite

$$\int_{\mathbb{R}\setminus B} \big(2U^\mu(x) + Q(x)\big)\mu(dx) = C,$$

ou

$$\int_{\mathbb{R}\setminus B} \big(2U^\mu(x) + Q(x) - C\big)\mu(dx) = 0.$$

Or, sur $\mathbb{R} \setminus B$,

$$2U^\mu(x) + Q(x) - C \geq 0.$$

Par suite

$$2U^\mu(x) + Q(x) = C \quad \mu - p.p.$$

(c) Soit μ une mesure de probabilité de support compact et d'énergie finie. On suppose qu'il existe une constante C pour laquelle les conditions (i) et (ii) soient vérifiées. En écrivant $\mu_e = \mu + (\mu_e - \mu)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} I(\mu_e) \quad &= I(\mu) + \int_{\mathbb{R}} \big(2U^\mu(x) + Q(x)\big)(\mu_e - \mu)(dx) \\ &+ \int_{\mathbb{R}^2} \log\frac{1}{|x-y|}(\mu_e - \mu)(dx)(\mu_e - \mu)(dy). \end{aligned}$$

Des propriétés (i) et (ii) il résulte que

$$\int_{\mathbb{R}} \big(2U^\mu(x) + Q(x)\big)(\mu_e - \mu)(dx) \geq 0,$$

et de la proposition 5.2.3 que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \log\frac{1}{|x-y|}(\mu_e - \mu)(dx)(\mu_e - \mu)(dy) \geq 0.$$

Donc $I(\mu) \leq I(\mu_e)$, et en raison de l'unicité de la mesure d'équilibre $\mu = \mu_e$.

$\square$

6.3.2 Corollaire *Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, de support $[a, b]$, positive sur $]a, b[$, et d'intégrale égale à un,*

$$\int_a^b f(x)dx = 1.$$

Supposons qu'il existe une constante C telle que

(i) *Pour tout x*

$$2U^f(x) + Q(x) \geq C.$$

(ii) *Pour $a < x < b$*

$$2U^f(x) + Q(x) = C.$$

Alors $\mu_e(dx) = f(x)dx$.

6.4 Détermination de la mesure d'équilibre

Nous allons présenter une méthode d'analyse complexe pour déterminer la mesure d'équilibre. En particulier, lorsque $Q(x) = \gamma x^2$, nous montrerons que la mesure d'équilibre a une densité : $\mu_e(dx) = f(x)dx$, où

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2}{\pi a^2}\sqrt{a^2 - x^2} \text{ si } |x| \leq a, \\ &= 0 \text{ sinon,} \end{aligned}$$

où $a = \sqrt{\frac{2}{\gamma}}$. C'est la loi du demi-cercle.

Nous supposons que la mesure d'équilibre μ_e a une densité,

$$\mu_e(dx) = f(x)dx,$$

où f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ de support $[a,b]$, positive sur $]a,b[$, d'intégrale égale à un.

La dérivée au sens des distributions de la fonction localement intégrable $\log|x|$ est la distribution $vp\frac{1}{x}$. Le symbole vp signifie *valeur principale* :

$$\langle vp\frac{1}{x}, \varphi\rangle = vp\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x}dx := \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}dx.$$

Par suite la dérivée au sens des distributions de U^f est égale au produit de convolution $-vp\frac{1}{x} * f$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}U^\mu(x) &= -\big(vp\frac{1}{x} * f\big)(x) \\ &= -vp\int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{x-t}dt. \end{aligned}$$

Ainsi en dérivant la condition (ii) du corollaire 6.3.2 nous obtenons

$$-2\big(vp\frac{1}{x} * f\big) + Q'(x) = 0 \quad \text{sur }]a,b[.$$

6.4.1 Proposition *Soit h une fonction définie sur $\mathbb{R}$, de support contenu dans $[a,b]$. Il existe une unique fonction F holomorphe dans $\mathbb{C}\setminus[a,b]$ telle que*

$$\begin{aligned} &\lim_{y\to 0, y>0}\big(F(x+iy) - F(x-iy)\big) = h(x), \\ &\lim_{z\to\infty} F(z) = 0. \end{aligned}$$

La fonction F est donnée par

$$F(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{h(t)}{t-z}dt.$$

Démonstration. En effet

$$\begin{aligned} F(x+iy)-F(x-iy) &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{R}} h(t)\Big(\frac{1}{t-x-iy}-\frac{1}{t-x+iy}\Big)dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} h(t)\frac{y}{(t-x)^2+y^2}dt. \end{aligned}$$

De la propriété d'approximation de l'identité du noyau de Poisson on déduit que

$$\lim_{y\to 0, y>0}\big(F(x+iy)-F(x-iy)\big) = h(x).$$

La propriété d'unicité se déduit du théorème de Liouville. □

(à revoir)

6.4.2 Théorème (Pastur) *On suppose que Q est un polynôme de degré pair $2k$, convexe sur $\mathbb{R}$. La mesure d'équilibre est de la forme suivante*

$$\mu_e(dx) = f(x)dx,$$

où f est la fonction continue de support $[a,b]$ définie par, si $a \leq x \leq b$,

$$f(x) = \frac{1}{\pi}q(x)\sqrt{(x-a)(b-x)},$$

où q est le polynôme de degré $2k-2$ défini par

$$q(z) = \frac{1}{2\pi}\int_a^b \frac{Q'(z)-Q'(t)}{z-t}\frac{dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}},$$

les nombres a et b étant déterminés par les conditions

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{Q'(t)}{\sqrt{(t-a)(b-t)}}dt &= 0, \\ \int_a^b \frac{tQ'(t)}{\sqrt{(t-a)(b-t)}}dt &= 2\pi \end{aligned}$$

Démonstration. Nous cherchons la mesure μ_e de la forme

$$\mu_e(dx) = f(x)dx,$$

où f est une fonction continue de support $[a,b]$. Considérons sa transformée de Cauchy :

$$G(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{z-t}dt.$$

Pour étudier les limites de G sur l'axe réel, écrivons

$$\begin{aligned} G(x+iy) &= \int_{\mathbb{R}} f(t)\frac{x-t}{(x-t)^2+y^2}dt \\ &- i\int_{\mathbb{R}} f(t)\frac{y}{(x-t)^2+y^2}dt. \end{aligned}$$

On en déduit que, pour $a<x<b$,

$$\begin{aligned} \lim_{y\to 0, y>0} G(x\pm iy) &= \big(\mathrm{vp}\frac{1}{x} * f\big)(x) \mp i\pi f(x) \\ &= \frac{1}{2}Q'(x) \mp i\pi f(x). \end{aligned}$$

La fonction R,

$$R(z) = \sqrt{(z-a)(z-b)},$$

est holomorphe dans $\mathbb{C}\setminus[a,b]$. La détermination de la racine carrée est choisie de telle sorte que $R(z)>0$ si z est réel $>b$. Observons que, si $a<x<b$,

$$\lim_{y\to 0, y>0} R(x\pm iy) = \pm i\sqrt{(x-a)(b-x)}.$$

La fonction $\tilde{G}$ définie par

$$\tilde{G}(z) = \frac{G(z)}{R(z)},$$

est holomorphe dans $\mathbb{C}\setminus[a,b]$, et, si $a<x<b$,

$$\lim_{y\to 0, y>0}\big(\tilde{G}(x+iy)-\tilde{G}(x-iy)\big) = -i\frac{Q'(x)}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}.$$

D'après la proposition 6.4.1,

$$\tilde{G}(z) = \frac{1}{2\pi}\int_a^b \frac{1}{z-t}\frac{Q'(t)}{\sqrt{(t-a)(b-t)}}dt,$$

que nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \tilde{G}(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_a^b \frac{Q'(t)-Q'(z)}{z-t}\frac{dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}} \\ &+ Q'(z)\frac{1}{2\pi}\int_a^b \frac{1}{z-t}\frac{dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}}. \end{aligned}$$

Posons

$$q(z) = \frac{1}{2\pi}\int_a^b \frac{Q'(z)-Q'(t)}{z-t}\frac{dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}}.$$

C'est un polynôme de degré $2k-2$ qui est >0 sur $\mathbb{R}$ puisque Q est convexe. Nous avons vu (exercice 3 du chapitre 5) que

$$\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z-t}\frac{dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}} = \frac{1}{R(z)}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\tilde{G}(z) &= -q(z) + \frac{Q'(z)}{2R(z)},\\ G(z) &= -q(z)R(z) + \frac{1}{2}Q'(z).\end{aligned}$$

Considérons le développement de Laurent à l'infini de $\tilde{G}$:

$$\tilde{G}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n+1}},$$

avec

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_a^b \frac{t^n Q'(t)}{\sqrt{(t-a)(b-t)}}dt.$$

Pour obtenir les premiers termes du développement de Laurent de R à l'infini on écrit

$$R(z) = \sqrt{(z-a)(z-b)} = z\sqrt{1-\frac{a}{z}}\sqrt{1-\frac{b}{z}}.$$

En utilisant

$$\sqrt{1-u} = 1 - \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \cdots ,$$

on obtient

$$\begin{aligned}R(z) &= z\Big(1-\frac{1}{2}\frac{a}{z}-\frac{1}{8}\frac{a^2}{z^2}+\cdots\Big)\Big(1-\frac{1}{2}\frac{b}{z}-\frac{1}{8}\frac{a^2}{z^2}+\cdots\Big)\\ &= z - \frac{a+b}{2} - \frac{(a-b)^2}{8}\frac{1}{z} + \cdots ,\end{aligned}$$

et finalement

$$G(z) = \tilde{G}(z)R(z) = a_0 + \Big(a_1 - a_0\frac{a+b}{2}\Big)\frac{1}{z} + \cdots$$

Puisque

$$\lim_{z\to\infty} zG(z) = 1,$$

on en déduit que

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_a^b \frac{Q'(t)}{\sqrt{(t-a)(b-t)}}dt = 0,\\
a_1 &= \frac{1}{2\pi}\int_a^b \frac{tQ'(t)}{\sqrt{(t-a)(b-t)}}dt = 1.
\end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
&\lim_{y\to 0, y>0} G(x+iy)\\
&= q(x)\sqrt{(x-a)(x-b)} - \frac{1}{2}Q'(x), \text{ si } x < a,\\
&= -iq(x)\sqrt{(x-a)(b-x)} - \frac{1}{2}Q'(x), \text{ si } a \leq x \leq b,\\
&= -q(x)\sqrt{(x-a)(x-b)} - \frac{1}{2}Q'(x), \text{ si } x > b.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
f(x) &= -\frac{1}{\pi}\lim_{y\to 0, y>0} \operatorname{Im} G(x+iy)\\
&= \frac{1}{\pi}q(x)\sqrt{(x-a)(b-x)}, \text{ si } a \leq x \leq b,\\
&= 0, \text{ sinon.}
\end{aligned}$$

On en déduit aussi que

$$\begin{aligned}
\big(vp\frac{1}{x} * f\big)(x) &= -\frac{1}{2}\lim_{y\to 0, y>0} \operatorname{Re} G(x+iy)\\
&= -q(x)\sqrt{(x-a)(x-b)} + \frac{1}{2}Q'(x), \text{ si } x < a,\\
&= \frac{1}{2}Q'(x), \text{ si } a \leq x \leq b,\\
&= q(x)\sqrt{(x-a)(x-b)} + \frac{1}{2}Q'(x), \text{ si } x > b.
\end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned}
2\frac{d}{dx}U^f(x) + Q'(x) &= -2q(x)\sqrt{(x-a)(x-b)}, \text{ si } x < a,\\
&= 0, \text{ si } a \leq x \leq b,\\
&= 2q(x)\sqrt{(x-a)(x-b)}, \text{ si } x > b.
\end{aligned}$$

Finalement il existe une constante C telle que

$$2U^f(x) + Q(x) = C \text{ si } a \leq x \leq b,$$

et

$$2U^f(x) + Q(x) \geq C \text{ si } x < a \text{ ou } x > b.$$

$\square$

Exemple 1

Si $Q(x) = \gamma x^2$ ($\gamma > 0$), alors $Q'(x) = 2\gamma x$, et

$$\frac{Q'(z) - Q'(t)}{z - t} = 2\gamma,$$

si bien que

$$q(z) = \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}} = \gamma.$$

Les nombres a et b sont déterminés par

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{2\gamma t}{\sqrt{(t-a)(b-t)}} dt &= 0, \\ \int_a^b \frac{2\gamma t^2}{\sqrt{(t-a)(b-t)}} dt &= 2\pi. \end{aligned}$$

Or

$$\frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{t dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}} = \frac{a+b}{2},$$

donc $a = -b$, et

$$\frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{t^2}{\sqrt{(t-a)(b-t)}} dt = \frac{3}{8}(a^2 + b^2) + \frac{1}{4} ab = \frac{1}{2} a^2,$$

donc

$$\frac{\gamma}{2} a^2 = 1, \ a = -\sqrt{\frac{2}{\gamma}}, \ b = \sqrt{\frac{2}{\gamma}}.$$

6.4.3 Corollaire *Si $Q(x) = \gamma x^2$, la mesure d'équilibre μ_e est la loi du demi-cercle de rayon*

$$a = \sqrt{\frac{2}{\gamma}}.$$

Elle a pour densité

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2}{\pi a^2} \sqrt{a^2 - x^2}, \text{ si } |x| \leq a, \\ &= 0 \text{ sinon.} \end{aligned}$$

Nous allons déterminer l'énergie d'équilibre dans le cas où $Q(x) = \gamma x^2$. Nous allons d'abord calculer la constante C qui intervient dans le théorème 5.3.1.

