Université Paris Diderot – Paris 7 30/10/2018
U.F.R. de Mathématiques B. Keller et J.-Y. Ducloux

**M2 Mathématiques Fondamentales**
**Algèbres de Lie semi-simples complexes I**

**Examen**

*Avertissement : Les documents, calculettes et portables sont interdits. Pour avoir une très bonne note, il n'est pas nécessaire de répondre à toutes les questions. On travaille sur le corps $k = \mathbb{C}$.*

1) *Questions de cours.*

   a) Définir la notion d'algèbre de Lie.
   b) Définir la notion de $\mathfrak{g}$-module pour une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.
   c) Définir la notion de morphisme entre algèbres de Lie.
   d) Définir la notion d'algèbre de Lie résoluble. Par quelles opérations la classe des algèbres résolubles est-elle stable ?
   e) Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ deux idéaux résolubles. Montrer que $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ est résoluble. Indication : on pourra relier $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})/\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{a}/(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$.
   f) Définir, sous l'hypothèse que $\mathfrak{g}$ est de dimension finie, le radical $\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$ et la notion d'algèbre de Lie semi-simple. Montrer que $\mathfrak{g}/\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ est semi-simple.
   g) Enoncer le théorème de Weyl.

2) Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie complexe de dimension finie et $\mathfrak{r}$ son radical. On se propose de montrer qu'il existe une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{g}$ telle que $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{r}$ (théorème de Levi).

   a) Montrer que si $\mathfrak{s}$ existe, elle est semi-simple.
   b) Dans le cas où $\mathfrak{r} = 0$, la sous-algèbre $\mathfrak{s} = \mathfrak{g}$ convient. On procède par récurrence sur la dimension $n$ de $\mathfrak{r}$ en supposant la conclusion du théorème de Levi réalisée pour toute algèbre de Lie dont le radical est de dimension $< n$.

      Premier cas : supposons qu'il existe un idéal $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{r}$ de $\mathfrak{g}$ tel que $0 \neq \mathfrak{a} \neq \mathfrak{r}$. Montrer qu'il existe une sous-algèbre $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$ telle que $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{r} = \mathfrak{a}$, $\mathfrak{b} + \mathfrak{r} = \mathfrak{g}$ et $\mathfrak{b}/\mathfrak{a}$ est semi-simple.
   c) Montrer que le radical de $\mathfrak{b}$ est $\mathfrak{a}$. Déduire qu'il existe une sous-algèbre $\mathfrak{s}$ dans $\mathfrak{b}$ telle que $\mathfrak{b} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{a}$. Montrer que $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{r}$.
   d) 2e cas : supposons que le centre $\mathfrak{c}$ de $\mathfrak{g}$ est égal à $\mathfrak{r}$. Montrer que la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ est semi-simple et que, si $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{g}$ est un sous-module supplémentaire de $\mathfrak{r}$, alors $\mathfrak{s}$ est une sous-algèbre telle que $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{r}$.
   e) 3e cas : à partir de maintenant, on suppose que $\mathfrak{r} \neq 0$, que les seuls idéaux de $\mathfrak{g}$ contenus dans $\mathfrak{r}$ sont $0$ et $\mathfrak{r}$ et que $\mathfrak{r}$ est différent de $\mathfrak{c}$. Montrer que $[\mathfrak{r}, \mathfrak{r}] = 0$ et que le centre $\mathfrak{c}$ de $\mathfrak{g}$ est égal à $0$.

f) Soit $M$ l'espace des applications linéaires $u : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ telles que $u(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{r}$ et que la restriction de $u$ à $\mathfrak{r}$ est la multiplication par un scalaire qu'on note $\lambda(u)$. Soit $N \subset M$ le sous-espace formé des $u$ tels que $\lambda(u) = 0$. Indiquer pourquoi $N$ est de codimension 1 dans $M$. Soit $P$ l'image de $\mathfrak{r}$ par la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$. Montrer que $P \subseteq N$.

g) Soit $\sigma$ la représentation de $\mathfrak{g}$ dans l'espace $\mathrm{Hom}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ des applications linéaires de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}$ déduite de la représentation adjointe. Vérifier que

$$\sigma(X)(u) = [\mathrm{ad}(X), u]$$

pour $X \in \mathfrak{g}$ et $u \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$. Montrer que $\sigma(\mathfrak{g})M \subseteq N$ et que $\sigma(\mathfrak{g})P \subseteq P$. En particulier, les espaces $M$, $N$ et $P$ sont des $\mathfrak{g}$-sous-modules de $\mathrm{Hom}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$.

h) Montrer que pour $X \in \mathfrak{r}$, $Y \in \mathfrak{g}$ et $u \in M$, on a

$$(\sigma(X)u)(Y) = -\lambda(u)[X, Y] \tag{1}$$

de façon qu'on a $\sigma(\mathfrak{r})M \subseteq P$.

i) Montrer que le $\mathfrak{g}$-module $M/P$ est semi-simple et que le quotient $(M/P)/(N/P) = M/N$ est la représentation triviale.

j) Montrer qu'il existe $u_0 \in M$ tel que $\lambda(u_0) = -1$ et $\sigma(\mathfrak{g})u_0 \subseteq P$.

k) Montrer que pour tout $X \in \mathfrak{g}$, il existe un unique $\psi(X) \in \mathfrak{r}$ tel que $\sigma(X)u_0 = \mathrm{ad}\psi(X)$. Montrer que $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{r}$ est linéaire et que $\psi(X) = X$ pour tout $X \in \mathfrak{r}$.

l) Montrer que $\mathfrak{s} = \ker \psi$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ telle que $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{r}$.