Le *potentiel logarithmique* d'une mesure de probabilité μ sur $\mathbb{R}$ est défini par

$$U^\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} \log \frac{1}{|x-y|} \mu(dy).$$

Supposons que le support de la mesure μ soit compact, et soit $A > 0$ tel que $\mathrm{supp}(\mu) \subset [-A, A]$. Par intégration terme à terme du développement en série entière du logarithme nous obtenons, pour $x > A$,

$$\begin{aligned} U^\mu(x) &= -\log x - \int_{\mathbb{R}} \log\Big(1 - \frac{y}{x}\Big)\mu(dy) \\ &= -\log x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m_n(\mu)}{n} \frac{1}{x^n}, \end{aligned}$$

où m_n est le moment d'ordre n de μ.

Supposons que $\mu = \sigma_a$ soit la loi du demi-cercle de rayon a, et désignons par U_a sont potentiel. Nous savons que, pour $x \geq a$,

$$U_a(x) = \frac{C}{2} - \frac{\gamma}{2}x^2 + \gamma \int_a^x \sqrt{y^2 - a^2}dy.$$

Pour calculer cette intégrale on pose $x = a \,\mathrm{ch}\,\theta$, $y = a\,\mathrm{ch}\,\varphi$:

$$\begin{aligned} \int_a^x \sqrt{y^2 - a^2}dy &= a^2 \int_0^\theta \mathrm{sh}^2\,\varphi d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_0^\theta (\mathrm{ch}\,2\varphi - 1)d\varphi \\ &= \frac{a^2}{4}\mathrm{sh}\,2\theta - \frac{a^2}{2}\theta. \end{aligned}$$

Puisque $\gamma = \frac{2}{a^2}$, on obtient

$$\begin{aligned} U_a(x) &= \frac{1}{2}C - e^{-\theta}\mathrm{ch}\,\theta - \theta \\ &= \frac{1}{2}C - \frac{1}{2}(1 + e^{-2\theta}) \\ &= -\theta + \frac{1}{2}(C-1) + o(1). \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} U^\mu(x) &= -\log x + o(1) = -\log a\mathrm{ch}\,\theta + o(1) = -\log a + \log \mathrm{ch}\,\theta + o(1) \\ &= -\theta + \log 2 - \log a + o(1). \end{aligned}$$

Par conséquent

$$C = 2(\log 2 - \log a) + 1 = \log 2 + \log \gamma + 1.$$

Déterminons maintenant l'énergie d'équilibre E dans le cas où $Q(x) = \gamma x^2$. La mesure d'équilibre est alors la loi du demi-cercle de rayon $a = \sqrt{\frac{2}{\gamma}}$. Sur son support $[-a, a]$,

$$U_a(x) = \frac{1}{2} + \log \frac{2}{a} - \frac{1}{2}\gamma x^2.$$

Puisque le moment d'ordre de 2 de μ_a est égal à $\frac{a^2}{4}$, nous obtenons

$$\int U_a(x)\mu_a(dx) = \frac{1}{2} + \log \frac{2}{a} - \frac{1}{2}\gamma \frac{a^2}{4}.$$

D'autre part

$$\int_{\mathbb{R}} Q(x)\mu_a(dx) = \gamma \frac{a^2}{4}.$$

Finalement

$$E = I(\mu_a) = \frac{1}{2} + \log \frac{2}{a} - \frac{1}{2}\gamma \frac{a^2}{4} + \gamma \frac{a^2}{4} = \frac{3}{4} + \log \frac{2}{a},$$

puisque $\gamma = \frac{2}{a^2}$.

Exemple 2

Prenons

$$Q(x) = \gamma x^2 + \delta x^4,$$

où $\gamma, \delta \geq 0$, non tous deux nuls. La fonction Q étant paire, la mesure d'équilibre est aussi paire. Son support est un intervalle $[-a, a]$. Alors $Q'(x) = 2\gamma x + 4\delta x^3$, et

$$\frac{Q'(z) - Q'(t)}{z - t} = 2\gamma + 4\delta(t^2 + tz + z^2),$$

et

$$q(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} \big(2\gamma + 4\delta(t^2 + tz + z^2)\big) \frac{dt}{\sqrt{a^2 - t^2}}.$$

Le nombre a est déterminé par la condition

$$\int_{-a}^{a} (2\gamma t^2 + 4\delta t^4) \frac{dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} = 2\pi.$$

Pour $a > 0$ notons μ la mesure de probabilité définie par

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\mu(dt) = \frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a} \varphi(t)\frac{dt}{\sqrt{a^2 - t^2}},$$

et m_k ses moments. Nous obtenons

$$q(z) = (\gamma + 2\delta z^2) + 2\delta m_2,$$

et le nombre a est déterminé par l'équation

$$\gamma m_2 + 2\delta m_4 = 1.$$

Nous avons vu (exercice 3 du chapitre 5) que la transformée de Cauchy G de la mesure μ est égale à :

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{1}{\sqrt{z^2 - a^2}} = \frac{1}{z}\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{z}\right)^2}} \\ &= \frac{1}{z} + \frac{1}{2}\frac{a^2}{z^3} + \frac{3}{8}\frac{a^4}{z^5} + \cdots . \end{aligned}$$

C'est-à-dire que ses moments d'ordre 2 et 4 sont

$$m_2 = \frac{1}{2}a^2,\ m_4 = \frac{3}{8}a^4.$$

Ainsi

$$q(z) = \gamma + \delta a^2 + 2\delta z^2,$$

et le nombre a est racine de l'équation

$$3\delta a^4 + 2\gamma a^2 - 4 = 0.$$

Puisque $a^2 > 0$,

$$a^2 = \frac{\sqrt{\gamma^2 + 12\delta} - \gamma}{3\delta}.$$

Notons que pour $\delta = 0$ on retrouve bien $a^2 = \sqrt{\frac{2}{\gamma}}$. Pour $\gamma = 0$, $a^2 = \sqrt{\frac{4}{3\delta}}$.

Chapitre 7

THÉORÈME DE WIGNER GÉNÉRALISÉ

7.1 Convergence vers la mesure d'équilibre

Nous présentons une méthode due à Johansson [10], en suivant l'exposition de Deift [A]. On considère la mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^n$ définie par

$$\mathcal{P}_n(dx) = \tilde{q}_n(x_1, \ldots x_n)dx_1 \ldots dx_n,$$

où

$$\tilde{q}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{\mathcal{Z}_n} \exp\Big(-n \sum_{i=1}^{n} Q(x_i)\Big)|\Delta(x)|^{\beta}.$$

et

$$\mathcal{Z}_n = \exp\Big(-n \sum_{i=1}^{n} Q(x_i)\Big)|\Delta(x)|^{\beta} dx_1 \ldots dx_n.$$

Dans la section 2 chapitre 3, $\beta = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{F} = 1, 2$ ou 4, mais ici β est un nombre > 0 quelconque. La fonction Q est continue sur $\mathbb{R}$, ≥ 0, et

$$\lim_{t \to \pm\infty} \Big(Q(t) - \frac{\beta}{2} \log(t^2 + 1)\Big) = \infty.$$

On lui associe la mesure de probabilité μ_n sur $\mathbb{R}$ définie par

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\mu_n(dt) = \mathcal{E}_n\Big(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\Big),$$

où φ est une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}$. Dans cette section nous établirons le théorème suivant.

L'énergie d'une mesure de probabilité μ sur $\mathbb{R}$ est ici définie par

$$I(\mu) = \frac{\beta}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \log \frac{1}{|s-t|} \mu(ds)\mu(dt) + \int_{\mathbb{R}} Q(s)\mu(ds).$$

La borne inférieure E de l'énergie est définie par

$$E = \inf_{\mu \in \mathfrak{M}^1(\mathbb{R}} I(\mu).$$

Nous avons vu dans le chapitre précédent qu'il existe une mesure de probabilité μ_e unique telle que

$$I(\mu_e) = E.$$

Cette mesure μ_e est appelée mesure d'équilibre.

Par exemple, si $Q(t) = \gamma t^2$, alors la mesure d'équilibre μ_e est la loi du demi-cercle de rayon $r = \sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}$:

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\mu_e(dt) = \frac{2}{\pi r^2} \int_{-r}^{r} f(t)\sqrt{r^2 - t^2}dt,$$

et

$$E = \frac{\beta}{4} \log 4\frac{\gamma}{\beta} + \frac{3}{8}\beta.$$

7.1.1 Théorème (Johansson)

(i)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \log \mathcal{Z}_n = -E.$$

(ii) *La suite des mesures μ_n converge étroitement vers la mesure d'équilibre μ_e.*

Nous utiliserons les notations suivantes : pour $s, t \in \mathbb{R}$,

$$k(s,t) = \frac{\beta}{2} \log \frac{1}{|s-t|} + \frac{1}{2}Q(s) + \frac{1}{2}Q(t).$$

On pose

$$h(s) = Q(s) - \frac{\beta}{2} \log(s^2+1),$$

et

$$m = \inf_{s\in\mathbb{R}} h(s).$$

Ainsi
$$k(s,t) \geq \frac{1}{2}h(s) + \frac{1}{2}h(t) \geq m. \qquad (*)$$
Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} K_n(x) &= \sum_{i \neq j} k(x_i, x_j) \\ &= \sum_{i \neq j} \frac{\beta}{2} \log \frac{1}{|x_i - x_j|} + (n-1) \sum_{i=1}^n Q(x_i). \end{aligned}$$
Remarquons que
$$\begin{aligned} \mathcal{P}_n(dx) &= \frac{1}{\mathcal{Z}_n} \exp\Big(-\frac{\beta}{2} \sum_{i \neq j} \log \frac{1}{|x_i - x_j|} - n \sum_{i=1}^n Q(x_i)\Big) \\ &= \frac{1}{\mathcal{Z}_n} \exp\Big(-K_n(x) - \sum_{i=1}^n Q(x_i)\Big), \end{aligned}$$
et que, et si μ est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} K_n(x)\mu(dx_1)\dots\mu(dx_n) \\ = & \sum_{i \neq j} \int_{\mathbb{R}^2} \log \frac{1}{|x_i - x_j|} \mu(dx_i)\mu(dx_j) \\ & +(n-1) \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} Q(x_i)\mu(dx_i) \\ = & \; n(n-1)I(\mu). \end{aligned}$$
En particulier, si $\mu = \mu_e$,
$$\int_{\mathbb{R}^n} K_n(x)\mu_e(dx_1)\dots\mu_e(dx_n = n(n-1)E.$$
Des inégalités (*) on déduit que
$$K_n(x) \geq (n-1) \sum_{i=1}^n h(x_i) \geq m. \qquad (**)$$

Asymptotique du minimum κ_n de K_n

Posons
$$\kappa_n = \frac{1}{n(n-1)} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} K_n(x).$$

Des inégalités (**) il résulte que $\kappa_n \geq m$. Nous avons vu que

$$\int_{\mathbb{R}^n} K_n(x)\mu_e(dx_1)\ldots\mu_e(dx_n) = n(n-1)E,$$

et donc $\kappa_n \leq E$. La fonction K_n est semi-continue inférieurement, et, d'après les inégalités (**),

$$\lim_{\|x\|\to\infty} K_n(x) = \infty.$$

La borne inférieure de K_n est donc atteinte. Pour tout n nous choisissons un point $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\kappa_n = \frac{1}{n(n-1)} K_n(x^{(n)}).$$

Au point $x^{(n)}$ nous associons la mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$

$$\lambda^{(n)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i^{(n)}},$$

c'est-à-dire que, pour une fonction f définie sur $\mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\lambda^{(n)}(dt) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^{(n)}).$$

7.1.2 Proposition

(i) $\lim_{n\to\infty} \kappa_n = E$.

(ii) *The measure* $\lambda^{(n)}$ *converge étroitement vers la mesure d'équilibre* μ_e.

Démonstration.

Nous avons vu que

$$m \leq \kappa_n \leq E.$$

D'autre part, de l'inégalité

$$K_n(x) \geq (n-1)\sum_{i=1}^{n} h(x_i),$$

il résulte que

$$\int_{\mathbb{R}} h(t)\lambda^{(n)} \leq E.$$

Du corollaire 2.3.2 il résulte que la suite des paires $(\kappa_n, \lambda^{(n)})$ est relativement compacte dans $\mathbb{R} \times \mathfrak{M}^1(\mathbb{R})$. Soit n_j une suite ($n_j \to \infty$) telle que

$$\lim_{j\to\infty} \kappa_{n_j} = \kappa, \quad \lim_{j\to\infty} \lambda^{(n_j)} = \lambda.$$

Pour un nombre réel $\ell > 0$ on considère le noyau tronqué :

$$k^{\ell}(s,t) = \inf\big(k(s,t), \ell\big),$$

et l'énergie associée d'une mesure de probabilité μ :

$$I^{\ell}(\mu) = \int_{\mathbb{R}^2} k^{\ell}(s,t)\mu(ds)\mu(dt).$$

Alors

$$\frac{n}{n-1} I^{\ell}(\lambda^{(n)}) \leq \kappa_n + \frac{\ell}{n-1}.$$

Prenons $n = n_j$; lorsque $j \to \infty$, nous obtenons

$$I^{\ell}(\lambda) \leq \liminf_{j\to\infty} \kappa_{n_j},$$

et, quand $\ell \to \infty$,

$$I(\lambda) \leq \liminf_{j\to\infty} \kappa_{n_j}.$$

Par conséquent

$$E \leq I(\lambda) \leq \liminf_{j\to\infty} \kappa_{n_j} \leq \limsup \kappa_{n_j} \leq E,$$

et

$$\kappa = \lim_{j\to\infty} \kappa_{n_j} = E, \quad I(\lambda) = E,$$

donc $\lambda = \mu_e$. Cela montre qu'il y a qu'une limite possible pour une sous-suite, donc la suite elle-même converge :

$$\lim_{n\to\infty} \kappa_n = E, \quad \lim_{n\to\infty} \lambda^{(n)} = \mu_e.$$

$\square$

Asymptotique de $\mathcal{Z}_n$

Rappelons que

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_n &= \int_{\mathbb{R}^n} \exp\Big(-n\sum_{i=1}^{n} Q(x_i)\Big)|\Delta(x)|^{\beta} dx_1 \dots dx_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \exp\big(-K_n(x) - \sum_{i=1}^{n} Q(x_i)\big) dx_1 \dots dx_n. \end{aligned} \tag{7.1}$$

Puisque $K_n(x) \geq n(n-1)\kappa_n$,

$$\mathcal{Z}_n \leq e^{-n(n-1)\kappa_n}\Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-Q(t)} dt\Big)^{,}$$

ou

$$\frac{1}{n^2}\log \mathcal{Z}_n \leq -\frac{n-1}{n}\kappa_n + \frac{1}{n}\log\Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-Q(t)}dt\Big)^n.$$

Par suite, puisque $\lim_{n\to\infty}\kappa_n = E$,

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\log \mathcal{Z}_n \leq -E.$$

7.1.3 Proposition

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\log \mathcal{Z}_n = -E.$$

Démonstration.
Nous allons montrer que

$$\liminf \frac{1}{n^2}\log \mathcal{Z}_n \geq -E.$$

Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ de la forme suivante :

$$\mu(dt) = f(t)dt,$$

où f est une fonction continue de support compact, telle que

$$\int_{\mathbb{R}} |\log f(t)| f(t)dt < \infty.$$

Notons

$$U = \{t \in \mathbb{R} \mid f(t) > 0\}.$$

Alors

$$\mathcal{Z}_n \geq \int_{U^n} \exp\Big(-K_n(x) - \sum_{i=1}^n Q(x_i) - \sum_{i=1}^n \log f(x_i)\Big)\prod_{i=1}^n f(x_i)dx_1\ldots dx_n.$$

Nous allons utiliser l'inégalité de convexité de Jensen : si μ est une mesure de probabilité sur un ensemble X, et si Φ est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$,

$$\Phi\Big(\int_X f(x)\mu(dx)\Big) \leq \int_X \Phi\big(f(x)\big)\mu(dx).$$

En prenant $\Phi = \exp$ nous obtenons

$$\begin{aligned}
-\log \mathcal{Z}_n &\leq \int_{U^n} K_n(x) \prod_{i=1}^n f(x_i) dx_1 \ldots x_n \\
&+ \int_{U^n} \sum_{i=1}^n Q(x_i) \prod_{i=1}^n f(x_i) dx_1 \ldots dx_n \\
&+ \int_{U^n} \sum_{i=1}^n \log f(x_i) \prod_{i=1}^n f(x_i) dx_1 \ldots dx_n \\
&= n(n-1) I(f) + n \int_U Q(t) f(t) dt + n \int_U \log f(t)\ f(t) dt.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$-\liminf \frac{1}{n^2} \log \mathcal{Z}_n \leq I(f).$$

Il reste à montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une probabilité de cette forme telle que $I(f) \leq E + \varepsilon$.

□

Convergence de la mesure μ_n vers la mesure d'équilibre

Pour $\eta > 0$ on définit l'ensemble $A_{\eta,n} \subset \mathbb{R}^n$ par

$$A_{\eta,n} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid K_n(x) \leq (E + \eta) n^2\}.$$

7.1.4 Lemme *L'ensemble $A_{\eta,n}$ est compact, et*

$$\lim_{n \to \infty} \mathcal{P}_n(\mathbb{R}^n \setminus A_{\eta,n}) = 0.$$

Démonstration.

La fonction K_n étant semi-continue inférieurement l'ensemble $A_{\eta,n}$ est fermé. De plus

$$K_n(x) \geq (n-1) \sum_{i=1}^n h(x_i).$$

Par suite

$$A_\eta \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n h(x_i) \leq \frac{n^2}{n-1}(E + \eta)\},$$

et donc $A_{\eta,n}$ est borné. Ainsi $A_{\eta,n}$ est compact. Si $x \in \mathbb{R}^n \setminus A_{\eta,n}$, alors $K_n(x) > (E + \eta) n^2$; donc

$$\mathcal{P}_n(\mathbb{R}^n \setminus A_{\eta,n}) \leq \frac{1}{\mathcal{Z}_n} e^{-(E+\eta)n^2} \Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-Q(t)} dt \Big)^n.$$

Nous avons vu que

$$\lim_{n\to\infty} \log \frac{1}{\mathcal{Z}_n} = -E.$$

Par suite, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que, si $n \geq N$,

$$\frac{1}{\mathcal{Z}_n} \leq e^{(E+\varepsilon)n^2},$$

et

$$\mathcal{P}_n(\mathbb{R}^n \setminus A_{\eta,n}) \leq e^{-(\eta-\varepsilon)n^2}\Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-Q(t)}dt\Big)^n.$$

En choisissant $\varepsilon < \eta$ il en résulte alors que

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{P}_n(\mathbb{R}^r \setminus A_{\eta,n}) = 0.$$

□

Rappelons que μ_n est la mesure de probabilité sue $\mathbb{R}$ définie par

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\mu_n(dt) = \mathcal{E}_n\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Big).$$

7.1.5 Théorème *La mesure μ_n converge étroitement vers la mesure d'équilibre μ_e.*

Démonstration.

Soit f une fonction continue bornée sur $\mathbb{R}$, et notons F_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i).$$

a) Fixons $\eta > 0$. Puisque l'ensemble $A_{\eta,n}$ est compact, la fonction F_n atteint sa borne supérieure sur $A_{\eta,n}$ en un point

$$x^{(\eta,n)} = (x_1^{(\eta,n)}, \ldots, x_n^{(\eta,n)}).$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(t)\mu_n(dt) &\geq F_n(x^{(\eta,n)})\mathcal{P}_n(A_{\eta,n}) + \|f\|_\infty \mathcal{P}_n(\mathbb{R}^n \setminus A_{\eta,n}) \\ &\leq F_n(x^{(\eta,n)}) + \|f\|_\infty \mathcal{P}_n(\mathbb{R}^n \setminus A_{\eta,n}). \end{aligned}$$

Au point $x^{(\eta,n)}$ on associe la mesure de probabilité suivante sur $\mathbb{R}$:

$$\nu_\eta^{(n)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i^{(\eta,n)}}.$$

L'inégalité précédente peut s'écrire

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\mu_n(dt) \le \int_{\mathbb{R}} f(t)\nu_\eta^{(n)}(dt) + \|f\|_\infty \mathcal{P}_n(\mathbb{R}^n \setminus A_{\eta,n}).$$

L'énergie tronquée I^ℓ de la mesure $\nu_\eta^{(n)}$ peut être majorée :

$$I^\ell\big(\nu_\eta^{(n)}\big) \le \frac{\ell}{n} + (E+\eta).$$

De l'inégalité

$$K_n(x) \ge (n-1)\sum_{i=1}^{n} h(x_i),$$

il résulte que

$$\int_{\mathbb{R}} h(t)\nu_\eta^{(n)}(dt \le \frac{n}{n-1}(E+\eta).$$

D'après le corollaire 2.3.2 il existe une suite $n_j \to \infty$ telle que la sous-suite $\nu_\eta^{(n_j)}$ converge étroitement :

$$\lim_{j\to\infty} \nu_\eta^{(n_j)} = \nu_\eta.$$

Nous pouvons aussi supposer que

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(t)\mu_{n_j}(dt) = \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(t)\mu_n(dt).$$

La limite ν_η vérifie

$$I^\ell(\nu_\eta) \le E+\eta,$$

et, quand $\ell \to \infty$,

$$I(\nu_\eta) \le E+\eta.$$

De plus

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(t)\mu_n(dt) \le \int_{\mathbb{R}} f(t)\nu_\eta(dt).$$

b) L'inégalité

$$I(\nu_\eta) \le E+\eta$$

implique que la mesure ν_η converge vers la mesure d'équilibre μ_e qund $\eta \to 0$. Donc

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(t)\mu_n(dt) \leq \int_{\mathbb{R}} f(t)\mu_e(dt).$$

c) En changeant f en $-f$ on obtient

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(t)\mu_n(dt) \geq \int_{\mathbb{R}} f(t)\mu_e(dt),$$

et finalement

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(t)\mu_n(dt) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\mu_e(dt).$$

□

La fonction de corrélation $\mathcal{R}_1$ est définie par

$$\mathcal{R}_1(x_1) = n \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathcal{P}_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_2 \ldots dx_n.$$

La partie (ii) du théorème 7.1.1 s'énonce aussi : pour toute fonction continue bornée f sur $\mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}} f(x_1)\mathcal{R}_1(x_1)dx_1 = \int_{\mathbb{R}} f(t)\mu_e(dt).$$

Plus généralement on définit la fonction de corrélation $\mathcal{R}_k$ $(1 \leq k \leq n)$ par

$$\begin{aligned} &\mathcal{R}_k(x_1, \ldots, x_k) \\ = \; &\frac{n!}{(n-k)!} \int_{\mathbb{R}^{n-k}} \mathcal{P}_n(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) dx_{k+1} \ldots dx_n. \end{aligned}$$

On peut également montrer que, pour toute fonction continue bornée f sur $\mathbb{R}^k$,

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} \int_{\mathbb{R}^k} f(x_1, \ldots, x_k)\mathcal{R}_k(x_1, \ldots, x_k) dx_1 \ldots dx_k \\ = \; &\int_{\mathbb{R}^k} f(t_1, \ldots, t_k)\mu_e(dt_1) \ldots \mu_e(dt_k). \end{aligned}$$

7.2 Théorème de Wigner généralisé

Nous récapitulons dans cette dernière section les résultats que nous avons établis dans les chapitre 6 et 7. On considère sur $H_n = Herm(n, \mathbb{F})$ $(\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{H})$ la mesure de probabilité définie par

$$\mathcal{P}_n(dx) = \frac{1}{C_n} e^{-n \operatorname{tr}\left(Q(x)\right)} m(dx),$$

où Q est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\lim_{t\to\pm\infty}\Big(Q(t)-\frac{\beta}{2}\log(t^2+1)\Big)=\infty.$$

($\beta=\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{F}=1,2$ ou 4.) La distribution statistique des valeurs propres est la mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ pour laquelle

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f(t)\mu_n(dt) &= \mathcal{E}_n\Big(\frac{1}{n}\mathrm{tr}\,\big(f(x)\big)\Big)\\ &= \mathcal{E}_n\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i)\Big)\end{aligned}$$

où f est une fonction mesurable bornée sur $\mathbb{R}$. L'énergie $I(\mu)$ d'une mesure de probabilité μ sur $\mathbb{R}$ est définie par

$$I(\mu)=\frac{\beta}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\log\frac{1}{|s-t|}\mu(ds)\mu(dt)+\int_{\mathbb{R}} Q(s)\mu(ds).$$

La mesure d'équilibre μ_e est l'unique mesure de probabilité pour laquelle

$$I(\mu_e)=\inf_{\mu\in\mathfrak{M}^1(\mathbb{R})} I(\mu).$$

7.2.1 Théorème de Wigner généralisé *La mesure μ_n converge étroitement vers la mesure d'équilibre μ_e : pour toute fonction f continue bornée sur $\mathbb{R}$,*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f(t)\mu_n(dt)=\int_{\mathbb{R}} f(t)\mu_e(dt).$$

Si $Q(t)=\gamma t^2$ ($\gamma>0$), la mesure déquilibre μ_e est la loi du demi-cercle de rayon $a=\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}$.

Dans le cas du théorème de Wigner on considère la mesure de probabilité sur $Herm(n,\mathbb{F})$ définie par

$$\mathbb{P}_n(dx)=\frac{1}{C_n}e^{-\gamma\mathrm{tr}\,(x^2)}m(dx),$$

et la distribution statistique des valeurs propres est la mesure μ_n pour laquelle

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f(t)\mu_n(dt) &= \mathbb{E}_n\Big(\frac{1}{n}\mathrm{tr}\big(f(x)\big)\Big)\\ &= \mathbb{E}_n\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i)\Big)\end{aligned}$$

7.2.2 Théorème de Wigner *Si* f *est une fonction continue bornée sur* $\mathbb{R}$*,*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f\Big(\frac{t}{\sqrt{n}}\Big)\mu_n(dt) = \frac{2}{\pi a^2}\int_{-a}^{a} f(s)\sqrt{a^2-s^2}ds,$$

où $a = \sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}$.

Chapitre 8

THÉORÈME DE WIGNER, MÉTHODE DE PASTUR

8.1 La méthode de Pastur

Sur l'espace $H_n = Herm(n, \mathbb{F})$ ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$) considérons la mesure de probabilité gaussienne

$$\mathbb{P}_n(dx) = \frac{1}{C_n} e^{-\gamma \operatorname{tr}(x^2)} m(dx).$$

La distribution statistique des valeurs propres est la mesure de probabilité μ_n sur $\mathbb{R}$ pour laquelle

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(t)\mu_n(dt) &= \mathbb{E}_n\Big(\frac{1}{n}\operatorname{tr}\big(f(x)\big)\Big) \\ &= \mathbb{E}_n\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i)\Big). \end{aligned}$$

La transformée de Cauchy G_n de μ_n est donnée par

$$G_n(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z-t}\mu_n(dt) = \mathbb{E}_n\Big(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z-\lambda_j}\Big).$$

Notons

$$\begin{aligned} R_z(x) &= (zI - x)^{-1}, \\ g(z;x) &= \frac{1}{n}\operatorname{tr}\big((zI-x)^{-1}\big) = \frac{1}{n}\operatorname{tr}\big(R_z(x)\big), \end{aligned}$$

et $g(z)$ la variable aléatoire

$$g(z) : x \mapsto g(z;x).$$

Avec cette notation

$$G_n(z) = \mathbb{E}_n\big(g(z)\big).$$

On effectue un changement d'échelle et on définit la mesure $\tilde{\mu}_n$ par

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\tilde{\mu}_n(dt) = \int_{\mathbb{R}} f\Big(\frac{t}{\sqrt{n}}\Big)\mu_n(dt).$$

On vérifie facilement que ce changement d'échelle revient à changer le paramètre γ en $n\gamma$, et que la transformée de Cauchy de $\tilde{\mu}_n$ est égale à

$$f_n(z) = \tilde{G}_n(z) = \sqrt{n}G(\sqrt{n}z).$$

Le théorème du demi-cercle de Wigner s'énonce :

8.1.1 Théorème *La suite des mesures de probabilité $\tilde{\mu}_n$ converge étroitement vers la loi du demi-cercle de rayon $a = \sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}$, c'est à dire que, pour toute fonction continue bornée f sur $\mathbb{R}$,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(t)\tilde{\mu}_n(dt) = \frac{2}{\pi a^2}\int_{-a}^{a} f(t)\sqrt{a^2-t^2}dt.$$

La méthode de Pastur consiste à montrer que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z) := \frac{2}{a^2}\big(z - \sqrt{z^2-a^2}\big),$$

qui est la transformée de Cauchy de la loi du demi-cercle de rayon a. D'après le théorème 5.2.5 le théorème s'en déduit. Nous utiliserons le lemme suivant :

8.1.2 Lemme *Soit f_n une suite de fonctions de $\mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})$. On suppose que, pour $y \geq y_0 > 0$,*

$$\lim_{n\to\infty}\Big(f_n(z)^2 - \frac{4}{a^2}zf_n(z) + \frac{4}{a^2}\Big) = 0.$$

Alors la suite f_n converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ vers

$$f(z) = \frac{2}{a^2}\big(z - \sqrt{z^2-a^2}\big).$$

La définition de l'ensemble $\mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$ a été donnée dans la section 2 du chapitre 5.

Démonstration.

D'après le théorème de Montel, on peut extraire de la suite f_n une sous-suite convergente f_{n_j},

$$\lim_{j\to\infty} f_{n_j}(z) = f_0(z),$$

la convergence étant uniforme sur tout compact de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. La fonction f_0 vérifie, pour $y \geq y_0$,

$$f_0(z)^2 - \frac{4}{a^2} z f_0(z) + \frac{4}{a^2} = 0,$$

donc

$$f_0(z) = \frac{2}{a^2}\big(z \pm \sqrt{z^2 - a^2}\big).$$

Puisque, pour $y > 0$,

$$\operatorname{Im} f_0(z) = \lim_{j\to\infty} \operatorname{Im} f_{n_j}(z) \leq 0,$$

nécessairement

$$f_0(z) = \frac{2}{a^2}\big(z - \sqrt{z^2 - a^2}\big) = f(z).$$

Ainsi f est la seule valeur d'adhérence de la suite f_n ; cette suite converge donc vers f uniformément sur tout compact de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. $\square$

Dans une première étape la dimension n restera fixe, et, pour simplifier l'écriture, nous ne l'indiquerons pas. Par exemple nous notrerons $\mathbb{P}$, $\mathbb{E}$, μ, G au lieu de $\mathbb{P}_n$, $\mathbb{E}_n$, μ_n, G_n.

8.1.3 Lemme *Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $V = Herm(n, \mathbb{R})$. On suppose que φ est bornée ainsi que ses dérivées partielles. Alors, pour $u \in V$,*

$$\mathbb{E}\big((D\varphi)_x u\big) = 2\gamma \mathbb{E}\big(\varphi(x)\operatorname{tr}(xu)\big).$$

(En fait il suffit que φ et ses dérivées partielles soient à croisssance polynômiale.)

Démonstration. Dans l'intégrale

$$\mathbb{E}(\varphi) = \frac{1}{C_n}\int_{H_n} \varphi(x) e^{-\gamma \operatorname{tr}(x^2)} m(dx),$$

remplaçons x par $x+tu$ ($t \in \mathbb{R}$). La mesure de Lebesgue m étant invariante par translation, l'intégrale n'est pas changée,

$$\frac{1}{C_n}\int_{H_n} \varphi(x+tu)e^{-\gamma \mathrm{tr}\left((x+tu)^2\right)}m(dx) = \mathbb{E}(\varphi).$$

En dérivant en t pour $t=0$ on obtient

$$\begin{aligned}&\frac{1}{C_n}\int_{H_n} (D\varphi)_x(u)e^{-\gamma \mathrm{tr}(x^2)}m(dx)\\ &-2\gamma\frac{1}{C_n}\int_{H_n} \varphi(x)\mathrm{tr}(xu)e^{-\gamma \mathrm{tr}(x^2)}m(dx) = 0.\end{aligned}$$

□

Nous allons appliquer le lemme en prenant

$$\varphi(x) = \mathrm{tr}\big((zI-x)^{-1}v\big) = \mathrm{tr}\big(R_z(x)v\big),$$

où $v \in M(n,\mathbb{F})$. La différentielle de l'application j qui à une matrice associe son inverse,

$$j(x) = x^{-1},$$

étant donnée par

$$(Dj)_x u = -x^{-1}ux^{-1},$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}(D\varphi)_x(u) &= \mathrm{tr}\big((zI-x)^{-1}u(zI-x)^{-1}v\big)\\ &= \mathrm{tr}\big(R_z(x)uR_z(x)v\big).\end{aligned}$$

Du lemme 8.1.3 on déduit donc la relation suivante

$$\mathbb{E}\big(\mathrm{tr}(R_z u R_z v)\big) = 2\gamma\mathbb{E}\big(\mathrm{tr}(R_z v)\mathrm{tr}(xu)\big).$$

Pour en simplifier la présentation nous poursuivons la démonstration dans le cas où $\mathbb{F}=\mathbb{R}$. Elle peut s'adapter au cas où $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$ sans difficulté.

8.1.4 Lemme *Soient $A, B \in Sym(n,\mathbb{R})$.*

(i) $$\sum_{i,j=1}^{n} \mathrm{tr}\big(A(E_{ij}+E_{ji})BE_{ij}\big) = \mathrm{tr}(AB) + \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B).$$

(ii) $$\sum_{i,j=1}^{n} \mathrm{tr}(AE_{ij})\mathrm{tr}\big(B(E_{ij}+E_{ji})\big) = 2\mathrm{tr}(AB).$$

Dans la relation ci-dessus prenons $u = E_{ij} + E_{ji}$, $v = E_{ij}$. En effectuant la somme sur i et j nous obtenons

$$\mathbb{E}\Big(\mathrm{tr}\big(R_z^2(x)\big)\Big) + \mathbb{E}\Big(\big(\mathrm{tr}R_z(x)\big)^2\Big) = 4\gamma\mathbb{E}\Big(\mathrm{tr}\big(xR_z(x)\big)\Big).$$

En utilisant l'égalité

$$xR_z(x) = x(zI - x)^{-1} = zR_z(x) - I,$$

le membre de droite s'écrit

$$\mathbb{E}\Big(\mathrm{tr}\big(xR_z(x)\big)\Big) = z\mathbb{E}\big(\mathrm{tr}R_z(x)\big) - \mathbb{E}(\mathrm{tr}I).$$

Le relation s'écrit finalement

$$\mathbb{E}\Big(\mathrm{tr}\big(R_z(x)^2\big)\Big) + \mathbb{E}\Big(\big(\mathrm{tr}R_z(x)\big)^2\Big) + 4n\gamma = 4\gamma z\mathbb{E}\big(\mathrm{tr}R_z(x)\big),$$

ou

8.1.5 Lemme

$$n^2\mathbb{E}\big(g(z)^2\big) - 4n\gamma zG(z) + 4n\gamma = -\mathbb{E}\big(\mathrm{tr}\big(R_z(x)^2\big)\big).$$

Après changement d'échelle cette relation s'écrit

$$\begin{aligned} f_n(z)^2 - 4\gamma z f_n(z) + 4\gamma &= \tilde{G}_n(z)^2 - 4\gamma z\tilde{G}_n(z) + 4\gamma \\ &= -\frac{1}{n^2}\mathcal{E}_n\big(\mathrm{tr}(R_z^2)\big) - \Big(\mathcal{E}_n\big((g(z)^2\big) - \big(\mathcal{E}_n(g(z))\big)^2\Big). \end{aligned}$$

La notation $\mathcal{E}_n$, que nous avons introduite dans le chapitre 7, désigne l'espérance relativement ̀la probabilité

$$\mathcal{P}_n(dx) = \frac{1}{\tilde{C}_n}e^{-n\gamma\mathrm{tr}(x^2)}.$$

Nous devons maintenant montrer que le second membre tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Des inégalités suivantes

$$\|R_z\| \leq \frac{1}{y}, \quad |\mathrm{tr}(A)| \leq n\|A\|,$$

il résulte que

$$|\mathcal{E}_n\big(\mathrm{tr}(R_z^2)\big)| \leq \frac{n}{y^2},$$

et

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\mathcal{E}_n\big(\mathrm{tr}(R_z^2)\big)=0.$$

Il reste donc à montrer que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\mathcal{E}_n\big((g(z)^2\big)-\Big(\mathcal{E}_n\big(g(z)\big)\Big)^2\right)=0.$$

Si φ est une variable aléatoire à valeurs réelles ou complexes, on définit la variance de φ par

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(\varphi) &= \mathbb{E}\big(|\varphi-\mathbb{E}(\varphi)|^2\big)\\ &= \int|\varphi(x)-\mathbb{E}(\varphi)|^2\mathbb{P}(dx).\end{aligned}$$

Notons les deux propriétés élémentaires suivantes :

$$\mathbb{V}(\varphi)=\mathbb{E}\big(|\varphi|^2\big)-|\mathbb{E}(\varphi)|^2,$$

et

$$|\mathbb{E}(\varphi^2)-\mathbb{E}(\varphi)^2|\leq\mathbb{V}(\varphi).$$

Nous allons évaluer la variance de la variable aléatoire $g(z)=\frac{1}{n}\mathrm{tr}(R_z)$:

$$\mathbb{V}_n\big(g(z)\big)=\mathbb{E}_n\big(|g(z)|^2\big)-|G(z)|^2,$$

($\mathbb{V}_n$ désigne la variance associée à la probabilité $\mathbb{P}_n$.) et montrer que, après changement d'échelle, si $y=\mathrm{Im}z\geq y_0>0$,

$$\mathcal{V}_n\big(g(z)\big)\leq\frac{C}{n^2}.$$

($\mathcal{V}_n$ désigne la variance associée à la probabilité $\mathcal{P}_n$.)

Nous allons appliquer une deuxième fois le lemme 8.1.3 en prenant

$$\varphi(x)=\mathrm{tr}\big((z_1I-x)^{-1}v)\big)\mathrm{tr}\big(\big((z_2I-x)^{-1}\big),$$

où $z_1,z_2\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, $v\in M(n,\mathbb{R})$. Sa différentielle est donnée par

$$\begin{aligned}(D\varphi)_x(u) &= \mathrm{tr}\big((z_1I-x)^{-1}u(z_1I-x)^{-1}v\big)\mathrm{tr}\big((z_2I-x)^{-1}\big)\\ &\quad\mathrm{tr}\big((z_1I-x)^{-1}v\big)\mathrm{tr}\big((z_2I-x)^{-2}u(z_2I-x)^{-1}\big).\end{aligned}$$

Du lemme 8.2.3 on déduit la relation

$$\mathbb{E}\big(\mathrm{tr}(R_{z_1}uR_{z_1}v)\mathrm{tr}(R_{z_2})\big)+\mathbb{E}\big(R_{z_1}v)\mathrm{tr}(R_{z_2}uR_{z_2})\big)$$

$$= 2\gamma\mathbb{E}\big(\mathrm{tr}(R_{z_1}v)\mathrm{tr}(R_{z_2})\mathrm{tr}(xu)\big).$$

Comme ci-dessus on prend $u = E_{ij} + E_{ji}$ et $v = E_{ij}$, et en effectuant une sommation sur i et j on obtient

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\big(\mathrm{tr}(R_{z_1}^2)\mathrm{tr}(R_{z_2})\big) + \mathbb{E}\big((\mathrm{tr}R_{z_1})^2\mathrm{tr}(R_{z_2})\big) + 2\mathbb{E}\big(\mathrm{tr}(R_{z_1}R_{z_2}^2)\big) \\ = \; & 4\gamma\mathbb{E}\big(\mathrm{tr}(R_{z_1}x)\mathrm{tr}(R_{z_2})\big). \end{aligned}$$

En utilisant à nouveau l'égalité $R_{z_1}x = z_1R_{z_1} - I$, on peut réécrire le dernier terme :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\big(\mathrm{tr}(R_{z_1}x)\mathrm{tr}(R_{z_2})\big) &= \mathbb{E}\big(\mathrm{tr}(z_1R_{z_1} - I)\mathrm{tr}(R_{z_2})\big) \\ &= -n\mathbb{E}\big(\mathrm{tr}R_{z_2}\big) + z_1\mathbb{E}\big(\mathrm{tr}(R_{z_1})\mathrm{tr}(R_{z_2})\big). \end{aligned} \tag{8.1}$$

Finalement

8.1.6 Lemme

$$\begin{aligned} & 4n\gamma G(z_2) - 4n^2\gamma z_1\mathbb{E}\big(g(z_1)g(z_2)\big) \\ = \; & -n^3\mathbb{E}\big(g(z_1)^2g(z_2)\big) - n\mathbb{E}\big(\mathrm{tr}(R_{z_1}^2)g(z_2)\big) - 2\mathbb{E}\big(\mathrm{tr}(R_{z_1}R_{z_2}^2)\big). \end{aligned}$$

La relation du lemme 8.1.5 peut s'écrire

$$4n\gamma - 4n\gamma zG(z) = -n^2\mathbb{E}\big(g(z)^2\big) - \mathbb{E}\big(\mathrm{tr}(R_z^2)\big),$$

et celle du lemme 8.1.6, en prenant $z_1 = z$, $z_2 = \bar{z}$,

$$\begin{aligned} & 4n^2\gamma\overline{G(z)} - 4n^2\gamma z\mathbb{E}\big(|g(z)|^2\big) \\ = \; & -n^3\mathbb{E}\big(g(z)^2\overline{g(z)}\big) - \mathbb{E}\big(\mathrm{tr}(R_z^2)\overline{g(z)}\big) - 2\mathbb{E}\big(\mathrm{tr}(R_zR_{\bar{z}}^2)\big). \end{aligned}$$

Multiplions la première relation par $n\overline{G(z)}$, et retranchons-lui la deuxième. Nous obtenons au premier membre

$$4n^2\gamma z\Big(\mathbb{E}\big(|g(z)|^2\big) - |G(z)|^2\Big) = 4n^2\gamma z\mathrm{Var}_n\big(g(z)\big),$$

et le deuxième membre est la somme des trois termes suivants

$$\begin{aligned} T_1 &= n^3\mathbb{E}\bigg(g(z)^2\Big(\overline{g(z)} - \mathbb{E}\big(\overline{g(z)}\big)\Big)\bigg), \\ T_2 &= n\mathbb{E}\bigg(\mathrm{tr}(R_z^2)\Big(\overline{g(z)} - \mathbb{E}\big(\overline{g(z)}\big)\Big)\bigg), \\ T_3 &= 2\mathbb{E}\big(\mathrm{tr}(R_zR_{\bar{z}}^2)\big). \end{aligned}$$

(a) Majorons le terme T_1. En écrivant

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big(g(z)^2\big(\overline{g(z)}-\mathbb{E}(\overline{g(z)})\big)\Big) &= \mathbb{E}\Big(g(z)|g(z)-\mathbb{E}(g(z))|^2\Big) \\
&+ G(z)\mathbb{E}\Big(g(z)\big(\overline{g(z)}-\mathbb{E}(\overline{g(z)})\big)\Big) \\
&= \mathbb{E}\Big(g(z)|g(z)-\mathbb{E}(g(z))|^2\Big) \\
&+ G(z)\mathbb{E}\Big(|g(z)-\mathbb{E}(g(z))|^2\Big),
\end{aligned}$$

et en utilisant les inégalités

$$|\mathrm{tr}(A) \leq n\|A\|, \quad \|R_z\| \leq \frac{1}{y}, \quad |g(z)| \leq \frac{1}{y},$$

on obtient

$$|T_1| \leq 2n^3\frac{1}{y}\mathbb{V}_n\big(g(z)\big).$$

(b) Pour majorer le terme T_2 on utilise l'inégalité de Schwarz :

$$\begin{aligned}
|T_2| &\leq n\sqrt{\mathbb{E}\big(|\mathrm{tr}(R_z^2)|^2\big)}\sqrt{\mathbb{V}_n\big(g(z)\big)} \\
&\leq \tfrac{n^2}{y^2}\sqrt{\mathbb{V}_n\big(g(z)\big)}.
\end{aligned}$$

(c) Le terme T_3 se majore simplement :

$$|T_3| \leq \frac{2n}{y^3}.$$

Finalement, en posant

$$v_n = \sqrt{\mathbb{V}_n\big(g(z)\big)},$$

on obtient

$$4n\gamma v_n^2 \leq \frac{2n^2}{y^2}v_n^2 + \frac{n}{y^3}v_n + \frac{2}{y^4}.$$

Nous effectuons maintenant le changement d'échelle qui revient, rappelons-le, à changer γ en $n\gamma$,

$$\tilde{v}_n = \sqrt{\mathcal{V}_n\big(g(z)\big)},$$

et nous obtenons

$$\gamma\tilde{v}_n^2 \leq \frac{1}{2y^2}\tilde{v}_n^2 + \frac{1}{4ny^3}\tilde{v}_n + \frac{1}{2n^2y^4}.$$

Supposons $y \geq y_0 = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$, alors

$$\tilde{v}_n^2 \leq \frac{1}{2}\tilde{v}_n^2 + \frac{1}{4ny_0}\tilde{v}_n + \frac{1}{2n^2y_0^2},$$

ou

$$\tilde{v}_n^2 \leq \frac{1}{2ny_0}\tilde{v}_n + \frac{1}{n^2y_0^2},$$

ce qui s'écrit

$$(ny_0\tilde{v}_n)^2 \leq \frac{1}{2}(ny_0\tilde{v}_n) + 1.$$

Par suite

$$\tilde{v}_n \leq \frac{\alpha}{ny_0},$$

où α est la racine positive de l'équation

$$X^2 - \frac{1}{2}X - 1 = 0.$$

($\alpha \simeq 1,28$.) □

Chapitre 9

DÉTERMINANT DE FREDHOLM

9.1 Equation intégrale de Fredholm

Soit (X, μ) un espace mesuré tel que $\mu(X) < \infty$. On considère l'équation intégrale de Fredholm suivante

$$\varphi(x) - \lambda \int_X K(x,y)\varphi(y)\mu(dy) = f(x).$$

On suppose que K est un noyau mesurable borné sur $X \times X$, et que la fonction f est mesurable bornée. La fonction cherchée φ est aussi mesurable bornée. Pour λ petit on peut résoudre cette équation par la méthode des approximations sucessives. Pour cela on définit la suite des fonctions u_n par récurrence comme suit : $u_0(x) = f(x)$, et

$$u_{n+1}(x) = \int_X K(x,y)u_n(y)\mu(dy).$$

Posons $M = \sup |K(x,y)|$, alors

$$|u_n(x)| \leq (M\mu(X))^n \|f\|_\infty.$$

Ainsi si

$$|\lambda| < \frac{1}{M\mu(X)},$$

la série

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n u_n(x)$$

converge uniformément sur X. C'est l'unique solution de l'équation intégrale.

On définit les noyaux itérés $K^{(n)}$ par récurrence en posant $K^{(1)} = K$, et

$$K^{(n)}(x,y) = \int_X K_{n-1}(x,z)K(z,y)\mu(dz).$$

La série

$$\Gamma(x,y;\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1}K^{(n)}(x,y)$$

converge uniformément sur $X \times X$ pour

$$|\lambda| < \frac{1}{M\mu(X)}.$$

Sa somme $\Gamma(x,y;\lambda)$ est appélée noyau résolvant car la solution φ est donnée par

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_X \Gamma(x,y;\lambda)f(y)\mu(dy).$$

C'est une fonction holomorphe dans le disque $|\lambda| < 1/(M\mu(X))$. Nous allons voir qu'elle admet un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$.

9.2 Déterminant de Fredholm

Soit K un noyau défini sur X. Suivant Fredholm on utilisera la notation suivante : si $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n$ sont des points de X,

$$K\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ y_1 & y_2 & \ldots & y_n \end{pmatrix} = \det\bigl(K(x_i,y_j)\bigr)_{1\le i,j\le n}.$$

Le déterminant de Fredholm de $I - \lambda K$ est défini par

$$\begin{aligned} D(\lambda) = \mathrm{Det}\ (I-\lambda K) = 1 - \lambda \int_X K(x_1,x_1)\mu(dx_1) + \cdots \\ + \frac{(-\lambda)^n}{n!}\int_{X^n} K\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix}\mu(dx_1)\mu(dx_2)\ldots\mu(dx_n) + \cdots \end{aligned} \tag{9.1}$$

9.2.1 Proposition *La série converge pour tout λ, et $D(\lambda)$ est une fonction entière de λ.*

9.2.2 Lemme (Inégalité de Hadamard) *Soit $A = (a_{ij})$ une matrice $n \times n$ à coefficients complexes. Notons $A_1, \ldots, A_n$ les vecteurs colonnes de A. Alors*

$$|\det A| \leq \|A_1\| \cdots \|A_n\|,$$

où $\|A_j\|$ désigne la norme euclidienne de A_j,

$$\|A\| = \sqrt{|a_{1j}|^2 + \cdots + |a_{nj}|^2}.$$

Démonstration.

Remarquons d'abord que les deux membres de l'inégalité ne changent pas si on multiplie la matrice A à gauche par une matrice unitaire U :

$$|\det(UA)| = |\det A|,$$

et, puisque $(UA)_j = UA_j$,

$$\|(UA)_j\| = \|A_j\|.$$

Or on peut trouver une matrice unitaire U telle que UA soit triangulaire supérieure, et dans ce cas l'inégalité est simple à vérifier.

$\square$

Cette inégalité a une interprétation géométrique simple. Elle signifie que le volume du pavé construit sur les vecteurs $A_1, \ldots, A_n$ est inférieur ou égal au produit de leurs longueurs. Il y a égalité si les vecteurs sont orthogonaux.

On déduit de cette inégalité la suivante : si $B = (b_{ij})$ est une matrice hermitienne définie positive, alors

$$\det B \leq b_{11} b_{22} \cdots b_{nn}.$$

En effet il existe une matrice $A = (a_{ij})$ telle que $B = A^* A$, et alors

$$\begin{aligned} \det B &= |\det A|^2, \\ b_{jj} &= \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|^2 = \|A_j\|^2. \end{aligned}$$

Démonstration.

Démontrons maintenant la proposition 9.2.1. D'après l'inégalité de Hadamard,

$$\left| K \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix} \right| \leq \left(\sqrt{nM^2}\right)^n = n^{\frac{n}{2}} M^n.$$

Si a_n est le coefficient de λ^n,

$$|a_n| \leq u_n = \frac{1}{n!} n^{\frac{n}{2}} M^n \big(\mu(X)\big)^n.$$

La limite de

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \big(1 + \frac{1}{n}\big)^{\frac{n}{2}} M\mu(X)$$

est égale à 0. Du critère de d'Alembert il en résulte que le rayon de convergence de la série entière est infini.

□

Posons

$$D(x, y; \lambda) =$$
$$K(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \int_{X^n} K \begin{pmatrix} x & x_1 & \dots & x_n \\ y & x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \mu(dx_1) \dots \mu(dx_n).$$

9.2.3 Théorème *Le noyau*

$$D(x, y; \lambda)$$

est une fonction entière de λ, et, pour $|\lambda| < 1/(M\mu(X))$,

$$\Gamma(x, y; \lambda) = \frac{D(x, y; \lambda)}{D(\lambda)}.$$

Ainsi le noyau résolvant se prolonge en une fonction méromorphe de λ sur $\mathbb{C}$.

Démonstration.

La convergence se démontre ici aussi à l'aide de l'inégalité de Hadamard. Le coefficient de λ^n est majoré en module par

$$(n+1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{M^{n+1} \mu(X)^n}{n!}.$$

Posons

$$\Gamma_0(x, y; \lambda) = D(\lambda)\Gamma(x, y; \lambda).$$

Le noyau Γ_0 est bien défini pour $|\lambda| < 1/(M\mu(X))$, et vérifie l'équation intégrale

$$\Gamma_0(x, y; \lambda) = K(x, y)D(\lambda) + \lambda \int_X K(x, z)\Gamma_0(z, y; \lambda)\mu(dz).$$

Posons

$$\begin{aligned}
\Gamma_0(x,y;\lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} A_n(x,y), \\
D(\lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} a_n.
\end{aligned}$$

Notons que $A_0(x,y) = K(x,y)$, et que $a_0 = 1$. En égalant les coefficients de λ^n nous obtenons

$$A_n(x,y) = K(x,y)a_n - n \int_X K(x,z) A_{n-1}(z,y)\mu(dz).$$

Posons aussi

$$B_n(x,y) = \int_{X^n} K \begin{pmatrix} x & x_1 & \dots & x_n \\ y & x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \mu(dx_1)\dots\mu(dx_n).$$

Nous allons montrer que les deux suites de noyaux $\{A_n\}$ et $\{B_n\}$ vérifient la même relation de récurrence. Puisque

$$A_0(x,y) = K(x,y), \quad B_0(x,y) = K(x,y),$$

il en résultera que, pour tout n,

$$A_n(x,y) = B_n(x,y),$$

et par suite que

$$\Gamma_0(x,y,\lambda) = D(x,y;\lambda).$$

Développons le déterminant

$$K \begin{pmatrix} x & x_1 & \dots & x_n \\ y & x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} K(x,y) & K(x,x_1) & \dots & K(x,x_n) \\ K(x_1,y) & K(x_1,x_1) & \dots & K(x_1,x_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ K(x_n,y) & K(x_n,x_1) & \dots & K(x_n,x_n) \end{vmatrix}$$

par rapport aux éléments de la première ligne :

$$\begin{aligned}
= \quad & K(x,y) K \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} - K(x,x_1) K \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \\
& + \dots + (-1)^{k+1} K(x,x_k) K \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_k & x_{k+1} & \dots & x_n \\ y & x_1 & \dots & x_{k-1} & x_{k+1} & \dots & x_n \end{pmatrix} \\
& + \dots + (-1)^{n+1} K(x,x_n) K \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y & x_1 & \dots & x_{n-1} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

En intégrant par rapport à $x_1, \ldots, x_n$, et en remarquant que

$$\int_{X^n} K(x, x_k) \cdot K \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_k & x_{k+1} & \ldots & x_n \\ y & x_1 & \ldots & x_{k-1} & x_{k+1} & \ldots & x_n \end{pmatrix} \mu(dx_1) \ldots \mu(dx_n)$$

$$= (-1)^k \int_X K(x, z) B_{n-1}(z, y) \mu(dz),$$

nous obtenons

$$B_n(x, y) = K(x, y) a_n - n \int_X K(x, z) B_{n-1}(z, y) \mu(dz).$$

□

Nous utiliserons dans la suite les notations suivantes :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n!} \int_{X^n} K \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \\ x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix} \mu(dx_1) \ldots \mu(dx_n), \\ T_n &= \int_X K^{(n)}(x, x) \mu(dx). \end{aligned}$$

Notons que T_n s'écrit aussi

$$T_n = \int_{X^n} K(x_1, x_2) K(x_2, x_3) \ldots K(x_n, x_1) \mu(dx_1) \ldots \mu(dx_n).$$

Avec cette notation

$$D(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n S_n \lambda_n \qquad (\lambda \in \mathbb{C}).$$

9.2.4 Théorème *Au voisinage de 0,*

$$\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)} = - \sum_{n=0}^{\infty} T_{n+1} \lambda^n.$$

Démonstration.

De la définition du noyau résolvant il résulte que

$$\int_X \Gamma(x, x; \lambda) \mu(dx) = \sum_{n=0}^{\infty} T_{n+1} \lambda^n.$$

D'autre part, d'après le théorème III.2.3,

$$\Gamma(x, x; \lambda) = \frac{D(x, x : \lambda)}{D(\lambda)}.$$

En intégrant teme à terme la série

$$D(x,x;\lambda) = K(x,x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \int_{X^n} K\begin{pmatrix} x & x_1 & \dots & x_n \\ x & x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \mu(dx_1)\dots\mu(dx_n), \tag{9.2}$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_X D(x,x;\lambda)\mu(dx) &= S_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n+1) S_{n+1} \lambda^n \\ &= -D'(\lambda). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)} = -\sum_{n=0}^{\infty} T_{n+1} \lambda^n.$$

□

Terminons cette section par deux propositions qui seront utilisées au chapitre 10. Nous laissons au lecteur le soin de les démontrer.

9.2.5 Proposition *Soit $\{K_j\}$ une suite de noyaux mesurables bornés sur X vérifiant*

$$\lim_{j\to\infty} K_j(x,y) = K(x,y) \quad (\forall x, y \in X).$$

On suppose qu'il existe une constante M telle que, pour tout j,

$$|K_j(x,y)| \leq M.$$

Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\lim_{j\to\infty} \mathrm{Det}\ (I - \lambda K_j) = \mathrm{Det}\ (I - \lambda K),$$

la convergence étant uniforme en λ sur tout compact de $\mathbb{C}$.

Soient (X,μ) et (Y,ν) deux espaces mesurés tels que $\mu(X) < \infty$, $\nu(Y) < \infty$. Soit $\varphi : X \to Y$ une application mesurable. On suppose qu'il existe une fonction mesurable bornée h définie sur X telle que, pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^1(Y,\nu)$,

$$\int_Y f(y)\nu(dy) = \int_X f\big(\varphi(x)\big) h(x)\mu(dx).$$

9.2.6 Proposition *Soit K un noyau mesurable borné sur Y. Notons $\tilde{K}$ le noyau défini sur X par*

$$\tilde{K}(x,x') = K\big(\varphi(x), \varphi(x')\big) h(x').$$

Alors

$$\mathrm{Det}\ (I - \lambda\tilde{K}) = \mathrm{Det}\ (I - \lambda K).$$

9.3 Noyaux de rang fini

Un noyau de rang fini est un noyau de la forme

$$K(x,y)=\sum_{i=1}^{n} f_i(x)g_i(y).$$

Nous supposerons que les fonctions f_i et g_i sont mesurables et bornées, et que les fonctions $f_1,\dots,f_n$ sont linéairement indépendantes dans $L^2(X,\mu)$. L'opérateur L associé à K,

$$Lf(x)=\int_X K(x,y)f(y)\mu(dy),$$

est de rang fini. Son image est contenue dans le sous-espace E_0 engendré par les fonctions $f_1,\dots,f_n$. Notons L_0 la restriction de L à E_0,

$$L_0 : E_0 \to E_0.$$

La matrice $A=(a_{ij})$ de L_0 dans la base $\{f_1,\dots,f_n\}$ est donnée par

$$a_{ij}=\int_X f_j(y)g_i(y)\mu(dy).$$

9.3.1 Théorème *Pour tout $\lambda\in\mathbb{C}$,*

$$\mathrm{Det}\ (I-\lambda K)=\det(I-\lambda L_0).$$

Par suite

$$\det(I-\lambda L_0)=\sum_{m=0}^{n}(-1)^m S_m\lambda^m.$$

Démonstration.

Calculons d'abord la trace de L_0 :

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(L_0) &= \sum_{i=1}^{n} a_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\int_X f_i(x)g_i(x)\mu(dx)\\ &= \int_X K(x,x)\mu(dx)=T_1.\end{aligned}$$

Les noyaux itérés $K^{(m)}$ sont aussi de rang fini, et l'opérateur asssocié à $K^{(m)}$ est égal à L^m. Par suite

$$\mathrm{tr}(L_0^m)=\int_X K^{(m)}(x,x)\mu(dx)=T_m.$$

Posons

$$F(\lambda)=\det(I-\lambda L_0).$$

9.3.2 Lemme *Au voisinage de 0,*

$$\frac{F'(\lambda)}{F(\lambda)} = -\sum_{m=0}^{\infty} \operatorname{tr}(L_0^{m+1})\lambda^m.$$

La démonstration de ce lemme est laissée au lecteur.

D'après le théorème 9.2.4, au voisinage de 0,

$$\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)} = -\sum_{m=0}^{\infty} T_{m+1}\lambda^m.$$

Par suite, au voisinage de 0,

$$\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)} = \frac{F'(\lambda)}{F(\lambda)}.$$

Puisque $D(0) = 1$ et $F(0) = 1$, il en résulte que $D(\lambda) = F(\lambda)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

□

Remarques

Notons $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ les valeurs propres de L^0, chacune étant comptée un nombre de fois égal à sa multiplicité. Alors

$$S_m = \sigma_m(\alpha_1, \dots, \alpha_n),$$

où σ_m est la fonction symétrique élémentaire définie par

$$\sigma_m(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{j_1 < \cdots < j_m} \alpha_{j_1} \dots \alpha_{j_m}.$$

De plus

$$T_m = s_m(\alpha_1, \dots, \alpha_n),$$

où s_m est la somme de Newton

$$s_m(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \alpha_1^m + \cdots + \alpha_n^m.$$

Le nombre S_m s'exprime aussi comme une somme de déterminants mineurs extraits de la matrice A de L_0,

$$S_m = \sum_I m_I(A),$$

où $I \subset \{1, \dots, n\}$, et $m_I(A)$ est le mineur correspondant de A : si $I = \{j_1, \dots, j_m\}$,

$$m_I(A) = \det\bigl(a_{j_k j_\ell}\bigr)_{1 \leq k, \ell \leq m}.$$

Il est possible d'établir le théorème 9.3.1 en montrant que

$$\frac{1}{m!} \int_X K \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_m \\ x_1 & \dots & x_m \end{pmatrix} \mu(dx_1) \dots \mu(dx_m) = \sum_I m_I(A).$$

Voir : N.M. Katz, P. Sarnak, Random matrices, Frobenius eigenvalues, and monodromy, A.M.S., p.142-143.

Le nombre S_m s'écrit aussi

$$S_m = \mathrm{tr}(\Lambda^m L_0),$$

où $\Lambda^m L_0$ est l'endomorphisme de $\Lambda^m E_0$ associé à L_0,

$$\Lambda^m L_0(v_1 \wedge \dots \wedge v_m) = (L_0 v_1) \wedge \dots \wedge (L_0 v_m) \qquad (v_1, \dots, v_m \in E_0).$$

Nous considérons maintenant le cas particulier où les fonction $f_1, \dots, f_n$ sont orthonormées dans $L^2(X, \mu)$, et $g_i = \bar{f}_i$:

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^m f_i(x) \overline{f_i(y)}.$$

L'opérateur L de noyau K est le projecteur orthogonal sur le sous-espace E_0. L'égalité $L^2 = L$ sécrit

$$K^{(1)}(x, y) = \int_X K(x, z) K(z, y) \mu(dz) = K(x, y).$$

Par suite

$$\text{Det } (I - \lambda K) = (1 - \lambda)^n = \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} \lambda^m,$$

et

$$S_m = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

si $m \leq n$, et 0 si $m > n$. Ainsi

$$\int_{X^m} K \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_m \\ x_1 & \dots & x_m \end{pmatrix} \mu(dx_1) \dots \mu(dx_m) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

si $m \leq n$, et $= 0$ si $m > n$. Notons aussi que, pour tout m, $T_m = n$.

9.4 Opérateurs nucléaires

Terminons ce chapitre en énonçant sans démonstration quelques résultats de base sur les opérateurs nucléaires. Soit E un espace de Banach. Un opérateur L sur E est dit *nucléaire* s'il peut se mettre sous la forme

$$Lv = \sum_{n=1}^{\infty} \langle v, f_n \rangle e_n,$$

avec $e_n \in E$, $f_n \in E'$ et

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|e_n\| \|f_n\| < \infty.$$

Supposons maintenant que $E = \mathcal{H}$ est un espace de Hilbert séparable, et soit L un opérateur nucléaire. Si $\{e_n\}$ est une base hilbertienne, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (Le_n|e_n)$$

est absolument convergente et sa somme ne dépend pas de la base choisie. Par définition ce nombre est la *trace* de L :

$$\mathrm{tr}(L) = \sum_{n=1}^{\infty} (Le_n|e_n).$$

Soit L un opérateur compact. L'opérateur L^*L est alors autoadjoint positif compact. Ses valeurs propres λ_n sont ≥ 0. Les nombres $\mu_n = \sqrt{\lambda_n}$ sont appelés *nombres caractéristiques* de L. On démontre que L est nucléaire si et seulement si

$$\|L\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n < \infty,$$

et que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur l'espace vectoriel des opérateurs nucléaires. Notons que

$$|\mathrm{tr}(L)| \leq \|L\|_1.$$

Soit L un opérateur nucléaire. L'opérateur $\Lambda^m(L)$ agissant sur $\Lambda^m(\mathcal{H})$ est aussi nucléaire, et

$$\|\Lambda^m(L)\|_1 \leq \frac{\|L\|_1^m}{m!}.$$

Le déterminant de Fredholm de $T - \lambda L$ ($\lambda \in \mathbb{C}$) est défini par

$$\begin{aligned} D(\lambda) &= \det(I - \lambda L) \\ &= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \mathrm{tr}\big(\Lambda^m(L)\big)\lambda^m. \end{aligned} \tag{9.3}$$

C'est une fonction entière de λ, et au voisinage de 0,

$$\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)} = -\sum_{m=0}^{\infty} \mathrm{tr}(L^{m+1})\lambda^m.$$

Supposons maintenant que L soit un opérateur à noyau agissant sur $L^2(X, \mu)$,

$$Lf(x) = \int_X K(x, y) f(y) \mu(dy).$$

Si K est de carré intégrable sur $X \times X$, l'opérateur L est de Hilbert-Schmidt. En général il n'est pas facile de déterminer si L est nucléaire. En particulier les opérateurs associés aux noyaux mesurables bornés que nous avons considérés dans les deux premières sections ne sont pas nucléaires en général.

Supposons de plus que X soit un espace topologique compact, et que μ soit une mesure bornée sur X de support égal à X. Soit K un noyau continu hermitien :

$$K(y, x) = \overline{K(x, y)},$$

et de type positif :

$$\forall x_1, \ldots, x_n \in X, \ \forall c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}, \ \sum_{i,j=1}^{n} K(x_i, x_j) c_i \bar{c}_j \geq 0.$$

L'opérateur associé L est alors autoadjoint positif et compact. Soit $\{\varphi_n\}$ une base hilbertienne de fonctions propres, et soient λ_n les valeurs propres associées :

$$\int_X K(x, y) \varphi_n(y) \mu(dy) = \lambda_n \varphi_n(x).$$

9.4.1 Théorème (Mercer) *Soit K un noyau continu hermitien de type positif.*

(i) *Pour $x, y \in X$*

$$K(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varphi_n(x) \overline{\varphi_n(y)},$$

la convergence étant absolue et uniforme sur $X \times X$.

(ii) *L'opérateur L est nucléaire et*

$$\mathrm{tr}(L) = \int_X K(x, x) \mu(dx).$$

Pour un tel noyau la définition de Det $(\lambda I - K)$ que nous avons donnée dans la section 2 et la définition de $\det(I - \lambda L)$ que nous venons de donner coïncident :

$$\text{Det } (I - \lambda K) = \det(I - \lambda L).$$

Références

I. Fredholm. Sur une classe d'équations fonctionnelles, Acta. Math. 27 (1903) 365–390.

R. Courant, D. Hilbert. Methods of Mathematical Physics, Vol.1. Interscience Publishers, 1962.

E. Goursat. Cours d'analyse mathématiques, Tome III. Gauthiers-Villars.

M. Reed, B. Simon. Methods of modern mathematical physics, Tome IV. Academic Press.

S. Smithies. Integral equations, Cambridge Univ. Press, 1965.

Chapitre 10

ASYMPTOTIQUE DES PROBABILITÉS $A_n(m, B)$

10.1 Les probabilités $A_n(m, B)$

On se place dans les hypothèses de la section 3 du chapitre 3, et on utilise les notations qui y ont été introduites. Soit B un ensemble borélien borné de $\mathbb{R}$. Pour $0 \leq m \leq n$ on note $A_n(m, B)$ la probabilité pour que la matrice hermitienne x ait exactement m valeurs propres dans B. Pour $m = 0$, c'est la probabilité pour que B soit un 'trou' dans le spectre de x.

10.1.1 Proposition

$$A_n(0, B) = \text{Det}_{\,B}(I - K_n),$$

où l'indice B signifie que le noyau K_n,

$$K_n(s, t) = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_k(s)\varphi_k(t),$$

est restreint à $B \times B$.

Démonstration.

Soit χ la fonction caractéristique de B. Alors

$$A_n(0, B) = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^{n} \big(1 - \chi(\lambda_j)\big) q_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) d\lambda_1 \ldots d\lambda_n.$$

Plus généralement nous allons calculer

$$A(z) = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^{n} \big(1 - z\chi(\lambda_j)\big) q_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) d\lambda_1 \ldots d\lambda_n.$$

Les fonctions symétriques élémentaires sont notées $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$,

$$\begin{aligned} \sigma_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) &= \alpha_1 + \cdots \alpha_n, \\ \sigma_2(\lambda_1, \ldots, \alpha_n) &= \sum_{i<j} \alpha_i \alpha_j, \\ &\ldots \\ \sigma_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) &= \alpha_1 \ldots \alpha_n. \end{aligned}$$

De la relation

$$\prod_{j=1}^{n} (1 - z\alpha_i) = 1 - \sigma_1 z + \sigma_2 z^2 + \cdots + (-1)^n \sigma_n z^n.$$

on déduit que

$$\prod_{j=1}^{n} \big(1 - z\chi(\lambda_j)\big) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^n z^k \sigma_k \big(\chi(\lambda_1), \ldots, \chi(\lambda_n)\big).$$

Calculons maintenant l'intégrale de chacun des termes de cette somme. En tenant compte de la symétrie de la fonction q_n nous obtenons

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^n} \sigma_k \big(\chi(\lambda_1), \ldots, \chi(\lambda_n)\big) q_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) d\lambda_1 \ldots d\lambda_n \\ = &\binom{n}{k} \int_{\mathbb{R}^n} \chi(\lambda_1) \ldots \chi(\lambda_k) q_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) d\lambda_1 \ldots d\lambda_n, \end{aligned}$$

qui peut s'écrire à l'aide de la fonction de corrélation R_k

$$= \frac{1}{k!} \int_{B^k} R_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) d\lambda_1 \ldots d\lambda_k.$$

On obtient finalement en utilisant une formule établie dans la démonstration du théorème 3.2.2 :

$$\begin{aligned} A(z) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} z^k \int_{B^k} K_n \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & \lambda_k \\ \lambda_1 & \ldots & \lambda_k \end{pmatrix} d\lambda_1 \ldots d\lambda_k \\ &= \operatorname{Det}_B (I - zK_n). \end{aligned}$$

10.1.2 Proposition

$$A_n(m,B) = \frac{1}{m!}\Big(-\frac{d}{dz}\Big)^m \text{Det}\,_B(I - zK_n)\Big|_{z=1}.$$

Démonstration.

Cette probabilité s'écrit

$$A_n(m,B) = \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\sum_E \prod_{i\in E} \chi(\lambda_i) \prod_{j\notin E} \big(1 - \chi(\lambda_j)\big)\Big) q_n(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) d\lambda_1 \ldots \lambda_n,$$

où E parcourt l'ensemble des parties de m éléments de $\{1,\ldots,n\}$. D'autre part on peut établir la formule

$$\Big(-\frac{d}{dz}\Big)^m \prod_{i=1}^n (1 - z\alpha_i) = m! \sum_E \prod_{i\in E} \alpha_i \prod_{j\notin E} (1 - z\alpha_j).$$

Le résultat annoncé s'en déduit.

□

10.2 Polynômes et fonctions d'Hermite

Le polynôme d'Hermite H_n est défini par

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \Big(\frac{d}{dx}\Big)^n e^{-x^2} = 2^n x^n + \cdots$$

Rappelons que les polynômes d'Hermite sont orthogonaux relativement à la mesure $\mu(dx) = e^{-x^2} dx$:

$$\int_{\mathbb{R}} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = 0 \text{ si } m \neq n,$$

et que

$$d_n = \int_{\mathbb{R}} H_n(x)^2 e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi}.$$

Du développement de Taylor de la fonction $f(x) = e^{-x^2}$,

$$f(x-t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} (-t)^n = e^{-x^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x),$$

on déduit l'évaluation de la fonction génératrice

$$w(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}H_n(x)=e^{2xt-t^2}.$$

Ainsi

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}H_n(x)=\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(2x)^j}{j!}t^j\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-t^2)^k}{k!}\Big),$$

et par suite

$$H_n(x)=\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\frac{n!}{k!(n-2k)!}(2x)^{n-2k}.$$

De cette expression on déduit que

$$H_n'(x)=2nH_{n-1}(x).$$

Notons que

$$H_{2n}(0)=(-1)^n\frac{(2n)!}{n!},\quad H_{2n+1}(0)=0,$$

et que

$$H_{2n}'(0)=0,\quad H_{2n+1}'(0)=2(-1)^n\frac{(2n+1)!}{n!}.$$

La fonction génératrice vérifie l'équation difféentielle

$$\frac{\partial w}{\partial t}=(2x-2t)w.$$

Par suite

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n-1}}{(n-1)}H_n(x)-2x\sum_{n=0}\frac{t^n}{n!}H_n(x)+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+1}}{n!}H_n(x)=0.$$

En considérant le coefficient de t^n on obtient

$$H_{n+1}(x)-2xH_n(x)+2nH_{n-1}(x)=0.$$

La fonction d'Hermite φ_n est définie par

$$\varphi_n(x)=\frac{1}{\sqrt{d_n}}e^{-\frac{x^2}{2}}H_n(x).$$

Les fonctions d'Hermite constituent une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$. Le noyau de Christoffel-Darboux est défini par

$$K_n(x,y)=\sum_{k=0}^{n-1}\varphi_k(x)\varphi_k(y)=e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{d_k}H_k(x)H_k(y).$$

10.2.1 Proposition

$$
\begin{aligned}
K_n(x,y) &= \sqrt{\frac{n}{2}}\frac{\varphi_n(x)\varphi_{n-1}(y)-\varphi_{n-1}(x)\varphi_n(y)}{x-y}, \\
K_n(x,x) &= n\varphi_{n-1}(x)^2 - \sqrt{n(n-1)}\varphi_n(x)\varphi_{n-2}(x).
\end{aligned}
$$

Démonstration.

D'après la proposition 1.4.2

$$K_n(x,y) = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\frac{\alpha_{n-1}}{d_{n-1}}\frac{H_n(x)H_{n-1}(y)-H_{n-1}(x)H_n(y)}{x-y}.$$

Pour les polynômes d'Hermite, d'après ce qui précède, $\alpha_n = 1$, $d_n = 2nd_{n-1}$. La première formule annoncée s'en déduit. La proposition 1.4.2 indique aussi que

$$K_n(x,x) = e^{-x^2}\frac{\alpha_{n-1}}{d_{n-1}}\big(H_n'(x)H_{n-1}(x) - H_n(x)H_{n-1}'(x)\big).$$

En utilisant la relation

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x)$$

on obtient la deuxième formule annoncée.

□

10.3 Comportement asymptotique des fonctions d'Hermite

Nous allons déterminer le comportement de $\varphi_n(x)$ lorsque n tend vers l'infini et x vers 0 de telle sorte que $x\sqrt{n}$ ait une limite. Pour cela nous allons utiliser le fait que la fonction φ_n vérifie une équation différentielle linéaire du second ordre.

10.3.1 Proposition *La fonction d'Hermite φ_n est solution de l'équation différentielle*

$$u'' + (2n+1)u = x^2u.$$

Démonstration.

On sait que

$$
\begin{aligned}
&H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0, \\
&H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x),
\end{aligned}
$$

donc

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + H_n'(x) = 0.$$

En dérivant cette relation on parvient à

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0.$$

En écrivant

$$H_n(x) = \sqrt{d_n}e^{\frac{x^2}{2}}\varphi_n(x),$$

on parvient à

$$\varphi_n''(x) + (2n+1)\varphi_n(x) = x^2\varphi_n(x).$$

$\square$

10.3.2 Proposition

$$\varphi_n(x) = \alpha_n \cos\big(\sqrt{2n+1}x - n\frac{\pi}{2}\big) + r_n(x),$$

avec

$$|r_n(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}|x|^{5/2}.$$

Si $n = 2m$,

$$\alpha_{2m} = \varphi_{2m}(0) = \frac{(2m)!}{m!}\frac{1}{\sqrt{d_{2m}}},$$

et si $n = 2m+1$,

$$\alpha_{2m+1} = \varphi_{2m+1}'(0)\frac{1}{\sqrt{4m+3}} = 2\frac{(2m+1)}{m!}\frac{1}{\sqrt{d_{2m+1}}}\frac{1}{\sqrt{4m+3}}.$$

Quand n *tend vers l'infini*

$$\alpha_n \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Big(\frac{2}{n}\Big)^{\frac{1}{4}}.$$

Démonstration.

Soit u une solution de

$$u'' + (2n+1)u = x^2u.$$

Posons $g(x) = x^2u(x)$. En résolvant l'équation différentielle à coefficients constants

$$u'' + (2n+1)u = g(x),$$

on obtient

$$\begin{aligned} u(x) &= u(0)\cos\big(\sqrt{2n+1}x\big) + u'(0)\frac{\sin\big(\sqrt{2n+1}x\big)}{\sqrt{2n+1}} \\ &\quad + \int_0^x \frac{\sin\big(\sqrt{2n+1}(x-y)\big)}{\sqrt{2n+1}} g(y)dy. \end{aligned}$$

Notons $r(x)$ cette intégrale. D'après l'ingalité de Schwarz

$$|r(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}\Big(\int_0^x y^4\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_0^x u(y)^2 dy\Big)^{\frac{1}{2}},$$

et, si u est de carré intégrable,

$$|r(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\Big(\int_0^\infty u(y)^2 dy\Big)^{1/2}|x|^{\frac{5}{2}}.$$

La proposition s'en déduit. L'estimation de α_n s'obtient en utilisant la formule de Stirling,

$$n! \sim \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}.$$

Chemin faisant on obtient l'équivalent

$$d_n \sim \pi(2n)^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}.$$

□

10.4 Comportement asymptotique des probabilités $A(m, B)$

On considère la mesure de probabilité définie sur H_n par

$$\mathbb{P}(dx) = \frac{1}{a_n} e^{-\mathrm{tr}(x^2)} m(dx),$$

c'est à dire que, avec les notations de la première section de ce chapitre,

$$Q(t) = t^2.$$

Rappelons que $A_n(m, B)$ est la probabilité pour que la matrice hermitienne x ait m valeurs propres dans l'ensemble borélien $B \subset \mathbb{R}$. Soit $\mathcal{K}$ le noyau défini par

$$\mathcal{K}(\xi, \eta) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin(\xi - \eta)}{\xi - \eta}.$$

10.4.1 Théorème *Soit $B \subset \mathbb{R}$ un ensemble borélien borné.*

$$\lim_{n\to\infty} A_n\Big(0, \frac{1}{\sqrt{2n}}B\Big) = \mathrm{Det}\ _B(I - \mathcal{K}).$$

Démonstration.

D'après la proposition 10.2.1,

$$A_n\Big(0, \frac{1}{\sqrt{2n}}B\Big) = \mathrm{Det}\ _{\frac{1}{\sqrt{2n}}B}(I - K_n),$$

et, d'après la proposition 9.2.6,

$$\mathrm{Det}\ _{\frac{1}{\sqrt{2n}}B}(I - K_n) = \mathrm{Det}\ _B(I - \tilde{K}_n),$$

où

$$\tilde{K}_n(\xi, \eta) = K_n\Big(\frac{1}{\sqrt{2n}}\xi, \frac{1}{\sqrt{2n}}\eta\Big)\frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

D'après la proposition 10.3.1,

$$\begin{aligned}&\tilde{K}_n(\xi, \eta)\\ =\ &\sqrt{\frac{n}{2}}\frac{1}{\xi - \eta}\bigg(\varphi_n\Big(\frac{1}{\sqrt{2n}}\xi\Big)\varphi_{n-1}\Big(\frac{1}{\sqrt{2n}}\eta\Big) - \varphi_{n-1}\Big(\frac{1}{\sqrt{2n}}\xi\Big)\varphi_n\Big(\frac{1}{\sqrt{2n}}\eta\Big)\bigg).\end{aligned}$$

De la proposition 10.4.2 il résulte que

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{K}_n(\xi, \eta) = \mathcal{K}(\xi, \eta),$$

et qu'il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\forall n,\ |\tilde{K}_n(\xi, \eta)| \le M.$$

Ainsi, d'après la proposition 9.2.5,

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Det}\ _B(I - \tilde{K}_n) = \mathrm{Det}\ _B(I - \mathcal{K}).$$

□

10.4.2 Corollaire *Soit B un ensemble borélien borné de $\mathbb{R}$.*

$$\lim_{n\to\infty} A_n\Big(m, \frac{1}{\sqrt{2n}}B\Big) = \frac{1}{m!}\Big(-\frac{d}{dz}\Big)^m \mathrm{Det}\ _B(I - z\mathcal{K})\Big|_{z=1}.$$

Démonstration.

D'après la proposition 10.1.2

$$A_n\Big(m, \frac{1}{\sqrt{2n}}B\Big) = \frac{1}{m!}\Big(-\frac{d}{dz}\Big)^m \text{Det}\ _{\frac{1}{\sqrt{2n}}B}(I - zK_n)\Big|_{z=1}.$$

Et d'après la proposition 9.2.6,

$$\text{Det}\ _{\frac{1}{\sqrt{2n}}B}(I - zK_n) = \text{Det}\ _B(I - z\tilde{K}_n).$$

Puisque

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{K}(\xi,\eta) = \mathcal{K}(\xi,\eta),$$

et qu'il existe une constante M telle que

$$\forall n,\ |\tilde{K}_n(\xi,\eta)| \leq M,$$

il résulte de la proposition 9.2.5 que, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\lim_{n\to\infty} \text{Det}\ _B(I - z\tilde{K}_n) = \text{Det}\ _B(I - z\mathcal{K}),$$

la convergence étant uniforme sur tout compact de $\mathbb{C}$. Par suite

$$\lim_{n\to\infty}\Big(-\frac{d}{dz}\Big)^n \text{Det}\ _B(I - z\tilde{K}_n)\Big|_{z=1} = \Big(-\frac{d}{dz}\Big)^n \text{Det}\ _B(I - z\mathcal{K})\Big|_{z=1}.$$

□

Le noyau $\mathcal{K}$ est de type positif. C'est en effet la limite des noyaux $\tilde{K}_n$ qui sont de type positif. On peut aussi le voir directement. En effet

$$\frac{\sin\xi}{\xi} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{it\xi}dt,$$

et par suite

$$\sum_{j,k=1}^{N} \mathcal{K}(\xi_j,\xi_k)c_j\bar{c}_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} \Big|\sum_{j=1}^{N} e^{it\xi_j}c_j\Big|^2 dt \geq 0.$$

Prenons $B = [-\theta,\theta]$ $(\theta > 0)$. L'opérateur L défini sur $L^2([-\theta,\theta])$ par

$$Lf(\xi) = \int_{-\theta}^{\theta} \mathcal{K}(\xi,\eta)f(\eta)d\eta$$

est autoadjoint positif et compact. Notons

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq \alpha_k \geq \cdots \geq 0$$

ses valeurs propres (chacune étant répétée un nombre de fois égal à la dimension du sous-espace propre correspondant). L'opérateur L est même nucléaire, donc

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k < \infty.$$

Le déterminant de Fredholm de $\mathcal{K}$ s'exprime à l'aide des valeurs propres de L :

$$\mathrm{Det}_{\,[-\theta,\theta]}(I - z\mathcal{K}) = \det(I - zL) = \prod_{k=1}^{\infty}(1 - z\alpha_k).$$

Par suite

$$\lim_{n\to\infty} A_n\Big(0, \big[-\frac{1}{\sqrt{2n}}\theta, \frac{1}{\sqrt{2n}}\theta\big]\Big) = \prod_{k=1}^{\infty}(1 - \alpha_k).$$